arXiv:2303.18033v2 [math.MG] 5 Sep 2024

多面体的小扰动

CHRISTIAN KIPP

摘要。受几何泛函极值体的一阶条件启发，我们研究了凸体无穷小扰动的一种泛函分析概念，并在受扰体为多面体时，完整刻画了可实现扰动的集合。作为应用，我们推导出各向同性常数的多胞体极大化子所满足的一个必要条件。

目录

1. 引言 1
2. 弱导数与有符号测度 5
3. 多面体的多面体扰动 8
4. Wasserstein距离 12
5. 多面体扰动的弱极限 15
6. 对比序列的弱极限 18
7. 各向同性常数的多胞体极大化子条件 28
参考文献 29

1. 引言

在本文中，凸体是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸子集。我们在$\mathbb{R}^n$ 上赋予标准标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。 $\mathbb{R}^n$ 中凸体的空间记作 $\mathcal{K}^n$ ，满维凸体的子空间记作 $\mathcal{K}^n_n$。

在凸几何中，经常会遇到形如下式的泛函 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$$\phi(K) = g\left(\int_K f_1(x)\,\mathrm{d}x, \dots, \int_K f_m(x)\,\mathrm{d}x\right), \tag{1.1}$$

其中$\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^n$, $f_1, \dots, f_m$是连续函数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，且 $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 可微。这类泛函的例子包括体积、质心的各个分量、惯性矩、B-定理中左右两边之差，以及各向同性常数。如果我们关注与这类泛函相关的极值问题，自然会问：当 K 受到轻微“扰动”，即被另一个与 K接近的凸体取代时， ϕ会如何变化？我们不只考虑单个扰动，而是考察一整族凸体，从而暂时不必确切界定“接近”的含义。设（K_t）$_{t\in[0,1]}$ 是$\mathcal{A}$ 中的一个凸体单参数族，且导数$\mathrm{d}\,\mathrm{d}t \int_{K_t} f_i$（$x$）$\mathrm{d}x\big|_{t=0}$ 存在。那么 ϕ 沿着（K_t）$_{t\in[0,1]}$ 的导数为

—

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(K_t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\int_{K_0} f_1(x)\,\mathrm{d}x, \dots, \int_{K_0} f_m(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{K_t} f_i(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{t=0}. \tag{1.2}$$

关键词与短语。一阶条件、多面体、符号测度、弱收敛。

作为例子，我们考虑满维凸体$K \in \mathcal{K}_n^n$的各向同性常数 L_K，其定义为

$$L_K^{2n} = \frac{\det\left[\int_{K-c_K} x_i x_j \,\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{vol}(K)^{n+2}}, \quad \text{where } c_K = \frac{1}{\mathrm{vol}\, K}\int_K x \,\mathrm{d}x.$$

由于质心 c_K 会改变积分域，泛函 L_K^{2n} 并非（1.1）的形式，不过这只是一个小小的技术问题。令 $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}_n^n$ 为中心凸体类，即那些满足 $K \in \mathcal{K}_n^n$ 的 $c_K = 0$。定义 $\phi\colon \mathcal{K}_n^n \to \mathbb{R}$ 如下

$$\phi(K) = \frac{\det\left[\int_K x_i x_j \,\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{vol}(K)^{n+2}},$$

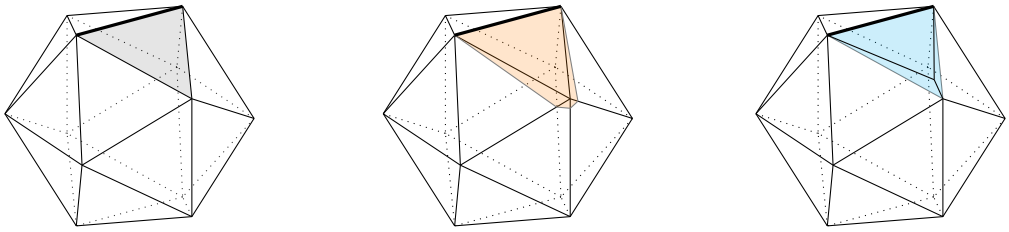
显然，对于 $K \in \mathcal{A}$，有 $\phi(K) = L_K^{2n}$。设 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{K}_n^n$ 中的一个单参数族（不一定属于 $\mathcal{A}$）。Rademacher [16] 证明了，如果 K_0 是各向同性的，即满足

$$c_{K_0} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{\mathrm{vol}\, K_0}\int_{K_0} x_i x_j \,\mathrm{d}x = \delta_{ij},$$

那么，$t \mapsto \phi(K_t)$ 和 $t \mapsto L_{K_t}^{2n}$ 在 $t = 0$ 处的导数相等，且其值为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(K_t)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{K_t}^{2n}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_0)^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{K_t}[\|x\|_2^2 - n - 2]\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{t=0}, \tag{1.3}$$

如果右侧的导数存在。利用某些单参数族$(K_t)_{t\in[-1,1]}$，这些族可以直观地描述为“铰接各个面”，Rademacher 利用由（1.3）导出的一阶条件，得出了一个引人注目的结论：使 P 达到最大值的单纯多面体 $K \mapsto L_K$ 必定是单纯形 [16]。



(a) 单纯多面体 P　(b) 面向内铰折　(c) 面向外铰折

图1. [16] 中 Rademacher 的单参数族。灰色面绕着粗线标出的棱铰折。

本文的出发点是这样一个问题：是否可以运用类似的扰动论证，来推导有关各向同性常数极值体的更多信息（类似的论证见 [17] 和 [11]）。更一般地说，我们可以问，哪些导数“可以出现在”1.3式的右侧。显然，要使这个问题有意义，就需要对族$(K_t)_{t\in[0,1]}$ 施加一些几何限制，以确保它确实描述了一个“局部”扰动。为精确定义这一概念，我们回到式1.2所给出的导数这一更一般的情形。我们对族$(K_t)_{t\in[0,1]}$ 施加的确切几何限制是，所有形如*1.2*式的导数1.2都存在，即对于所有形如 ϕ 1.1式的泛函均成立。这引出了以下定义，其中我们用 $C(\mathbb{R}^n)$ 表示连续函数的向量空间 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。

定义 1.1. 设 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ 是一个满维凸体族。对于每个$f \in C(\mathbb{R}^n)$，我们得到一个函数 $\phi_f(t)$: $[0,1] \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$\phi_f(t) \coloneqq \int_{K_t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果对每个 $f \in C(\mathbb{R}^n)$，$\phi_f(t)$ 在$t = 0$ 处可微（从右侧），则称 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 为弱可微。线性映射

$$K_0' \colon C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_f(t)\Big|_{t=0}$$

称为 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 的弱导数 。

借鉴微分几何中的类比，弱导数 K_0' 可以看作是 K_0 处于空间 $\mathcal{K}_n^n$中的一个“切向量”，它描述沿曲线 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 在 $t = 0$处的方向导数。根据定义 1.1，现在我们可以更精确地陈述问题。

问题 1.2。 哪些线性映射 $C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 可以实现为（即可以作为）一族 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 的弱导数?

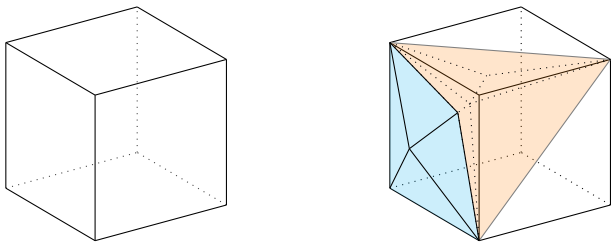
$\mathbb{R}^n$ 上的有限有符号博雷尔测度是形如 $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ 的集合函数，其中μ_1，μ_2 是定义在博雷尔 σ-代数上的概率测度，而 α_1，$\alpha_2 \in \mathbb{R}$ 是任意标量。下文中，我们将这类集合函数统称为有符号测度。定义（有符号）测度的支集颇为复杂；就本文而言，只需定义“μ 支撑于 A”表示：对所有可测集 $B \subset X \setminus A$，均有 $\mu(B) = 0$ 。设$X \subset \mathbb{R}^n$ 为一个博雷尔集。我们将支撑于 X 的有符号测度构成的向量空间记为 $\mathsf{M}(X)$，并将支撑于 X 的正（有符号）测度构成的锥记为 $\mathsf{M}^+(X)$。此外，对于 $\mu \in \mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$，我们用记号 $\mu|_X$ 表示限制测度 $\mu(\cdot \cap X)$。

利用里斯-马尔可夫-角谷表示定理，我们将在第 2 节证明，弱导数可以由 K_0 边界上的有符号测度表示。形式上，该陈述如下。

命题 1.3。 族 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 弱可微，当且仅当存在一个有符号测度 $\mu \in \mathsf{M}(\operatorname{bd} K_0)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_f(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\int_{K_t} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{K_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\operatorname{bd} K_0} f\,\mathrm{d}\mu$$

对于所有 $f \in C(\mathbb{R}^n)$。



(a) 单位立方体 $C_3 = K_0$　　(b) C_3 的扰动

图 2。 命题 1.3 断言，族$(K_t)^{t\in[0,1]}$ 弱可微，当且仅当具有密度的有符号测度族$\frac{1}{t}[\mathbb{1}_{K_t} - \mathbb{1}_{K_0}]$，$t \in [0, 1]$ 弱收敛 （见下文定义 2.5）到 K_0 的边界上的一个有符号测度，当 $t \to 0^+$。

在本文中，我们将把弱导数 K_0' 与其表示测度 $\mu \in \mathsf{M}(\operatorname{bd} K_0)$等同起来。命题 1.3 表明，定义 1.1中的弱导数与 Pflug 提出的概率测度弱导数概念相一致 [12]。Weisshaupt 在 [24] 以及 Weisshaupt 和 Pflug 在 [13]中研究了凸体的这类弱导数。关于集值映射不同导数概念的更广泛讨论，请参见 [8, 。 1]

以下术语反映了这样一个事实：在问题 1.2 中，弱导数本身才是主要研究对象，而不是实现这些弱导数的族。

定义 1.4. 如果存在一个弱可微族 $(K_t)^{t\in[0,1]}$，满足 $K_0 = K$ 和 $K_0'(f) = \int_{\mathrm{bd}\, K} f \,\mathrm{d}\mu$ 对所有 $f \in C(\mathbb{R}^n)$ 均成立，我们就称符号测度 $\mu \in \mathsf{M}(\mathrm{bd}\, K)$ 是 $K \in \mathcal{K}_n^n$ 的小扰动。若 $-\mu$ 也是 K 的小扰动，则称小扰动 μ 是可逆的。我们用 $\mathsf{W}(K)$ 表示 K 的小扰动集合，用 $\mathsf{W}^{\pm}(K)$ 表示 K 的可逆小扰动集合。

显然，定义 1.4 将方便但略显随意的“小扰动”一词具体化，以适用于我们寻找一阶条件的目的——在其他语境中，考虑弱可微族的更高阶代表，或采用完全不同的“小扰动”概念，可能更为恰当。

根据这一术语，问题1.2 可改述如下：

问题 1.5。 给定 $K \in \mathcal{K}_n^n$，集合 $\mathsf{W}(K)$ 和 $\mathsf{W}^{\pm}(K)$ 是什么？

如果符号测度 $\nu \in \mathsf{M}(X)$ 满足以下两个等价条件之一（见 [10,第 7 节5]），则称其关于另一个符号测度 $\mu \in \mathsf{M}(X)$绝对连续：

i）对于每个满足 $\mu(A) = 0$ 的博雷尔集 $A \subset X$，都有 $\nu(A) = 0$；ii）存在一个密度，即一个函数 $f \in L^1(X)$，使得对于所有博雷尔集 $A \subset X$，$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$。

令$\mathcal{H}^{n-1} \in \mathsf{M}(\mathrm{bd}\, K)$ 为（$n-1$）维豪斯多夫测度（它为每个博雷尔集 $A \subset \mathrm{bd}\, K$ 赋予相应的表面积）。对于函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$，令$\mu_f \in \mathsf{M}(\mathrm{bd}\ K)$ 表示由 $\mu_f(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$ 给出的符号测度，该等式对所有博雷尔集 $A \subset \mathrm{bd}\, K$成立。在 [24], Weisshaupt 证明了

$$\mathsf{W}(K) \supset \{\mu_f \in \mathsf{M}(\mathrm{bd}\, K) \mid f\colon K \to \mathbb{R} \text{ is Lipschitz continuous and concave}\}.$$

我们将在 K 为多面体这一特殊情形下推广 Weisshaupt 的结果，即它是有限集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的凸包。我们分别用 $\mathcal{P}^n$ 和 $\mathcal{P}_n^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中多胞体和满维多胞体的空间。关于多胞体组合理论的全面概述，参见 [26]。

定义 1.6。 设 $\alpha \in (0,\ 1)$ 且 $C \subset \mathbb{R}^n$ 凸。若函数 $f\colon C \to [0,\infty)$ 满足 f^α 为凸函数，则称其为 α-凸 函数。对于 $\alpha = 1$，我们去掉非负性要求，即 1-凸函数就是凸函数 $C \to \mathbb{R}$。设 $P \in \mathcal{P}^n$。对于 $\alpha \in (0,1]$, ，记 $\mathsf{M}_\alpha^{\mathrm{cvx}}(P)$ 为所有关于 $\mathrm{vol}_{\dim P} \in \mathsf{M}$({v24）绝对连续且具有 α-凸密度 f: relint $P \to \mathbb{R}$ 的有符号测度所组成的空间。

现在我们可以陈述主要结果了，它完整刻画了 $W(P)$ 和 $\mathsf{W}^{\pm}(P)$（ $P \in \mathcal{P}_n^n$）。此处及下文中，$\Phi(P)$ 表示 P 的真面集，而 $\Phi_m(P)$ 表示维数为 m 的面集。

定理 1.7。 设 $P \in P_n^n$。P 的小扰动集由以下直和给出

$$\mathsf{W}(P) = \sum_{F\in\Phi(P)} -\mathsf{M}^{\mathrm{cvx}}_{(n-\dim F)^{-1}}(F). \tag{1.4}$$

该集合是一个凸锥。

转化为雷诺输运定理的框架（例如参见 [18]）后，定理1.7 断言，描述 $\mathrm{bd}\, K_t$ 演化的速度函数在每个面 $F \subset P$的相对内部上必须是凹的。关于低维面，定理 1.7表明，小扰动在面 $F \subset P$ 上的限制具有

维数 $F < n-1$是一个负测度，其密度为 f，满足 $-f$是$(n-$维数 $F)^{-1}$-凸的。这个结论类似于余凸集的反向布伦-明可夫斯基不等式 [9, 20, 7]。

定理1.7 导出以下直接推论。

推论 1.8. 设 $P \in P_n^n$。 P 的可逆小扰动集合为

$$\mathsf{W}^{\pm}(P) = \sum_{F \in \Phi_{n-1}(P)} [\mathsf{M}_1^{\mathrm{cvx}}(F) \cap -\mathsf{M}_1^{\mathrm{cvx}}(F)].$$

该集合是一个维数为 $\#\Phi_{n-1}(P) \cdot n$的向量空间。

本文其余部分的组织如下：在第2节中，我们讨论一些泛函分析预备知识，并证明弱导数可以由符号测度表示。随后的四节致力于证明定理1.7。在第3节中，我们构造多面体的多面体扰动，它们由面上的分片仿射密度给出。在第4节中，我们讨论Wasserstein距离，它使我们能够在紧集上度量弱收敛。利用这一工具，我们在第5节中证明，多面体扰动的集合在我们声称为$\mathsf{W}(P)$的集合中稠密。为完成主要结果的证明，我们在第6 节中证明，不存在其他的小扰动。最后，我们在第7节中讨论各向同性常数的多胞体极大化子的一个必要条件。

2. 弱导数与有符号测度

本节研究弱可微族的一些基本性质。利用里斯-马尔可夫-角谷表示定理，我们证明弱导数对应于 $\mathrm{bd}\, K_0$ 边界上的有符号测度。

通常在$\mathcal{K}^n$ 上赋予豪斯多夫度量，其定义为

$$d_{\mathrm{H}}(K,L) := \max\left\{\max_{x\in K} \operatorname{dist}(x,L), \max_{x\in L} \operatorname{dist}(x,K)\right\}.$$

在$\mathcal{K}^n$ 上还可以根据对称差 $K\triangle L := K\backslash L \cup L\backslash K$定义另一种度量。它称为对称差度量 ，定义为

$$d_{\mathrm{S}}(K,L) := \mathrm{vol}(K\triangle L).$$

文献 [22]已证明， d_{H} 和 d_{S} 在$\mathcal{K}^n$上诱导相同的拓扑。

T以下引理表明，弱可微族 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 是连续的 s at $t = 0$ 关于 d_{H} 和 d_{S}。

引理 2.1。 设 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 弱可微。

(i) 我们有

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\mathrm{vol}(K_t\triangle K_0)}{t} < \infty.$$

特别地，当 $t \to 0$时， K_t 在豪斯多夫度量下收敛于 K_0 ，由此得到以下结论：

(ii) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $t_\varepsilon \in (0,1]$ ，使得对于所有 $t \le t_\varepsilon$，都有 $K_t \subset K_0 + \varepsilon B_n$ ，其中 B_n 表示半径为 *1* 的中心欧几里得球。*(iii)* 对于每个凸体 $L \subset$ 内 K_0，存在一个 $t_L \in (0,1]$ ，使得对于所有 $t \le t_L$，都有 $L \subset K_t$。

证明。 我们假设 (i) 的否定，这等价于存在一个递减序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于零，且满足 $\mathrm{vol}(K_{t_i}\triangle K_0) \ge 2^i \cdot t_i$ 对所有$i \in \mathbb{N}$。不失一般性，设 $0 \in \operatorname{int} K$。下面我们将使用 $\|\cdot\|_{K_0}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的规范函数 K_0，其定义为

$$\|x\|_{K_0} := \min\{t \ge 0 \mid x \in tK_0\}.$$

我们设立

$$M_i \coloneqq \{x \in K_{t_i} \triangle K_0 \,|\, \|x\|_{K_0} \notin [1-r_i, 1+r_i]\} \quad \text{for } i \in \mathbb{N}.$$

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个 $r_i \in (0,\ 1)$，使得 $\operatorname{vol}(M_i) \geq 2^{i-1} \cdot t_i$。显然，可以选取数值 r_i，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $r_{i+1} < r_i$。序列 $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 将 $(0,\ 1)$ 划分为半开子区间

$$I_i \coloneqq \{s \in (0,1) \mid r_{i+1} \leq s < r_i\} \text{ for } i \geq 1; \quad \text{and } I_0 \coloneqq \{s \in (0,1) \mid r_1 \leq s\}.$$

我们通过令 $f(r_i) \coloneqq \frac{1}{i}$，$f(0) \coloneqq 0$，$f(1) \coloneqq 1$，并在区间 I_i 上作线性插值，来定义 $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$。由于 f 连续，函数 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$g(x) \coloneqq \operatorname{sgn}(\|x\|_{K_0} - 1) \cdot f(\min\{|\|x\|_{K_0} - 1|, 1\})$$

也连续。根据构造，我们有 $g(x) \geq \frac{1}{i}$ 在 $M_i \cap K_0$ 上，且 $g(x) \leq -\frac{1}{i}$ 在$M_i \setminus K_0$ 上,- 从而得到估计

$$\frac{1}{t_i}\left(\int_{K_{t_i}} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{K_0} g(x)\,\mathrm{d}x\right) \geq \frac{1}{t_i \cdot i} \operatorname{vol} M_i \geq \frac{2^{i-1}}{i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

这表明函数 $\phi_g(t)$ （定义 1.1 中的函数）在 $t = 0$ 处从右侧不可微。

关于(ii) 的结论是定义 d_{H}的直接推论；对于(iii) 参见 [21,引理 1.8。18]□

为了陈述里斯-马尔可夫-角谷表示定理，我们回顾一些泛函分析的预备知识。

设 $X \subset \mathbb{R}^n$。我们用 $C_b(X)$ 表示由有界连续函数$X \to \mathbb{R}$组成的巴拿赫空间，并赋予范数 $\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|$。对于我们的目的而言， $C_b(X)$ 的两个子空间是相关的：

i) $C_b(X)$ 中包含所有函数 f 且其支集

$$\operatorname{supp} f \coloneqq \operatorname{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

为紧集的子空间记为 $C_c(X)$。赋范空间 $C_c(x)$ 不是完备的。

ii) $C_c(x)$ 的闭包记为 $C_0(X)$，其中包含所有满足以下意义下在无穷远处消失的函数 f：对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 $K \subset X$，使得对于所有 $x \notin K$，都有 $|f(x)| < \varepsilon$。

$C_0(X)$ 的（拓扑）对偶空间记作 $C_0(X)^*$，由所有连续线性泛函 $C_0(X) \to \mathbb{R}$组成。当且仅当线性泛函 $h\colon C_0(X) \to \mathbb{R}$ 的算子范数

$$\|h\|_* \coloneqq \sup\{|h(f)| \mid f \in C_0(X), \|f\|_\infty \leq 1\}$$

有限时，它是连续的。

对于 $X \subset \mathbb{R}^n$，设 $\mu \in \mathrm{M}(X)$ 是一个符号测度。哈恩分解定理 [10,定理 7.43] 断言，存在一个集合 $X^+ \subset X$，使得

i) 对所有 $A \subset X^+$，均有 $\mu(A) \geq 0$；以及

ii) 对所有 $A \subset X^-$，均有 $\mu(A) \leq 0 \coloneqq X \setminus X^+$。

划分 (X^+, X^-) 称为关于 μ 的 X 的哈恩分解。令$\mu^+ \coloneqq \mu(\,\cdot \cap X^+)$，以及 $\mu^- \coloneqq -\mu(\cdot \cap X^-)$，则有 $\mu = \mu^+ - \mu^-$。数对 (μ^+, μ^-) 称为 μ 的*Jordan* 分解；它不取决于所选的具体哈恩分解（见 [10, 推论 7.44]）。正测度 $|\mu| \coloneqq \mu^+ + \mu^-$ 称为 μ 的全变差。

定义 2.2. 设 $\mu \in \mathrm{M}(X)$ 是一个符号测度，其 Jordan 分解为 (μ^+, μ^-)。表达式

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} \coloneqq |\mu|(X) = \mu^+(X) + \mu^-(X)$$

在 $\mathsf{M}(X)$ 上定义了一个范数（参见 [10, 推论 7。45]），称为全变差范数。

下文主要讨论相对于某个仿射子空间上的体积（勒贝格测度）绝对连续的有符号测度。对于博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^n$ and $f \in L^1(A)$，我们使用记号 $[f]_{\mathsf{M}(A)}$ 表示 A 上的有符号测度，该测度相对于 $\mathrm{vol}_{\dim \operatorname{aff} A}$ 绝对连续，且密度为 f。如果f 仅定义在 A的某个子集上，我们将 f 到 A 的平凡延拓作为密度。此外，如果 $\operatorname{aff} A = \mathbb{R}^n$，我们简写为 $[f]_{\mathsf{M}}$。对于此类有符号测度，我们有

$$\|[f]_{\mathsf{M}(A)}\|_{\mathrm{TV}} = \|f\|_{L^1(A)}.$$

现在我们陈述里斯-马尔可夫-角谷表示定理的一个特殊情形；例如参见 [6, 定理 2.26] 或 [1,定理 14.14]。

定理 2.3（里斯-马尔可夫-角谷）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为开集或闭集。对于 $\mu \in M(X)$，令 $I_\mu \colon C_0(X) \to \mathbb{R}$ 由 $I_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$ 给出。映射 $\mu \mapsto I_\mu$ 是赋范空间 $(M(X), \|\cdot\|_{\mathrm{TV}})$ 与 $(C_0(X)^*, \|\cdot\|_*)$ 之间的等距同构。

由于 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密，连续线性泛函 $C_0(X) \to \mathbb{R}$ 由其在 $C_c(X)$ 上的取值唯一确定。特别地， $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中可以分离点*。

注 2.4。定理 2.3 通常针对更一般的拓扑空间 X，即局部紧豪斯多夫空间来表述。对于任意局部紧豪斯多夫空间，映射$\mu \mapsto I_\mu$ 并非单射，除非我们要求表示测度 μ 是正则的，也就是说，我们要求对于每个博雷尔集 $A \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 K 和一个开集 U，使得 $K \subset A \subset U$ 且 $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ [6, 定义 2.21]。在我们的情形下，可以省略这一要求，因为根据 [4, (13.7.9)] 和 [4, (13.7.7)]， $\mathbb{R}^n$ 上的每个正有限测度都是正则的，因此，根据 Jordan 分解， $\mathbb{R}^n$ 上的每个符号测度都是正则的。

定义 2.5。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为开集或闭集，且 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{M}(X)$ 中的一个序列。我们称 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到 $\mu \in \mathsf{M}(X)$，并记作 $\mu_i \overset{w}{\to} \mu$ 或 $\operatorname{wlim}_{i\to\infty} \mu_i = \mu$，如果

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \tag{2.1}$$

对所有 $f \in C_b(X)$ 都成立。

由定理 2.3 可知，弱极限是唯一的。

注 2.6。如果要求条件 (2.1) 分别对所有 $f \in C_c(X)$ 或所有 $f \in C_0(X)$ 成立，就会得到另外两种收敛概念。就本文而言，这些概念之间的差异并不重要，因为在考虑给定凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的小扰动时，我们可以将注意力限制在 $\mathsf{M}(K + B_n)$ 中的有符号测度上。关于非紧支撑情形下遇到的测度参数族可微性的一些结果，见 [25,例 2.12–例 2.15]。关于测度空间上的拓扑和收敛的一般比较，包括由函数 $C_b(X)$ 和 $C_c(X)$ 分别诱导的收敛概念，参见 [4,第 13.20 节：概率。

命题的证明 *1.3*。 我们只需证明，每个弱导数都可以表示为一个符号测度 $\mu \in \mathsf{M}(\operatorname{bd} K_0)$。根据定理 2.3，这相当于证明 K_0' 可以写成

$$K_0' = h \circ (f \mapsto f|_{\operatorname{bd} K_0}),$$

其中 h 是连续线性泛函 $C(\operatorname{bd} K_0) \to \mathbb{R}$。令

$$C \coloneqq \limsup_{t\to 0} \frac{\|[\mathbb{1}_{K_t} - \mathbb{1}_{K_0}]_{\mathsf{M}}\|_{\mathrm{TV}}}{t}.$$

由引理 2.1(i)，我们有 $C < \infty$。令 $f \in C(\mathbb{R}^n)$。我们有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_f(t)\Big|_{t=0}\right| = \lim_{t\to 0^+}\left|\frac{1}{t}\left(\int_{K_t} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{K_0} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \leq C\cdot\|f|_{K_0+B_n}\|_\infty,$$

其中最后一步由引理 2.1(ii) 得出。这表明 K_0' 可以写成

$$K_0' = h\circ(f\mapsto f|_{K_0+B_n}),$$

其中，h 是一个连续线性泛函 $C(K_0+B_n)\to\mathbb{R}$。根据定理 2.3，存在一个 $\mu\in\mathsf{M}(K_0+B_n)$，使得对所有 $f\in C(\mathbb{R}^n)$，$K_0'(f) = \int_{K_0+B_n} f\,\mathrm{d}\mu$。我们考虑任意函数 $f\in C_c(\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bd}K_0)$。由于 $\operatorname{supp} f$ 是紧集，因此满足 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} f,\operatorname{bd} K_0)>0$。我们得到由下式给出的平凡延拓 $\overline{f}$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x\notin\operatorname{bd}K_0,\\ 0 & \text{if } x\in\operatorname{bd}K_0,\end{cases}$$

是连续的，并且利用引理 2.1(ii)–(iii)，可得 $\int[\mathbb{1}_{K_t}-\mathbb{1}_{K_0}]f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 对所有 t小于某个 $t_f>0$ 都成立。因此，我们有

$$\int f\,\mathrm{d}\mu|_{\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bd}K_0} = \int\overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\int[\mathbb{1}_{K_t}-\mathbb{1}_{K_0}]\overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $C_c(\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bd}K_0)$ 将 $C_0(\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bd}K_0)^*$中的点分离开来，这表明 $\mu|_{\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{bd}K_0}$ 是零测度。因此，μ 支撑于 $\operatorname{bd}K_0$。□

3. 多胞体的多面体扰动

本节开始对定理 1.7 的证明进行构造性部分的论述。我们构造的基本组成部分是多面体扰动，它们由多胞体边界上的密度 P 描述，这些密度在 相对内部 F 上的限制对每个面都是分片仿射且凹的 $F\subset P$。利用一个初等构造，我们证明每个多面体扰动都可以实现为一个弱导数。

仿射子空间上的一个仿射泛函 是一个仿射函数 $H\subset\mathbb{R}^n$ $H\to\mathbb{R}$。

定义 3.1。设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 为凸集。凹函数 $f\colon K\to\mathbb{R}$ 称为多面体的，如果它具有如下形式

$$f(x) = \min_{h\in\mathcal{H}} h(x) \tag{3.1}$$

对于仿射泛函 $\operatorname{aff}(K)\to\mathbb{R}$的有限族$\mathcal{H}$。给定一个多面体凹函数$f\colon K\to\mathbb{R}$，存在唯一的族$\mathcal{H}$，它以不可约 的方式描述 f，即对于每个 $h\in\mathcal{H}$，存在一个 $x\in K$ 使得

$$h(x) < \min_{g\in\mathcal{H}\setminus\{h\}} g(x).$$

假设 $\mathcal{H}$ 是不可约的，表达式（3.1）可以理解为描述一个多面体函数 $f\colon\operatorname{aff}(K)\to\mathbb{R}$。我们称 f 为 规范延拓，即 f。

本节的主要结果如下。

命题 3.2。设 $P\in\boldsymbol{P}_n^n$。此外，设 $f\colon\operatorname{bd}P\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数，并具有如下性质：对于每个面 $F\subset P$，限制 $f|_{\operatorname{relint}F}$是凹的且为多面体函数。于是有

$$\sum_{F\in\Phi_{n-1}(P)}[f|_F]_{\mathsf{M}(F)}\in\mathsf{W}(P). \tag{3.2}$$

我们将形如 (3.2) 的 多面体扰动 称为多面体扰动，并将 P 的多面体扰动集合记为 $\mathsf{W}^\triangleleft(P)$。

以下构造背后的几何思想是选择一个一般方向$v \in \mathbb{S}^{n-1}$，为f的描述中的每个仿射泛函引入一个冗余约束，并以这样的方式移动相应的超平面，使得沿v 方向的速度与 f 在 P 的相应边界点处的取值成正比。

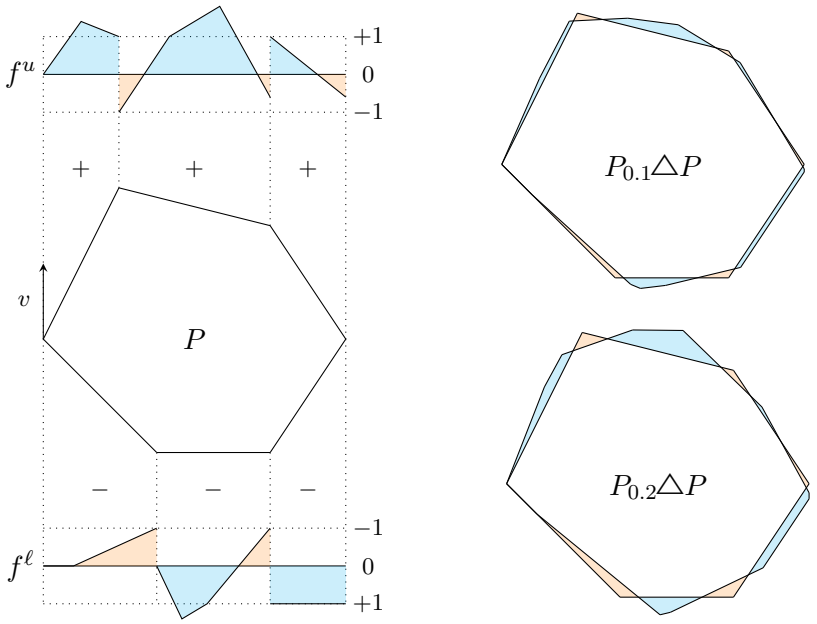
构造 3.3。 设 P 和 f 如命题 3.2 所述，并假设 P 由下式给出

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u_i, x\rangle \le b_i \text{ for } i \in [m]\}$$

对于 $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{S}^{n-1}$和 $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$。我们假设该描述是不可约的，并将外法向量为 u_i 的面记为 F_i, $i \in [m]$。设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 相对于 P 处于一般位置，其含义是$\langle u_i, v\rangle \neq 0$ 对 $i \in [m]$成立。令

$$I^+ := \{i \in [m] \mid \langle u_i, v\rangle > 0\} \quad \text{and} \quad I^- := \{i \in [m] \mid \langle u_i, v\rangle < 0\}.$$

由于 v 处于一般位置，因此有 $I^- = [m] \setminus I^+$。



(a) P 和 f （b）$(P_t)_{t\in[0,1]}$中的两个元素

图 3。 构造 3.3 的示意图。子图 (A) 指的是引理 f^u 和 f^ℓ 3.7 中引入的函数。集合 $P_{0.1} \setminus P$和 $P_{0.2} \setminus P$以青色阴影表示，而集合 $P \setminus P_{0.1}$ 和 $P \setminus P_{0.2}$ 以橙色阴影表示。

D记到 $v^\perp$ 上的正交投影为:= $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x\rangle = 0\}$ by $\pi_{v^\perp}$，我们定义 e

$$h_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h_i(x) := \frac{-\langle u_i, \pi_{v^\perp}(x)\rangle + b_i}{\langle u_i, v\rangle} \quad \text{for } i \in [m].$$

于是 P 可以写成

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x\rangle \le h_i(x) \text{ for } i \in I^+,\ \langle v, x\rangle \ge h_i(x) \text{ for } i \in I^-\}.$$

设 $i \in I$。由于 v 处于一般位置，限制 $\pi_{v^\perp}|_{\operatorname{aff} F_i}$ 是一个双射 aff $F_i \to v^\perp$。我们将此双射记为 π_i，并通过以下方式定义函数 f_i: $v^\perp \to \mathbb{R}$

$$f_i(x) := \frac{\overline{f|_{\operatorname{relint} F_i}}(\pi_i^{-1}(x))}{|\langle u_i, v\rangle|}, \tag{3.3}$$

其中 $f|_{\operatorname{relint} F_i}$: aff $F_i \to \mathbb{R}$ 是 $f|_{\operatorname{relint} F_i}$ 的规范延拓。

现在我们定义两个函数 $u, \ell\colon\ v^\perp \times [0,1] \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$u(x,t) := \min_{i\in I^+} [h_i(x) + t f_i(x)] \quad \text{and} \quad \ell(x,t) := \max_{i\in I^-} [h_i(x) - t f_i(x)]\,. \tag{3.4}$$

By c构造，$u(\cdot\ t)$ 和 $-\ell(\cdot\ t)$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都是凹的且为多面体的。因此 e,

$$\tilde{P}_t := \left\{ x \in \pi_{v^\perp}^{-1}(P) \,\middle|\, \ell(\pi_{v^\perp}(x), t) \le \langle v, x\rangle \le u(\pi_{v^\perp}(x), t) \right\}$$

当 $t \in [0,1]$ 时，要么是多面体，要么是空集。通过设定，我们得到一族满维多胞体 $(P_t)_{t\in[0,1]}$，它满足 $P_0 = P$

$$P_t := \begin{cases} \tilde{P}_t & \text{if } \dim \tilde{P}_t = n, \\ P & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \lozenge$$

注 3.4. 为便于后文引用，我们指出，构造 3.3 具有如下性质：对于任意 $t \in [0,1]$，$P_t \setminus P$的体积由下式给出

$$\int_{\pi_{v^\perp}(P)} \max\left\{ u(x,t) - \min_{i\in I^+} h_i(x), 0 \right\} \mathrm{d}x + \int_{\pi_{v^\perp}(P)} \max\left\{ \max_{i\in I^-} h_i(x) - \ell(x,t), 0 \right\} \mathrm{d}x$$

因此，利用（3.4），满足如下界

$$\operatorname{vol}(P_t \setminus P) \le \sum_{i\in[m]} \int_{\pi_{v^\perp}(F_i)} \max\{t f_i(x), 0\}\,\mathrm{d}x = t \cdot \left(\sum_{F\in\Phi_{n-1}(P)} [f|_F]_{\mathsf{M}(F)} \right)^+ .$$

例 3.5. 设 $P \subset \mathbb{R}^3$ 是一个单纯多面体，且设 $v \in \mathbb{S}^2$ 相对于 P处于一般位置。此外，设 $F \subset P$ 是一个面。为简单起见，我们假设$\pi_{v^\perp}(F) \subset \operatorname{relint}(\pi_{v^\perp}(P))$。用以下函数 3.3 执行构造 f，我们得到 P的若干基本扰动。

(i) 平移 F：若 $f = \mathbb{1}_F$，则族 $(P_t)_{t\in[0,1]}$ 对应于以恒定速度对面 F 进行连续的向外平行移动。(ii) 铰接 F：设 $E \subset F$为一条棱，并令 $f := \mathbb{1}_F \cdot \operatorname{dist}(\cdot\ E)$。则族 $(P_t)_{t\in[0,1]}$ 对应于使面 F 绕棱 E向外转动，其中~在时刻 $t \in [0,1]$，F 与铰接面 F_t 之间的二面角等于 $\arctan(t)$。(iii) 在 F上叠加一个棱锥：若 $f := \mathbb{1}_F \cdot \operatorname{dist}(\cdot, \operatorname{relbd} F)$，则族 $(P_t)_{t\in[0,1]}$对应于在面 F上叠加棱锥 Q 的操作，其中 Q 的顶点以恒定速度向外移动。

回顾推论1.8，我们注意到(i) 和(ii) 描述了可逆小扰动，而(iii) 不可逆。

命题3.2 由以下断言推出。

断言 3.6. 族 $(P_t)_{t\in[0,1]}$ 来自构造*3.3* 是弱可微的，且

$$P_0' = \sum_{F\in\Phi_{n-1}(P)} [f|_F]_{\mathsf{M}(F)} \cdot$$

在继续证明断言 3.6之前，我们先证明一些辅助结论。

引理 3.7. 设 P和 f 如命题 *3.2* 中的 $f_i, i \in [m]$所述，均如构造*3.3*中所述。我们定义两个函数 $v^\perp \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f^u := \sum_{i\in I^+} f_i \cdot \mathbb{1}_{\pi_{v^\perp}(\operatorname{relint} F_i)} \quad \textit{and} \quad f^\ell := \sum_{i\in I^-} f_i \cdot \mathbb{1}_{\pi_{v^\perp}(\operatorname{relint} F_i)} \cdot$$

函数 f^u 和 f^ℓ 以及函数 u，ℓ 来自构造*3.3*，具有以下性质：

(i) 对于几乎所有的 $x \in \pi_{v^\perp}(P)$，存在一个 $\varepsilon_x > 0$ 使得

$$u(x,t) = u(x,0) + tf^u(x) \quad \textit{and} \quad \ell(x,t) = \ell(x,0) - tf^\ell(x)$$

对于 $t \in [0, \varepsilon_x]$。

(ii) 给定 P 和 f，存在一个 $C > 0$ 使得

$$\max\{|u(x,t) - u(x,0)|, |\ell(x,t) - \ell(x,0)|\} \le Ct$$

for $t \in [0,1]$ *and* $x \in \pi_{v^\perp}(P)$.

证明。对于 (i)，我们首先注意到，$N^+ := \pi_{v^\perp}(P) \setminus (\bigcup_{i\in I^+} \pi_{v^\perp}$(相对内部 F_i)) 和 $N^- := \pi_{v^\perp}(P) \setminus (\bigcup_{i\in I^-} \pi_{v^\perp}$(相对内部 F_i)) 满足 $\mathrm{vol}_{n-1}(N^+) = \mathrm{vol}_{n-1}(N^-) = 0$。令 $x \in \pi_{v^\perp}(P) \setminus (N^+ \cup N^-)$。存在唯一的 $i \in I^+$ 使得 $x \in \pi_{v^\perp}$(相对内部 F_i)。令 $f_{\min} := \min_{j\in I^+} f_j(x)$，以及 $h_{\min} := \min_{j\in I^+\setminus\{i\}} h_j(x)$。由于 $x \in \pi_{v^\perp}$(相对内部 F_i)，我们有 $h_i(x) < h_{\min}$。如果 $f_{\min} = f_i(x)$，那么对于所有 $t \ge 0$，$u(x,t) = h_i(x) + tf_i(x)$ 均成立，并且我们可以任意选择 $\varepsilon_x^+ > 0$。否则，选择 $\varepsilon_x^+ := \frac{h_{\min} - h_i(x)}{f_i(x) - f_{\min}}$ 意味着

$$h_i(x) + tf_i(x) \le h_{\min} + tf_{\min} \le \min_{j\in I^+\setminus\{i\}} h_j(x) + f_j(x) \quad \text{for } t \in [0, \varepsilon_x^+].$$

在两种情形下，我们都有

$$u(x,t) = h_i(x) + tf_i(x) = u(x,0) + tf^u(x) \quad \text{for } t \in [0, \varepsilon_x^+].$$

通过类似的论证，我们找到一个 $\varepsilon_x^- > 0$，使得 $\ell(x,t) = \ell(x,0) - tf^\ell(x)$ 对于 $t \in [0, \varepsilon_x^-]$ 成立。令 $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_x^+, \varepsilon_x^-\}$，即可得到所要证明的结论。

对于 (ii)，我们令 $C := \max_{i\in I} \max_{x\in\pi_{v^\perp}(P)} |f_i(x)|$。由于 I 是有限的，且 $\pi_{v^\perp}(P)$ 是紧的，因此我们有 $C < \infty$。令 $x \in \pi_{v^\perp}(P)$，并令 $t \in [0,1]$。我们有

$$u(x,t) \ge \min_{i\in I^+} h_i(x) + t \cdot \min_{i\in I^+} f_i(x) \ge u(x,0) - Ct$$

and

$$u(x,t) \le \min_{i\in I^+} h_i(x) + t \cdot \max_{i\in I^+} f_i(x) \le u(x,0) + Ct,$$

这意味着 $|u(x,t) - u(x,0)| \le Ct$。$|\ell(x,t) - \ell(x,0)|$ 的界的证明类似。 □

现在我们可以验证，由构造 $(P_t)^{t\in[0,1]}$ 得到的多面体族3.3 实现了由密度 f给出的小扰动。

命题的证明 *3.6*。设 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 为任意元素。令

$$G(t) := \frac{1}{t}\left[\int_{P_t} g \,\mathrm{dvol}_n - \int_P g \,\mathrm{dvol}_n\right], \quad t \in [0,1],$$

and

$$\mu := \sum_{F\in\Phi_{n-1}(P)} [f|_{\mathrm{relint}\, F}]_{\mathsf{M}(\mathrm{relint}\, F)},$$

我们的目标是证明 $\lim_{t\to 0^+} G(t) = \int g \mathrm{d}\mu$。不失一般性，我们可以假设 v 是第 n 个标准基向量 e_n，并且 g 是有界的（因为该命题只取决于 g 在例如 $P + B_n$上的取值）。将 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$对应起来，我们记$g(x,y) := g((x_1, \ldots, x_{n-1}, y)^\mathsf{T})$。回顾（3.3），我们注意到

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \int_{\pi_{v^\perp}(P)} \Big(g(x, u(x,0)) \cdot f^u(x) + g(x, \ell(x,0)) \cdot f^\ell(x)\Big) \,\mathrm{d}x.$$

Sinc对于 $\pi_{v^\perp}(P_t) \subset \pi_{v^\perp}(P)$，我们可以将 $G(t)$ 分解为两部分，即 $G(t) = G_1(t) + G_2(t$), where

$$G_1(t) := \int_{\pi_{v^\perp}(P_t)\cap\pi_{v^\perp}(P)} \frac{1}{t}\left(\int_{\ell(x,t)}^{u(x,t)} g(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\ell(x,0)}^{u(x,0)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

and

$$G_2(t) \coloneqq \int_{\pi_{v^\perp}(P)\setminus\pi_{v^\perp}(P_t)} \frac{1}{t}\int_{\ell(x,0)}^{u(x,0)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

我们首先考虑 $G_2(t)$。在集合 $\pi_{v^\perp}(P)\setminus\pi_{v^\perp}(P_t)$ 上，我们有 $u(x,t) < \ell(x,t)$，利用引理 3.7(ii)，可知：

$$u(x,0) - \ell(x,0) < \ell(x,t) - \ell(x,0) - u(x,t) + u(x,0) \le 2Ct \text{ 对 } x \in \pi_{v^\perp}(P)\setminus\pi_{v^\perp}(P_t)。$$

由此可知，对于所有 $(x,t) \in (\pi_{v^\perp}(P)\setminus\pi_{v^\perp}(P_t))\times[0,1]$，

$$\frac{1}{t}\int_{\ell(x,0)}^{u(x,0)} g(x,y)\,\mathrm{d}y \le 2C\cdot\|g\|_\infty.$$

因此，$x \mapsto 2C\cdot\|g\|_\infty\cdot\mathbb{1}_{\pi_{v^\perp}(P)}(x)$ 是一个控制性的可积函数，因此我们可以应用勒贝格控制收敛定理，得到

$$\lim_{t\to0} G_2(t) = \lim_{t\to0}\int \underbrace{\mathbb{1}_{\pi_{v^\perp}(P)\setminus\pi_{v^\perp}(P_t)}(x)}_{\to 0 \text{ pointwise}}\frac{1}{t}\int_{\ell(x,0)}^{u(x,0)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0.$$

转而考虑 $G_1(t)$，我们注意到它可以改写为

$$G_1(t) = \int_{\pi_{v^\perp}(P_t)\cap\pi_{v^\perp}(P)} \frac{1}{t}\left(\int_{u(x,0)}^{u(x,t)} g(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\ell(x,0)}^{\ell(x,t)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

再次利用引理3.7(ii)，可得

$$\left|\frac{1}{t}\int_{u(x,0)}^{u(x,t)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{t}\cdot|u(x,t)-u(x,0)|\cdot\|g\|_\infty \le C\cdot\|g\|_\infty$$

以及关于 $\left|\frac{1}{t}\int_{\ell(x,0)}^{\ell(x,t)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right|$。因此，$x \mapsto 2C\cdot\|g\|_\infty\cdot\mathbb{1}_{\pi_{v^\perp}(P)}(x)$ 再次是一个控制性的可积函数。应用引理 3.7(i)、勒贝格控制收敛定理和微积分基本定理，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0} G_1(t) &= \lim_{t\to0}\int_{\pi_{v^\perp}(P)} \frac{1}{t}\left(\int_{u(x,0)}^{u(x,0)+tf^u(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\ell(x,0)}^{\ell(x,0)-tf^\ell(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\pi_{v^\perp}(P)} \Big(g(x,u(x,0))\cdot f^u(x) + g(x,\ell(x,0))\cdot f^\ell(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int g\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

4. Wasserstein距离

我们称 $\mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是有界的，如果 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mu_n\|_{\mathrm{TV}} < \infty$。本节的目标是为紧集 $X\subset\mathbb{R}^n$ 上 $\mathsf{M}(X)$ 中有界序列的弱收敛赋予度量。作为度量化的副产品，我们将得到以下结果。

命题 4.1。设 $P \in \boldsymbol{P}_n^n$。在弱收敛拓扑中，集合 $\mathsf{W}^\triangleleft(P) \subset \mathsf{M}(\mathrm{bd}\,P)$ 的序列闭包包含于 $\mathsf{W}(P)$ 中；也就是说，如果 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 P 和 $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$ 的一列多面体扰动，那么 $\mu \in \mathsf{W}(P)$。

注 4.2. 设 $X\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集。那么，$\mathsf{M}(X)$ 的 $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$-单位球（记作 $B_{\mathsf{M}(X)}$）在模糊拓扑下是紧且可度量化的（因而也是序列紧的）；该拓扑由所有函数 $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 通过 $\mu\mapsto\int g\mathrm{d}\mu$ 所诱导。由注 2.6 及 X的紧性可知，模糊拓扑与所有函数 $g\in C_b(\mathbb{R}^n)$ 通过 $\mu\mapsto\int g\mathrm{d}\mu$ 所诱导的拓扑一致。考虑 $\mathsf{M}(X)$ 中一个有界序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$。则存在一个符号测度 $\mu\in\mathsf{M}(X)$ 以及一个子序列 $(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\mu_{k(i)} \xrightarrow{w} \mu$。若对所有 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $\mu_i\in\mathsf{M}^+(X)$，则 $\mu\in\mathsf{M}^+(X)$。这是将 [4, (13.4.1)] 和 [4, (13.4.2)(ii)] 调整为适用于实测度后的直接推论（见 [4, 第 13.2] 节）；这里用到了对于紧的 X，$B_{M(X)}$ 在模糊拓扑下是闭集这一点

所有实测度构成的空间 $\mathbb{R}^n$。第 [4, 13.2]节意义下的实测度包含本文意义下的有符号测度，这可由 [4, (13.7.9)] 和 [4,(13.3.6)]得出。

本节不直接“照搬”上述可度量性结果，而是使用最优传输理论中的工具，为 $\mathsf{M}(X)$ 的单位球上的弱收敛构造一种度量化。所选取的度量化基于 *Wasserstein* 范数，来自 [15]。除了证明命题 4.1 外，这种度量化还为分析 $\mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$ 中具体序列的弱收敛提供了一个有用工具。

我们首先回顾最优传输理论中的一些基本概念。关于这一主题的全面介绍，请参阅 [23]。设 X_1，$X_2 \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\mu \in \mathsf{M}^+(X_1 \times X_2)$。如果测度 μ 具有 边缘测度 $\mu_1 \in \mathsf{M}^+(X)$ 和 $\mu_2 \in \mathsf{M}^+(X_2)$，则称其具有这两个边缘测度，其中 $(\pi_1)_*\mu = \mu_1$ 和 $(\pi_2)_*\mu = \mu_2$，这里 π_i 表示到第 i 个坐标的投影，而 $(\pi_i)_*\mu$ 是 μ的推前测度，定义为

$$(\pi_i)_*\mu(A) = \mu(\pi_i^{-1}(A)) \quad \text{for all Borel sets } A \subset X_i. \tag{4.1}$$

更一般地，对于任意可测映射 $f_*\mu \in \mathsf{M}(Y)$ 以及符号测度 $f\colon X \to Y$，我们按照（ $\mu \in \mathsf{M}(X)$ 的定义，定义推前测度 4.1）。

令 $X \subset \mathbb{R}^n$ 且令 $\mu_1, \mu_2 \in \mathsf{M}^+(X)$，其中 $\mu_1(X) = \mu_2(X)$。μ_1 与 μ_2 之间的*Wasserstein*距离（一阶）定义为

$$W(\mu_1, \mu_2) \coloneqq \inf_{\tau} \int_{X \times X} \|x - y\|_2 \, \mathrm{d}\tau(x, y), \tag{4.2}$$

其中，下确界取遍所有边缘测度为 μ_1 和 μ_2的 $\tau \in \mathsf{M}^+(X \times X)$。如（4.2）中的测度 τ称为转移计划。每个满足 $f_*\mu_1 = \mu_2$的可测函数 $f\colon X \to X$都会诱导一个转移计划 $(\mathrm{id}\ f)_*\mu_1$，其中 $(\mathrm{id}\ f)$表示映射$x \mapsto (x, f(x))$。

以下定义是 [15,Def. 11] 的一个特例。

定义 4.3。设 $\mu, \nu \in \mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$。$\mu$ 与 ν 之间的广义 Wasserstein 距离定义为

$$\overline{W}(\mu, \nu) = \inf_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}} \left(\|\mu - \tilde{\mu}\|_{\mathrm{TV}} + \|\nu - \tilde{\nu}\|_{\mathrm{TV}} + W(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right), \tag{4.3}$$

其中，下确界取遍所有满足 $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^n) = \tilde{\nu}(\mathbb{R}^n)$ 的 $\tilde{\mu}$，$\tilde{\nu} \in \mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$。

如 [14, 命题 1], 所示，(4.3) 中的下确界可以达到；如果对任意博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^n$，并且 $\tilde{\mu}(A) \le \mu(A)$ $\tilde{\nu}(A) \le \nu(A)$ 成立，则即使施加附加条件，该下确界的值也不会改变。

如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，使得 $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\mu_i|(\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon$，那么我们称 $M(\mathbb{R}^n)$ 中的序列 $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 是紧的 。广义 Wasserstein 距离的重要性在于，它刻画了正测度的紧序列的弱收敛。以下结果取自 [14, 定理 3]。

命题 4.4. 设$(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ 是$\mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$ 中的一个序列，且 $\mu \in \mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$。我们有 *ve*

$$\overline{W}(\mu_i, \mu) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{if and only if} \quad \mu_i \overset{w}{\to} \mu \textit{ and } (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \textit{ is tight.}$$

现在我们转而讨论有符号测度。

定义 4.5. 设 $\mu \in \mathsf{M}(X)$ 的 Jordan 分解为 (μ^+, μ^-)。根据 [15,Def. 17], ，我们将 *Wasserstein* 范数 定义为

$$\|\mu\|_{\mathrm{W}} \coloneqq \overline{W}(\mu^+, \mu^-).$$

文献 [15, 命题 21] 证明了 $\|\cdot\|_{\mathrm{W}}$ 确实是一个范数，并且容易看出$\|\mu\|_{\mathrm{W}} \le \|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ 对所有 $\mu \in \mathsf{M}(X)$都成立。下面的序列紧性结果将在后文中广泛使用，尤其是在第6节中。

$\|\cdot\|_{\mathrm{W}}$ 对我们而言的用途在于以下事实。

命题 4.6。 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集。*Wasserstein* 范数度量了$\mathsf{M}(X)$中有界序列的弱收敛性，即对于$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 中$\mathsf{M}(X)$ 的有界序列，我们有

$$\|\mu_i\|_{\mathrm{W}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad \textit{if and only if} \quad \mu_i \xrightarrow{w} 0.$$

证明。 我们先证明正向蕴含。设 $f \in C(X)$ 和 $\mu \in \mathsf{M}(X)$，且 $\|\mu\|_{\mathrm{W}} < \varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$成立。则存在一个转移计划 $\tau \in \mathsf{M}^+(X \times X)$，使得 $\tau(X \times X) \leq \mu^+(X)$ 且

$$\|\mu\|_{\mathrm{W}} = \|\mu^+ - (\pi_1)_*\tau\|_{\mathrm{TV}} + \|\mu^- - (\pi_2)_*\tau\|_{\mathrm{TV}} + \int_{X\times X} \|x-y\|_2 \,\mathrm{d}\tau(x,y).$$

由于 $\|\mu\|_{\mathrm{W}} < \varepsilon$，我们有 $\int_{X\times X} \|x-y\|_2 \,\mathrm{d}\tau(x,y) < \varepsilon$，因此

$$\tau\left(\{(x,y) \in X \times X \mid \|x-y\|_2 \geq \sqrt{\varepsilon}\}\right) \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{4.4}$$

将 μ 写作 $\mu^+ - (\pi_1)_*\tau - \mu^- + (\pi_2)_*\tau + (\pi_1)_*\tau - (\pi_2)_*\tau$，得到

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| &\leq \|f\|_\infty \left(\|\mu^+ - (\pi_1)_*\tau\|_{\mathrm{TV}} + \|\mu^- - (\pi_2)_*\tau\|_{\mathrm{TV}}\right) + \left|\int f \,\mathrm{d}[(\pi_1)_*\tau - (\pi_2)_*\tau]\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon + \left|\int f(x) - f(y) \,\mathrm{d}\tau(x,y)\right|.\end{aligned}$$

为了估计右侧的积分，我们首先注意到

$$\left|\int_{\{(x,y)\in X\times X \mid \|x-y\|_2 < \sqrt{\varepsilon}\}} f(x) - f(y) \,\mathrm{d}\tau(x,y)\right| \leq \sup_{\substack{x,y\in X \\ \|x-y\|_2<\sqrt{\varepsilon}}} |f(x)-f(y)| \cdot \tau(X\times X).$$

由于 X 是紧的， f 是一致连续的。因此，函数

$$\omega\colon [0, \operatorname{diam} X] \to [0,\infty), \quad t \mapsto \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y \in X,\ \|x-y\|_2 \leq t\}$$

满足 $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = \omega(0) = 0$。回顾 (4.4)，我们有

$$\left|\int_{\{(x,y)\in X\times X \mid \|x-y\|_2 \geq \sqrt{\varepsilon}\}} f(x) - f(y) \,\mathrm{d}\tau(x,y)\right| \leq \sup_{x,y\in X} |f(x)-f(y)| \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

综合这些估计，我们得到

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon + \omega(\sqrt{\varepsilon}) \cdot \tau(X\times X) + 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

这说明了正向蕴含。

对于另一个方向，我们假设 $\mu_i \xrightarrow{w} 0$。根据备注 4.2，存在 $\mu_{k(i)}$ 的一个子序列，其 Jordan 分解满足 ${\mu_{k(i)}}^+ \xrightarrow{w} \mu_+$ 以及 ${\mu_{k(i)}}^- \xrightarrow{w} \mu_-$，其中 μ_+， $\mu_- \in \mathsf{M}^+(X)$。由于 $\mu_i \xrightarrow{w} 0$，我们有

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_+ - \int f \,\mathrm{d}\mu_- = \lim_{i\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_{k(i)} = 0$$

对于所有 $f \in C(X)$，这意味着 $\mu_+ = \mu_-$。由于 X 是紧的，两个序列 $({\mu_{k(i)}}^+)_{i\in\mathbb{N}}$和 $({\mu_{k(i)}}^-)_{i\in\mathbb{N}}$ 都是紧的，因此命题 4.4 推出

$$\overline{W}({\mu_{k(i)}}^+, \mu_+) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad \text{and} \quad \overline{W}({\mu_{k(i)}}^-, \mu_-) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

由三角不等式可得

$$\|\mu_{k(i)}\|_{\mathrm{W}} = \overline{W}({\mu_{k(i)}}^+, {\mu_{k(i)}}^-) \leq \overline{W}({\mu_{k(i)}}^+, \mu_+) + \overline{W}(\mu_+, {\mu_{k(i)}}^-) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

注 4.7。 对于 $x \in [-1,1]$，令 δ_x 为支撑于 $\{x\}$的狄拉克测度。序列$(\sqrt{i}(\delta_{1/i}-\delta_{-1/i}))_{i\in\mathbb{N}}$ 表明，命题4.6 中的正向推论若不假设$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 有界，便不成立。另一方面，若假设序列$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 弱收敛地收敛，则由一致有界原理可知它有界 [3, 定理 14。1]。

我们以该结果开头的证明结束本节。

命题 4.1 的证明。设 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 关于 P 处于一般位置。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $(P_t^i)_{t\in[0,1]}$ 为构造 3.3 中实现 $\mu_i \in \mathsf{W}^{\triangleleft}(P)$ 的族。固定 $i \in \mathbb{N}$。由注3.4，对于所有 $t \in (0,1]$，我们有 $\frac{1}{t}\mathrm{vol}(P_t^i \setminus P) \le \mu_i^+(\mathbb{R}^n)$。由于 $(P_t^i)_{t\in[0,1]}$ 弱可微，我们还得到

$$\frac{1}{t}\left[\mathrm{vol}(P \setminus P_t^i) - \mathrm{vol}(P_t^i \setminus P)\right] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mu_i^-(\mathbb{R}^n) - \mu_i^+(\mathbb{R}^n).$$

结合这两个事实，我们得到

$$\limsup_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\mathrm{vol}(P_t^i \setminus P) + \mathrm{vol}(P \setminus P_t^i)\right] \le \mu_i^+(\mathbb{R}^n) + \mu_i^-(\mathbb{R}^n) = \|\mu_i\|_{\mathrm{TV}}.$$

因此，由引理 2.1(i) 和命题 4.6，存在一个 $r_i > 0$ 使得

$$\|\mu_i - \tfrac{1}{t}\cdot[\mathbb{1}_{P_t^i} - \mathbb{1}_P]_{\mathsf{M}}\|_{\mathrm{W}} < \frac{1}{i} \quad \text{and} \quad \|\mu_i - \tfrac{1}{t}\cdot[\mathbb{1}_{P_t^i} - \mathbb{1}_P]_{\mathsf{M}}\|_{\mathrm{TV}} \le 2\|\mu_i\|_{\mathrm{TV}} \quad \text{for all } t \in [0, r_i].$$

显然，可以选择 r_i 使得 $r_{i+1} \le \frac{1}{i}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。对于 $t \in (0,1]$, ，我们令$i(t)$: $= \max\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \ge t\}$ 并令 $P_t : = P_t^{i(t)}$。最后，我们令 $P_0 : = P$。由注 4.7，我们有 $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|\mu_i\|_{\mathrm{TV}} \le C$ 对某个 $C > 0$ 成立，这意味着

$$\limsup_{t\to 0} \left\| \mu_{i(t)} - \tfrac{1}{t}\cdot[\mathbb{1}_{P_t^{i(t)}} - \mathbb{1}_P]_{\mathsf{M}} \right\|_{\mathrm{TV}} \le 2\|\mu_{i(t)}\|_{\mathrm{TV}} \le 2C.$$

结合命题 4.6 与 $\|\cdot\|_{\mathrm{W}}$ 的三角不等式可得$(P_t)_{t\in[0,1]}$ 实现了小扰动 μ。 □

5. 多面体扰动的弱极限

本节完成定理 1.7 证明的构造性部分。通过对多面体扰动进行逼近，我们将证明定理 1.7 的第一项包含关系，具体如下。

命题5.1。 设 $P \in \boldsymbol{P}_n^n$。 P 的小扰动集合满足

$$\mathsf{W}(P) \supset \sum_{F\in\Phi(P)} -\mathsf{M}^{\mathrm{cvx}}_{(n-\dim F)^{-1}}(F).$$

以下定理是凸分析中的经典结果 [19,定理 10.8]。

定理 5.2。 设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 为相对开且凸的集合，并设 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为凸函数 $C \to \mathbb{R}$ 的序列。设 $X \subset C$ 在 C 中稠密，即 $C \subset$ 闭包 X。若 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 X 上逐点收敛，则 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 C 上逐点收敛到凸函数 f: $C \to \mathbb{R}$，且在 C 的每个闭有界子集上一致收敛。

定义在凸集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上的凸函数 f，如果 $-f$ 是多面体的，则称其为多面体的。我们的逼近论证的第一步包含在以下引理中。

引理 5.3。 设 $P \in \boldsymbol{P}^n$。对于 $\alpha \in (0,1]$, 设 f: 相对内部 $P \to \mathbb{R}$ 为一个可积的 α-凸函数。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个多面体凸函数 g: 相对内部 $P \to \mathbb{R}$，使得

$$\|[f - g^{\frac{1}{\alpha}}]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{TV}} = \int_{\operatorname{int} P} |f(x) - g^{\frac{1}{\alpha}}(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

特别地，我们有 $\|[f - g^{\frac{1}{\alpha}}]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{W}} < \varepsilon$。

证明。令 $\varepsilon > 0$。不失一般性，我们假设 P 是满维的。根据假设，f^α 是凸的。令 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个序列，其像在 $\operatorname{int} P$ 中稠密。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $h_i \colon \operatorname{int} P \to \mathbb{R}$ 为一个仿射泛函，满足 $h_i(x_i) = f^\alpha(x_i)$ 和 $h_i \leq f^\alpha$。我们定义 g_i 为

$$g_i(x) \coloneqq \begin{cases} \max_{j\in[i]} h_j(x) & \text{if } \alpha = 1, \\ \max\left\{\max_{j\in[i]} h_j(x), 0\right\} & \text{if } \alpha < 1. \end{cases}$$

函数 $g_1^{1/\alpha} : \operatorname{int} P \to \mathbb{R}$ 有界，因此可积。因此，存在一个紧集 $Q \subset \operatorname{int} P$，使得

$$\int_{(\operatorname{int} P)\setminus Q} |f - g_i^{1/\alpha}(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_{(\operatorname{int} P)\setminus Q} |f - g_1^{1/\alpha}(x)| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}.$$

由于 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在稠密集 上逐点收敛于 f^α，定理 5.2 断言 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在紧集 f^α 上一致收敛于 Q。由于序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 单调递增，且被连续函数 f^α 从上方有界，因此存在一个区间 $[a, b]$ (如果 $\alpha < 1$，我们可以选择 $a \geq 0$)，使得

$$f^\alpha(Q) \cup g_i(Q) \subset [a, b] \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}.$$

由于函数 $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ 在 $[a, b]$ 上是利普希茨连续的，序列 $(g_i^{1/\alpha})_{i\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 f 在 Q 上的函数。这意味着存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\int_Q |f(x) - g_i^{1/\alpha}(x)| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } i \geq N. \qquad \square$$

下面的引理允许我们通过在面格上进行迭代论证，用一个在 P 的低维面 F 上具有 $(n - \text{维 } F)^{-1}$- 凸密度的测度来逼近一个测度。

引理 5.4。设 $P \in P^n$ 且 $F \subset P$ 为一个面。对于 $m \geq 2$，令 f：相对内部 $F \to \mathbb{R}$ 为一个 $\frac{1}{m}$-凸可积函数。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\frac{1}{m-1}$-凸可积函数 g：相对内部 $P \to \mathbb{R}$，满足 $\|[f]_{\mathsf{M}(F)} - [g]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{W}} < \varepsilon$ 以及 $\|[f]_{\mathsf{M}(F)} - [g]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{TV}} < 2 \cdot \|[f]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}} + \varepsilon$。

证明。设 $\varepsilon > 0$。根据引理 5.3，存在一个多面体凸函数 h 定义在 相对内部 F 上，使得 $\|[f - h^m]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}} < \varepsilon$。我们将到 $\operatorname{aff} F$ 的正交投影记为 $\pi_{\operatorname{aff} F}$，将 h 的规范延拓记为 $\overline{h}$。对于 $\delta > 0$，我们定义 h_δ：相对内部 $P \to \mathbb{R}$ 如下

$$h_\delta(x) \coloneqq \max\left\{\overline{h}(\pi_{\operatorname{aff} F}(x)) - \tfrac{1}{\delta} \cdot \operatorname{dist}(x, \operatorname{aff} F), 0\right\}.$$

由于 $x \mapsto h(\pi_{\operatorname{aff} F}(x))$，$x \mapsto -\operatorname{dist}(x, \operatorname{aff} F)$ 和 $x \mapsto 0$ 是定义在相对内部 P 上的凸函数，因此 h_δ 也是凸函数。因此，函数

$$g_\delta(x) \coloneqq \frac{m}{\delta} \cdot h_\delta(x)^{m-1}$$

是 $\frac{1}{m-1}$ -凸的。

令 $\mu_\delta \coloneqq [g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}$ 并令 $\nu \coloneqq [h^m]_{\mathsf{M}(F)}$。还需证明可以选择 $\delta > 0$，使得 $W(\mu_\delta, \nu)$ 可以任意小。我们首先选择一个多面体 $G \subset$，其相对内部为 F，并满足 $\nu(F \setminus G) < \varepsilon$。令 $u_F \in \mathbb{S}^{n-1}$ 为 F 的外法向量。由于 $G \subset$ 为 F 的相对内部，存在一个 $\delta_1 > 0$，使得 $\operatorname{conv}\{G, G - \delta_1 \cdot u_F\} \subset P$。我们将 P 分解为三部分：

$$P_1 \coloneqq P \cap \left(\pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(G)\right), \quad P_2 \coloneqq P \cap \left(\pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(F \setminus G)\right), \quad P_3 \coloneqq P \setminus \left(\pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(F)\right).$$

我们首先考虑 P_1。如果 $\delta \le \delta_1$，则 Fubini 定理表明，$(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_\delta|_{P_1})$ 的密度为

$$G \to [0,\infty), \quad y \mapsto \int_{P\cap[y,y-\delta\cdot h(y)\cdot u_F]} g_\delta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\delta}\cdot\int_0^{\delta h(y)} (h(y)-\tfrac{z}{\delta})^{m-1}\,\mathrm{d}z = h(y)^m,$$

这表明 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_\delta|_{P_1}) = \nu|_G$。利用由函数 $\pi_{\operatorname{aff} F}$诱导的转移计划 τ，即令 $\tau := (\mathrm{id}\ \pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_\delta|_{P_1})$，我们得到 $\mu_\delta|_{P_1}$ 和 $\nu|_G$ 之间的Wasserstein距离有界于

$$W(\mu_\delta|_{P_1},\nu|_G) \le \int_{G\times P_1} \|x-\pi_{\operatorname{aff} F}(x)\|_2\,\mathrm{d}\tau(x,y) \le \nu(G)\cdot\delta\cdot\max_{y\in G} h(y).$$

原则上，可以用类似的方法计算 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_\delta|_{P_2})$ 和 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_\delta|_{P_3})$ 的密度，但对于 $y \in \pi_{\operatorname{aff} F}(P)\setminus G$，线段 $[y,y-\delta\cdot h(y)\cdot u_F]$ 不一定包含在 P 中。因此，我们有上界 $\mu_\delta(P_2) \le \nu(F\setminus G)$，并且

$$\mu_\delta(P_3) \le \int_{\pi_{\operatorname{aff} F}(P_3)} \mathbb{1}_{\{P\cap[y,y-\delta\cdot\overline{h}(y)\cdot u_F]\neq\varnothing\}}\cdot\overline{h}(y)^m\,\mathrm{d}y.$$

由于 $\overline{h}$ 在 $\pi_{\operatorname{aff} F}(P)$ 上有界，因此存在一个 $\delta_2>0$，使得 $\delta\le\delta_2$ 蕴含 $\mu_\delta(P_3)<\varepsilon$。现在我们将 P_1、P_2 和 P_3 的上界合并起来。如果

$$\delta \le \min\left\{\delta_1,\delta_2,\varepsilon\cdot[\nu(G)\cdot\max_{y\in G}h(y)]^{-1}\right\},$$

那么，由上述估计可得

$$\overline{W}([g_\delta]_{\mathsf{M}(P)},[h^m]_{\mathsf{M}(F)}) \le \mu_\delta(P_2\cup P_3)+\nu(F\setminus G)+W(\mu_\delta|_{P_1},\nu|_G) < 4\varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$\|[f]_{\mathsf{M}(F)}-[g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{W}} \le \|[f-h^m]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}}+\|[h^m]_{\mathsf{M}(F)}-[g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{W}} < 5\varepsilon.$$

关于全变差范数，我们注意到

$$\|[h^m]_{\mathsf{M}(F)}-[g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{TV}} \le 2\cdot\nu(F)+\mu_\delta(P_3) < 2\cdot\|[f]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}}+\varepsilon,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|[f]_{\mathsf{M}(F)}-[g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{TV}} &\le \|[f-h^m]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}}+\|[h^m]_{\mathsf{M}(F)}-[g_\delta]_{\mathsf{M}(P)}\|_{\mathrm{TV}}\\ &< 2\cdot\left(\|[f]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}}+\varepsilon\right).\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

命题5.1 的证明。设 $\mu \in \sum_{F\in\Phi(P)} -\mathsf{M}^{\mathrm{cvx}}_{(n-\dim F)^{-1}}(F)$。考虑一个面 $F\in\Phi(P)$，并定义 $f_F\colon \operatorname{relint} F\to\mathbb{R}$ 为唯一的 $(n-\dim F)^{-1}$-凸函数，使得 $\mu|_{\operatorname{relint} F} = -[f_F]_{\mathsf{M}(\operatorname{relint} F)}$。设 F_{n-1} 是包含 F 的 P 的一个面，并设 $F\subset F_{\dim F+1}\subset\cdots\subset F_{n-1}$ 是一个面链，其中包含每个中间维数 $d\in\{\dim F,\dots,n-1\}$ 的一个面。令 $i\in\mathbb{N}$。反复应用引理 5.4，对 $\|\cdot\|_{\mathrm{W}}$ 使用三角不等式，最后应用引理 5.3，可得一个多面体凸函数 $g_F\colon \operatorname{relint} F_{n-1}\to\mathbb{R}$，满足 $\|[f_F]_{\mathsf{M}(F)}-[g_F]_{\mathsf{M}(F_{n-1})}\|_{\mathrm{W}} < \frac{1}{i}$，且 $\|[f_F]_{\mathsf{M}(F)}-[g_F]_{\mathsf{M}(F_{n-1})}\|_{\mathrm{TV}} < 3\|[f_F]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}}$。我们对每个$F\in\Phi(P)$ 重复这一构造，并令

$$\mu_i := \sum_{F\in\Phi(P)} -[g_F]_{\mathsf{M}(\operatorname{supp} g_F)} \in \mathsf{W}^{\lhd}(P).$$

对每个 $i\in\mathbb{N}$ 执行此过程，我们得到一个序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$，它属于 $\mathsf{W}^{\lhd}(P)$ 并满足

$$\|\mu_i-\mu\|_{\mathrm{TV}} \le \sum_{F\in\Phi(P)} 3\|[f_F]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}} = 3\|\mu\|_{\mathrm{TV}}$$

以及

$$\|\mu_i - \mu\|_{\mathrm{W}} \leq \sum_{F \in \Phi(P)} \frac{1}{i} = \frac{\#\Phi(P)}{i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

根据命题 4.6 和命题 4.1，可得 $\mu \in \mathsf{W}(P)$。 □

6. Weak limits of contrast sequences

本节中，我们完成定理 1.7 的证明。剩下的工作是证明第二个包含关系，也就是说，除了我们在前几节构造的小扰动之外，不存在其他小扰动。

定义 6.1。 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体。若有符号测度序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$，且对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在 $\beta_i > 0$ 和 $K_i \in \mathcal{K}^n_n \cup \{\varnothing\}$ 使得

$$\mu_i = \beta_i[\mathbb{1}_{K_i} - \mathbb{1}_P]_{\mathsf{M}}.$$

显然，序列 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$ 由 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 唯一确定；我们称它为 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的分量序列 。若 P-对比序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的可容许的 极限$\mu \in \mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$，则

(i) $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于 μ，(ii) $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 发散至无穷大，并且 (iii) 存在一个紧集 $C \subset \mathbb{R}^n$，使得 μ_i 对于所有 $i \in \mathbb{N}$都支撑于 C。

顺便指出，条件 (iii)在逻辑上是冗余的，仅为方便起见而列出。

显然，定义 6.1 与弱可微性密切相关：如果 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 是弱可微的，那么 $[(i,\ K_{1/i})]_{i\in\mathbb{N}}$ 就是一个 P-对比序列的分量序列。用定义 6.1的术语来说，我们面临的问题是刻画 P-对比序列的极限。正如我们将在下文讨论的那样，我们的部分证明受到了 Fillastre 关于余凸体的反向 Brunn-Minkowski 不等式的优美证明的启发 [7]。

我们从对比序列的一些基本性质开始。

引理 6.2。 设 $P \in P^n_n$ *and* $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个具有极限 μ 的可容许的 P-对比序列。
(i) 序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 有界。*(ii)* 序列 $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 关于 d_H 收敛到 P。*(iii)* 极限 μ 支撑于 $\operatorname{bd} P$。

证明。如注4.7中所述，(i) 利用一致有界原理即可得到，因为对于所有 $i \in \mathbb{N}$，μ_i 都支撑于固定的紧集 C 上。由于 β_i 发散到无穷，序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的有界性意味着 $d_{\mathrm{S}}(K_i, P)$ 收敛到零。利用 d_{H} 和 d_{S} 在 K^n 上诱导相同拓扑这一事实，即可得到 (ii)。最后，(iii) 通过与命题 1.3 的证明中类似的论证，由 (ii) 推出。□

以下引理是针对有符号测度的连续映射定理的一个部分版本。

引理 6.3。 设$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是$\mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个弱收敛序列，且 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个连续映射。我们有

$$\pi_* \operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \mu_i = \operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \pi_* \mu_i.$$

特别地，如果 $\pi_* \operatorname{wlim}_{i\to\infty} \mu_i$ 支撑于 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi(x) = x\}$，那么

$$\operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \mu_i = \operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \pi_* \mu_i.$$

证明。令 $f \in C(\mathbb{R}^n)$。由于 $\mu_i \overset{w}{\to} \mu$，我们有

$$\int f \,\mathrm{d}\pi_*\mu_i = \int f \circ \pi \,\mathrm{d}\mu_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int f \circ \pi \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\pi_*\mu. \qquad \square$$

刻画 P-对比序列极限的基本策略，是在局部考察有符号测度，即在 $\mathbb{R}^n$ 中适当选取的紧子集上考察。

引理 6.4. 设 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个序列，且弱收敛于 $\mu \in \mathsf{M}(\mathbb{R}^n)$。设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集。根据注 *4.2*，存在一个子序列 $(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $(\mu_{k(i)}|_Q)_{i\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于一个有符号测度 $\nu \in \mathsf{M}(Q)$。我们有 $\nu|_{\operatorname{int} Q} = \mu|_{\operatorname{int} Q}$。

证明。设 $f \in C_c(\operatorname{int} Q)$。注意，平凡延拓 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $C(\mathbb{R}^n)$ 的一个元素。因此，我们有

$$\int f \,\mathrm{d}\nu|_{\operatorname{int} Q} = \lim_{i\to\infty} \int_Q \overline{f} \,\mathrm{d}\mu_{k(i)} = \int \overline{f} \,\mathrm{d}\mu = \int \overline{f} \,\mathrm{d}\mu|_{\operatorname{int} Q}.$$

由于 $C_c(\operatorname{int} Q)$ 在 $C_0(\operatorname{int} Q)^*$ 中分离点，因此可得 $\nu|_{\operatorname{int} Q} = \mu|_{\operatorname{int} Q}$。 $\square$

将所考虑的 P-对比序列限制在 $\mathbb{R}^n$ 的一个适当选取的紧子集上之后，我们希望证明，限制后序列的弱极限具有绝对连续的凹密度。为此，我们需要下面的引理。

引理 6.5。 设 $P, Q \in \boldsymbol{P}^n$，其中 $Q \subset$ 相对内部 P，且 $m \colon =$ 维数 $P =$ 维数 Q。设 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列凹函数 $P \to \mathbb{R}$，其在 $L^1(P)$ 中有界，即有 $C \colon =$ 上确界$_{i\in\mathbb{N}} \int_P |f_i(x)|\mathrm{d}x < \infty$。

(i) 存在常数 $C_\ell, C_u \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $x \in Q$ 和 $i \in \mathbb{N}$，都有 $f_i(x) \in [C_\ell, C_u]$。

(ii) 存在一个子序列 $(f_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，其在 Q 上一致收敛于一个凹函数 $f\colon Q \to \mathbb{R}$。 *e*

证明。我们从 (i) 开始。令 $T := \frac{1}{2}(P+Q)$，则有 $Q \subset$ 相对内部 $T \subset T \subset$ 相对内部 P。我们首先证明 $\{f_i|_T\}_{i\in\mathbb{N}}$ 一致有下界。任取 $z \in P$，令 $S := \mathbb{S}^{n-1} \cap$ (仿射 $P - z$)。我们定义函数

$$h\colon T \times S \to \mathbb{R}, \quad (y,u) \mapsto \operatorname{vol}_m\left(\{x \in P \mid \langle u, x\rangle \le \langle u, y\rangle\}\right).$$

由于 $T \subset$ 相对内部 P，集合 $\{x \in P \mid \langle u,x\rangle \le \langle u,y\rangle\}$ 对于所有 $(y,u) \in T \times S$ 都是一个 m 维多面体。因此，对于所有 $(y,u) \in T \times S$，我们有 $h(y,u) > 0$。由于 $T \times S$ 是紧的，且 h 是连续的，因此可得

$$M := \min_{(y,u)\in T\times S} h(y,u) > 0.$$

设 $i \in \mathbb{N}$ 和 $x \in T$。如果 $f_i(x) \ge 0$，则无需证明，因此我们假设 $f_i(x) < 0$。由于 f_i 是凹的，f_i 的超水平集是凸的，因此存在一个 $u \in S$，使得对于所有 $y \in \{x \in P \mid \langle u,x\rangle \le \langle u,y\rangle\}$，$f_i(y) \le f_i(x)$。由此得到估计

$$-f_i(x) \cdot M \le \int_P |f_i(x)| \,\mathrm{d}x \le C,$$

这意味着 $f_i(x) \ge -\frac{C}{M} =: C_\ell$ 对所有 $x \in T \supset Q$ 和 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。

为完成 (i) 的证明，我们现在证明 $\{f_i|_Q\}_{i\in\mathbb{N}}$ 从上方一致有界。令 $i \in \mathbb{N}$ 和 $x \in Q$。我们区分两种情形：

a) 若对所有 $y \in Q$，$f_i(y) \ge 0$，则根据 f_i 的凹性，$(m+1)$ 维棱锥

$$K := \operatorname{conv}\left((Q \times \{0\}) \cup \{(x, f_i(x))\}\right) \subset Q \times \mathbb{R}$$

包含于 f_i 的下图集中。因此，我们有

$$\tfrac{1}{m+1} \cdot f_i(x) \cdot \operatorname{vol}_m(Q) = \operatorname{vol}_n(K) \le \int_P |f_i(x)| \,\mathrm{d}x \le C,$$

这给出了 $f_i(x)$ 的一致上界。

b）我们假设存在一个 $v \in Q$，使得 $f_i(v) < 0$。我们定义一个映射

$$b\colon \{(x,y) \in Q \times Q \mid x \neq y\} \to \operatorname{relbd} T$$

通过规定 $b(x, y)$ 是 $\operatorname{relbd} T$ 与从 x 出发并经过 y 的射线的唯一交点。由于 $Q \subset \operatorname{relint} T$，我们有

$$\beta := \min_{x \in Q} \operatorname{dist}(x, \operatorname{relbd} T) > 0.$$

如果 $f_i(x) \leq f_i(v)$，那么 $f_i(v) < 0$ 给出所需的一致上界，因此我们假设 $f_i(x) > f_i(v)$。于是，由 f_i 的凹性，我们有

$$\frac{f_i(x) - f_i(v)}{\|x - v\|_2} \leq \frac{f_i(v) - f_i(b(x,v))}{\|v - b(x,v)\|_2} \leq \frac{-C_\ell}{\beta}$$

从而

$$f_i(x) \leq \operatorname{diam}(Q) \cdot \frac{-C_\ell}{\beta}.$$

结合这两种情形，我们得到 $C_u := \max\left\{C_{(m+1)\operatorname{vol}_m(Q)}, -C_\ell \operatorname{diam}(Q)/\beta\right\}$ 是 $f_i|_Q$ 的一致上界。

为证明 (ii)，我们构造子序列 $(f_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$。令 $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset P$ 为一个满足 $P \subset \operatorname{cl} X$ 的可数集。由于对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $\{f_i(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [C_\ell, C_u]$，博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理表明，存在一列嵌套的指标集 $k_1(\mathbb{N}) \supset k_2(\mathbb{N}) \supset \ldots$，使得 $(f(x_j)_{k_j(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ 对每个 $j \in \mathbb{N}$ 都收敛。令 $k(i) := k_i(i)$，我们得到子序列 $(f_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，它在 X 上逐点收敛。现在，定理 5.2 蕴含 f 在 Q 上一致收敛于凹函数 $f\colon Q \to \mathbb{R}$。□

作为刻画 P-对比序列极限的第一步，我们确定它们在 P 的各个面上的行为。

引理 6.6. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体，且 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个可容许的 P-对比序列，其极限为 μ。设 $F \subset P$ 是一个面，且 $G \subset$ 相对内部 F 是一个多面体，满足维数 $G =$ 维数 F。则 $\mu|_{\operatorname{relint} G}$ 关于 体积$_{n-1} \in \mathsf{M}(F)$ 绝对连续，且其密度 $f\colon$ 相对内部 $G \to \mathbb{R}$ 为凹函数。

证明。设 $u_F \in \mathbb{S}^{n-1}$ 是 F 的单位外法向量。令 $\tilde{G} := \frac{1}{2}(F + G)$，我们有 $G \subset$ 相对内部 $G \subset G \subset$ 相对内部 F。设 $\alpha > 0$ 满足

$$\tilde{G} - \alpha u_F \subset \operatorname{int} P.$$

令 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$ 为 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$的分量序列。由引理 6.2(ii)，我们可以假设不失一般性地设 $G - \alpha u_F \subset K_i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$。我们定义两个多面体

$$Q := G + [-\alpha u_F, \alpha u_F] \quad \text{and} \quad \tilde{Q} := \tilde{G} + [-\alpha u_F, \alpha u_F].$$

由备注 4.2，存在一个子序列$(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $(\mu_{k(i)}|_Q)_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w} \nu$，其中$\nu \in \mathsf{M}(Q)$。仿照命题 1.3 的证明，我们可得 ν 支撑于 G。利用引理 6.3 和引理 6.4，可得

$$\mu|_{\operatorname{int} Q} = \nu|_{\operatorname{int} Q} = ((\pi_{\operatorname{aff} F})_* \nu)|_{\operatorname{int} Q} = \left(\operatorname*{wlim}_{i\to\infty} (\pi_{\operatorname{aff} F})_* (\mu_{k(i)}|_Q)\right)\Big|_{\operatorname{int} Q}.$$

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们定义 $g_i\colon G \to \mathbb{R}$ 为

$$g_i(x) := \beta_i \cdot \max\{t \in \mathbb{R} \mid x + t \cdot u_F \in K_i\}.$$

因为我们假设对所有 $i \in \mathbb{N}$，$G - \alpha u_F \subset K_i$，所以每个 g_i都有定义，且下界为 $\alpha\beta_i$。此外，K_i 的凸性意味着 g_i 是凹函数。由此可得

根据 Fubini 定理， $g_i|_G$ 是 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_i|_Q)$的密度。根据引理 6.2(i)，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\int_{\tilde{G}} |g_i(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|\mu_i\|_{\mathrm{TV}} \leq C \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}.$$

因此，引理 6.5(ii) 意味着我们可以从$\{g_{k(i)}|_G\}^{i\geq N}$中找到一个子序列$\{g_{k'(i)}|_G\}^{i\geq N}$，使其在 G 上一致收敛于凹函数 g^*: $G \to \mathbb{R}$。由于一致收敛蕴含 L^1- 收敛，因此可得$[g_{k'(i)}|_G]_{\mathsf{M}(G)} \xrightarrow{w} [g^*]_{\mathsf{M}(G)}$。由弱极限的唯一性可知， $[g^*]_{\mathsf{M}(G)} = [g^*]_{\mathsf{M}(G)}|_{\operatorname{int} Q} = \mu|_{\operatorname{int} Q}$。□

现在，我们将引理 6.6 的断言扩展到 P的整个面上。

命题 6.7。 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 为一个满维多面体， $F \subset P$ 为一个面，且$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$为一个可容许的 P-对比序列，其极限为 μ。则 $\mu|_{\operatorname{relint} F}$关于$\mathrm{vol}_{n-1} \in \mathsf{M}(F)$ 绝对连续，并具有凹密度 $f\colon \operatorname{relint} F \to \mathbb{R}$。

证明。设 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset \operatorname{relint} F$是一个多面体序列，且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = \operatorname{relint} F$。对于 $i \in \mathbb{N}$, 令 $f_i\colon \operatorname{relint} F_i \to \mathbb{R}$为 $\mu|_{\operatorname{relint} F_i}$的凹密度，其存在性已在引理 6.6 中证明。令 $j, k \in \mathbb{N}$且 $j < k$。由于这两个密度均连续，且描述 $\operatorname{relint} F_j$上的同一符号测度，因此 f_k和 f_j在 $\operatorname{relint} F_j$上相等。因此，函数 $f\colon \operatorname{relint} F \to \mathbb{R}$由 $f(x) := f_{\min\{i\in\mathbb{N}|x\in\operatorname{relint} F_i\}}(x)$ 给出，是凹函数。令 $g \in C_c(\operatorname{relint} F)$。由于 $\operatorname{supp} g$是紧的，存在一个 $i \in \mathbb{N}$，使 $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{relint} F_i$。根据构造， $f|_{\operatorname{relint} F_i}$是 $\mu|_{\operatorname{relint} F_i}$的密度，因此我们有 $\int g \mathrm{d}\mu = \int g f \mathrm{dvol}_{n-1}(F)$。由于 $C_c(\operatorname{int} Q)$ 在 $C_0(\operatorname{int} Q)^*$ 中能够区分点，因此可得 $\mu|_{\operatorname{relint} F} = [f]_{\mathsf{M}(\operatorname{relint} F)}$。□

第二步中，我们确定了 P 的低维面上 P-对比序列的极限行为。以下弱收敛的刻画是著名的 Portemanteau 定理 [10,定理 13.16] 的一部分。

定理 6.8 (Portemanteau)。 设 X 是一个度量空间，且 $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in \mathsf{M}^+(X)$ 满足$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(X) < \infty$。则 $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当

$$\limsup_{i\to\infty} \mu_n(X) \leq \mu(X) \quad \textit{and} \quad \liminf_{i\to\infty} \mu_i(G) \geq \mu(G) \quad \textit{for all open sets } G \subset X.$$

我们使用定理 6.8 来证明，一个 P-对比序列的极限在面 $F \subset P$（其维数 $\dim F < n-1$ 为）上的限制是一个负测度。

引理 6.9。 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体，且$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个可容许的 P- 对比序列，其极限为 μ。令

$$S := \operatorname{bd} P \setminus \left(\bigcup_{F\in\Phi_{n-1}(P)} \operatorname{relint} F \right),$$

即， S 是 F 的所有不是面的面与面的并集。则存在一个受限子序列$(\mu_{k(i)}|_P)_{i\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathsf{M}^-(P) := -\mathsf{M}^+(P)$，其弱收敛于一个符号测度 ν，且满足 $\nu|_S = \mu|_S$。特别地，对于所有博雷尔集 $A \subset S$, 有 $\mu(A) \leq 0$。

证明。 令 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle \leq b_i, i \in [m]\}$ 对 $a_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $b_i \in \mathbb{R}$成立。对于 $j \in [m]$, 令

$$Q_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_j, x\rangle \geq b_j, \langle a_i, x\rangle \leq b_i \text{ for } 1 \leq i < j\}.$$

我们将 μ_i 分解为以下各项之和

$$\mu_i = \mu_i|_P + \sum_{j\in[m]} \mu_i|_{Q_j} \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}.$$

根据定义 6.1(iii)，存在一个紧集 $C \subset \mathbb{R}^n$ 使得 μ_i 支撑于 C对所有 $i \in \mathbb{N}$。因此，注 4.2 表明存在一个子序列 $(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，使得分解的每一部分都弱收敛，即存在有符号测度

$\nu \in \mathsf{M}^-(\mathbb{R}^n)$ 和 $\nu_1, \ldots\ldots, \nu_m \in \mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$，其中 $\mu_i|_P \xrightarrow{w} \nu$ 且 $\mu_i|_{Q_j} \xrightarrow{w} \nu_j$ 对 $j \in [m]$成立。由于 $\mu = \nu + \sum_{j\in[m]} \nu_j$，只需证明对 $j \in [m]$有 $\nu_j(S) = 0$，即可得到结论。

令 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$ 为 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的分量序列。根据引理 6.3，我们知道 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_{k(i)}|_{Q_1}) \xrightarrow{w} \nu_1$。令 F 为面 $\{x \in P \mid a_1, x = b_1\}$，$u_F \in \mathbb{S}^{n-1}$ 为其外法向量，$z \in$ 为 F 的相对内部。我们定义

$$F_{\frac{1}{2}} := \tfrac{1}{2}(F - z) + z, \quad F_{\frac{2}{3}} := \tfrac{2}{3}(F - z) + z \quad \text{and} \quad F_2 := 2(F - z) + z.$$

令 $\alpha > 0$ 使得 $F_{\frac{2}{3}} - \alpha u_F \subset \operatorname{int} P$。根据引理 6.2(ii)，存在一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$F_{\frac{2}{3}} - \alpha u_F \subset K_i \quad \text{and} \quad \pi_{\operatorname{aff} F}(K_i \cap Q_1) \subset F_2 \quad \text{for all } i \geq N. \tag{6.1}$$

对于 $i \in \mathbb{N}$，我们定义 $g_i\colon\ F_2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 如下

$$g_i(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x + t \cdot u_F \in K_i\}.$$

由于 K_i 是凸的，g_i 是一个凹函数 $F_2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$。此外，根据（6.1），限制 $g_i|_{F_2}$对所有 $i \geq N$均为实值函数。利用引理 6.5(i)，我们得到存在常数 C_ℓ、$C_u \in \mathbb{R}$ 使得

$$\beta_i \cdot g_i\left(F_{\frac{1}{2}}\right) \subset [C_\ell, C_u] \quad \text{for all } i \geq N.$$

令 $x \in F_2$。我们设 $y := \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}(x - z) + z \in F_{\frac{1}{2}}$。由于 $g_i\colon\ F_2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是凹的，我们有 $g_i(y) \geq \frac{1}{4}g_i(x) + \frac{3}{4}g_i(z)$，因此

$$\beta_i \cdot g_i(x) \leq \beta_i \cdot (4g_i(y) - 3g_i(z)) \leq 4C_u - 3C_\ell =: \tilde{C} \quad \text{for all } i \geq N.$$

由于 $\max\{\beta_i \cdot g_i, 0\}\colon\ F_2 \to [0, \infty)$ 是 $(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_i|_{Q_1})$ 的密度，这意味着

$$[(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_i|_{Q_1})](A) \leq \tilde{C} \cdot \operatorname{vol}_{n-1}(A) \quad \text{for all Borel sets } A \subset \operatorname{aff} F \text{ and } i \geq N.$$

令 $\varepsilon > 0$ 并令 $U \subset$ 仿射 F 相对开，且 相对边界 $F \subset U$ 和 体积$_{n-1}(U) < \varepsilon$。由定理 6.8，我们有

$$\nu_1(\operatorname{relbd} F) \leq \nu_1(U) \leq \liminf_{i\to\infty} [(\pi_{\operatorname{aff} F})_*(\mu_{k(i)}|_{Q_1})](U) \leq \tilde{C} \cdot \operatorname{vol}_{n-1}(U) < \tilde{C}\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这意味着 $\nu_1(S) = \nu_1(\text{relbd } F) = 0$。

为完成证明，我们注意到 $(\mu_i|_P + \sum_{j=2}^m \mu_i|_{Q_j})_{i\in\mathbb{N}}$ 又是一个 P-对比序列，并且可以重复上述论证，得到对于 $j \in [m]$，$\nu_j(S) = 0$。□

注 6.10. 令 P、$(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$、μ 和 S 如引理 6.9 所述。此外，令 $F \subset P$ 为 $0 \leq m < n - 1$的一个 m-面。由于 $F \subset S$，引理 6.9 蕴含存在一个受限子序列 $(\mu_{k(i)}|_P)_{i\in\mathbb{N}}$，其弱收敛至符号测度 ν，且满足 $\nu|_F = \mu|_F$。因此，为了确定 $\mu|_F$，我们可以用 $(\mu_{k(i)}|_P)_{i\in\mathbb{N}}$ 替换 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$。

对 P 的低维面的局部化论证，比相应的面论证稍为复杂。我们不将序列 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 限制在单个紧集 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 上，而是考虑一列紧集。

引理 6.11。设 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$ 中的一个序列，且弱收敛至 $\mu \in \mathsf{M}^+(\mathbb{R}^n)$。设 $Q \subset \mathbb{R}^n$，并令 $(Q_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 为一列紧集，满足对 $j \in \mathbb{N}$ 有 $Q_{j+1} \subset \operatorname{int} Q_j$，且 $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{int} Q_j = Q$。那么存在一个子序列 $(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，使得

$$\mu|_Q = \operatorname*{wlim}_{j\to\infty} \operatorname*{wlim}_{i\to\infty} (\mu_{k(i)}|_{Q_j}).$$

证明。反复应用注4.2，我们得到一个子序列$(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$，使得$(\mu_{k(i)}|_{Q_j})_{i\in\mathbb{N}}$ 弱收敛至一个符号测度ν_j 对所有 $j \in \mathbb{N}$均成立。由引理6.4，我们

有 $\nu_j = \nu_j|_{\operatorname{int} Q_j} + \nu_j|_{\operatorname{bd} Q_j} = \mu|_{\operatorname{int} Q_j} + \nu_j|_{\operatorname{bd} Q_j}$对所有 $j \in \mathbb{N}$均成立。根据测度从上连续性，我们有

$$\|(\mu|_{\operatorname{int} Q_j}) - (\mu|_Q)\|_{\mathrm{TV}} = \mu(\operatorname{int} Q_j \setminus Q) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

从而 $\mu|_{\operatorname{int} Q_j} \xrightarrow{w} \mu|_Q$。还需证明 $\nu_j|_{\operatorname{bd} Q_j} \xrightarrow{w} 0$。为此，我们注意到

$$\mu|_{\operatorname{bd} Q_j} = \left(\operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \left(\mu_{k(i)}|_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j}\right)\right)\Big|_{\operatorname{bd} Q_j} + \nu_j|_{\operatorname{bd} Q_j}.$$

由于对于 $j \neq j'$，$\operatorname{bd} Q_j \cap \operatorname{bd} Q_{j'} = \varnothing$，因此可得

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(\operatorname{bd} Q_j) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\operatorname{bd} Q_j) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{bd} Q_j\right) < \infty,$$

这意味着 $\|(\nu_j|_{\operatorname{bd} Q_j})\|_{\mathrm{TV}} = \nu_j(\operatorname{bd} Q_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$。 □

以下事实是 Fubini 定理的直接推论，我们将其表述为一个引理，以便后文引用。

引理 6.12。设 $H \subset \mathbb{R}^n$ 是一个仿射子空间，且 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to H$ 是一个投影，即满足 $\pi|_H = \mathrm{id}_H$ 的仿射映射。那么存在常数 $\gamma(\pi) \in (0,1]$，使得

$$\operatorname{vol}(A) = \gamma(\pi) \cdot \int_{\pi(A)} \operatorname{vol}_{n-\dim H}(A \cap \pi^{-1}(\{x\}))\, \mathrm{dvol}_{\dim H}(x)$$

对所有可测集 $A \subset \mathbb{R}^n$。

现在，我们将前面几个引理的见解结合起来，得到一个结果，使我们能够确定 P 的低维面上 P-对比序列极限的密度。

引理 6.13。设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体，且 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个可容许的P-对比序列，其极限为 μ，分量序列为 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$。设 $F \subset P$ 是 $0 \le m < n-1$ 的一个 m-面，且 $G \subset$ 相对内部 F 是一个满足 维数 $G =$ 维数 F 的多面体。令$\pi\colon \mathbb{R}^n \to$ 仿射包 F 为一个投影。此外，设 $(Q_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 是一个紧集序列，且$Q_{j+1} \subset$ 内部 Q_j 对 $j \in \mathbb{N}$ 成立，并且

$$\operatorname{bd} P \cap \bigcap_{j\in\mathbb{N}} Q_j = G \subset \operatorname{relint} F.$$

对 i、$j \in \mathbb{N}$，令 g_i^j: 相对内部 $F \to (-\infty, 0]$ 由下式给出

$$g_i^j(x) \coloneqq -\beta_i \cdot \gamma(\pi) \cdot \operatorname{vol}_{n-\dim F}(Q_j \cap \pi^{-1}(\{x\}) \cap (P \setminus K_i)),$$

其中 $\gamma(\pi)$ 是引理 *6.12*中的常数。最后，我们假设对每个 $j \in \mathbb{N}$，序列 $(g_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 相对内部 F上一致收敛于函数 g_∞^j: 相对内部 $F \to \mathbb{R}$。那么极限序列 $(g_\infty^j)^{j\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛于函数 g^*: 相对内部 $F \to (-\infty,\ 0]$并且有

$$\mu|_G = [g^*]_{\mathsf{M}(F)}.$$

证明。 根据注 6.10，不失一般性地假设 $K_i \subset P$ 对所有$i \in \mathbb{N}$均成立。引理 6.3 和引理 6.11 推出存在一个子序列 $(\mu_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\mu|_G = \pi_*(\mu|_G) = \operatorname*{wlim}_{j\to\infty} \operatorname*{wlim}_{i\to\infty} \pi_*(\mu_{k(i)}|_{Q_j}).$$

由引理 6.12 可知，$g^j_{k\,(i)}$ 是 $\pi_*(\mu_{k(i)}|_{Q_j})$ 的密度。根据假设，序列 $([g^j_{k(i)}]_{\mathsf{M}(F)})_{i\in\mathbb{N}}$在全变差范数下收敛到$[g^j_\infty]_{\mathsf{M}(F)}$，因此也弱收敛。接下来只需证明 $\operatorname{wlim}_{j\to\infty}[g^j_\infty]_{\mathsf{M}(F)} = [g^*]_{\mathsf{M}(F)}$。

由于序列 $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 单调递减，序列 $(g_\infty^j)_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 $g_\infty^j \le g_\infty^{j+1} \le 0$对所有 $j\in\mathbb{N}$ 都成立，因此逐点收敛到函数 $g^*\colon \operatorname{relint} F \to (-\infty, 0]$。由单调收敛定理 [5, 定理 4.3。2],可得

$$\|[g_\infty^j]_{\mathsf{M}(F)} - [g^*]_{\mathsf{M}(F)}\|_{\mathrm{TV}} = \int_{\operatorname{relint} F} g^* - g_\infty^j \,\mathrm{dvol}_m \longrightarrow_{j\to\infty} 0. \qquad \square$$

为说明 P-对比序列的极限在 P 的低维面上具有凹密度，我们将使用关于具有相同投影的凸集的布伦-明可夫斯基不等式的以下强化版本。该结果是经典结果，例如参见[2, 第 50] 章。

命题 6.14。设 K、$L\in\mathcal{K}_n^n$ 和 $H\subset\mathbb{R}^n$ 为一个超平面。若 $\pi_H(K) = \pi_H(L)$，则对每个 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\operatorname{vol}(\lambda K + (1-\lambda)L) \ge \lambda \operatorname{vol}(K) + (1-\lambda)\operatorname{vol}(L).$$

现在我们证明一个与引理 6.6 关于面 $F\subset P$且 维数 $F < n-1$ 类似的结果 .

引理 6.15。设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体，且 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个极限为 μ 的可容许的 P- 对比序列。设 $F\subset P$ 是 $0\le m < n-1$ 的一个 m- 面。则 $\mu|_{\operatorname{relint} F}$ 关于 体积$_m\in\mathsf{M}(F)$ 绝对连续，并具有凹密度f：相对内部 $F\to(-\infty, 0]$。

引理 6.15的结论弱于定理 $-f^{(n-\dim F)^{-1}}$中断言的 $-f^{(n-\dim F)^{-1}}$是凸的这一结论 1.7。我们将在下文加强这一结论。

引理 *6.15*的证明。设 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$ 是$\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$的分量序列。根据备注 6.10，同样不失一般性地假设，对于所有 $K_i\subset P$，都有 $i\in\mathbb{N}$。令$G\subset$相对内部 F为一个多面体，且维数 $G =$ 维数 F，并令 $G_j := \frac{j}{j+1}G + \frac{1}{j+1}F$ 对于 $j\in\mathbb{N}$。 — —

设 u_1、……、$u_\ell\in\mathbb{S}^{n-1}$为包含$F$的面 F_1、……、F_ℓ的外法向量。对于每个 $v\in\operatorname{vert}(G_1)$，存在一个 $\alpha_v > 0$，使得对所有$t\in(0,\alpha_v]$，均有 $v - t\cdot\sum_{i=1}^\ell u_i\in\operatorname{int} P$。令 $w := \left(\min_{v\in\operatorname{vert}(G_1)}\alpha_v\right)\cdot\sum_{i=1}^\ell u_i$，则有

$$G_1 - [\tfrac{w}{2}, w] = \operatorname{conv}\left(\operatorname{vert} G_1 - [\tfrac{w}{2}, w]\right) \subset \operatorname{int} P.$$

对于任意的 $z\in$仿射包 F，令 $B :=$张成$(F - z\cup\{w\})^\perp\cap B_n$。由于 $G_1 - [\frac{w}{2}, w]$是紧的，存在一个 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$G_1 - [\tfrac{w}{2}, w] + \tfrac{1}{j}B \subset \operatorname{int} P \quad \text{for all } j\ge N.$$

根据引理 6.2(ii)，不失一般性，我们可以假设

$$G_1 - [\tfrac{w}{2}, w] + \tfrac{1}{j}B \subset \operatorname{int} K_i \quad \text{for all } i,j\ge N. \tag{6.2}$$

我们通过以下方式定义两个凸体序列

$$Q_j := G_j + \tfrac{1+j}{2j}[-w,w] + \tfrac{1}{j}B \quad\text{and}\quad \tilde{Q}_j := G_1 + \tfrac{1+j}{2j}[-w,w] + \tfrac{1}{j}B \quad \text{for } j\in\mathbb{N}. \tag{6.3}$$

根据构造，序列 $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 满足引理 $Q_{j+1}\subset$ 内部Q_j 中的条件~6.13；序列 $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 将使我们能够应用引理 6.5。下文中，我们将使用引理 6.13 证明 $\mu|_G$ 相对于 体积$_m\in\mathsf{M}(G)$ 是绝对连续的，并具有一个凹密度 相对内部 $G\to(-\infty, 0]$。随后可通过类似于命题 6.7证明中的论证，推导出该引理的结论。

对于 i，$j\in\mathbb{N}$，令 g_i^j：相对内部$G_1\to\mathbb{R}$由下式给出

$$g_i^j(x) := -\beta_i\cdot\operatorname{vol}_{n-m}(\tilde{Q}_j\cap\pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(x)\cap(P\setminus K_i)).$$

我们首先证明，当 g_i^j 为凹函数，且 i 和 j 足够大时。对于 $x \in$ 相对内部 G_1，令$L_j(x)$：$= \tilde{Q}_j \cap \pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(x)$。注意，由（6.2）和（6.3），$L_j(x)$ 的定义意味着 $L_j(x)$ $\cap K_i \supset x - \frac{w}{2} + \frac{1}{j}B$，从而

$$\pi_{w^\perp}(L_j(x) \cap K_i) = x + \frac{1}{j}B \quad \text{for all } x \in G_1 \text{ and } i, j \geq N. \tag{6.4}$$

对于给定的 $x \in$相对内部 G_1，我们考虑 $(n-m)$ 维凸体 $L_j(x) \cap P$。令$P_F \supset P$ 为从 P 中删除 P 的所有在 F 的相对内部点处不活跃的面定义不等式后得到的多面体，即，P_F 由面定义超平面 aff F_1、……、aff F_ℓ所界定。于是存在一个 $N' \geq N$，使得

$$L_j(x) \cap P = L_j(x) \cap P_F \quad \text{for all } j \geq N'. \tag{6.5}$$

在下文中，我们假设 $i,\ j \geq N'$。由于 $G_1 \subset F$，我们有

$$[L_j(x) \cap P_F] - x = [L_j(y) \cap P_F] - y \quad \text{for all } y \in \operatorname{relint} G_1$$

因此，利用（6.5），

$$\operatorname{vol}_{n-m}[L_j(x) \cap P] = \operatorname{vol}_{n-m}[L_j(y) \cap P] \quad \text{for all } y \in \operatorname{relint} G_1. \tag{6.6}$$

令 $x,\ y \in$相对内部 G_1 且 $\lambda \in [0,1]$。由 K_i 的凸性，我们有

$$\lambda(L_j(x) \cap K_i) + (1-\lambda)(L_j(y) \cap K_i) \subset L_j(\lambda x + (1-\lambda)y) \cap K_i. \tag{6.7}$$

由于 $i \geq N$，由（6.4）可得 $\pi_{w^\perp}([L_j(x) \cap K_i] - x) = \pi_{w^\perp}([L_j(y) \cap K_i] - y) - = \frac{1}{j}B$，且命题 6.14给出

$$\operatorname{vol}_{n-m}(\lambda(L_j(x) \cap K_i) + (1-\lambda)(L_j(y) \cap K_i)) \geq \lambda \cdot \operatorname{vol}_{n-m}(L_j(x) \cap K_i) + (1-\lambda) \cdot \operatorname{vol}_{n-m}(L_j(y) \cap K_i).$$

结合 (6.7) 和 (6.6)，这表明 g_i^j 对于 i、$j \geq N'$是凹的。我们固定 $j \geq \max\{N', 2\}$。根据引理 6.2(i)，序列 $(g_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ 在空间 $L^1(G_1)$中有界，而引理 6.5(ii)意味着存在一个子序列 $(g_k^j(i))_{i\in\mathbb{N}}$，它在 G_j 上一致收敛于一个凹函数 $g_\infty^j\colon G_j \to (-\infty, 0]$。通过反复应用引理 6.5(ii)，并结合通常的对角线论证，我们得到一个严格递增函数 $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $j \geq \max\{N', 2\}$，$(g_k^j(i))_{i\in\mathbb{N}}$ 都在 G_j 上一致收敛于 g_∞^j。关于引理 6.13 的假设，我们注意到序列 $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 满足$Q_j \subset \operatorname{int} Q_{j-1}$（当 $j \in \mathbb{N}$ 且 $\operatorname{bd} P \cap \bigcap_{j\in\mathbb{N}} Q_j = G$ 时），并且我们有

$$g_i^j(x) = -\beta_i \cdot \operatorname{vol}_{n-m}(Q_j \cap \pi_{\operatorname{aff} F}^{-1}(x) \cap (P \setminus K_i)) \quad \text{for } x \in G_j.$$

应用引理 6.13 于序列 $(g_i^j \cdot \mathbb{1}_{G_j})_{j\in\mathbb{N}}$，我们得到 $(g_\infty^j)_{j\in\mathbb{N}}$ 在 G 上逐点收敛到函数 $g^*\colon G \to (-\infty, 0]$ 且 $\mu|_{\operatorname{relint} G} = [g^*]_{\mathsf{M}(F)}$。由于 g_∞^j 对每个 $j \geq N'$都是凹函数，结论得证。□

我们强化引理 6.15 的策略受 Fillastre 关于余凸体的反向 Brunn-Minkowski 不等式的证明启发。该证明的主要思想包含在下面的引理中，该引理取自 [7, 引理 4]。

引理 6.16。设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸锥，$f\colon C \to \mathbb{R}$ 是一个次数为 m的正齐次凸函数，即对于所有 $x \in C \setminus \{0\}$ 和 $\lambda \geq 0$，都有 $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$。则 f 是 $\frac{1}{m}$-凸的。

为证明反向 Brunn-Minkowski 不等式，Fillastre 首先证明体积泛函在给定的余凸体锥上是凸的，然后利用体积的齐次性推导出所需的 $\frac{1}{n}$-凸性。翻译到我们的设定中，这促使我们研究在适当的射影变换（射影几何意义下）作用下，P-对比序列的极限如何变化。

因此，我们得到引理6.15的如下加强。

命题 6.17. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多面体，且 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个以 P 为对比序列的可容许序列，其极限为 μ。设 $F \subset P$ 是 m对应的一个 $0 \leq m < n-1$面。设$f\colon$ 相对内部 $F \to (-\infty, 0]$ 是 $\mu|_{\operatorname{relint} F}$的凹密度，由引理 *6.15*可知该密度存在。则 $-f$ 是 $(n-m)^{-1}$-凸的

命题 6.17 的证明思路如下。我们将相对内部 F 替换为其正包 $C \coloneqq \operatorname{pos}(\operatorname{relint} F)$，即由相对内部 F中的向量˜的所有非负倍数构成的凸锥，并将 $-f$ 在 C 上的函数延拓为次数为 $n-m$的正齐次函数 f。˜根据引理 6.16，只需证明 f 是凸的，即可得出命题 6.17 的结论。为此，˜我们任取两点 $\tilde{x}$、$\tilde{y} \in C \setminus \{0\}$，并证明 $f|_{[\tilde{x},\tilde{y}]}$ 除一个负常数因子外，等于某个对比序列的极限的连续密度；根据引理 6.15，该密度是凹的。根据定义，对于某些 x、$y \in$，有 $\tilde{x} = r_1 x$ 和 $\tilde{y} = r_2 y$，其中 x、$y \in$属于 $\operatorname{relint} F$，且r_1、$r_2 > 0$。为了应用引理 6.15，我们的中间目标是找到一个保持凸性的变换 τ，使其满足 $\tau(x) = \tilde{x}$、$\tau(y) = \tilde{y}$，并且在每个平行超平面 $z + \{y-x\}^\perp$（$z \in [x,y]$）上限制为一次膨胀。只有当 $r_1 = r_2$时，这种保持凸性的变换 τ 才可能是仿射的；一般而言，还需要一个额外的“自由度”。因此我们考虑射影变换，它具有所需的性质。关于射影变换在多面体研究中的作用，简要概述见第 2.6]节 [26, 。为应用引理 6.15，我们选取一个射影变换 τ，使其以某个缩放因子膨胀每个超平面 $z + \{y-x\}^\perp$（$z \in [x,y]$），并且直观地说，将缩放因子为无穷大的超平面 $H_{\tilde{z}} = \tilde{z} + \{y-x\}^\perp$、$\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$移至“无穷远超平面”。将 P截断为一个多面体 P^+后，我们确保 P^+ 中没有点被映射到“无穷远处”，由此可知 $\tau(P^+)$是一个边界包含线段 $[\tilde{x},\tilde{y}]$的多面体。通过调整引理 6.15 证明中的若干˜部分，我们最终得出 $f|_{[\tilde{x},\tilde{y}]}$ 是凸的。

命题 6.17 的证明。不失一般性，我们假设 $0 \in \operatorname{int} P$。令˜$C \coloneqq \operatorname{pos}($ F 的相对内部$)$，并令 f 为满足 $f|_{\operatorname{relint} F} = -f$ 且关于 ˜ 正齐次、次数为 $n-m$ 的唯一函数 $C \to \mathbb{R}$。根据引理 6.16，接下来只需证明˜f是凸的。为此，令 x、$y \in$属于 F的相对内部，满足 $x \neq y$，并令 r_1、$r_2 > 0$。我们将证明˜ ˜ $f|_{[r_1 x, r_2 y]}$ 是凸的。由于 f 连续，只需考虑 $x-y, r_1 x - r_2 y \neq 0$ 的情形；通过对 r_1 或 r_2 做轻微变动，总能实现这一点。一般情形则由逼近得到。令 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h(z) \coloneqq \frac{1}{r_1 r_2 \|x-y\|^2} \langle x-y, (r_2-r_1)z + r_1 x - r_2 y \rangle .$$

根据构造，h 是满足以下条件的唯一仿射泛函：对于所有 $z \in y + \{x-y\}^\perp$，$h(x) = \frac{1}{r_1}$且 $h(z) = \frac{1}{r_2}$。此外，由于我们对 r_1 和 r_2的假设，有

$$h(0) = \frac{1}{r_1 r_2 \|x-y\|^2} \langle x-y, r_1 x - r_2 y \rangle \neq 0.$$

设 $H^+ \coloneqq \{z \in \mathbb{R}^n \mid h(z) \geq \min\{\frac{1}{2r_1}, \frac{1}{2r_2}\}\}$ 且 $P^+ \coloneqq P \cap H^+$。现在有

$$\det \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{r_2-r_1}{r_1 r_2 \|x-y\|^2}(x-y)^\intercal & h(0) \end{bmatrix} = h(0) \neq 0$$

由此可得

$$\tau\colon H^+ \to \mathbb{R}^n, \quad z \mapsto \frac{z}{h(z)}$$

是一个将 x映射到 $r_1 x$、将 y 映射到 $r_2 y$ 的射影变换（见 [26, 第 68]页）。顺便指出，如果 $r_1 = r_2$，那么 $H^+ = \mathbb{R}^n$ 且 τ 是一个膨胀。

令 $[(\beta_i, K_i)]_{i\in\mathbb{N}}$ 为 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$的分量序列。不失一般性，我们假设对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均有 $K_i^+ := K_i \cap H^+ \subset P^+$ 成立，并且受限序列 $(\mu_i|_{P^+})$ 弱收敛。通过变量替换，我们得到

$$\int_{\tau(P^+\setminus K_i^+)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{P^+\setminus K_i^+} f(\tau(x))\cdot|\det\tau(x)|\,\mathrm{d}x,$$

对每个 $f \in C(\mathbb{R}^n)$。由于函数 $(f\circ\tau)\cdot|\det\tau|$ 在 H^+ 上连续，因此 $[(\beta_i, \tau(K_i^+))]_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个可容许的 $\tau(P^+)$-对比序列 $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$，其极限为 ν。

令 F^+ 为 P^+ 的面 $F\cap H^+$，并令 $G := \frac{1}{2}([x,y]+F^{\pm})$。对于 $j\in\mathbb{N}$，我们设$G_j := \frac{j}{j+1}G + \frac{1}{j+1}F^+$，并按照 (6.3) 定义 Q_j 和 $\tilde{Q}_j$。根据构造，仿射泛函 h 在仿射子空间 $\pi_{\operatorname{aff}F}^{-1}(\{x\})$ 上为常数，对所有 $x\in\operatorname{aff}F$ 均如此。因此，映射 $\pi := \tau\circ\pi_{\operatorname{aff}F}\circ\tau^{-1}$ 是仿射的；事实上，它是到 $\tau(\operatorname{aff}F)$ 上的投影。令 $\gamma(\pi)$ 如引理 6.12 所述。由于 τ 是到其像上的同胚，序列 $(\tau(Q_j))_{j\in\mathbb{N}}$ 满足引理 6.13 的假设。对于 $i,j\in\mathbb{N}$，我们定义 $\tilde{g}_i^j\colon \tau(\operatorname{relint}G_1)\to(-\infty,0]$ by

$$\tilde{g}_i^j(z) := -\beta_i\cdot\gamma(\pi)\cdot\operatorname{vol}_m(\tau(Q_j)\cap\pi^{-1}(\{z\})\cap\tau(P^+\setminus K_i^+)),$$

且 $g_i^j\colon G_1\to(-\infty,0]$ 由

$$g_i^j(z) := -\beta_i\cdot\operatorname{vol}_m(Q_j\cap\pi_{\operatorname{aff}F}^{-1}(\{z\})\cap(P^+\setminus K_i^+)).$$

利用 τ 是 $\pi_{\operatorname{aff}F}^{-1}(\{z\})$ 上的膨胀，对所有 $z\in\operatorname{aff}F$ 均成立，可得

$$\tilde{g}_i^j(\tau(z)) = h(z)^{-n+m}\cdot\gamma(\pi)\cdot g_i^j(z)\quad\text{for all } z\in\operatorname{relint}G_1. \tag{6.8}$$

按照引理 6.15 的证明中的方法迭代应用引理 6.5(ii)，可得存在一个 $N'\in\mathbb{N}$ 和一个严格递增函数 $k\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得 $(g_k^j(i))_{i\in\mathbb{N}}$ 在所有 $j\geq N'$ 上均于 G_j 的相对内部上一致收敛。由于 h^{-n+m} 在 F^+ 的相对内部上有界，因此 $(\tilde{g}_k^j(i))_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\tau(G_j$ 的相对内部) 上一致收敛。将引理 6.13 应用于可容许的 $\tau(P^+)$-对比序列 $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$，可得逐点极限$\tilde{g}^*(z) := \lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}\tilde{g}_i^j(z)$ 存在，并且满足

$$\nu|_{\tau(G)} = [\tilde{g}^*]_{M(\tau(F^+))}.$$

由于 $\nu|_{\tau(\operatorname{relint}F^+)}$ 至多具有一个连续密度，且 $\tilde{g}^*$ 是连续的，引理 6.15~表明 $\tilde{g}^*|_{[r_1x,r_2y]}$ 是凹的。最后，回顾 f的定义，我们注意到~(6.8) 蕴含 $\tilde{g}^*|_{[r_1x,r_2y]} = -\gamma(\pi)\cdot f|_{[r_1x,r_2y]}$，从而证明完毕。□

现在只需结合前面的结果，即可证明我们的主要结论。

定理 1.7 的证明。根据命题5.1，剩下的工作是证明每个 $\mu\in\mathsf{W}(P)$ 都可以表示为 (1.4) 中的直和。设 $(K_t)^{t\in[0,1]}$ 是实现 μ 的一个族。那么$[(i, K_{\frac{1}{i}})]_{i\in\mathbb{N}}$ 是某个 P-对比序列的分量序列，- 结论由命题 6.7 和命题 6.17 得出。$\mathsf{W}(P)$ 是凸锥这一结论，源于 $\mathsf{W}(P)$ 是 $\mathsf{W}^{\triangleleft}(P)$ 的序列闭包，而后者显然是一个凸锥。□

注 6.18： 定理 1.7 表明，对于 $n\in\mathbb{N}$，两个 $\frac{1}{n}$-凸函数之和仍然是 $\frac{1}{n}$-凸函数。这一事实也可以由 Hölder 不等式推出。

7. 各向同性常数的多胞体极大化子条件

在本节中，我们利用定理 1.7推导关于各向同性常数及其他几何泛函的多面体极大化子的必要条件。

令 $\phi\colon \mathcal{K}_n^n \to \mathbb{R}$ 为形如（1.1）的泛函，且 $P \in \mathcal{P}_n^n$。我们定义函数$h_{\phi,\,P}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下：

$$h_{\phi,P} \coloneqq \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\int_P f_1(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_P f_m(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot f_i.$$

若 P 是 ϕ的局部极大化子，则由定理 1.7 可知

$$\int h_{\phi,P}\,\mathrm{d}\mu \leq 0 \tag{7.1}$$

对所有 $\mu \in \mathsf{W}(P)$均成立。特别地，对于所有 $\mu \in \mathsf{W}^{\pm}(P)$，（7.1）均取等号。这引出了以下定义。

定义 7.1. 设 ϕ 如上所述。若多面体 $P \in \mathsf{P}_n^n$ 满足 $\mathsf{W}(P)$包含于$\{h_{\phi,P}\}$的极锥中，则称其为扰动稳定的（相对于 ϕ），即对所有 $\mu \in \mathsf{W}(P)$，（7.1）均成立。若多面体 P满足 $\mathsf{W}^{\pm}(P)$包含于$\{h_{\phi,P}\}$的湮灭子中，则称其为弱扰动稳定的，即对所有 $\mu \in \mathsf{W}^{\pm}(P)$，（7.1）均成立。

对于 $F \in \Phi(P)$，我们将 aff F 上勒贝格测度到 F 的限制记为 vol_F，并设

$$\mathrm{vol}_\Phi \coloneqq \sum_{F \in \Phi(P)} \mathrm{vol}_F \in \mathsf{M}^+(\mathrm{bd}\,P).$$

现在，我们通过将 $\mathsf{W}(P)$ 中所有具有平方可积密度的元素嵌入希尔伯特空间 L^2(bd P,vol_Φ)，定义

$$\mathsf{W}^2(P) \coloneqq \left\{ f \in L^2(\mathrm{bd}\,P, \mathrm{vol}_\Phi) \,\middle|\, \exists \mu \in \mathsf{W}(P)\colon\ \mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{dvol}_\Phi \right\}.$$

由于 $\mathsf{W}^{\lhd}(P)$ 在 $\mathsf{W}(P)$ 中稠密，且 $\mathsf{W}^{\lhd}(P)$ 的每个元素都具有平方可积密度，因此，当且仅当 $\mathsf{W}^2(P)$ 包含于$\{h_{\phi,P}\}$的极锥中时，多面体 P 才是扰动稳定的。这一事实导出以下结果。

命题 7.2。 设 $P \in \mathsf{P}_n^n$，并设 ϕ 和 $h_{\phi,P}$ 如上。我们将希尔伯特空间 $L^2(\mathrm{bd}\ P,\ \mathrm{vol}_\Phi)$ 中到闭凸锥 $\mathsf{W}^2(P)$ 的度量投影记为 π_{W}。如果 P 是 ϕ 的局部极大化子，则 $\pi_{\mathsf{W}}(h_{\phi,P}) = 0 \in L^2(\mathrm{bd}\ P,\ \mathrm{vol}_\Phi)$。

证明。 $\mathsf{W}^2(P)$ 是闭集这一结论，源于 L^2-收敛蕴含L^1-收敛（因为 vol_Φ 有限），且 L^1-范数与全变差范数一致。如果存在一个 $f \in \mathsf{W}^2(P)$，满足$\|h_{\phi,P} - f\|_{L^2} < \|h_{\phi,P}\|_{L^2}$，那么

$$-2\langle h_{\phi,P}, f\rangle < -2\langle h_{\phi,P}, f\rangle + \|f\|_{L^2}^2 < 0,$$

而 f 是 P 不具备扰动稳定性的一个见证。 □

命题7.2 中的必要条件与统计学中的凸回归问题相似。由于 $\mathsf{W}^2(P)$ 是一个直和，该条件可改述如下：对于每个面 $F \subset P$，零函数是风险最小化问题 $\min_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E}[(-f(X) - h_{\phi,P}(X))^2]$, 的唯一极小化者，其中 X 是一个在 relint F 上均匀分布的随机向量，而$\mathcal{F}$表示 relint F上平方可积的（$n - \dim\ F$）$^{-1}$-凸函数类。

改写为各向同性常数的形式，命题 7.2 如下所述。

推论 7.3。 设 $P \in \mathcal{P}_n^n$ 是各向同性常数的各向同性局部极大值点，并设 π_{W} 如命题 7.2所述。那么 $\pi_{\mathsf{W}}(x \mapsto \|x\|_2^2 - n - 2) = 0 \in L^2(\mathrm{bd}\ P$,体积$_\Phi)$。令

$F \subset P$ 为一个面，并且 X 在 F 上服从均匀分布。利用有符号测度 (7.1) 对应的等式成立这一点， $\mu_i \in \mathsf{M}(F)$ 的密度为 $x \mapsto x_i$, $i \in [n]$，我们得到

$$\mathbb{E}[\|X\|_2^2 X] = (n+2)\mathbb{E}[X].$$

致谢。 本研究得到德国科学基金会（DFG）研究生院“复杂性的面”（GRK 2434）的资助。此外，感谢 Ansgar Freyer 和审稿人提出的宝贵意见与建议。

参考文献

[1] C. D. Aliprantis 和 K. C. Border。无限维分析：一本漫游指南。施普林格，1999年。[2] T. Bonnesen 和 W. Fenchel。凸体理论。第3卷。《数学及其应用成果》丛书。施普林格，1934年。[3] J. B. Conway。泛函分析教程。第二版。施普林格，2007年。[4] J. Dieudonné。分析论：第二卷。第10-II卷。《纯粹与应用数学》丛书。学术出版社，1970年。[5] R. M. Dudley。实分析与概率论。《剑桥高等数学研究》丛书。剑桥大学出版社，2002年。[6] J. Elstrodt。测度与积分理论。第8版。施普林格·斯佩克特鲁姆，2018年。[7] F. Fillastre。“余凸体反向布伦-明可夫斯基不等式的一个简短初等证明”。载于：谱理论与几何研讨会34 (2017)，第93–96页。[8] E. V. Khmaladze。“集合的测度微分”。载于：《数学分析与应用杂志》334.2 (2007)，第1055–1072页。[9] A. Khovanskiĭ 和 V. Timorin。“余凸体理论”。载于：《离散与计算几何》52.4 (2014)，第806–823页。[10] A. Klenke。概率论：一门综合课程。第三版。Universitext。施普林格，2020年。[11] M. Meyer 和 S. Reisner。“凸体的各向同性常数与边界性质”。载于：《美国数学会会刊》144.9 (2016)，第3935–3947页。[12] G. Ch. Pflug。随机模型优化。克鲁维尔学术出版社，1996年。[13] G. Ch. Pflug 和 H. Weisshaupt。“基于集值微积分的概率梯度估计及其在网络设计中的应用”。载于：《*SIAM*优化杂志》15.3 (2005)，第898–914页。[14] B. Piccoli 和 F. Rossi。“广义 Wasserstein 距离及其在带源项的输运方程中的应用”。载于：《理性力学与分析档案》第211卷 (2014)，第335–358页。[15] B. Piccoli、F. Rossi 和 M. Tournus。“有符号测度的 Wasserstein 范数及其在带源项的非局部输运方程中的应用”。预印本 hal-01665244v5。2021年。[16] L. Rademacher。“使各向同性常数达到最大值的单纯多面体必为单纯形”。载于：*Mathematika* 62.1 (2016)，第307–320页。[17] L. Rademacher。“随机单纯形期望体积的单调性”。载于：*Mathematika* 58.1 (2012)，第77–91页。[18] M. Reddiger 和 B. Poirier。“带角子流形的微分引理与雷诺输运定理”。载于：《现代物理几何方法国际期刊》20.8 (2023)。[19] R. T. Rockafellar。凸分析。普林斯顿大学出版社，1972年。[20] R. Schneider。“有限体积余凸集的布伦-明可夫斯基理论”。载于：《数学进展》332 (2018)，第199–234页。

[21] R. Schneider。凸体：布伦-闵可夫斯基理论。第151卷。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，2013年。[22] G. C. Shephard 和 R. J. Webster。“凸体集合的度量”。载于：*Mathematika*12.1 (1965)，第73–88页。[23] C. Villani。最优传输：古今。第338卷。《数学科学基础丛书》。施普林格，2009年。[24] H. Weisshaupt。“凸集值动力学的测度值方法”。载于：集值分析9 (2001)，第337–373页。[25] H. Weisshaupt。“参数化线性算子族的可微性及其平稳向量的敏感性”。载于：匈牙利数学期刊59 (2009)，第147–171页。[26] G. M. Ziegler。多胞体讲义。第152卷。数学研究生教材。施普林格，2007年。

柏林工业大学数学研究所，MA4-1秘书处，6月17日大街136号，10623 柏林，德国电子邮箱：kipp@math.tu-berlin.de