arXiv:2303.18030v1 [physics.flu-dyn] 31 Mar 2023

线性剪切流上与波共同传播的浸没于自由表面下的冯·卡门点涡街的精确解

Jack S. Keeler[1] 和 Darren G. Crowdy[2]

[1]东英吉利大学数学学院，诺里奇，*NR47TJ*，英国[2]伦敦帝国学院数学系，伦敦女王门街 *180* 号，*SW7 2AZ*，英国

本文针对带有涡量的匀速行进水波问题，给出了新的精确解，其中一个浸没的冯·卡门点涡街与线性剪切流上的波共同传播。忽略表面张力和重力。该工作推广了 Crowdy 与 Nelson [《Physics of Fluids》，22，096601，（2010）] 的早期研究；他们求得了单个点涡旋列与线性剪切流中的水波共同传播的解析解。主要理论工具是波的施瓦茨函数，而本文建立在 Crowdy 最近提出的新框架之上 [《Journal of Fluid Mechanics》，954，A47，（2022）]。利用保角映射理论构造具有所需性质的施瓦茨函数，并对波形进行参数化。通过求解一对非线性代数方程，得到一个二参数族的解。这一方程组具有引人入胜的性质：事实上，它是退化的，从而大幅减少了可能解的数量，尽管物理可容许平衡态的空间仍然丰富多样。对于同列涡街，即两列涡旋在竖直方向上对齐的情形，通常只有一个物理可容许解。然而，对于交错涡街，即两列涡旋在水平方向上相互错开的情形，某些参数区域会产生多个解。本文的一个重要结论是：虽然无界简单剪切流中只能存在退化的冯·卡门点涡街，但在自由表面下方、与波共同传播的剪切流中，却可能存在各种各样的此类平衡态。

I. 引言

在二维水波研究中，通常假设流场无旋，并研究重力、毛细作用或二者共同产生的影响。然而，人们对带有涡量的水波理论越来越感兴趣；即使没有上述任一种物理效应，也可能存在有限振幅定常行进波 [3, 7, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 43]。一篇近期的综述文章 [24] 概述了有关带涡量水波的部分文献。在水波问题中加入涡量时，需要选择涡度分布的形式，而传统上通常取为均匀分布： [39] 和 [3] 较早对这一情形进行了弱非线性分析。 [36] 对深水中的重力波进行了数值研究，随后 [37] 将这项工作扩展到有限水深情形。在无限深度情形下，通常假设远离界面时，流场为线性剪切流。如今，关于采用各种不同表述形式的恒定涡度水波，已经开展了大量其他数值研究 [25, 26, 27, 29, 34, 40, 41]。

另一种在水波研究中采用的涡旋模型是点涡。早期关于严格存在性理论的研究中，[21] 和 [38]考察了存在微弱重力、且将涡量建模为点涡的情形。 [35] 证明了紧支撑涡量下稳态传播的二维毛细重力水波的存在性，其中包括涡量呈点涡形式的情形。 [42]构造了含有一个水下点涡的重力毛细波孤立波解。 [31]研究了深水中携带一个水下有限偶极子的孤立波。

最近，作者之一 [12] 提出了一种新颖的理论框架，用于理解无重力或表面张力、且涡量均匀的水波；这类水波还可能伴有同行点涡列。该框架所采用的数学工具是波的施瓦茨函数概念。此前， [17] 曾在涉及线性剪切流的水波问题中使用施瓦茨函数；而 [12] 近期的研究则展示了这一研究如何融入更广泛的理论框架。

要解释波形的施瓦茨函数，先考虑一个平坦波形 $y = 0$，例如，在笛卡尔（x， y）平面中。使用复变量 $z = x + \mathrm{i}y$，显然

$$\overline{z} = z, \qquad \text{on } y = 0. \tag{1}$$

一个关键观察是，式（1）的右端是 z 的解析函数，并具有这样的特性：它可以解析延拓到直线 $y = 0$之外。对于更一般的波形， ∂D 例如，由一条在 x 方向上具有周期性的解析曲线给出，∂D 的施瓦茨函数可定义为函数 S（z），该函数在包含波形的条带内解析，并满足以下条件：

$$\overline{z} = S(z), \qquad \text{on } \partial D \tag{2}$$

with

$$S(z) \to z + \mathrm{i}\Lambda + O(1/z), \qquad \text{as } y \to -\infty, \qquad \Lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

平坦剖面的施瓦茨函数（1）对应于特殊情形 S（z） $= z$，其中 $\Lambda = 0$。

施瓦茨函数最常用于闭解析曲线，其性质和应用已有大量研究 [19]。如 [12], 所示，波形的施瓦茨函数的广义概念 $S(z)$ 可用于以复变量形式表示与恒定涡量 ω_0 的匀速行进波相关的二维速度场 $(u,\ v)$，$u,\ v$并且还可包含水下伴随运动的点涡周期列，

$$u - \mathrm{i}v = -\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2}\overline{z} + q\sqrt{S'(z)} + \frac{\mathrm{i}\omega_0}{2}S(z), \tag{4}$$

其中 $(u,\ v)$ 表示以速度 U_f（设为该值）在共移动参考系中的速度场。常数 q 表示界面上流体的速度；如果忽略重力和表面张力，且流体区域上方的区域处于恒定压力下，则该表面速度必须保持恒定。条件 (3) 意味着，当 $y \to -\infty$时，

$$u - \mathrm{i}v = \frac{\mathrm{i}\omega_0}{2}(z - \overline{z} + \mathrm{i}\Lambda) + q = -\omega_0 y + \left(q - \frac{\Lambda\omega_0}{2}\right) \tag{5}$$

因此，波速与其他参数之间的关系为

$$U_f = \frac{\Lambda\omega_0}{2} - q. \tag{6}$$

鉴于一般表达式（4），自然会出现三种情形：

- 情形1：$\omega_0 \neq 0,\ q = 0$;
- 情形2：$\omega_0 = 0,\ q \neq 0$;
- 情形3：$\omega_0 \neq 0,\ q \neq 0$。

在每种情形中，只有特殊类别的波形才对应于物理上可接受的稳定行进平衡态，这意味着在表达式（$S(z)$ 中只允许选择特殊的4）。[12] 展示了如何运用保角映射理论寻找可接受的施瓦茨函数，并据此构造具有涡量的稳定行进水波问题的新解析解，其中涡量分布为均匀分布，且可能叠加点涡。其他类型的奇异性也很容易被纳入。

采用类似的共形映射技术，上述对 [17] 的研究找到了深水线性剪切流上行进波的精确解；该剪切流具有恒定涡量，并包含一列水下共行点涡。他们的技术借鉴了更早期的 [9] 研究；该研究提出，采用所谓修正施瓦茨势形式的流函数可以给出不可压缩二维欧拉方程的涡旋平衡解。这些解具有如下形式

$$\psi(z,\overline{z}) = -\frac{\omega_0}{4}\left[z\overline{z} - \int^{z} S(z')dz' - \overline{\int^{z} S(z')dz'}\right] \tag{7}$$

对于这些解，通过 $u = \partial\psi/\partial y,\ v = -\partial\psi/\partial x$进行简单计算，可得到

$$u - \mathrm{i}v = 2\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2}\left(\overline{z} - S(z)\right) \tag{8}$$

这与（4）相一致，只要采用情形1中的 $q = 0$ 选择即可。通过这种方式，的解现在可以被视为属于情形1解类别的最基本水波解。

事实上，[12] 的框架为水波文献中的三项（迄今为止显然互不相关的）研究成果提供了理论上的统一：[17], [18], 和 [29] 的研究分别被理解为属于情形1、情形2和情形3的最基本水波解。有兴趣的读者可参阅 [12]，以更详细地了解这些发展。

就目前而言，只需指出，在描述了一般框架之后，[12]着重于生成一系列属于情形2类别的新解。其中

包括描述两列水下涡旋列（也称为冯·卡门涡街）的解：它们与自由表面波同向平移，但除此之外流场是无旋的； [18] 此前的研究发现了与单列水下点涡同向平移的定常波。本文旨在给出涉及两列涡旋列的那些新解的“情形1类比解”：在此，我们给出了水下冯·卡门涡街（即两列涡旋列）在线性剪切流中、自由表面波下方同向平移的解析解，从而推广了 [17] 关于单列同向平移涡旋列的研究。

本文的结构如下。在第II 节中，介绍属于 [12] 所述解的分类体系中情形1的稳态平衡背景。第III 节随后描述无界无旋流中的经典冯·卡门涡街，并考察这些平衡态能否推广到背景简单剪切中存在的情形。在第IV 节中，建立线性剪切流中两列水下涡旋（即涡街）的问题。研究表明，在情形1类别内寻找平衡态可以归结为研究两个代数方程，其解结构将在第V节中详细讨论。第VI节概述物理可容许解的特征。最后，本文在第VII节讨论研究结果。

II. 情形1解的分类

一旦根据波形的施瓦茨函数 $S(z)$ 推导出复速度场的表达式（4），只需取 $q = 0$，即可直接得到情形1的解类别；这意味着复速度场的形式化简为（8），如上文所述。这是 [12]所倡导的广义观点。然而，由于本文仅关注情形1的解，因此可以借鉴 [17] 早期的工作，并针对这一情形给出更直接的表述。

涡块是指具有均匀涡量 [33]的区域；因此，某一波形下方具有恒定涡量的无界流体区域，可以视为一个无限延伸的涡块。对于涡块边界上的任何稳定传播波，在共移动参考系中，涡块边界处的涡旋跃变必须是一条流线，这就是相应的运动学条件。涡旋跃变处还有一个额外的动力学条件，即速度场必须在此处连续；事实证明，这能确保流体压力 [33]连续。

现在，假设在共移动参考系中，半无限线性剪切层上某个稳定传播平衡的流函数由（7）给出。不难验证，自由表面是一条流线，因为在涡旋跃变处， $\overline{z} = S(z)$，

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} d\overline{z} = -\frac{\omega_0}{4} \left[(\overline{z} - S(z))\, dz + \left(z - \overline{S(z)} \right) d\overline{z} \right] = 0. \tag{9}$$

此外，由（8）可知， $u - \mathrm{i}v = 0$ 在涡旋跃变处，因此它与上方恒压相中为零的速度连续。由此可见，流函数（7）似乎构成了二维欧拉方程的一个相对平衡，甚至无需先对 $S(z)$ 作出任何选择，因为涡旋跃变处的运动学和动力学边界条件均已满足。

问题在于，一般的施瓦茨函数 $S(z)$ 在对应于流体的区域内具有奇点，因此只有某些 $S(z)$ 的选取在物理上才是可接受的。即便如此，如果 $S(z)$ 存在物理上可接受的奇点——例如对应于点涡的、具有实数留数的一阶极点——那么还必须满足额外的动力学约束：任何这样的点涡也必须相对于整体构型处于平衡状态。乍看之下，所有这些约束似乎都使得这一类平衡流函数不太可能存在，但如今已经找到了许多这样的解。在研究有限区域涡旋时最相关的径向几何中，

已在 [9], [10], [11], [15] 和 [16]中找到此类平衡解。对于水波几何， [17] 此前的研究给出了这类解：该研究聚焦于单列水下点涡与波共同沿半无限剪切层上的涡旋跃变传播。本文旨在将后一类水波解拓展至如下情形：水下冯·卡门涡街——即一对涡旋列，可以是对称的（“同列”）或非对称的（“交错”） [1, 33] ——与波共同沿涡旋跃变传播。

由于此处旨在研究冯·卡门涡街式的涡街与波在一股线性剪切流中共同传播的解，因此有必要回顾一下在无背景剪切的无界无旋流场中冯·卡门涡街的理论。

III. 经典冯·卡门涡街

对于由环量均为 Γ 的点涡组成、周期为 c 的单列周期性点涡列，其复势 $w(z)$ 众所周知为 [1, 33]

$$w(z) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\log\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right), \tag{10}$$

其中一个点涡位于原点。除点涡之外，流场其余部分均为无旋流。相应的复速度场为

$$u - \mathrm{i}v = \frac{dw}{dz} = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2c}\cot\left(\frac{\pi z}{c}\right) \to \mp\frac{\Gamma}{2c}, \qquad \text{as } y \to \pm\infty. \tag{11}$$

远离涡旋列处，流体速度在 x 方向上均匀，但在上方和下方方向相反。

交错式（或非对称）冯·卡门涡街由两列这样的点涡列组成：一列点涡的环量为 Γ_u，另一列点涡的环量为 Γ_l，并相对前一列错开半个周期；在经典情形下， $\Gamma_l = -\Gamma_u$，原因稍后将会说明。因此，这种周期为 $c = 2\pi$ 的涡街，其复势为

$$-\frac{\mathrm{i}\Gamma_u}{2\pi}\log\sin\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma_l}{2\pi}\log\sin\left(\frac{z-\pi+\mathrm{i}(1+\lambda)}{2}\right), \tag{12}$$

其中，我们现在将环量为 Γ_u 、位于 $z = -\mathrm{i}$ 处的某一排中的一个涡旋，以及环量为 Γ_l 、位于 $z = \pi - \mathrm{i}$ 处的另一排中的一个涡旋（$1 + \lambda$）置于此处；这样便于与后文找到的解进行比较。参数 λ 是涡街 [1, 33]的纵横比。相应的复速度场为

$$u - \mathrm{i}v = -\frac{\mathrm{i}\Gamma_u}{4\pi}\cot\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma_l}{4\pi}\cot\left(\frac{z-\pi+\mathrm{i}(1+\lambda)}{2}\right). \tag{13}$$

由于两个余切函数在 $y \to \pm\infty$ 时都趋于 $\mp\mathrm{i}$，因此很明显，只有满足 $\Gamma_u = -\Gamma_l := \Gamma$时，该涡街远处诱导的速度才会消失。随后，利用自由点涡速度的通常规律，很容易证明该涡街沿 x 方向以速度

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{14}$$

自然会产生这样一个问题：如果将这种相对平衡置于简单剪切流（例如（$-y$，0））中，它是否也能存在？在这种情况下不存在复势，但相应的复速度场为

$$u - \mathrm{i}v = -y - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi}\cot\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi}\cot\left(\frac{z-\pi+\mathrm{i}(1+\lambda)}{2}\right), \tag{15}$$

其中，为确保远场中不存在均匀流场分量，同样必须满足关系式 $\Gamma_u = -\Gamma_l := \Gamma$。假设存在一个沿 x 方向以速度 U 匀速平移的平衡态。那么在 $y = -1$（或 $z = -\mathrm{i}$）处的平衡条件为

$$U_{\mathrm{stag}} = 1 + \frac{\Gamma}{4\pi}\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{16}$$

而在 $y = -(1+\lambda)$（或 $z = -\mathrm{i}(1+\lambda)$）处的条件为

$$U_{\mathrm{stag}} = 1 + \lambda + \frac{\Gamma}{4\pi}\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{17}$$

显然，16）和（17）只有在 $\lambda = 0$时才能同时成立；这对应于一种退化情形，纵横比为零，包含一列环量交替、间距为 π的周期性涡旋。

对于同列（亦称非错列或对称）冯·卡门涡街，也可得出类似结论。在这种情况下，只要 $\lambda \neq 0$ （否则两列点涡会直接上下重合并相互抵消），两个条件（16）和（17）的对应形式为

$$U_{\mathrm{inline}} = 1 + \frac{\Gamma}{4\pi}\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{18}$$

and

$$U_{\mathrm{inline}} = 1 + \lambda + \frac{\Gamma}{4\pi}\coth\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{19}$$

由于 $\lambda = 0$ 是方程（18）和（19）的唯一一致解，并且该值对应于两个涡旋彼此抵消，因此可以得出结论：在无界简单剪切流中，同列或对称的冯·卡门涡街不存在平衡态。

这些简单计算表明，置于无界简单剪切流中时，经典冯·卡门涡街平衡态仅有退化情形得以保留。然而，有趣的是，在下文中我们将证明，当点涡与简单剪切流中的自由表面波共同传播时，类似于冯·卡门涡街的平衡态仍然存在。

IV. 线性剪切流中与波共同传播的冯·卡门涡街

本文其余部分所关注的物理情形如图 1 所示，该图展示了复 z 平面中单个周期窗口内的（a）同列构型和（b）交错构型。该周期窗口中的流体区域记为 Ω：当 $y \to -\infty$ 时，它是无界的，但其上方由自由表面界定，该自由表面记为 $\partial\Omega$。当 $y \to -\infty$ 时，流场趋于如下形式的线性剪切流 $(-y, 0)$ 这要求选择 $\omega_0 = 1$；这只是为流场设定一个时间尺度。假设每个周期窗口内的流体中有两个点涡。对于同列构型，二者均位于周期窗口的中部；对于交错

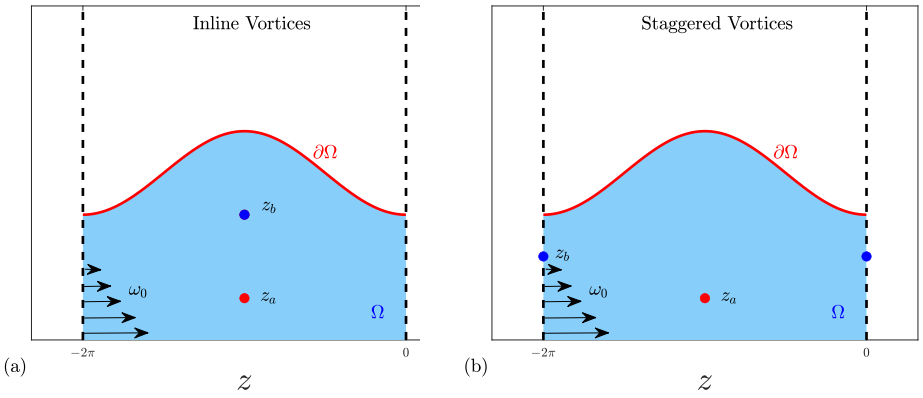

图1： (a) 同列涡旋和 (b) 交错涡旋的物理平面。涡旋的位置表示为 z_a 和 z_b，区域具有 2π 周期性。

构型，涡旋在 x 方向上相差半个周期。由于要寻找沿正 x 方向以速度 U_f 传播的定常传播平衡态，因此自然地转到共移动参考系，在该参考系中，当 $y \to -\infty$ 时，流场是定常的，并趋于如下形式的线性剪切流（$-y - U_f$，0）。在这个参考系中，波形是固定的，水下点涡的位置也同样固定。因此，根据自由点涡的通常运动方程 [1, 33], , 每个点涡处的速度场非奇异分量必须为零。

沿用 [17] 中允许每周期一个点涡（即单排水下涡）的表述，将其扩展到每周期两个点涡（即两排水下涡）时，需要考虑如下形式的广义共形映射

$$z = Z(\zeta) = \mathrm{i}\left[\log\zeta + \frac{A}{\zeta - a} + \frac{B}{\zeta - b}\right] + d, \tag{20}$$

其中 a, b, A, $B \in \mathbb{R}$ 和 $d \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ 是待确定的参数。该映射将参数 ζ 平面中的一个单位圆盘映射到 z平面中的周期窗口 Ω。设单位圆盘的内部为 D，其单位圆边界为 ∂D。必须满足 $|a|$, $|b| > 1$，以确保 z 在 D中没有极点；这是因为共形映射必须在圆盘内解析，但在 $\zeta = 0$ 处存在由像区域的周期性所要求的对数奇点。边界 ∂D 被映射到物理平面中的自由表面 $\partial\Omega$。$\zeta = 0$和 ∞ 之间的对数支割线两侧分别被映射到周期窗口 Ω的两侧。

为了看出（20）如何产生每周期两个点涡，请注意，施瓦茨函数可写成关于 ζ 的函数，如下所示：

$$S(z) = \overline{z} = \overline{Z(\zeta)} = \overline{Z}(1/\zeta) = \mathrm{i}\left[\log\zeta - \frac{A\zeta}{1 - a\zeta} - \frac{B\zeta}{1 - b\zeta}\right] + \overline{d}, \tag{21}$$

其中我们利用了这一事实：$\zeta = 1/\zeta$ 在 ∂D上，因此在 $\partial\Omega$上也是如此。由于该函数与 $Z(\zeta)$在 $\zeta = 0$处具有相同的对数奇点，因此很容易验证，该函数满足远场条件（3）。施瓦茨函数 $S(z)$ 在 $\zeta = 1/a$和$1/b$处具有简单极点，分别为

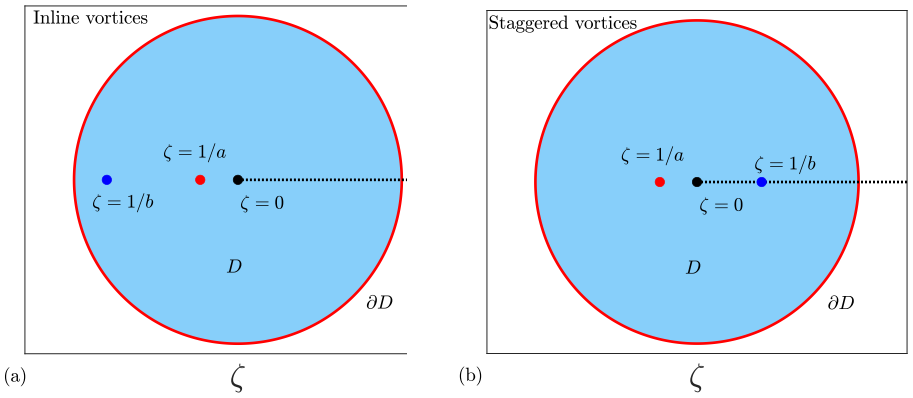

图 2：涡旋所在的 ζ 平面：(a) 同列涡旋；(b) 交错涡旋。支割线以虚线表示。$\mathbf{u}$ 的奇点位于 $\zeta = 1/a$ 和 $\zeta = 1/b$，对应于 ζ 平面中涡旋的位置。

在 D 内，因此对应于 $S(z)$ 在以下位置的一阶极点：

$$\begin{aligned} z_a &= Z(1/a) = \mathrm{i}\left[\log(a^{-1}) + \frac{Aa}{1-a^2} + \frac{Ba}{1-ab}\right] + d \\ \text{and}\quad z_b &= Z(1/b) = \mathrm{i}\left[\log(b^{-1}) + \frac{Bb}{1-b^2} + \frac{Ab}{1-ab}\right] + d \end{aligned} \tag{22}$$

位于内部 Ω。两个参数 a 和 b 将视为自由参数。于是可以得出，为了达到平衡，必须将 $A = A(a,b)$、$B = B(a,b)$ 和 $d = d(a,b)$ 确定为这两个参数的函数。为此，注意到复速度场（8）可写成关于 ζ的函数形式：

$$u - \mathrm{i}v = -\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2}\left[\overline{z} - S(z)\right] = -\frac{\omega_0}{2}\left[\log|\zeta|^2 + \frac{A}{\overline{\zeta} - a} + \frac{B}{\overline{\zeta} - b} - \frac{A\zeta}{1-\zeta a} - \frac{B\zeta}{1-\zeta b}\right]. \tag{23}$$

为求出位于 $\zeta = 1/a$ 的点涡处于平衡状态的条件，可将速度场改写为

$$u - \mathrm{i}v = -\frac{\omega_0}{2}\left[\log|\zeta|^2 + \frac{A}{\overline{\zeta} - a} + \frac{B}{\overline{\zeta} - b} + \frac{A}{a} + \frac{A}{a^2}\frac{1}{(\zeta - 1/a)} + \frac{B\zeta}{1-\zeta b}\right] \tag{24}$$

然后利用在 $\zeta = 1/a$附近，

$$\frac{1}{\zeta - 1/a} = \frac{Z'(1/a)}{z - z_a} + \frac{Z''(1/a)}{2Z'(1/a)} + O(z - z_a). \tag{25}$$

由此可得，在 $z = z_a$附近，

$$u - \mathrm{i}v = -\frac{\omega_0}{2}\left[\frac{A}{a^2}\frac{Z'(1/a)}{z - z_a} + S_a + O(z - z_a)\right], \tag{26}$$

其中

$$S_a = \log(1/a^2) + \frac{Aa}{1-a^2} + \frac{Ba}{1-ab} + \frac{A}{a} + \frac{A}{a^2}\frac{Z''(1/a)}{2Z'(1/a)} + \frac{B}{b-a}. \tag{27}$$

因此，一个环量为 Γ_a、位于 $z = z_a = Z(1/a)$ 处的点涡，其中

$$-\frac{\mathrm{i}\Gamma_a}{2\pi} = -\frac{A\omega_0 Z'(1/a)}{2a^2} \tag{28}$$

当且仅当 $S_a = 0$ 时将处于平衡状态。这是自由点涡的通常平衡条件。完全依照相同的推理，环量为 Γ_b、位于 $z = z_b = Z(1/b)$ 处的点涡，其中

$$-\frac{\mathrm{i}\Gamma_b}{2\pi} = -\frac{B\omega_0 Z'(1/b)}{2b^2} \tag{29}$$

当且仅当 $S_b = 0$ 时将处于平衡状态，其中

$$S_b = \log(1/b^2) + \frac{Ab}{1-b^2} + \frac{Bb}{1-b^2} + \frac{B}{b} + \frac{B}{b^2}\frac{Z''(1/b)}{2Z'(1/b)} + \frac{A}{a-b}. \tag{30}$$

这两个平衡条件可以改写为

$$\begin{aligned} 2a^2\left[\log(1/a^2) + \frac{A}{a(1-a^2)} + \frac{B(1-a^2)}{(1-ab)(b-a)}\right]Z'(1/a) + AZ''(1/a) = 0, \\ 2b^2\left[\log(1/b^2) + \frac{A(1-b^2)}{(1-ab)(a-b)} + \frac{B}{b(1-b^2)}\right]Z'(1/b) + BZ''(1/b) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

这些方程的代数形式为

$$\begin{aligned} \lambda_1 A^2 + \lambda_2 B^2 + \lambda_3 AB + \lambda_4 A + \lambda_5 B + \lambda_6 = 0 \\ \mu_1 A^2 + \mu_2 B^2 + \mu_3 AB + \mu_4 A + \mu_5 B + \mu_6 = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

其中系数 $\{\lambda_j,\ \mu_j | j = 1, \ldots\ldots, 6\}$ 是 a 和 b 的显式函数，见附录A。我们将把这些方程视为确定 A 和 B 关于 a 和 b 的函数，即 $A = A(a,\ b)$，$B = B(a,\ b)$。由于这些方程决定了可能的平衡态，下一节将详细讨论方程 ((32)) 的解结构，尤其是因为它呈现出引人入胜且出乎意料的特征。

现在只需确定 d。不过，我们可以自由设定涡旋在 z_a 处的位置，因此，按照 [8]，我们令 $z_a = -\pi - \mathrm{i}$，即位于 $y = 0$ 下方一个单位距离处，且处于周期窗口的中间。这就确定了 d。另一种选择是选取 d，以指定波形的平均水位，但这样我们就无法控制其中一个涡旋的位置。

V. 32的解结构（A 和 B

寻找平衡态的可能性已归结为从代数方程组（32）中确定 A 和 B。对于单个涡旋，很容易将等价的单个方程整理为一个闭式表达式，从而将 A 直接表示为 a [8]的函数。在当前的双涡旋情形下，分析更加复杂，但正如本文将要讨论的，它具有一些有趣且出人意料的特征。由于系数 λ_i、μ_i的性质复杂，尽管原则上可以求得解析解，但其形式过于繁琐，难以从中获得直观认识。

根据（32）中的一般代数结构，并利用贝祖定理 [4]，考虑根的重数后，应该会有四对解。[1] 事实上，解（A，B）表示两条圆锥曲线的交点。

[1] 解的数量是每个方程中最高次幂的乘积

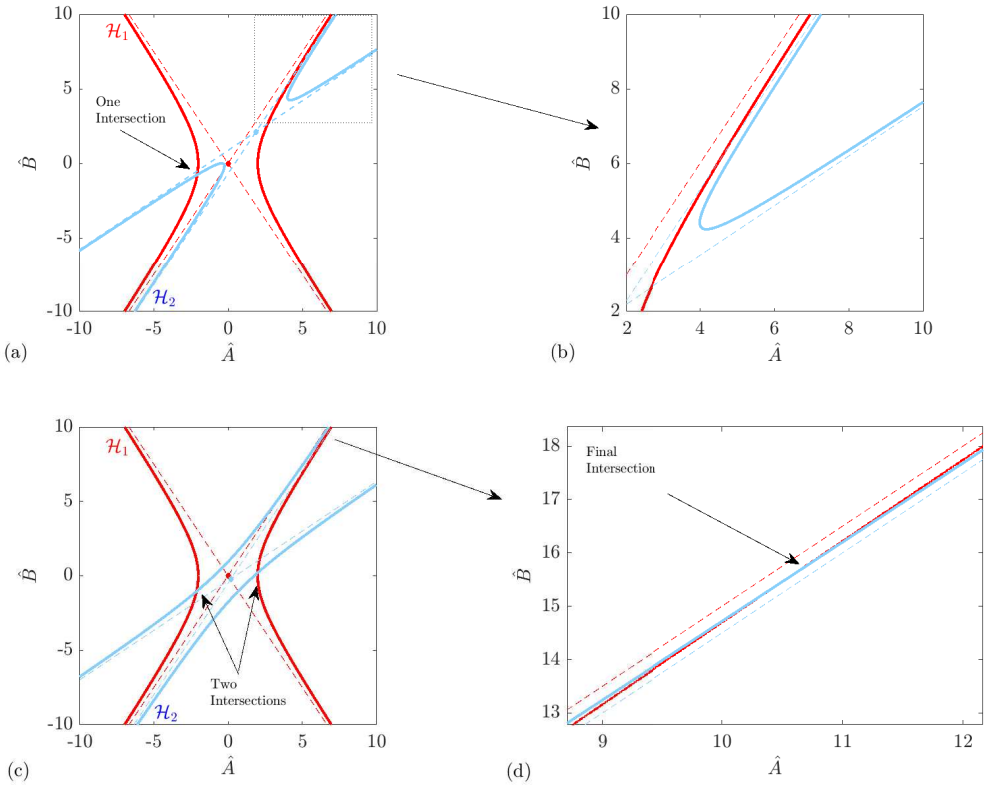

图 3：（a）、（b）满足（37）所述性质且交于 1 个点的两条双曲线。（b）放大（a）中的矩形区域，显示不可能再有其他交点。（c）、（d）满足（37）所述性质且交于 3 个点的两条双曲线。（d）第三个交点出现位置附近的放大图。

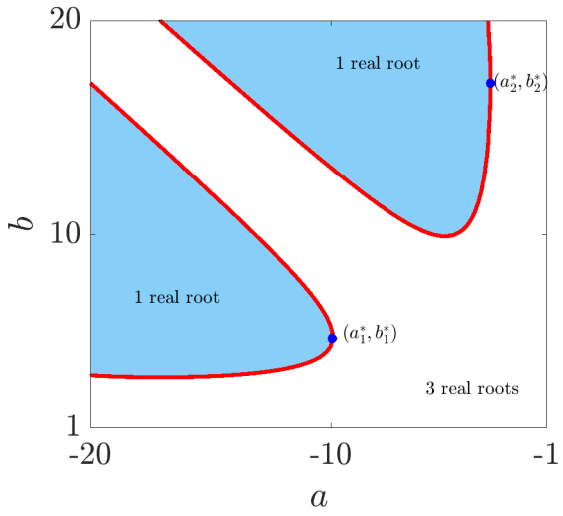

图 4：交错涡旋构型中，$(a,\ b)$ 平面上对应 1 个实根（阴影区域）或 3 个实根（非阴影区域）的区域。特殊参数值 $(a_i^*,\ b_i^*), i = 1,\ 2$（如图所示）对应跨临界分岔。

然而，通过逐步进行代数运算，可以发现 $\lambda_1 \equiv 0$ 和 $\mu_2 \equiv 0$；见附录A。因此 $\Delta = \lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2 > 0$，这两个圆锥曲线都是双曲线。比如，可以很容易地从方程（中消去 A32），得到关于 B的四次方程。正如预期，它有四个根，且有闭式表达式。值得注意的是，再次通过代数运算可以发现，B^4 的系数为零，即

$$\mu_1\lambda_2^2 - \mu_3\lambda_2\lambda_3 \equiv 0. \tag{33}$$

这种退化意味着（32）只有三个根：要么是 1 个实根和 2 个复根，要么是 3 个实根。[2]

值得强调的是，在 [8]的单涡旋分析中也会出现类似现象：关于 A 的单个方程乍看是一个二次方程，但其二次项系数恒为零，因此得到一个单参数解族 [8]。关于这一观察，我们将在第 VII节进一步讨论。

通过探讨（32）中所定义曲线的几何性质，有助于理解这一退化情形。考察（(A, B)）在（32）中的大尺度行为，我们发现

$$B \sim 0, \qquad \lambda_2 B + \lambda_3 A \sim 0 \tag{34}$$

$$A \sim 0, \qquad \mu_3 B + \mu_1 A \sim 0. \tag{35}$$

对应于 $A \sim 0$ 和 $B \sim 0$ 的渐近线分别是（A, B）平面中的竖直线和水平线，而非平凡渐近线的斜率分别为 $-\lambda_2/\lambda_3$ 和 $-\mu_3/\mu_1$。我们发现 $-\lambda_2/\lambda_3 = -\mu_3/\mu_1 \equiv (1 - b^2)/(a^2 - 1)$，因此渐近线彼此平行。于是，问题归结为求两个双曲线 H_1 和 H_2, 的交点，它们具有以下两个性质：

$$1) \qquad \text{One asymptote of } \mathcal{H}_1 \text{ is perpendicular to } \mathcal{H}_2 \tag{36}$$

$$2) \qquad \text{One asymptote of } \mathcal{H}_1 \text{ is parallel to } \mathcal{H}_2 \tag{37}$$

在图 3 中，我们绘制了一条标准矩形双曲线（我们总可以对（32）中的一条圆锥曲线进行变换，使其成为标准形式），其中心为 (0,0)（红色曲线），以及另一条满足（37）中性质的双曲线。在面板（a）和（b）中可以看到，$\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 仅在一个点相交；而在面板（c）和（d）中，我们展示了它们如何能够在三个点相交。在面板（a）中还可以看到，贝祖定理所预测的额外“根”由两条曲线在无穷远处“相交”来解释。

这项分析十分重要，因为直接使用计算机代数软件包求解（32）可能代价高昂、效率低下，有时甚至无法在限定时间内给出答案。实践中发现，计算效率最高的方法是将（32）化为关于 B 的单个三次方程，然后应用三次方程求根公式，求出用 a 和 b表示的三个根。需要注意的是，我们无法先验地知道（32）能化为三次方程。我们构造了一个双精度（a，b）网格矩阵，并使用解析表达式计算了各根。

需要注意的是，方程（32）的解不一定是有效解，因为还要求映射（20）是从 D 到 Ω的一一映射，或称单射。在具有三对实根的情况下，对于给定的（a，b），解并不唯一。然而，正如我们将在下一节中讨论的，只有在（a，b）参数空间的某些区域内，才能构造出有效解。通过计算所得三次多项式的判别式，我们可以找到（a，b）空间中具有 1 个或 3 个根的区域

[2] 我们注意到，这并不违背贝祖定理，因为额外的根可以由两条双曲线在无穷远处的交点来解释。

关于 a 和 b的方程。对于内联涡旋，即当 $ab > 0$时，我们发现除非 $a = b$，判别式始终为正；而在该情况下不存在解，因此始终有三个实根。对于交错涡旋， $ab < 0$时，判别式可能为负，从而允许只有一个实解；图4 显示了（a， b）平面中的这些区域。在更详细地讨论这些解之前，有必要先讨论两个特定极限下的解结构，即当 $a - b \to 0$以及当 a时 $b \to 1$。

A. 极限 $a - b \to 0$

在此极限下，仅适用于同列构型，将方程（32）两边乘以$a - b$，然后取极限 $a - b \to 0$，可得（32）化简为

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_2 B^2 + \hat{\lambda}_3 AB + \hat{\lambda}_5 B = 0 \\ \hat{\mu}_1 A^2 + \hat{\mu}_3 AB + \hat{\mu}_4 A = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $\hat{\lambda}_i = (a - b)\lambda_i$，$\hat{\mu}_i = (a - b)\mu_i$。这只有一个平凡解（ A， B） $= (0, 0)$；其他根不存在，因为 $\hat{\lambda}_2 \hat{\mu}_3 - \hat{\lambda}_3 \hat{\mu}_1 = 0$。从物理上看，此极限对应于一个平坦剖面，其中两个距离越来越近的涡旋在 $a = b$ 时有效地消失。

B. 极限 a， $b \to -1$

在此极限下，由于（着重考察 $a \to -1$，该极限为 $b \to -1$ 与此类似），如果将（32）中的各项乘以 $(a^2 - 1)^2$，并取 $a \to -1$ 的极限，可得（32）在此极限下的主导行为为

$$\bar{\lambda}_4 A \sim 0, \qquad \bar{\mu}_5 B \sim 0, \tag{39}$$

其中 $\bar{\lambda}_i = (1 - a^2)^2 \lambda_i$， $\bar{\mu}_i = (1 - b^2)^2 \mu_i$。因此，当 a， $b \to -1$ 时，$(A$， $B) \to 0$。

VI. 平衡态的表征

同行和交错构型将分别进行讨论。在每种情况下，$(A$， $B)$ 的解空间将作为自由参数 $(a$， $b)$的函数进行讨论。下文中，有效解定义为一组参数 $(a$， $b)$，其对应的解 $(A$， $B)$ 满足（32），且（20）中的映射是一一映射，即物理 z平面中的界面不存在交点。我们将在分析过程中讨论有效性的条件。

A. 同行（非交错）涡街

如上一节所述，内联涡旋（$ab > 0$）的判别式（32）为正，因此始终存在三对实解。图5 展示了解 A 和 B（分别对应面板（a）和（b））随 b 变化的情况，其中 $a = -2$。每条不同颜色的分支表示（32）的一个根，实线和点线分别表示单叶映射和非单叶映射。对于$a = -2$，只有一小段分支包含单叶映射，因而表示物理波剖面。在该分支段末端出现的极限剖面（剖面1和剖面3）均与相邻的周期窗口发生自交

，当 $\zeta \neq 1$时。标记为2的剖面表示一种在远场中几乎平坦的解。我们注意到，解分支穿过直线 $a = b$，但当 $a = b$ 恰好成立时不存在解。当 $b < a$时，z_a 涡旋位于上方；而当 $b > a$时则相反。

涡旋强度 Γ_a 和 Γ_b 分别绘制在面板 (a) 和 (b) 的嵌入图中。标记为 3 的极限剖面的环量为 $\Gamma_a = 0.2711, \Gamma_b = -30.5539$，这表明下方 z_a 涡旋对流场的影响明显小于上方 z_b 涡旋。另一个标记为 1 的极限剖面的环量为 $\Gamma_a = -30.4596, \Gamma_b = 3.8487$，因此，尽管下方 z_b 涡旋对流场的影响小于上方 z_b 涡旋，但它并不像剖面 3 中的下方涡旋那样弱。

对于 a 的不同取值，我们可以改变 b，从而使解分支中更大的一部分产生有效映射。我们强调，在每种情况下，只有一个根分支会产生有效的单叶解。图6显示了 $a = -14$、-7 和 -2 取值时的有效分支。正如主面板所示，$a = -14$、-7 解分支在 $b \to -\infty$ 时具有更长的有效范围，但在曲线右侧以较低的值终止。在每种情况下，极限剖面，即剖面 6、9（以及图5中的剖面 3），都会与相邻的周期窗口发生自交。随着 $b \to \infty$，对于 $a = -14$、-7而言，一个解仍然存在，对应于一个隆起剖面。当 $b \to a$、A、$B \to 0$（见 § V A）时，剖面变平，如 $a = -14$、$b = -14.334$ 时的剖面 8 所示。这是因为$A = B = 0$，因此 $\Gamma_a + \Gamma_b = 0$，如图7所示。

进一步探索解空间，可以发现 $b \to 1$ 所有曲线最终都收敛到$(A, B) = (0, 0)$，如第 § V B节所述。不过，这个极限取决于 a 的取值，如图8所示。这里展示了 b中有效解的范围如何随着$a \to -1$而缩小。下限出现在 b (图8左侧的剖面）较大的取值处，而上限似乎逐渐趋近于 $b = -1$ (图8右侧的剖面）。上限剖面的高度不会随着 a 趋近于 -1 而单调变化，因此，尽管这些曲线看起来正收敛于同一个解，但只有当a、$b \to -1$时，它们才会在极限下收敛。

极限剖面在定性上不同于 [8] 的剖面。对于单个涡旋，当 a 取临界值时，周期窗口中间会出现一个尖点；超过该临界值后，便无法构造单叶映射。这里没有观察到这一现象。相反，一个剖面会与相邻周期窗口中的剖面相交。

B. 错列涡街

交错涡旋要求 $ab > 0$。如图 4 所示，在 (a, b) 解空间中存在一些区域，可得到唯一解。通过考察固定 a 值下的解空间，然后改变 b，可以对此作进一步研究，方法与此前研究共线情形时相同。

图 9 显示了 A 和 B的值，分别对应面板 (a) 和 (b)，其中 $a = -7$。当 b 足够大时，方程 (32) 只有一个根，但它不代表有效解。在 $b \approx 10$时，通过一次折叠分岔出现另外两个解分支，二者都对应有效解，如标记为 1、2、3 的剖面所示。下方分支只有在剖面于周期窗口中部形成尖点之前才是有效解，这一点见于标记为 1 的剖面。这与 [8] 中的极限剖面类似，并且发生在满足 (a, b) 的参数值处，即$z'(1) = 0$。

沿着上方分支继续减小 b，剖面变为双峰，并出现两个明显的剖面峰值，见剖面4，直到 $b = -a$，此时对应于两个水平排列的涡旋，如面板5所示，其中剖面为单峰。进一步减小 b 会导致更加明显的

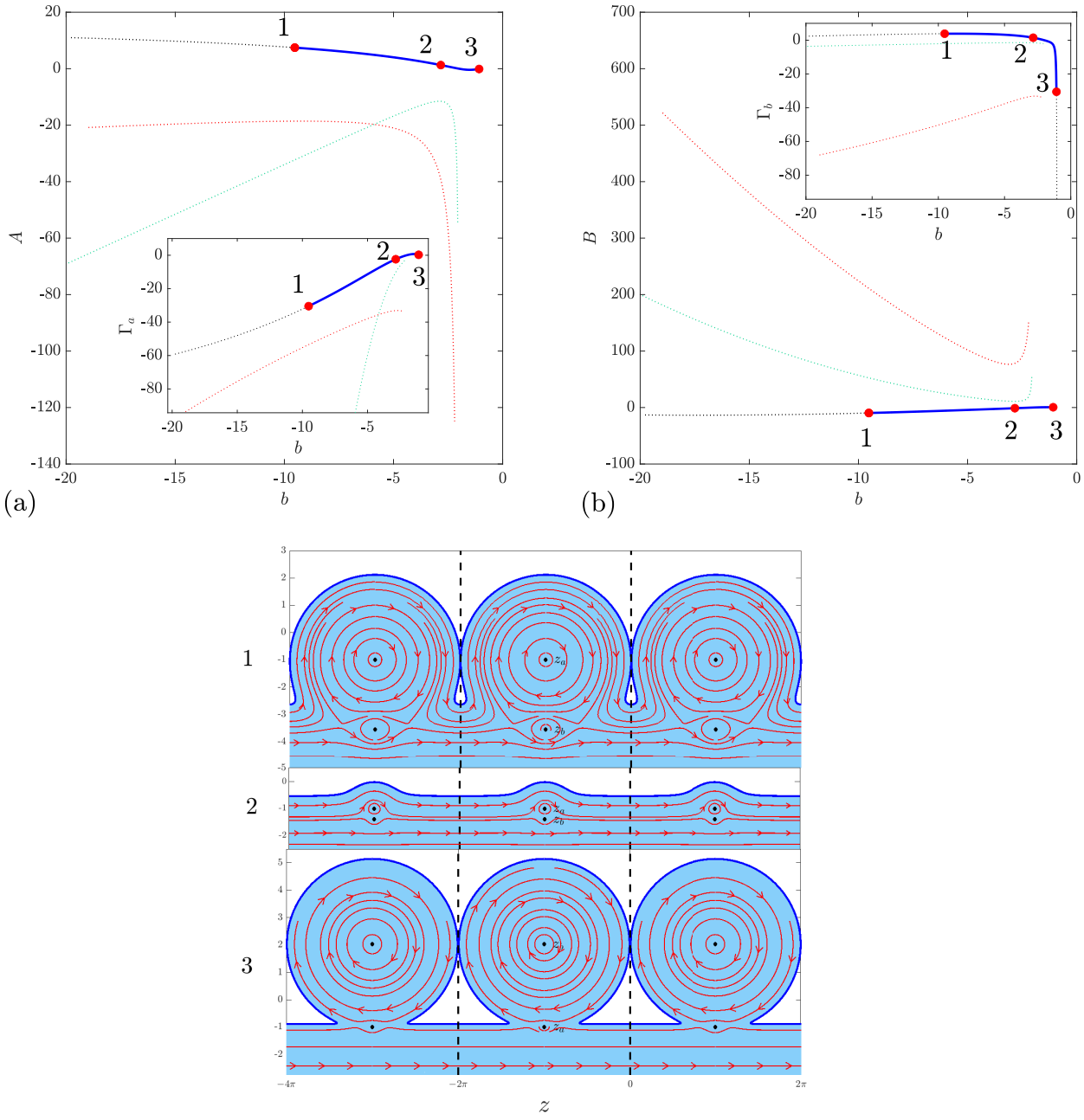

图 5：当 $a = -2$ 时内联涡旋的解结构。（a）/（b）分别显示 A/B 随 b 变化时的图像。嵌入图显示面板（a）/（b）中涡旋强度 Γ_a/Γ_b 的相应变化。实线表示方程（32）的解，这些解产生单叶映射。细点线表示方程（32）的解，这些解无法产生有效解。面板（a）中标记为 1、2 和 3 的解所对应的流线和剖面，以及涡旋的位置均已显示。

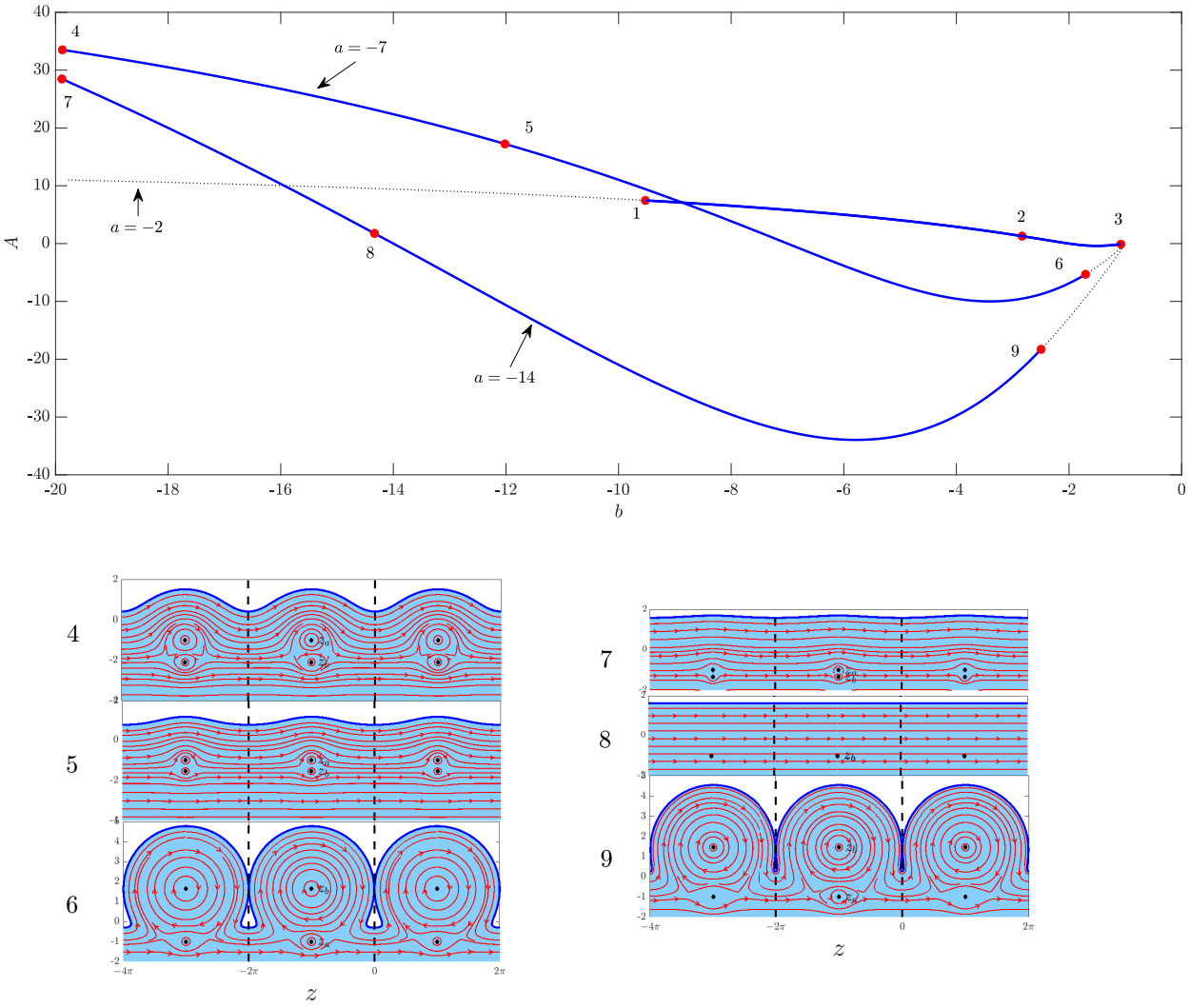

图6：内联涡旋的解结构，$a=-14$，-7，-2。顶部面板显示 A 随 b 变化时的情况。实线表示使映射成为单叶映射的方程（32）的解。细点线表示方程（32）的不产生有效解的解。主面板下方编号的剖面对应于（(b，A）解空间中的圆形标记。

双峰波形，见剖面6，直到分支在 $b\approx 2.3235$ 处到达终止点，此时界面与相邻的周期窗口发生自交，见剖面7。

有趣的是，当 b 小于该值时，另一条分支上有一小段允许有效解；见剖面8和9。这些剖面相似之处在于，二者在周期窗口边缘都有一个尖点，对应于 $Z'(-1)=0$。在剖面9中，z_b 接近尖点，这正如 $b\to 1$ 所预期的那样；然而，如面板（b）的插图所示，在此极限下，z_b 处涡旋的强度为零，因此该涡旋不会造成影响。

对于 $a=-7$，该分岔结构并非随 a 变化而保持一般性。图 10 分别在面板 (a)、(b) 和 (c) 中展示了 $a=-14$、-7、-2的结构。当 $a=-14$ 时，总是有三个根；当 $a=-7$ 不再存在时，则出现折叠分岔。物理上可接受的分支部分上的剖面与 $a=-7$ 情形显著不同。

面板 (a) 中的“上”分支没有物理可接受解，而“中间”分支

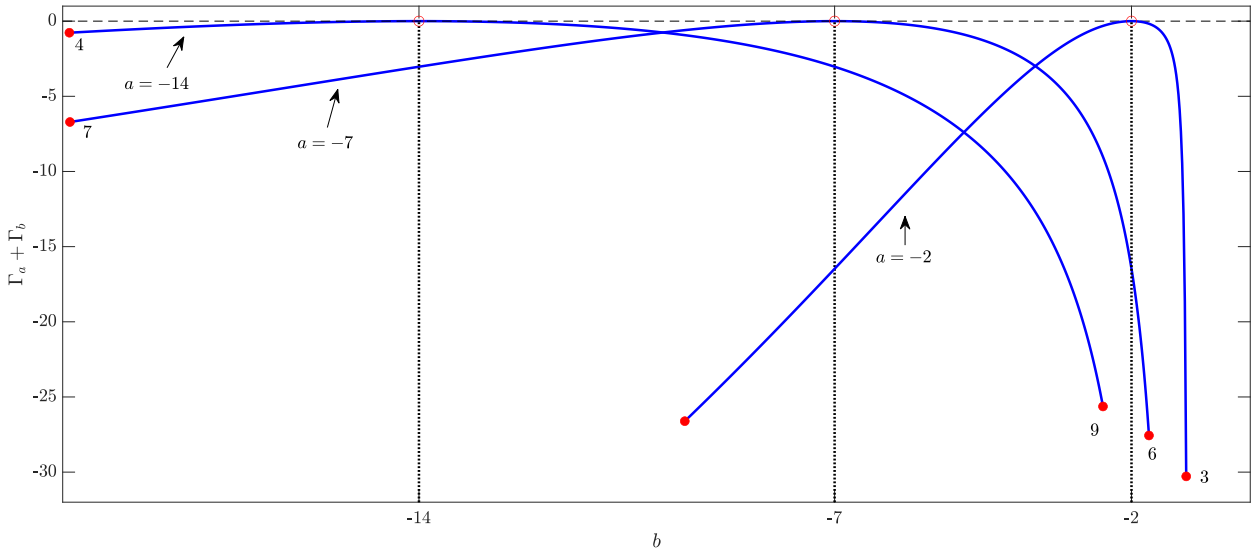

图 7：内联涡旋的总环量， $a = -14$， -7， -2。标签和实心标记表示图6中的解。竖直细点线表示每个分支上 $a = b$ 的位置，空心圆形标记表示无解的位置。水平虚线表示直线 $\Gamma_a + \Gamma_b = 0$。

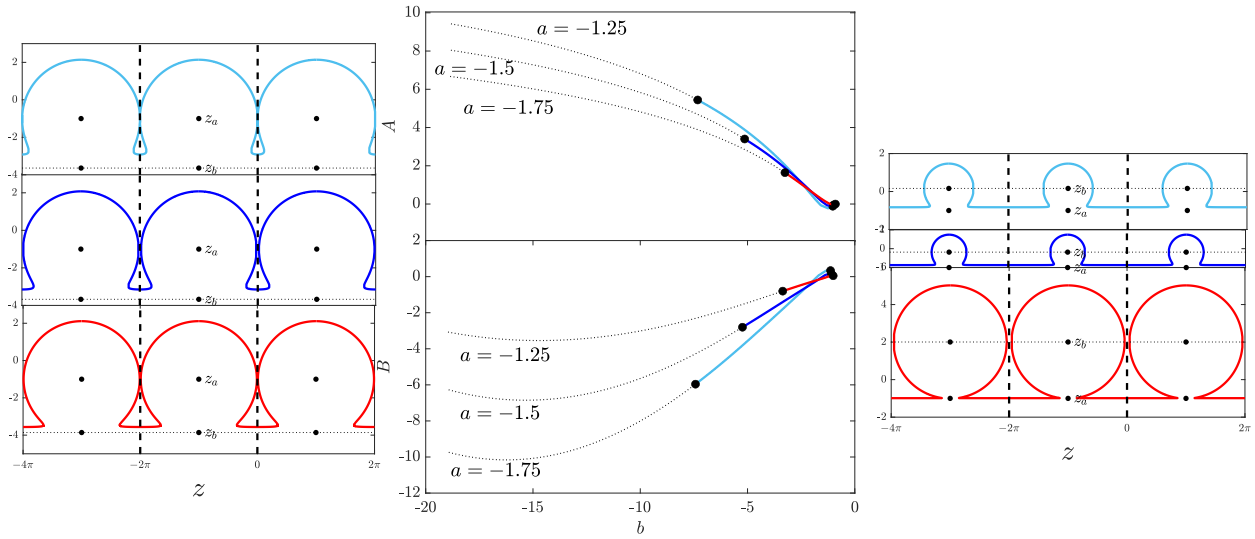

图 8：内联涡旋的解结构， $a = -1。75$， $-1。5$， $-1。25$。中上方面板显示A，底部面板显示 B，随着 b 的变化而变化。实线表示方程（32）的解，这些解对应单叶映射。细点线表示方程（32）的解，但这些解不是有效解。左侧的剖面对应主面板中最靠左的标记，右侧的剖面对应最靠右的标记。

当剖面在接近周期窗口边缘处形成尖点时，该分支在“左侧”终止，见面板 10；当界面与相邻周期窗口中的剖面相交时，则在“右侧”终止。随着 b 从 1 增大，“下”分支在周期窗口中部形成尖点时开始产生物理可接受解，见面板 12；对于我们采样的参数值，该分支持续提供物理可接受解，直至 b

增加，从而形成双峰波形，如面板 13 所示。

当 a 变小时，结构再次发生变化，如面板 (c) 所示，此时 $a = -2$。不同的根通过多个不同的折叠分岔以非平凡的方式相互作用。从较小的 $b > 1$ 开始，剖面 14 表明，当周期窗口边缘附近出现一个尖点时，“上”分支开始，经过一次折叠，最终在剖面发生自交时终止，见剖面 15。在很大的 b 值区域内不会产生物理可容许解，直到窗口边缘出现一个尖点，见剖面 16；随后出现一条解分支，最终在周期窗口中部出现尖点时终止，见剖面 18。有趣的是，这些终止点似乎与折叠分岔几乎重合。

交错涡旋系统的平衡态结构显然丰富而引人入胜。由于（32）的判别式可能改变符号，实解的数量会发生变化，从而导致解分支之间产生非平凡的相互作用。这会形成相当奇异的剖面，其中包含尖点和自交。在单个同向传播涡旋列的情况下，没有与这些现象直接对应的结构 [8]。

进一步探究时，可以改变参数 a，以识别解空间中的两个跨临界分岔。当两个折叠分岔碰撞时，便会发生这些分岔；图4中的（a_i^*，b_i^*）展示了这一现象。图11展示了（b，A）分岔图如何随着 a 从 -10 增至 -2 而演变。第一个跨临界分岔发生在小 b 处的“钩状”结构自相交并形成闭环时；见 $a = -10$ 和 $a = -9$。第一个分岔发生在 $a_1^* = -9.9336$（精确到小数点后4位）。第二个跨临界分岔发生在大 b 处的“环状”结构与下方分支相交时；见 $a = -4$ 和 $a = -3$。第二个分岔发生在 $a_2^* = -3.3575$（精确到小数点后4位）。图12展示了 $a = a_1^*$ 的分岔图，其中我们标出了曲线上产生有效映射的区段（蓝色实线）。标签标示了极限剖面。特别值得注意的是剖面19，它在周期窗口边缘有一个小而特殊的圆形尖点。最后，随着 a 从 -14 开始减小，没有观察到更多分岔；当 $a \to -\infty$ 时，分岔结构仍保持稳健。

C. $|a|,\ |b| \to \infty$的极限

极限情形 $|a|,\ |b| \to \infty$ 具有重要意义。在此极限下，我们预期自由表面会从涡旋列退至很大的正值 y，并随着涡旋所产生的变形效应减弱而变得越来越平坦。人们或许会预期，极限平衡态将是无界剪切中的冯·卡门涡街；但第 III 节已证明，此类平衡态并不存在。

考虑交错涡旋的情形，其中 $b = -a$，且 $a > 0$，令 $a \to \infty$。根据附录 A 中给出的显式表达式，可证明

$$\lambda_2, \lambda_3 \sim O(1/a), \qquad \lambda_4 \sim 4\log a - a^2, \qquad \lambda_5 \sim 4\log a + a^2, \qquad \lambda_6 = -4a^3 \log a \tag{40}$$

因此，方程（29）中的第一个方程变为

$$(4\log a - a^2)A + (4\log a + a^2)B - 4a^3 \log a \sim 0. \tag{41}$$

通过类似的分析，方程（29）中的第二个方程变为

$$(4\log a + a^2)A + (4\log a - a^2)B + 4a^3 \log a \sim 0. \tag{42}$$

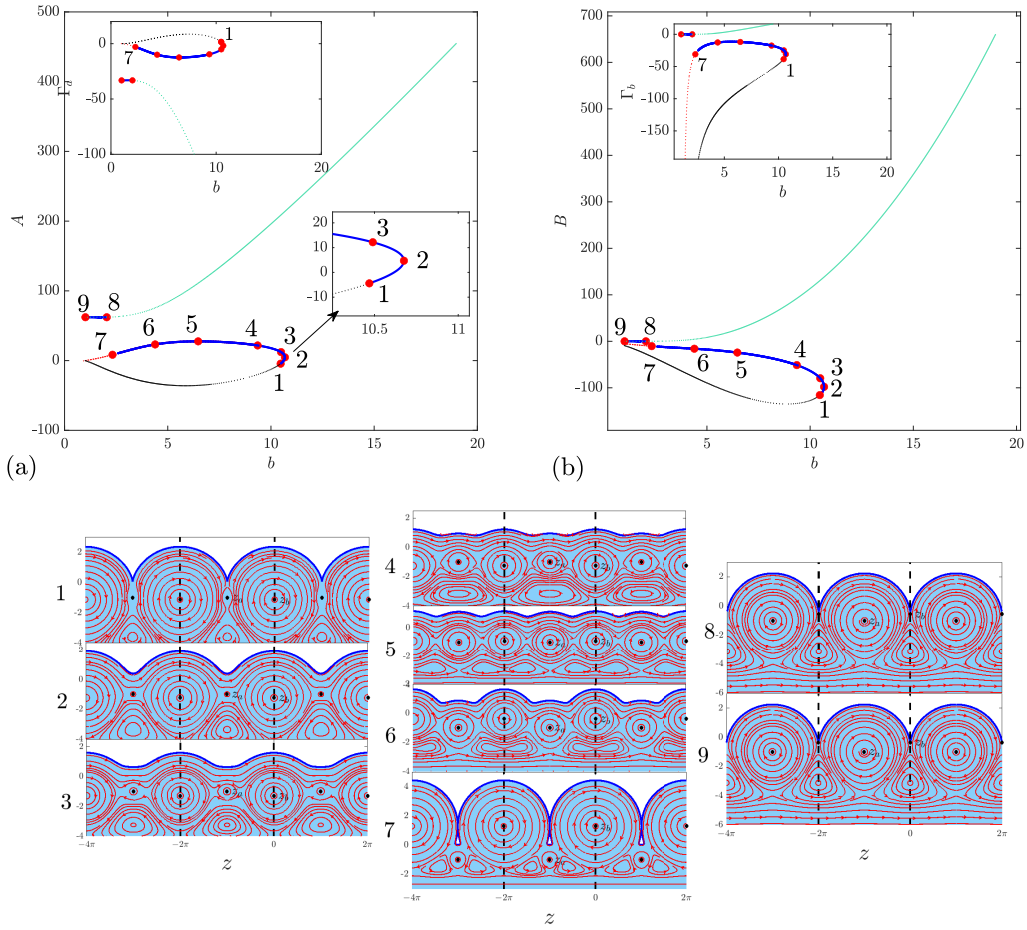

图 9：交错涡旋的解结构，$a = -7$。(a)/(b)分别显示了 A/B 随 b 变化的图像。嵌入图显示了面板 (a)/(b) 中涡旋强度 Γ_a/Γ_b 的变化。实线表示方程 (32) 的解，这些解产生单叶映射。细点线表示方程 (32) 的解，这些解不会产生有效解。图中还显示了面板 (a) 中标记为 1、2 和 3 的解所对应的流线和剖面，以及涡旋的位置。

这两个方程共同表明

$$A = -B \sim -2a \log a. \tag{43}$$

因此，当 $a \to \infty$ 时，

$$z = Z(\zeta) \sim \mathrm{i}\left[\log\zeta - \frac{2a\log a}{\zeta - a} + \frac{2a\log a}{\zeta + a}\right] + d \sim \mathrm{i}\left[\log\zeta + 4\log a\right] + d. \tag{44}$$

条件 $z_a = Z(1/a) = -\mathrm{i}$ 随即意味着

$$-\mathrm{i} = Z(1/a) = \mathrm{i}\left[\log(1/a) + \frac{Aa}{1-a^2} + \frac{Ba}{1-ab}\right] + d \tag{45}$$

这意味着

$$d \sim -\mathrm{i}(1 + 3\log a). \tag{46}$$

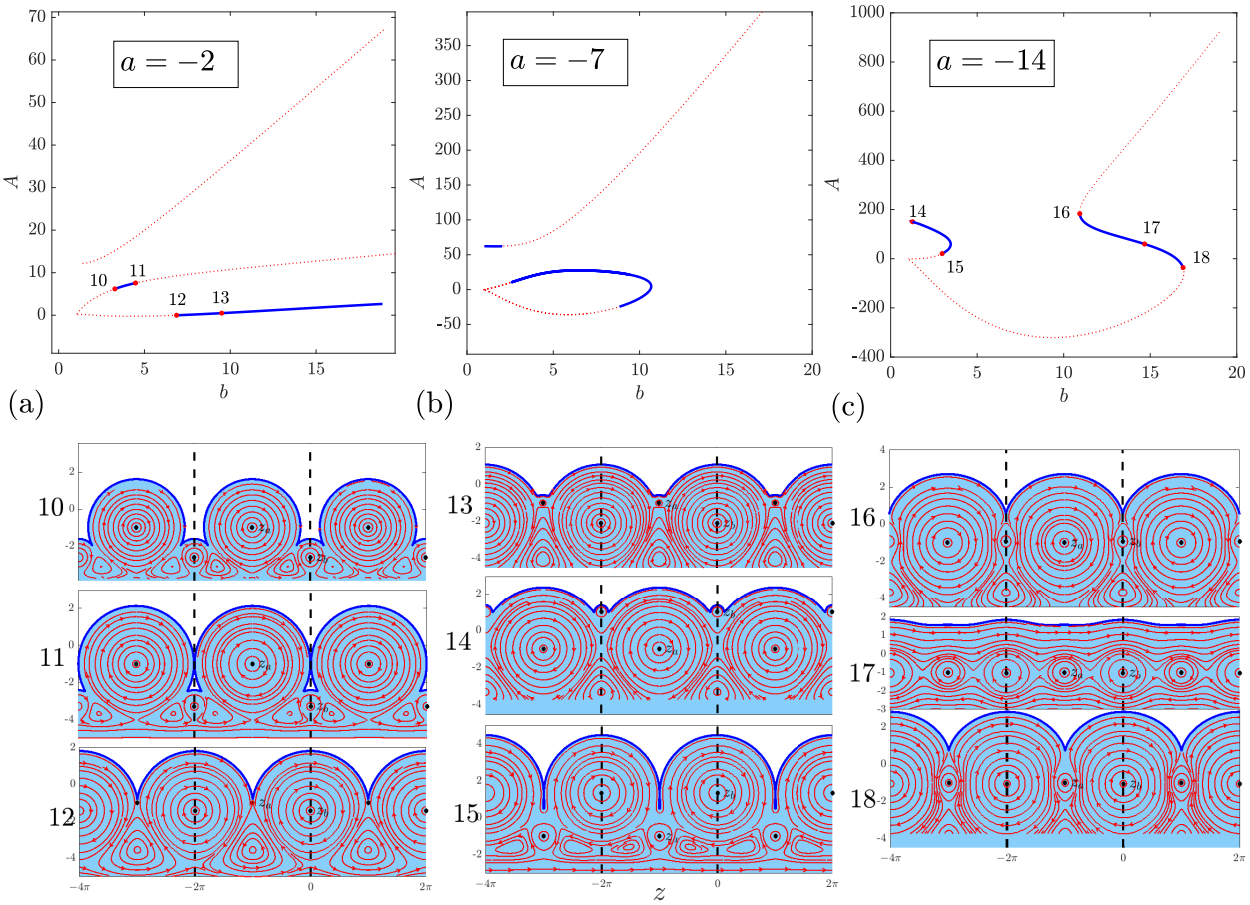

图10：交错涡旋的解结构，(a) $a=-14$，(b) $a=-7$ 和 (c) $a=-2$。实线表示式（32）的解，这些解产生单叶映射。细点线表示式（32）的解，这些解不能产生有效解。图中展示了标记为 10–18 的解对应的流线和剖面。

由（44）可得

$$Z(\zeta)\sim \mathrm{i}\left[\log\zeta+4\log a\right]+d=\mathrm{i}\left[\log\zeta+4\log a-(1+3\log a)\right]=\mathrm{i}\log(\zeta a)-\mathrm{i}. \tag{47}$$

还假设我们要求 $z_b=Z(1/b)=\pi-\mathrm{i}(1+\lambda)$，那么

$$\mathrm{i}\left[\log(1/b)+\frac{Ab}{1-ab}+\frac{Bb}{1-b^2}-1-\log(1/a)-\frac{Aa}{1-a^2}-\frac{Ba}{1-ab}\right]=\pi-\mathrm{i}(1+\lambda). \tag{48}$$

利用式（43）可由此得出 $\lambda\to 0$，因此每周期的两个涡旋趋于 $y=-1$，两者之间的距离为 π。由式（28）和式（29），

$$-\frac{\mathrm{i}\Gamma_a}{2\pi}=-\frac{AZ'(1/a)}{2a^2}\sim-\frac{\mathrm{i}A}{2a},\qquad -\frac{\mathrm{i}\Gamma_b}{2\pi}=-\frac{BZ'(1/b)}{2b^2}\sim-\frac{\mathrm{i}B}{2b}, \tag{49}$$

其中用到了这样一个事实：当 $a\to\infty$、$Z(\zeta)\sim\mathrm{i}\log\zeta+$为常数时。但这意味着

$$\Gamma_a\sim\Gamma_b=-2\pi\log a. \tag{50}$$

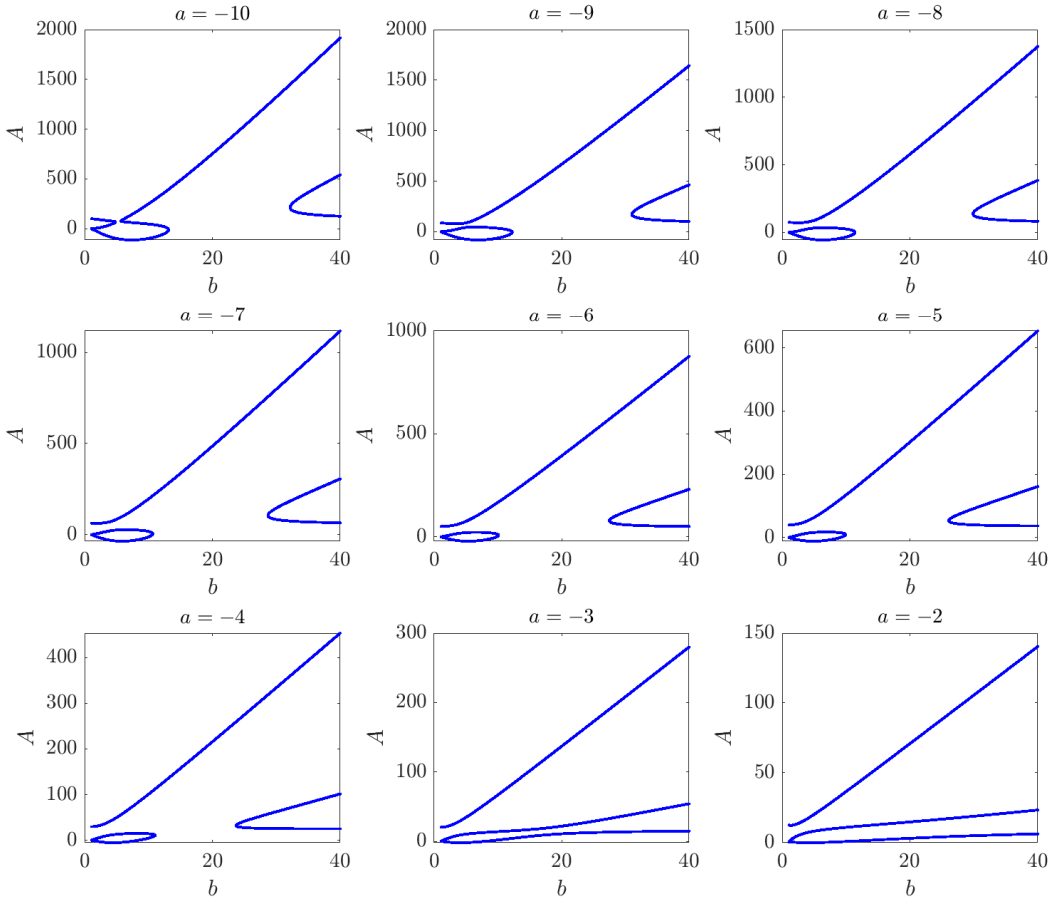

图11：当 a 从 -10 变化到 -2 时，交错涡旋的解结构。在每个面板中，绘制了 A 相对于 b 的图像，并在上方标出了 a 的值。无论这些根是否代表有效的物理映射，均予以显示。

因此，极限构型并不是在第 §III节中发现的无界剪切中的退化的交错冯·卡门涡街。相反，它是一个周期为 π、由环量为 Γ_a的相同点涡组成的单排涡旋。因此，它属于 [17]所研究的解类；事实上，容易验证，式（43）与 [17] 中的方程（22）一致，其中相应的参数为 $a \to \infty$。因此，本文发现的新交错型平衡态可以看作是从后述解分岔出的稳态“配对模态”分岔，即一种次谐波分岔；在这种分岔中，一个周期为 π 的平衡态中相邻的成对涡旋分别发生位移，从而破坏原有的周期性，转而形成本文发现的 2π-周期广义平衡态。

对共线情形的分析类似。在此情形下，对于 $b \approx a \to \infty$，极限构型为纵横比 $\lambda \to 0$ 趋于零的同列或对称冯·卡门涡街，这对应于两列涡旋彼此重合并最终相互抵消的情况。

所有这些观察结果的重要意义在于，尽管第§III 节的结果表明，在无界线性

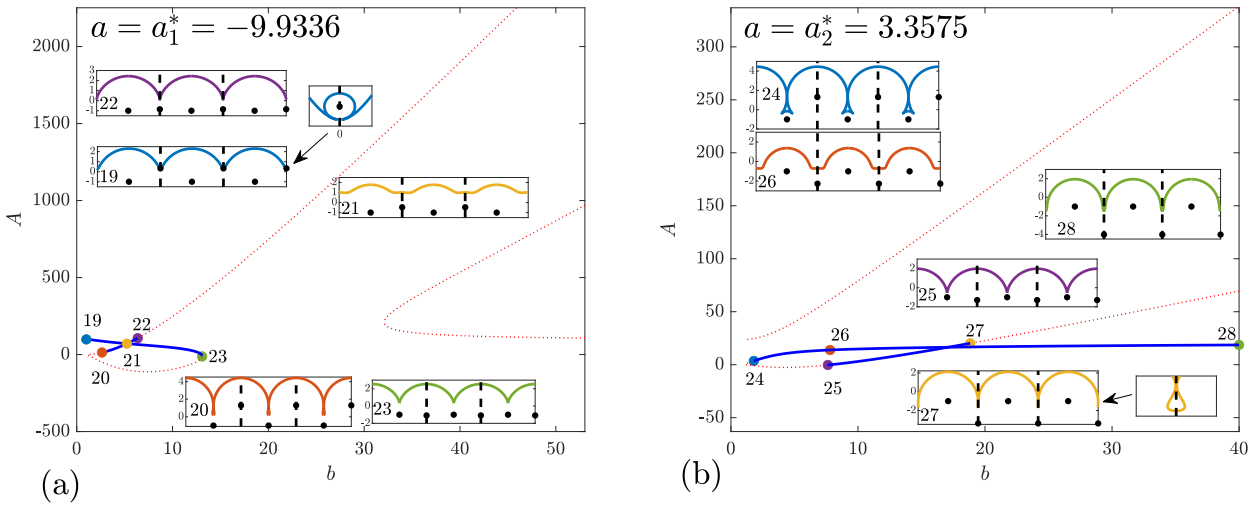

图12： $a = a_1^*$的 a_2^*的解结构。面板(a)/(b)分别展示了当 b 变化时 A 的情形。实心蓝线表示有效的物理解。极限剖面以标签标出。

剪切流中不存在推广经典冯·卡门涡街的非平凡平衡态，但当存在一个共同传播的自由表面时，却存在丰富多样的定常传播平衡态。

VII. 讨论

近年来，人们对具有涡量 [24] 的水波问题产生了浓厚兴趣，而解析解十分罕见。本文揭示了一个新的二参数解析解族，用于描述具有均匀涡量且叠加冯·卡门点涡街的稳态传播水波。这些解是对 [8]发现的具有均匀涡量和单列共行涡的水波相关早期工作的直接扩展。所有这些解都属于 [12]最近提出的具有涡量水波三类分类中的“情形1”。

构造平衡态的基础是求解一对代数非线性方程。在每周期包含两个涡旋的情况下，该方程组具有一个或三个实根，并且可以写成精确的解析形式并进行计算。同列构型的解空间更为简单，因为始终存在三个实根，但只有一个根分支能够产生单叶共形映射。当波形与相邻周期窗口中的波形相交时，这些解分支终止。对于交错构型，解空间更加复杂，因为参数空间中存在仅有一个实根的区域。对于这些构型，可能存在形成尖点的极限剖面，或界面相交的极限剖面，从而产生丰富多样的解，包括双峰波形和折叠分岔。

本文所发现的各种平衡态的稳定性显然十分值得关注，但这需要进行详细研究，本文尚未对此展开探讨。 [13] 研究了径向（涡旋）几何中类似情形1解的线性稳定性，并发现这一类精确解可以是线性稳定的。该研究所用的方法很容易调整，用于研究本文发现的新型水波平衡态的稳定性。近期， [5] 计算了 [30] 中所述波的精确线性稳定性谱——这些波符合 [12] 分类体系中的情形3——而这些方法也应当能够推广到本文介绍的解。

我们在此描述的方法可以轻松扩展到 n 水下点涡旋列。对于

n每周期涡旋，将出现一个具有 n个参数的解族，并且需要求解一个包含 n 个二次关系式的方程组。根据贝祖定理，这意味着可能存在 2^n 个解；随着 n 的增加，解空间的复杂度呈指数增长。对于 $n = 3$，使用符号代数软件包很容易求解这些方程，但闭式解的复杂性意味着，用这种方式先以符号形式求解方程组，再将结果转换为双精度数值，所需的计算机时间较长，因此效率低下。例如，选择（a、 b、 c） =（−2、 −3、 −4），其中 c 表示第三个涡旋的参数，需要耗时 200 秒才能以符号形式求得根，然后将其转换为双精度数值。有趣的是，通过扩展此处以及早期研究中所显示的退化情形，可得到 [17], 5个根，而不是预期的 8 个。迄今为止，经过有限的研究，我们观察到这些根中没有一个能产生有效的单叶映射。不过，我们将稳态n涡旋构型的存在性留作一个开放问题。

更广泛地说，值得一提的是，人们还发现了经典冯·卡门点涡街的其他扩展。 [14] 发现了所谓空心涡稳态传播涡街的解析解；空心涡是具有恒定压力的有限区域，并且其周围具有非零环量。这些解可以理解为经过正则化的冯·卡门涡街，其中奇异点涡被有限区域涡旋所取代，而与之相关的速度场处处有限。这种空心涡模型与水波问题有许多共同之处，因为空心涡边界上的边界条件同样邻接一个恒定压力区域，类似于水波与恒定压力区域之间自由表面上的边界条件。 [18] 讨论了这两个问题之间的相似性。鉴于本文发现了新的平衡解，以及 [12], 最近发现的自由表面下浸没于自由表面下的冯·卡门点涡街的新情形 2 解，因此，有必要考察 [14] 的空心涡街平衡态能否加以推广，从而按照本文研究的思路，将其纳入共行自由表面波下的稳态平移。这些问题有待进一步研究。

这里忽略了重力和表面张力的影响，但它们会如何改变此处发现的新波解，显然值得关注。将弱重力的影响作为正则摄动加入应该是可行的；若能获得主阶平衡解的闭式表达式，这项分析将会大为简化。近期已有研究对常涡量主阶解进行了此类分析，见 [28]; 另见 [2] ，该研究将弱重力纳入了无旋毛细波。类似地，利用平衡态的闭式描述，也将更容易对弱毛细效应 [6] 对此处解的影响进行渐近分析。

附录 A：系数 (32) 对应于 A 和 B

（32）的系数为

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{2a^4(a^2-1)}{(a-b)(ab-1)^3},\ \lambda_3 = \frac{2a^4(b^2-1)}{(a-b)(ab-1)^3},\ \lambda_4 = \frac{a^2(2a^2\log(a^2) - a^4 + 1)}{(a^2-1)^2},$$
$$\lambda_5 = \frac{2a^3(ab + a^2\log(a^2) - a^3b + a^2 - ab\log(a^2) - 1)}{(a-b)(ab-1)^2},\ \lambda_6 = -2a^3\log(a^2) \quad \text{(A1)}$$

and

$$\mu_2 = \frac{2b^4(b^2-1)}{(b-a)(ab-1)^3},\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = \frac{2b^4(a^2-1)}{(b-a)(ab-1)^3},$$
$$\mu_4 = \frac{2b^3(ab + b^2\log(b^2) - b^3a + b^2 - ab\log(b^2) - 1)}{(b-a)(ab-1)^2},\ \mu_5 = \frac{b^2(2b^2\log(b^2) - b^4 + 1)}{(b^2-1)^2},$$
$$\mu_6 = -2b^3\log(b^2) \quad \text{(A2)}$$

---

[1] Acheson, D J 1990《初等流体动力学》。牛津大学出版社。[2] Akers, B. F., Ambrose, D. M. & Wright, J. D. 2013 重力扰动的克拉珀波。《英国皇家学会会刊 A 辑》470，20130526。[3] Benjamin, T. Brooke 1962 任意涡量分布流场上的孤立波。《Journal of Fluid Mechanics》12，97–116。[4] Bézout, Etienne 1779《代数方程通论》。De l'imprimerie de Ph. D. Pierres。[5] Blyth, M. G. & Părău, E. I. 2022 恒定涡量无限深流体中的波的稳定性。《Journal of Fluid Mechanics》936，A46。[6] Chapman, S. J. & Vanden-Broeck, J.-M. 2002 指数渐近分析与毛细波。《工业与应用数学学会应用数学杂志》62，1872–1898。[7] Constantin, A. & Strauss, W. 2004 涡量作用下的定常周期水波精确解。Commun. Pure Appl. Math. 57，481–527。[8] Crowdy, D. & Nelson, R. 2010 涡街与剪切流的定常相互作用。《Physics of Fluids》22 (9)，096601。[9] Crowdy, D. G. 1999 一类精确多极涡。《Physics of Fluids》11，2556–2564。[10] Crowdy, D. G. 2002 有限面积涡核旋转涡阵列的精确解。《Journal of Fluid Mechanics》469，209–235。[11] Crowdy, D. G. 2002 二维欧拉方程精确多极平衡态的构造。《Physics of Fluids》14，257–267。[12] Crowdy, D. G. 2022 含水下点涡的定常行进水波精确解。《Journal of Fluid Mechanics》。[13] Crowdy, D. G. & Cloke, M. 2002 一类二维多极涡平衡态的稳定性分析。《Physics of Fluids》14，1862。[14] Crowdy, D. G. & Green, C. C. 2011 空心涡冯·卡门涡街的解析解。《Physics of Fluids》23，126602。[15] Crowdy, D. G. & Marshall, J. S. 2004 增长中的涡斑。《Physics of Fluids》16，3122。[16] Crowdy, D. G. & Marshall, J. S. 2005 涉及多个涡斑的旋转涡阵列解析解。《Journal of Fluid Mechanics》523，307–338。[17] Crowdy, D. G. & Nelson, R. B. 2010 涡街与剪切流的定常相互作用。《Physics of Fluids》22，096601。[18] Crowdy, D. G. & Roenby, J. 2014 空心涡、毛细水波与双重求积域。Fluid Dyn. Res. 46，031424。[19] Davis, P. J. 1974《施瓦茨函数及其应用》。美国数学学会。

[20] Ehrnström, M. 2008 恒定涡量斯托克斯波水波问题的一种新表述。《J. Math. Anal. Appl.》339, 4636–643.[21] Filippov, I. 1961 流体自由表面下方涡旋的运动。Prikl. Mat. Mekh. 25, 242.[22] Groves, M. D. & Wahlén, E. 2007 任意涡量分布下孤立重力毛细水波的空间动力学方法。SIAM J. Math. Anal. 39, 932–964.[23] Groves, M. D. & Wahlén, E. 2008 任意涡量分布下的小振幅斯托克斯波与孤立重力水波。Physica D 237, 1530–1538.[24] Haziot, S. V., Hur, V. M., Strauss, W. A., Toland, J. F., Wahlén, E., Walsh, S. & Wheeler, M.H. 2022 行进水波——两个世纪的涨落。Q. Appl. Math. LXXX, 317–401.[25] Hur, V. M. & Dyachenko, S. A. 2019 恒定涡量斯托克斯波：折叠、间隙与流体气泡。《Journal of Fluid Mechanics》878, 502–521.[26] Hur, V. M. & Dyachenko, S. A.2019 恒定涡量斯托克斯波：I. 数值计算。Stud. Appl. Math. 142, 162–189.[27] Hur, V. M. & Vanden-Broeck, J.-M. 2020 Crapper精确解在恒定涡量流场波动中的一种新应用。Eur. J. Mech. (B/Fluids) 83, 190–194.[28] Hur, V. M. & Wheeler, M.H. 2021 恒定涡量流场中的悬垂波与接触波。arXiv:2107.14014X .[29] Hur, V. M. & Wheeler, M. H. 2020 恒定涡量流场中的精确自由表面。《Journal of Fluid Mechanics》896, R1.[30] Hur, V. M. & Wheeler, M. H. 2020 恒定涡量流场中的精确自由表面。J. Fluid. Mech. Rapids 896, R1.[31] Le, H. 2019 关于具有有限偶极子的孤立水波的存在性与不稳定性。SIAM J. Math. Anal. 51, 4074–4104.[32] Pullin, D. I. & Grimshaw, R. H. J. 1988 两种均匀流体界面上的有限振幅孤立波。《Physics of Fluids》31, 3550–3559.[33] Saffman, P. G. 1992 涡旋动力学。剑桥大学出版社。[34] Sha, H. & Vanden-Broeck, J.-M. 1995 有自由表面剪切层或底部剪切层的有限水深水域中的孤立波。《Physics of Fluids》7, 1048.[35] Shatah, J., Walsh, S. & Cheng, C. 2013 具有紧支撑涡度的行进水波。Nonlinearity 26, 1529–1564.[36] Simmen, J. A. & Saffman, P. G. 1985 线性剪切流上的稳态深水波。Stud. Appl. Math. 73, 35–57.[37] Teles da Silva, A. F. & Peregrine, D. H. 1988 有限水深、恒定涡量水域中的陡峭稳态表面波。《Journal of Fluid Mechanics》195, 281–302.[38] Ter-Krikorov, A. M. 1958 液体表面下涡旋运动问题的精确解。Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 22, 177–200.[39] Tsao, S. 1959 线性变化流上的表面波行为。Tr. Mosk. Fiz.-Tekh. Inst. Issled. Meck. .[40] Vanden-Broeck, J.-M. 1994 有限水深、恒定涡量水域中的陡峭孤立波。《Journal of Fluid Mechanics》274, 339–348.[41] Vanden-Broeck, J.-M. 1996 无限深度水域中的恒定涡量周期波。IMA J. Appl. Math. 56, 207–217.[42] Varholm, K. 2016 含点涡的孤立重力毛细水波。Dis. Cont. Dyn. Sys. 36, 3927–3959.[43] Wahlén, E. 2009 具有临界层的稳态水波。J. Diff. Eqn. 246, 2468–2483.