arXiv:2303.18029v1 [math.CO] 31 Mar 2023

全路径凸性：组合与复杂性方面

F´abio Protti[1]计算机科学研究所 - 弗卢米嫩塞联邦大学 - 巴西
电子邮箱：fabio@ic.uff.br

Jo˜ao V. C. Thompson 塞尔索·苏科夫·达丰塞卡联邦技术教育中心 CEFET/RJ - 佩特罗波利斯校区 - 巴西 电子邮箱：joao.thompson@cefet-rj.br

摘要。 设 $\mathscr{P}$ 为图 $G = (V, E)$ 的任意路径集。对于$S \subseteq V$，定义 $I(S)$: $= S \cup \{v \mid v$ 属于 $\mathscr{P}$ 中一条端点位于 $S\}$ 的路径。设 $\mathcal{C}$ 为函数 I 的不动点集，即 $\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid I(S) = S\}$。众所周知，$(V, \mathcal{C})$ 是一个有限凸性空间，其中 $\mathcal{C}$ 的元素恰好是凸集。若将 $\mathscr{P}$ 取为 G 的所有路径构成的集合，则 $(V, \mathcal{C})$ 是相对于图 G 的全路径凸性 。本文研究图凸性中的重要参数和问题如何在全路径凸性下求解。

关键词： 全路径凸性、图凸性、路径凸性

1 引言

设 $G = (V, E)$ 是一个简单、有限、非空且连通的图，并设 $\mathcal{C}$ 是 V 的子集族。若满足：(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$；(b) $V \in \mathcal{C}$；(c) $\mathcal{C}$ 对交运算封闭，则称 $(V, \mathcal{C})$ 为一个（有限）图凸性空间 。在许多研究中，集合族 $\mathcal{C}$ 按如下方式确定。设 $\mathscr{P}$ 是图 G 的任意路径族，并且对于 $S \subseteq V$，定义

$$I(S) = S \cup \{v \mid v \text{ lies in a path of } \mathscr{P} \text{ with endpoints in } S\}.$$

将 $\mathcal{C} \subseteq 2^V$ 定义为函数 I的不动点集合，也就是说，$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid I(S) = S\}$。那么很容易看出，$(V, \mathcal{C})$ 是一个图凸性空间，通常称为“路径凸性”。特别地，如果 $\mathscr{P}$ 恰好包含 G 的所有最短路径，那么相应的凸性空间就是关于 G [18, 19, 22]的著名测地凸性；如果 $\mathscr{P}$是 G 的诱导路径集合，那么相应的凸性空间就是关于 G [12, 15]的单调凸性；此外，文献中还有许多其他示例如下文所述，每种情况下我们都会指出所考虑的是 G 的哪一类路径集合 $\mathscr{P}$：

[1]部分获 CNPq 和 FAPERJ（巴西研究机构）资助

– g^3-凸性 [23]：长度至少为三的最短路径；– m^3-凸性 [3, 14]：长度至少为三的诱导路径；– g_k-凸性 [16]：长度至多为 k的最短路径；– P_3-凸性 [4, 13, 24]：长度为二的路径；– P_3^*-凸性 [1]：长度为二的诱导路径；– 三角路径凸性 [6, 7]：仅允许出现三角弦的路径；– 全凸性 [11]：仅允许出现非三角弦的路径；– 绕行凸性 [8, 9, 10]：最长路径。

在本文中，我们研究全路径凸性，它与 $\mathscr{P}$ 的所有路径的集合相关。我们的研究集中于解决图凸性中针对全路径凸性这一特定情形的若干重要问题，包括确定一些众所周知的图凸性参数，例如 G的凸性数、区间数和包数。本文其余部分的组织如下：第 2 节介绍一些必要的背景知识；第 3 节给出本文的主要结果；最后，第 4 节包含我们的结论性评述。

2 预备知识

在本文中，$G = (V, E)$始终表示一个具有 n 个顶点和 m 条边的有限、简单、非空且连通图。设 G的路径集合为 $\mathscr{P}$，并令 $I_{\mathscr{P}} : 2^V \to 2^V$ 为一个与 $\mathscr{P}$相关联的函数（区间函数），其定义如下：

$$I_{\mathscr{P}}(S) = S \cup \{v \mid v \text{ lies in a path } P \in \mathscr{P} \text{ with endpoints in } S\}.$$

定义 $\mathcal{C}_{\mathscr{P}}$ 为 V的子集族，使得当且仅当$I_{\mathscr{P}}(S) = S$时，$S \in \mathcal{C}_{\mathscr{P}}$。那么很容易看出，$(V, \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ 是一个有限凸性空间，其凸集恰好是 $I_{\mathscr{P}}$ 的不动点。

命题 1. [26] $(V, \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ 是一个有限凸性空间。

如果 $\mathscr{P}$ 是 G的所有路径构成的集合，那么 $(V, \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ 是关于 G的全路径凸性。为简化记号，如果上下文清楚，我们省略下标 $\mathscr{P}$。

在这项工作中，我们聚焦于图中的凸性领域通常研究的七个重要问题，并针对全路径凸性情形对其进行求解。我们还需要一些额外定义。设 $S \subseteq V$。如果$I(S) = V$，那么 S是一个区间集。S的凸包 $H(S)$是包含 S的最小

凸集。记作 $I^0(S) = S$，并对 $i \geq 0$定义 $I^{i+1}(S) = I(I^i(S))$。注意， $I(S) = I^1(S)$，并且存在一个指标 i，使得$H(S) = I^i(S)$。如果 $H(S) = V$，那么 S 是一个凸包集。G 的凸性数$c(G)$是最大凸集 $S \neq V$的大小。 G 的区间数$i(G)$是最小区间集 G的大小。 G 的包数$h(G)$是最小凸包集 G的大小。显然， $h(G) \leq i(G)$。图 G的测地迭代数记为 $gin(G)$，它是满足对每个 $S \subseteq V(G)$都有 $H(S) = I^i(S)$的最小 i。等价地，对于每个 $S \subseteq V(G)\}$，$gin(G) = \min\{i \mid I^i(S) = I^{i+1}(S)$。测地迭代数至多为 1 的图称为区间单调图

现在我们可以陈述本文所研究的问题：

- Convex Set输入：一个图 G 和一个集合 $S \subseteq V$。问题： S 是凸的吗?
- Interval Determination 输入：一个图 G 和一个集合 $S \subseteq V$。目标：确定 $I(S)$。
- Convex Hull Determination输入：一个图 G。目标：确定 $H(S)$。
- Convexity Number 输入：一个图 G。目标：确定 $c(G)$。
- Interval Number输入：一个图 G。目标：确定 $i(G)$。
- Hull Number 输入：一个图 G。目标：确定 $h(G)$。
- Geodetic Iteration Number 输入：一个图 G。目标：确定 $gin(G)$。

3 主要结果

本节给出前一节所述问题在全路径凸性情形下的解。对于 X， $Y \subseteq V$，记$N(X, Y) = \{v \in Y \mid v$是某个 $x \in X\}$的邻居。

定理 2. 设 $S \subseteq V$。那么， S 在全路径凸性下是凸的，当且仅当 $S = V$，或者对于 $G - S$ 的每个连通分量 G_i，都有

$$|N(V(G_i), S)| = 1.$$

证明。假设 S 是凸的，且 $S \neq V$，令 G_i 为 $G - S$ 的一个连通分量。如果 $|N(V(G_i)\ S)| \geq 2$，那么存在互不相同的 $v, w \in S$，其邻居为 $v', w' \in V(G_i)$（不一定互不相同）。令 $P' = v' \dots w'$ 为 v' 到 w' 在 G_i 中的一条路径（由于 G_i 是连通的，这样的路径存在）。有时， P' 只由单个顶点 $v' = w'$ 构成。现在，令 P 为路径 $vP'w = vv' \dots w'w$。这意味着 v'（或 w'）位于一条端点在 S 中的路径上，即 $v' \in I(S)$。由于 $v' \notin S$，这意味着 $I(S) \neq S$，这与 S 是凸的假设矛盾。

反之，假设对于 $G - S$ 的每个连通分支，都有 $S \neq V$和 $|N(V(G_i)\ S)| = 1$。反设 S 不是凸集。根据凸集的定义，存在一条路径 $P = v_1 v_2 \dots v_k$，其（不同的）端点位于 S 中，并且包含 S 之外的顶点。令 j 为满足 $v_j \in S$ 和 $v_{j+1} \notin S$ 的最小索引，并假设 $v_{j+1} \in V(G_i)$。由于这些 G_i 彼此孤立（即，对于 $i \neq k$，不存在连接 G_i 中的顶点与 G_k 中顶点的边 E），令 l 为满足 $l > j$ 和 $v_l \in S$ 的最小索引（换言之，在访问 G_i 后，路径 P 必须返回 S，然后才能访问另一个分支 G_k）。因此， $v_j, v_l \in N(V(G_i)\ S)$。但是，由于 P 是一条路径， $j \neq l$。于是 $|N(V(G_i)\ S)| \geq 2$，矛盾。因此， S 是凸集。 □

推论 3. Convex Set 可以在 $O(n+m)$ 时间内解决全路径凸性问题。

证明。若 $S \neq V$，则可以在 $O(n+m)$ 时间内轻松计算出 $G - S$ 的连通分量。此外，也可以在 $O(n+m)$ 时间内检查每个连通分量 G_i 是否满足 $|N(V(G_i)\ S)| = 1$。因此，推论得证。 □

现在我们处理 Interval Determination 问题。考虑 G 的块分解，并用块割树 T_G表示； T_G 的每个顶点都对应于一个块 B_j （ G的一条割边或一个极大 2-连通子图）或一个割点 $z_i \in V$。每当块 B_j包含割点 $z_i \in V$时， T_G 中连接对应块 B_j 和割点 z_i 的顶点之间就有一条边。根据定义，与 G 的块对应的 T_G 中的顶点构成一个独立集，与 G的割点对应的 T_G 中的顶点也同样如此。此外， T_G 的每个叶节点都代表 G的一个块。 G 的端块 是与 T_G的叶节点对应的块。

对于集合 $S \subseteq V$，令 T_S 为 T_G 的极大子树，使得 T_S 的每个叶节点都对应于 G 的一个块，该块包含 S 中的一个顶点，而该顶点不是由 $\cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$诱导的子图 G_S 中的割点。图1给出了一个例子。

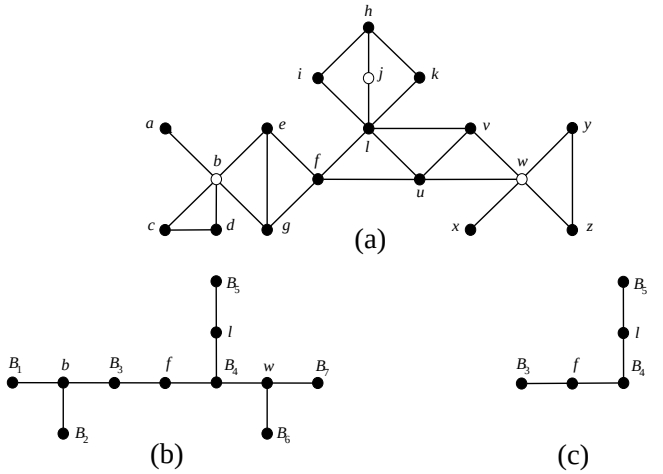


图1：（a）一个图 G 和一个集合 $S = \{b, j, w\}$（由白色顶点表示），其块满足 $V(B_1) = \{a, b\}$、$V(B_2) = \{b, c, d\}$、$V(B_3) = \{b, e, g, f\}$、$V(B_4) = \{f, l, u, v, w\}$、$V(B_5) = \{h, i, j, k, l\}$、$V(B_6) = \{w, x\}$、$V(B_7) = \{w, y, z\}$；（b）块割树 T_G；（c） T_G 的子树 T_S。块 B_3 是 T_S 的叶节点，因为它不包含由 $V(B_3) \cup V(B_4) \cup V(B_5)$ 诱导的图 G_S 中的任何割点。

引理 4。设 $S \subseteq V$，且令 u、w 为 S 中属于 T_S 的块 B_u 和 B_w 的两个不同顶点。假设 u 和 w 不是 G_S 中的割点。令 $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \ldots z_{k-1} B_{j_k}$ 为 T_S 中连接 $B_{j_1} = B_u$ 和 $B_{j_k} = B_w$ 的一条路径。那么，对于每个 $v \in \cup_{i=1}^{k} V(B_{j_i})$，存在一条 G 中从 u 到 w 且经过 v 的路径 P。

证明。如果 $B_u = B_w$ 且存在一个顶点 $v \in V(B_u) \setminus \{u, w\}$，根据扇引理（[2], 中的命题 9.5，应用于 2-连通图），存在一条路径 P，从 u 到 w 并经过 v。

如果 $B_u \neq B_w$，则按如下方式从 $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \ldots z_{k-1} B_{j_k}$ 构造 G 中的一条路径 P。令 $v \in \cup_{i=1}^{k} V(B_{j_i})$，首先假设 v 不是G_S中的割点。假设对于某个 $1 < s < k$ 有 $B_v = B_{j_s}$（$s = 1$ 或 $s = k$的情形类似）。

– 设 P_1 是一条包含于 B_{j_1} 中、起点为 u、终点为 z_1 的路径。

– 设 P_s 是一条包含于 B_{j_s} 中、起点为 z_{s-1}、经过 v、终点为 z_s 的路径。由于 v 不是 G_S 的割点，块 B_{j_s} 至少包含三个顶点。因此，扇引理保证了路径 P_s 的存在。– 设 P_i、 $2 \leq i \leq k-1$、 $i \neq s$ 是一条包含于 B_{j_i} 中、起点为 z_{i-1} 、终点为 z_i 的路径。– 最后，设 P_k 是一条包含于 B_{j_k} 中、起点为 z_{k-1} 、终点为 w 的路径。

现在，将 P定义为 $P_1P_2 \ldots P_k$ 的连接（移除连续出现的重复顶点）。于是， P 是从 u 到 w 且经过顶点 v的一条路径。

v 是 G_S 的割点的情形可以类似处理。在这种情况下，无需对 B_{j_s}应用扇引理。 P_s 可以直接取为从 z_{s-1} 到 z_s的一条路径，因为 $v \in \{z_{s-1}, z_s\}$。 □

设 $S \subseteq V$ 和 $v \in V \setminus S$。如果在图 $G - z$中，包含 v的连通分量不包含 V'中的任何顶点，则称顶点 $z \neq v$ 分离 v 和$V' \subseteq V \setminus \{v\}$ 。

定理5。 设 $S \subseteq V$ 且 $|S| \geq 2$。则

$$I(S) = \bigcup_{B_j \in V(T_S)} B_j.$$

证明。设 $v \in \cup_{B_j \in V}$ (T_S) B_j。如果 $v \in S$ ，则 $v \in I$ (S) 。如果 $v \notin S$，考虑包含 v的一个块 B_v 。显然，在 T_S中存在一条包含 B_v的极大路径 $P_v = B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \ldots z_{k-1} B_{j_k}$。因此， $v \in \cup_{i=1}^{k} V$ (B_{j_i}) 。由 P_v的极大性， B_{j_1} 和 B_{j_k} 是 T_S中的叶，这意味着B_{j_1} 包含一个顶点 $u \in S$ ，而 B_{j_k} 包含一个顶点 $w \in S$ $w \neq u$，使得 u 和 w 不是 G_S中的割点。于是，根据引理 4，在 G 中存在一条从 u 到 w 且经过 v的路径 P。因此， $v \in I$ (S) ，即$\cup_{B_j \in V}$ (T_S) $B_j \subseteq I$ (S) 。

现在，令 $v \in I(S)$。若 $v \in S$，那么根据 T_S 的定义，显然 $v \in \cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$。于是设 $v \notin S$且$v \notin \cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$。因此， v 位于 T_G 的一个块 B_v 中，而该块不在 T_S 中，这意味着存在一个割点 $z \in V(B_v)$， $z \neq v$，它将 v 与$\cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$ 分隔开。由于$S \subseteq \cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$， z 将 v 与 S 分隔开，因此，从某个 $u \in S$ 到 v 的每条路径都经过 z，也就是说，不可能找到一条从顶点 $u \in S$ 到另一个顶点 $w \in S$ 且经过 v 的路径。这与假设 $v \in I(S)$ 矛盾。因此，$v \in \cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$ 且$I(S) \subseteq \cup_{B_j \in V}(T_S) B_j$。 □

推论6。 Interval Determination 对于全路径凸性，可以在 $O(n+m)$ 时间内求解。

证明。 假设 $|S| \geq 2$（其他情况显而易见）。利用众所周知的算法技术 [20]，可以在 $O(n+m)$ 时间内构造 G 的块割树 T_G。可以按如下方式在 $O(n+m)$ 时间内轻松确定 T_S：初始化 $T_S \leftarrow T_G$，并重复以下过程，直至无法继续为止：若 B_j 是一棵树的叶节点，且该树不包含 S 的顶点，或者恰好包含一个顶点 S，并且该顶点是 G_S 的割点，则从树中移除与 B_j 关联的顶点，以及树中与B_j 相邻的割点 z_i。每次移除需要 $O(|V(B_j)|)$ 时间，因此，从 T_G 构造 T_S 需要 $O(n)$ 时间。最后，计算$\bigcup_{B_j \in V(T_S)} B_j$ 需要$O(n)$ 时间。因此，定理得证。 □

在图1中，对于 $S = \{b, j, w\}$，我们有 $I(S) = V(B_3) \cup V(B_4) \cup V(B_5)$。

引理 7. 设 $S \subseteq V$。那么，在全路径凸性中，$I(S)$ 总是一个凸集。

证明。 假设 $S \neq V$。根据定理5，$I(S) = \cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$。设 $X = \cup_{B_j \notin V(T_S)} B_j$。换言之，$X$ 由属于 G 中那些未在 T_S 中表示的块的所有顶点构成。显然，$I(S) \cap X$ 中的每个顶点都是 G 的割点。也就是说，条件

"$|N(V(G_i) \ I(S))| = 1$ 对于 $G - I(S)$ 的每个连通分量 G_i"

成立。因此，根据定理 2，$I(S)$ 是一个凸集。 □

定理 8. 在全路径凸性中，对于每个 $S \subseteq V$，$H(S) = I(S)$。

证明. 由引理 7 可得。 □

推论 9. 在全路径凸性中，每个图 G 都满足 $gin(G) \leq 1$（即区间单调）。

证明. 由前述定理可得。 □

推论 10. Convex Hull Determination 在全路径凸性下可在 $O(n+m)$时间内求解。

证明. 由推论6和定理 8 可得。 □

推论 11。 Geodetic Iteration Number 可在 O（1） 时间内求解全路径凸性问题。

证明。 由推论 9 可得。 □

现在我们聚焦于 Convexity Number 问题。对于 G的一个端块B_j，令 $|V(B_j)| = b_j$。定义 $b(G) = \min\{b_j \mid B_j$ 是 $G\}$的一个端块。

定理 12. 在全路径凸性中，对于任意图 G ，都有：

$$c(G) = \begin{cases} 1, & if\ |V| = 2\ or\ G\ is\ 2\text{-}connected; \\ n - b(G) + 1, & otherwise. \end{cases}$$

证明。如果 $|V| = 2$ ，那么该定理显然成立。如果 G 是 2-连通的，那么根据扇引理，对于每一对顶点 u、$w \in V$和 $w \neq u$，我们有每个 $v \notin \{u, w\}$ 都位于一条从 u 到 w的路径上。因此，对于每个满足$2 \leq |S| \leq n - 1$的 S ， S 不是凸的。这意味着 $c(G) = 1$。

现在假设 G 不是 2-连通的。注意，由 G 的所有块中除一个端块（记为 B_j）以外的各块的顶点集之并组成的任意 $S \subseteq V$都是凸集，因为唯一属于 $V(B_j)$ 的割点 z 将 $V \setminus V(B_j)$ 的所有顶点与 $V(B_j) \setminus z$分隔开来。（注意 $z \in S$。）因此，从 G 中移除一个大小最小的端块 B_j 中的所有顶点（割点 $z \in V(B_j)$ 除外），即可得到 G 中的最大凸集。 □

推论 13. 对于全路径凸性， Convexity Number 可在 $O(n + m)$ 时间内求解。

证明. 由定理 12 以及可在 $O(n + m)$ 时间内得到 G 的块分解这一事实可得。 □

现在我们终于来考虑问题 Interval Number 和 HullNumber。设 G 的端块数为 $eb(G)$。

定理 14。 在全路径凸性中，对于任意图 G ，均有：

$$i(G) = \begin{cases} 1, & if\ G\ is\ trivial; \\ 2, & if\ |V| = 2\ or\ G\ is\ 2\text{-}connected; \\ eb(G), & otherwise. \end{cases}$$

证明。若 $|V| = 1$ 或 $|V| = 2$ ，则定理显然成立。若 G 是 2-连通的，根据扇引理，任意一对 $u, w \in V$, $w \neq u$ 都是一个区间集，因此在这种情况下 $i(G) = 2$ 。

最后，如果 G 不是 2-连通的，则考虑 $S \subseteq V$，使得对于 G的每个端块 B_j ，$S \cap V(B_j) = \{v_j\}$ ，其中 v_j 不是 G的割点。注意到 $|S| = eb(G)$。 S 的定义意味着 $T_S = T_G$，因此每个顶点 $v \in V$ 都位于 G 的一个块 B_v 中，该块属于 T_S中的一条极大路径 $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \ldots z_{k-1} B_{j_k}$，使得 B_{j_1}和 B_{j_k}是 $G_S = G$ 的端块，并且分别包含顶点 u、$w \in S$、 $w \neq u$，这些顶点不是 $G_S = G$中的割点。根据引理 4， G中存在一条从 u 到 w并经过 v的路径 P 。换言之， S 是一个区间集。为完成证明，如果集合 $S' \subseteq V$ 满足 $|S'| < eb(G)$，那么 G 中至少存在一个端块 B_j ，使得 $V(B_j) \setminus \{z_j\}$ 不包含 S'中的顶点，

其中 z_j 是属于 $V(B_j)$的 G 的割点。因此，$V(B_j)$中的顶点都不能位于一条以 S'中不同顶点为起点和终点的路径 $\setminus\{z_j\}$上，即 S' 不可能是一个区间集。因此， S 是最小的。 □

推论15. 对于全路径凸性，任意图 G 均满足$h(G) = i(G)$。

证明。 由定理 8 可得。 □

推论16. Interval Number 和 Hull Number 可在$O(n+m)$ 时间内针对全路径凸性求解。

4 总结

本文表明，对于全路径凸性，问题 Convex Set、 Interval Determination、 Convex Hull Determination、 Convexity Number、Interval Number 和 Hull Number 均可在 $O(n+m)$ 时间内求解，而 Geodetic Iteration Number 可在 $O(1)$ 时间内求解（所有图相对于全路径凸性均为区间单调）。求解此类问题所用的方法基于图的块分解和块割树。

参考文献

[1] R. T. Araujo、R. M. Sampaio 和 J. L. Szwarcfiter。《三阶诱导路径的凸性》。《离散数学》44 (2013)109–114。

[2] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty。《图论》。Springer，2008。

[3]J. C´aceres、O. R. Oellermann 和 M. L. Puertas。《极小树与单调凸性》。《讨论：数学图论》32(4) (2012) 685–704。[4] C. C. Centeno、S. Dantas、M. C. Dourado、D. Rautenbach 和 J. L. Szwarcfiter。《由三阶路径诱导的图的凸划分》。《离散数学》12(5) (2010) 175–184。[5] M. Changat、S. Klavzar 和 H. M. Mulder。《图的全路径传递函数》。《捷克斯洛伐克数学杂志》51(2) (2001) 439–448。[6] M. Changat 和 J. Mathew。《图中的三角路径凸性》。《离散数学》206 (1999) 91–95。

[7] M. Changat、P. G. Narasimha-Shenoi 和 J. Mathews。《三角形路径传递函数、介于性与伪模图》。《离散数学》309(6) (2009) 1575–1583。[8] M. Changat、P. G. Narasimha-Shenoi 和 I. Pelayo。《图的最长路径传递函数与介于性》。《数学实用论》82 (2010) 111–127。[9] G. Chartrand、H. Escuadro 和 P. Zhang。《图中的绕行距离》。《组合数学杂志、组合计算》52 (2005) 75–94。[10] G. Chartrand、L. Garry 和 P. Zhang。《图的绕行数》。《数学实用论》64 (2003) 97–113。[11] V. Chepoi。《图上的无峰函数》。《离散应用数学》73(2) (1997) 175–189。[12] M. C. Dourado、F. Protti 和 J. L. Szwarcfiter。《与单调凸性相关的复杂性结果》。《离散数学》158 (2010) 1268–1274。[13] M. C. Dourado、D. Rautenbach、V. F. dos Santos、P. M. Sch¨afer、J. L. Szwarcfiter 和 A. Toman。《 P_3-Radon 数的一个上界》。《离散数学》312(16) (2012) 2433–2437。[14] F. F. Dragan、F. Nicolai 和 A. Brandst¨adt。《凸性与无 HHD 图》。《*SIAM* 离散数学杂志》12 (1999) 119–135。[15] P. Duchet。《图中的凸集，II：极小路径凸性》。《组合理论杂志，*B* 辑》44 (1988) 307–316。[16] M. Farber 和 R. E. Jamison。《图中的局部凸性》。《离散数学》66 (1987) 231–247。[17] G. Gutin 和 A. Yeo。《连通无环有向图的连通凸子图数量》。《离散应用数学》157(7) (2009) 1660–1662。[18] F. Harary、E. Loukakis 和 C. Tsouros。《图的测地数》。《数学与计算机建模》17(11) (1993) 89–95。[19] F. Harary 和 J. Nieminen。《图中的凸性》。《微分几何杂志》16 (1981) 185–190。[20] J. Hopcroft 和 R. Tarjan。《算法 447：图操作的高效算法》。《*ACM* 通讯》16:6 (1973) 372–378。

[21] R. E. Jamison 和 R. Nowakowski。图中的凸性的一条 Helly 定理。《离散数学》51:1 (1984) 35–39。[22] L. Nebesk ́y。连通图的区间函数的一种刻画。《捷克斯洛伐克数学杂志》44(1) (1994) 173–178。[23] M. H. Nielsen 和 O. R. Oellermann。Steiner树与凸几何。《*SIAM*离散数学杂志》23(2) (2011) 680–693。[24] D. B. Parker、R. F. Westhoff 和 M. J. Wolf。无克隆正则多部竞赛图中的二路径凸性。《澳大拉西亚组合学杂志》36 (2006) 177–196。[25] E. Sampathkumar。图中的凸集。《印度纯粹与应用数学杂志》15(10) (1984) 1065–1071。[26] M. L. J. van de Vel。《凸结构理论》。North Holland，1993。