arXiv:2303.18113v1 [math.SG] 31 Mar 2023

双重 Gelfand–Cetlin 系统、极化不变性与彼得–外尔定理

PETER CROOKS 和 JONATHAN WEITSMAN

ABSTRACT. 丛映射 $T^*\mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(n)$ 为余切丛 $T^*\mathrm{U}(n)$ 提供了一个实极化，并给出几何量子化 $Q_1(T^*\mathrm{U}(n)) = L^2(\mathrm{U}(n))$。我们利用 Guillemin 和 Sternberg 的 Gelfand–Cetlin 系统证明，$T^*\mathrm{U}(n)$ 具有另一种实极化，其几何量子化为 $Q_2(T^*\mathrm{U}(n)) = \bigoplus_\alpha V_\alpha \otimes V_\alpha^*$，其中求和遍历 $\mathrm{U}(n)$ 的所有占优整权 α。彼得–外尔定理指出这两种量子化是同构的，因此可以将其理解为几何量子化中“极化不变性”的一个实例。

CONTENTS

1. 引言 1
1.1. 几何量子化、实极化与极化不变性 1
1.2. $T^*\mathrm{U}(n)$ 的实极化 3
1.3. 量子化 4
1.4. 文章结构 4
致谢 5
2. 双重 Gelfand–Cetlin 系统 5
2.1. 一些 Gelfand–Cetlin 理论 5
2.2. $G = \mathrm{U}(n)$ 的情形 6
2.3. T^*G 的哈密顿几何 7
2.4. $G = \mathrm{U}(n)$ 系统的定义 8
2.5. 动量映射像 10
3. $T^*\mathrm{U}(n)$ 的几何量子化 11
3.1. Bohr–Sommerfeld 集 11
3.2. 彼得–外尔定理与极化不变性 13
参考文献 13

1. 引言

1.1. 几何量子化、实极化与极化不变性。 设 (M, ω) 为一个整辛流形。设 $\mathcal{L} \longrightarrow M$ 是一个带有联络 ∇ 的 Hermitian 线丛，其曲率为 ω。Kirillov–Kostant–Souriau（KKS） [9, 10, 14] 的几何量子化纲领会将 预量子系统 $(M, \omega, \mathcal{L}, \nabla)$ 赋予一个复向量空间 $Q(M) = Q(M, \omega, \mathcal{L}, \nabla)$，称为 M 的几何量子化 。[1]这一纲领最基本的测试案例之一，是取 $M = T^*N$ 为一个光滑流形 N，并取 ω 为 T^*N 上典范一形式的外微分。这个一形式在 $\mathcal{L} = T^*N \times \mathbb{C}$ 上给出了一个曲率为 ω 的联络。量子力学中的相关考量表明，任何合理的几何量子化方法都应满足物理上

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53D50（主要）；17B80、53D20（次要）。*Key words and phrases.* Gelfand–Cetlin 系统、几何量子化、彼得–外尔定理。

[1]更一般地，量子化 $Q(M)$ 可以配备厄米度量，或具有更多结构。本文着重将 $Q(M)$ 构造为一个向量空间。

合理的几何量子化方法应满足 $Q(T^*N) = L^2(N)$，即平方可积函数 $N \longrightarrow \mathbb{C}$ 所构成的向量空间。

为了将其推广到余切丛以外的辛流形 M，人们寻求与余切丛投影 $T^*N \longrightarrow N$相类似的辅助数据。其中一种选择是实极化，从道德上说，它是由拉格朗日子流形构成的 M 叶状结构。实极化最简单的情形是由拉格朗日纤维化 $\pi : M \longrightarrow B$产生的叶状结构。量子化 $Q(T^*N) = L^2(N)$的推广，是将 $Q(M)$定义为如下复向量空间：其截面 $s : M \longrightarrow \mathcal{L}$ 沿着 π的纤维协变常数。

Sniatycki 的结果 [12] 表明，要求叶状结构无奇点且为纤维化结构是非常严格的限制；如果 M 是紧的，唯一的例子就是阿贝尔簇。为了超越阿贝尔簇，几何量子化文献中考察了许多例子，其中映射 π 仅仅是一般意义下的拉格朗日纤维化。本文中出现的实极化也属于此类。量子化还会产生进一步的问题：如果 π 的纤维是紧的，则不存在沿纤维为常数的截面；这类截面只存在于一组离散的纤维上 $\pi^{-1}(b)$，对应于点 $b \in B_{\mathrm{bs}} \subset B$，其中 $B_{\mathrm{bs}} \subset B$ 是 B的离散子集，即***Bohr–Sommerfeld*** 点的集合。尽管如此，Sniatycki 的工作 [12] 仍然启发了以下构造，该构造已用于许多情境：在由映射 π：$M \longrightarrow B$ 给出的实极化中，预量子系统（M，ω，$\mathcal{L}$，∇）的几何量子化定义为

$$Q(M) \coloneqq \bigoplus_{b \in B_{\mathrm{bs}}} \mathbb{C}\langle s_b \rangle,$$

其中 s_b 是将 $(\mathcal{L}, \nabla)$ 拉回到 $\pi^{-1}(b)$ 上的任意一个处处非零、协变常值截面，适用于$b \in B_{\mathrm{bs}}$。此定义默认可根据需要作各种临时修改，以处理 π的奇异纤维。对此，我们也将沿用文献中的做法。

尽管构造过程存在歧义，这种实极化量子化方法在许多实例中都得出了有趣的结果。特别是，在托里克流形 $[5, 6]$, 、阿贝尔簇 $[11, 13]$, 、旗簇 $[2]$, 以及某些模空间 $[8]$等迥然不同的实例中，它都与 K¨ähler 量子化和／或另一种实极化下的量子化相一致。这些都是反复出现的极化不变性现象的例子。本文旨在展示这一现象的另一个例子，即在 $M = T^*\mathrm{U}(n)$ 的情形下。

考虑 $M = T^*\mathrm{U}(1) = S^1 \times \mathbb{R}$. 的情形颇具说明性。用 $\mathbb{R}$ 上的显式坐标 p 和 S^1 上的显式坐标 ϑ 表示时，$T^*\mathrm{U}(1)$ 上的典范一形式和辛形式分别为 $\theta = p\mathrm{d}\vartheta$ 和 $\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\vartheta$。在 $T^*\mathrm{U}(1)$ 上赋予平凡厄米复线丛 $\mathcal{L} = T^*\mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}$，并取由一形式 ϑ 给出的相容联络，即得到一个预量子系统。自然投影 $\pi_1 : T^*\mathrm{U}(1) \longrightarrow S^1$ 和 $\pi_2 : T^*\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ 都是实极化。我们已经看到，由 π_1 给出的量子化是 $Q_1(T^*\mathrm{U}(1)) = L^2(\mathrm{U}(1))$。在由 π_2 给出的实极化中，协变常截面仅存在于 π_2 上方位于整数点 $k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 的纤维上；在 $\pi^{-1}(k)$ 上，一个不恒为零的协变常截面为 $s_k : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto \mathrm{e}^{ik\theta}$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。因此，由 π_2 给出的实极化中的几何量子化为

$$Q_2(T^*\mathrm{U}(1)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\langle \mathrm{e}^{ik\theta} \rangle.$$

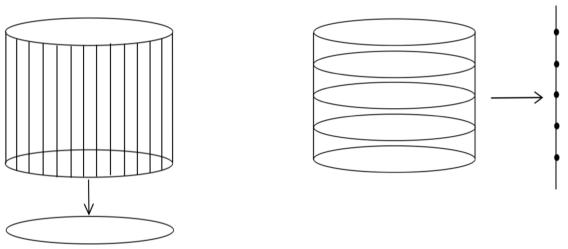

FIGURE 1. U(1) 的两种实极化

傅里叶分析随后表明， $Q_1(T^*\mathrm{U}(1))$ 是 $Q_2(T^*\mathrm{U}(1))$ 的完备化（关于 $Q_1(T^*\mathrm{U}(1)) = L^2(\mathrm{U}(1))$ 上的 L^2 度量），因此给出了极化不变性的一个例子。

1.2. **实极化：** $T^*\mathrm{U}(n)$。本文旨在说明，当以 $\mathrm{U}(n)$ 替代 U(1) 时，也会出现类似现象。首先需要回顾，丛投影$T^*\mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(n)$ 是一种实极化，其量子化为 $Q_1(T^*\mathrm{U}(n)) = L^2(\mathrm{U}(n))$。为了得到 $T^*\mathrm{U}(n)$ 的第二种实极化及其量子化 $Q_2(T^*\mathrm{U}(n))$，令 $\mathrm{b} := \frac{n(n+1)}{2}$，并使用 Guillemin–Cetlin 系统

$$\lambda : \mathfrak{u}(n)^* \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}}$$

Guillemin–Sternberg [2]的系统：有

$$\lambda(\xi) = (\lambda_{01}(\xi), \dots, \lambda_{0n}(\xi), \lambda_{11}(\xi), \dots, \lambda_{1(n-1)}(\xi), \dots, \lambda_{(n-1)1}(\xi))$$

对于所有斜厄米 $n \times n$ 矩阵 ξ，其中 $\lambda_{j1}(\xi) \geq \cdots \geq \lambda_{j(n-j)}(\xi)$ 是 ξ 对所有 $j \in \{0, \dots, n-1\}$ 的右下角 $(n-j) \times (n-j)$ 子矩阵的特征值。另一个要素是动量映射

$$\phi : T^*\mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathfrak{u}(n)^* \times \mathfrak{u}(n)^*$$

对于 $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ 在 $T^*\mathrm{U}(n)$ 上的哈密顿作用。复合映射

$$\varphi := (\lambda, \lambda) \circ \phi : T^*\mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}} = \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$$

随后限制为环面 $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ 在开稠密子集 $(T^*\mathrm{U}(n))_{\text{s-reg}} \subset T^*\mathrm{U}(n)$ 上的哈密顿作用的动量映射，其中 $\mathbb{T} := \mathrm{U}(1)^{\mathrm{b}}$。将 $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ 对此作用的核取商，得到一个环面 $\mathcal{T}$。事实证明， $\mathcal{T}$ 在 $(T^*\mathrm{U}(n))^{\text{s-reg}}$ 上的作用是自由的，而映射 φ 的取值落在

$$\mathcal{B} := \mathrm{Lie}(\mathcal{T})^* \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}.$$

可知 $\mathcal{T}$-动量映射

$$\varphi\big|_{(T^*\mathrm{U}(n))_{\text{s-reg}}} : (T^*\mathrm{U}(n))_{\text{s-reg}} \longrightarrow \mathcal{B} \tag{1.1}$$

是一个实极化，其非空纤维恰好是 $\mathcal{T}$ 在 $T^*\mathrm{U}(n))^{\text{s-reg}}$ 中的轨道。

接下来，我们描述上述实极化的 Bohr–Sommerfeld 点集（又称 Bohr–Sommerfeld 集）。为此，设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是一个非递增实数列。记 $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathfrak{u}(n)^*$ 为 $\mathrm{U}(n)$ 经过 $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{u}(n)^*$ 的余伴随轨道。满足 $\lambda(\mathcal{O}_\alpha) = \{\alpha\} \times \mathrm{GC}_\alpha$ 的紧子集 $\mathrm{GC}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 是 $\mathcal{O}_\alpha$ 的 ***Gelfand–Cetlin* 多面体**，并将在以下结果中发挥作用。

定理 A. *(1.1)* 的 *Bohr–Sommerfeld* 集为 $\varphi((T^*\mathrm{U}(n))^{\text{s-reg}}) \cap \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$。此外，点$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 属于该集合，当且仅当它满足以下条件：

(i) $(\alpha_1,\dots,\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$；(ii) $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$；(iii) $\alpha_{\mathrm{b}+1+j} = -\alpha_{n-j}$ 对所有 $j \in \{0,\dots,n-1\}$；(iv) $(\alpha_{n+1},\dots,\alpha_{\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_\alpha$ 的内部，其中 $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$；(v) $(\alpha_{\mathrm{b}+n+1},\dots,\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_{\alpha^*}$ 的内部，其中 $\alpha^* := (-\alpha_n,\dots,-\alpha_1)$。

1.3. 量子化。 假设 $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ 是非递增的。Guillemin 和 Sternberg [2] 考虑了一个连续映射 $\lambda_\alpha\colon \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{1}{2}\text{维数}\,\mathcal{O}_\alpha}$，它在开稠密子集 $(\mathcal{O}_\alpha)_{\text{s-reg}} \subset \mathcal{O}_\alpha$ 上限制为实极化。他们还指出，在 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 的特殊情形下，$\mathcal{O}_\alpha$ 带有一个预量子系统。于是，这个实极化为 $\lambda_\alpha\big|_{(\mathcal{O}_\alpha)_{\text{s-reg}}}$ 导出一个定义良好的 Bohr–Sommerfeld 集；它由 $\lambda_\alpha((\mathcal{O}_\alpha)^{\text{s-reg}})$ 中的整点组成。正如 [2]，第 5 节和第 6 节所解释的那样，自然的做法是将这个 Bohr–Sommerfeld 集重新定义为 $\lambda_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \mathsf{GC}_\alpha$ 中整点的集合，从而认为自己是在对整个 $\mathcal{O}_\alpha$ 进行量子化。这一定义的一个吸引人之处在于，$\dim Q(\mathcal{O}_\alpha) = \dim V_\alpha$，其中 V_α 是最高权为 α [2, 的不可约复 U(n)-模。定理 6.1]。

我们采用类似的方法来量化 $T^*\mathrm{U}(n)$。这相当于将定理 A 中的 Bohr–Sommerfeld 集 $\varphi((T^*\mathrm{U}(n))^{\text{s-reg}}) \cap \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$ 替换为 $\varphi(T^*\mathrm{U}(n)) \cap \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$。点 $(\alpha_1,\dots,\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 属于这个新的 Bohr–Sommerfeld 集，当且仅当它满足以下条件：

(i) $(\alpha_1,\dots,\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$；(ii) $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$；(iii) 对所有 $j \in \{0,\dots,n-1\}$均有 $\alpha_{\mathrm{b}+1+j} = -\alpha_{n-j}$；(iv) $(\alpha_{n+1},\dots,\alpha_{\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_\alpha$，其中 $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$；(v) $(\alpha_{\mathrm{b}+n+1},\dots,\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_{\alpha^*}$，其中 $\alpha^* := (-\alpha_n,\dots,-\alpha_1)$。

由此，一个 Bohr–Sommerfeld 点由以下数据构成：U(n) 的占优整权 α、GC_α 中的一个整点，以及 GC_{α^*} 中的一个整点。我们还注意到，对于每个占优整权 α，α^* 都是 V_α^* 的最高权。这些考量为以下结果提供了依据。

定理 B。 与实极化 (1.1) 相关的 $T^*\mathrm{U}(n)$ 的几何量子化为

$$Q_2(T^*\mathrm{U}(n)) = \bigoplus_\alpha V_\alpha \otimes V_\alpha^*,$$

其中求和遍历 $\mathrm{U}(n)$ 的所有占优整权 α。

彼得–外尔定理使我们能够将（$Q_2(T^*\mathrm{U}(n))$ 的完备化）与 $Q_1(T^*\mathrm{U}(n)) = L^2(\mathrm{U}(n))$ 识别起来，从而提供了极化不变性的一个实例。

1.4. 组织结构。 我们将在第 2 节定义双重 Gelfand–Cetlin 系统在 $T^*\mathrm{U}(n)$ 上的相关理论及基本性质。本节从第 2.1 节开始，简要概述任意李型中 Gelfand–Cetlin 理论的相关部分。随后，第 2.2 节将其专门化到 $G = \mathrm{U}(n)$ 的情形。第 2.3 节将简要回顾紧致连通李群的余切丛的哈密顿几何。接着，我们将在第 2.4 节定义并研究 $T^*\mathrm{U}(n)$ 上的双重 Gelfand–Cetlin 系统。在第 2.5 节中，我们计算该系统所依据的动量映射的像。

第 3 节完全致力于在由双重 Gelfand–Cetlin 系统导出的实极化下对 $T^*\mathrm{U}(n)$ 进行量子化。在第 3.1 节中，我们计算了由该极化产生的 Bohr–Sommerfeld 集。这引出了第 3.2 节，在该节中，我们利用 Bohr–Sommerfeld 集和彼得–外尔定理展示了极化不变性的一个实例。

致谢。 P.C. 获犹他州立大学启动基金资助。J.W. 获 Simons 合作基金 # 579801 资助。

2. The double Gelfand–Cetlin system

2.1. 一些 Gelfand–Cetlin 理论。 设 G 是一个秩为 ℓ 的紧致连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，指数映射为 $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$，并配备固定的 G-不变内积 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$。我们将会考虑如下量

$$\mathrm{b} \coloneqq \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell).$$

我们还假设，$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_m$ 是由具有相应李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_m$ 和秩 $\ell = \ell_0 \geq \ell_1 \geq \cdots \geq \ell_m$ 的连通闭子群构成的 G 的一个下降滤子，并且满足条件 $\mathrm{b} = \sum_{j=0}^{m} \ell_j$。为 $j \in \{0, \ldots, m\}$ 选择极大环面 $T_j \subset G_j$。对每个 $j \in \{0, \ldots, m\}$，考虑李代数 $\mathfrak{t}_j \subset \mathfrak{g}_j$，并选择一个基本 Weyl 室 $(\mathfrak{t}_j)_+ \subset \mathfrak{t}_j$。注意，我们的 G-不变内积诱导出一个 G_j-表示的同构 $\mathfrak{g}_j \cong \mathfrak{g}_j^*$。因此，$\mathfrak{g}_j$ 的子集 $\mathfrak{t}_j$ 和 $(\mathfrak{t}_j)_+$ 分别与 $\mathfrak{g}_j^*$ 的子集 $\mathfrak{t}_j^*$ 和 $(\mathfrak{t}_j^*)_+$ 相对应。由此得到一个扫掠映射 π_j: $\mathfrak{g}_j^* \longrightarrow (\mathfrak{t}_j^*)_+$；它由以下性质定义：对于所有 $\xi \in \mathfrak{g}_j^*$，均有 $(G_j \cdot \xi) \cap (\mathfrak{t}_j^*)_+ = \{\pi_j(\xi)\}$，其中 $G_j \cdot \xi \subset \mathfrak{g}_j^*$ 表示穿过 ξ 的 G_j 的余伴随轨道。

固定一个指标 $j \in \{0, \ldots, m\}$。给定任意极大环面 $H \subset G_j$ 及其李代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_j$，考虑格

$$\Lambda^\vee(H) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \ker\Big(\exp\big|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow H\Big) \subset \mathfrak{h}.$$

H 的权格由下式给出

$$\Lambda(H) \coloneqq \{\alpha \in \mathfrak{h}^* : \alpha(x) \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in \Lambda^\vee(H)\} \subset \mathfrak{h}^*.$$

另一方面，　　，令我们选取格 $\Lambda^\vee(T_j)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基 $\{\phi_{j1}, \ldots, \phi_{j\ell_j}\}$。这些函数

$$\nu_{jk} \coloneqq \phi_{jk} \circ \pi_j : \mathfrak{g}_j^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \ldots, \ell_j\}$$

可见它们是 G_j-不变且连续的。这些函数在

$$(\mathfrak{g}_j^*)_{\mathrm{reg}} \coloneqq \{\xi \in \mathfrak{g}_j^* : \dim(\mathfrak{g}_j)_\xi = \ell_j\},$$

上光滑，其中 $(\mathfrak{g}_j)_\xi \subset \mathfrak{g}_j$ 表示 $\xi \in \mathfrak{g}_j^*$ 的 $\mathfrak{g}_j$-中心化子。我们还用 $(G_j)_\xi \subset G_j$ 表示 $\xi \in \mathfrak{g}_j^*$ 在余伴随作用下的 G_j-稳定子。接下来的结果将在后文中发挥重要作用。

命题 1. 设 $j \in \{0, \ldots, m\}$ 和 $\xi \in (\mathfrak{g}_j^*)^{\mathrm{reg}}$。限制 $\xi\big|_{(\mathfrak{g}_j)_\xi} \in (\mathfrak{g}_j)_\xi^*$ 属于权格 $\Lambda((G_j)_\xi)$ 当且仅当对所有 $k \in \{1, \ldots, \ell_j\}$，$\nu_{jk}(\xi) \in \mathbb{Z}$。

证明. 应用 [1, 命题 5] 可知，$\{\mathrm{d}_\xi \nu_{j1}, \ldots, \mathrm{d}_\xi \nu_{j\ell_j}\}$ 是 $\Lambda^\vee((G_j)_\xi) \subset (\mathfrak{g}_j)_\xi$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。因此，$\xi\big|_{(\mathfrak{g}_j)_\xi}$ 属于 $\Lambda((G_j)_\xi)$ 当且仅当对所有 $k \in \{1, \ldots, \ell_j\}$，$\xi(\mathrm{d}_\xi \nu_{jk}) \in \mathbb{Z}$。另一方面，显然对所有 $k \in \{1, \ldots, \ell_j\}$，$\xi(\mathrm{d}_\xi \nu_{jk}) = \nu_{jk}(\xi)$。□

这为以下对 [1, 命题 7], 的略微改写版本提供了背景；在该版本中，我们将 $\mathbb{T}_j \coloneqq \mathrm{U}(1)^{\ell_j}$ 记作 $j \in \{0, \ldots, m\}$。

命题 2。 若 $j \in \{0, \ldots, m\}$ 且 $\xi \in (\mathfrak{g}_j^*)^{\mathrm{reg}}$，则该线性映射

$$\mathbb{R}^{\ell_j} \longrightarrow (\mathfrak{g}_j)_\xi, \quad (x_1, \ldots, x_{\ell_j}) \mapsto \sum_{k=1}^{\ell_j} x_k \mathrm{d}_\xi \nu_{jk}$$

$\sim$可积分为李群同构 $(\tau_j)_\xi : \mathbb{T}_j \xrightarrow{=} (G_j)_\xi$。

令 $\sigma_j : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_j^*$表示每个 $j \in \{0, \dots, m\}$ 对应的限制映射。由此可构造函数

$$\lambda_{jk} \coloneqq \nu_{jk} \circ \sigma_j : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

对于 $j \in \{0, \dots, m\}$ 和 $k \in \{1, \dots, \ell_j\}$，随后令

$$\lambda \coloneqq (\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{b}}) \coloneqq (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0\ell}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1\ell_1} \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{m\ell_m}) : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}}.$$

由此可知，λ 在开子集上光滑

$$\bigcap_{j=0}^{m} \sigma_j^{-1}((\mathfrak{g}_j^*)_{\mathrm{reg}}) \subset \mathfrak{g}^*,$$

在此背景下，我们定义<strongly regular 轨迹

$$\mathfrak{g}_{\text{s-reg}}^* \coloneqq \left\{ \xi \in \bigcap_{j=0}^{m} \sigma_j^{-1}((\mathfrak{g}_j^*)_{\mathrm{reg}}) : \operatorname{rank} \mathrm{d}_\xi \lambda = \mathrm{b} \right\}.$$

另一方面，考虑乘积环面

$$\mathbb{T} \coloneqq \prod_{j=0}^{m} \mathbb{T}_j$$

及其李代数 $\mathbb{R}^{\mathrm{b}} = \prod_{j=0}^{m} \mathbb{R}^{\ell_j}$。以下是 [2, 定理 3.4]和 [1, 命题 8]的直接推论。

命题 3。设 M 是一个带有动量映射 $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ 的哈密顿 G-空间。

（i）复合映射 $\lambda \circ \mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^b$ 限制为 μ^{-1} 上 $\mathbb{T}$ 的哈密顿作用的动量映射（$\mathfrak{g}_{\text{s-reg}}^*$）。

（ii）假设 $\xi \in \mathfrak{g}_{\text{s-reg}}^*$ 且 $m \in \mu^{-1}(\xi)$。于是有

$$t \cdot m = (\tau_j)_{\sigma_j(\xi)}(t) \cdot m \tag{2.2}$$

$\sim$对所有 $j \in \{0, \dots, m\}$ 和 $t \in \mathbb{T}_j$ 均成立，其中 $(\tau_j)_{\sigma_j(\xi)} : \mathbb{T}_j \xrightarrow{=} (G_j)_{\sigma_j(\xi)}$ 是命题 2 中的同构，而（2.2）的左侧和右侧分别表示 $t \in \mathbb{T}_j \subset \mathbb{T}$ 在 $\mu^{-1}(\mathfrak{g}_{\text{s-reg}}^*)$ 上的作用以及 $(\tau_j)_{\sigma_j(\xi)}(t) \in (G_j)_{\sigma_j(\xi)} \subset G_j$ 在 M 上的作用。

2.2. 情形 $G = \mathrm{U}(n)$。将上述部分构造专门应用于 $G = \mathrm{U}(n)$ 为酉 $n \times n$ 矩阵群的情形，这一点十分重要。在此情形下，$\ell = n$、$\mathrm{b} = {}^{n}{}_{(n+1)\,2}$，而 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ 是斜厄米 $n \times n$ 矩阵的实李代数。我们将取

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \otimes y \mapsto -\mathrm{tr}(xy)$$

$\sim$作为我们的 G-不变内积。将所诱导的同构 $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{=} \mathfrak{g}$ 与乘以 i复合后，我们将 $\mathfrak{g}^*$ 视为厄米 $n \times n$ 矩阵组成的实向量空间。于是，$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 之间的配对由下式给出

$$\xi(x) = -i\mathrm{tr}(x\xi)$$

对所有的 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$均成立。

考虑子群

$$G_j \coloneqq \left\{ \left[\begin{array}{c|c} I_j & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right] : A \in \mathrm{U}(n-j) \right\} \subset G$$

及其对于 $j \in \{0,\dots,n-1\}$ 的李代数 $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$。显然，$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{n-1}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n-1}$。我们将 $\mathfrak{g}_j$ 与斜厄米 $n \times n$ 矩阵的李代数 $\mathfrak{u}(n-j)$ 视为同一对象，并采用上文概述的方法，将 $\mathfrak{g}_j^*$ 与厄米 $(n-j) \times (n-j)$ 矩阵的向量空间视为同一对象。限制映射 $\sigma_j\colon \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_j^*$ 随后将 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 映射到底部右侧 $(n-j) \times (n-j)$ 角的 ξ。

注意到

$$T_j \coloneqq \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} I_j & 0 & & \\ \hline & z_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & z_{n-j} \end{array}\right] : z_1,\dots,z_{n-j} \in \mathrm{U}(1) \right\} \subset G_j$$

是一个极大环面，其李代数为

$$\mathfrak{t}_j \coloneqq \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \hline & ia_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & ia_{n-j} \end{array}\right] : a_1,\dots,a_{n-j} \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{g}_j$$

对每个 $j \in \{0,\dots,n-1\}$。对每个 $k \in \{1,\dots,n-j\}$，令 $\phi_{jk} \in \mathfrak{t}_j$ 为对所有 $r \neq k$ 取 $a_k = 1$ 和 $a_r = 0$ 后所得的结果。因此，$\{\phi_{j1},\dots,\phi_{j(n-j)}\}$ 是格 $\Lambda^\vee(T_j) \subset \mathfrak{t}_j$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 基。我们还有基本 Weyl 室

$$(\mathfrak{t}_j)_+ \coloneqq \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \hline & ia_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & ia_{n-j} \end{array}\right] : \begin{array}{c} a_1,\dots,a_{n-j} \in \mathbb{R} \\ a_1 \geq \cdots \geq a_{n-j} \end{array} \right\} \subset \mathfrak{t}_j$$

以及相应的子集

$$(\mathfrak{t}_j^*)_+ \coloneqq \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \hline & a_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{n-j} \end{array}\right] : \begin{array}{c} a_1,\dots,a_{n-j} \in \mathbb{R} \\ a_1 \geq \cdots \geq a_{n-j} \end{array} \right\} \subset \mathfrak{g}_j^* \subset \mathfrak{g}^*.$$

式 (2.1) 中的函数 $\lambda_{jk}\colon \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 随后定义在每个 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 上如下：

$$\lambda_{j1}(\xi) \geq \cdots \geq \lambda_{j(n-j)}(\xi)$$

是 ξ 的右下角 $(n-j) \times (n-j)$ 的特征值。另有

$$\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}} = \left\{ \xi \in \mathfrak{g}^* : \begin{array}{c} \lambda_{j1}(\xi) > \cdots > \lambda_{j(n-j)}(\xi) \text{ for all } j \in \{0,\dots,n-1\} \\ \lambda_{0k}(\xi) > \cdots > \lambda_{(n-k)k}(\xi) \text{ for all } k \in \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

作为强正则轨迹。

2.3. 的哈密顿几何 T^*G。沿用第 2.1 节中的记号和约定。考虑余切丛 T^*G、典范一形式 $\theta \in \Omega^1(T^*G)$，以及辛形式 $\omega \coloneqq \mathrm{d}\theta \in \Omega^2(T^*G)$。

现在令 $\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ 表示 G 的余伴随表示。我们还考虑 $G \times G$ 在 G 上定义的作用：

$$(g_1, g_2) \cdot g \coloneqq g_1 g g_2^{-1}, \quad (g_1, g_2) \in G \times G,\ g \in G,$$

以及将其余切提升为在 $(T^*G,\ \omega)$ 上的哈密顿 $(G\times G)$-作用。利用左平凡化将 T^*G 与 $G\times\mathfrak{g}^*$ 识别后，可得该哈密顿作用为

$$(g_1,g_2)\cdot(g,\xi)=(g_1gg_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{g_2}(\xi)),\quad (g_1,g_2)\in G\times G,\ (g,\xi)\in G\times\mathfrak{g}^*=T^*G.$$

也很容易验证，

$$\phi\coloneqq(\phi_1,\phi_2):T^*G\longrightarrow\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*,\quad (g,\xi)\mapsto(\mathrm{Ad}^*_g(\xi),-\xi),\quad (g,\xi)\in G\times\mathfrak{g}^*=T^*G$$

是一个动量映射。

给定 $x=(x_1,\ x_2)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$，考虑函数

$$\phi^x:T^*G\longrightarrow\mathbb{R},\quad \beta\mapsto(\phi_1(\beta))(x_1)+(\phi_2(\beta))(x_2)$$

以及由下式定义的 $\underline{\ }x$ 上的 T^*G 向量场

$$\underline{x}_\beta\coloneqq\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp(-tx_1),\exp(-tx_2))\cdot\beta,\quad \beta\in T^*G.$$

动量映射 $\phi\colon T^*G\longrightarrow\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ 因此完全由以下性质确定：

$$\phi^x=\theta(\underline{x}) \tag{2.4}$$

对所有 $x\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$。

2.4. 关于系统的定义 $G=\mathrm{U}(n)$。本文余下部分取 G 为 $\mathrm{U}(n)$，因此 $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}(n)$、$\ell=n$、$\mathfrak{b}=\frac{n(n+1)}{2}$ 等等。于是，2.1 节中的定义和约定应理解为其在 2.2 节对应形式下的特例。继续使用李型无关记号的一个原因是，这样可以使论述更加简洁，也减少对坐标的依赖。第二个原因是，我们的大多数结果对于 $\mathrm{U}(n)$ 以外的紧致连通李群也成立。我们希望本文中的所有结果都能推广到任意紧致连通李群的情形，例如通过 [7]。

回顾上一节讨论的映射 $\lambda:\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathfrak{b}}$、子集 $\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}\subset\mathfrak{g}^*$ 和秩为 $\mathfrak{b}$ 的环面 $\mathbb{T}$。考虑乘积映射 $(\lambda,\lambda)\colon\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathfrak{b}}\times\mathbb{R}^{\mathfrak{b}}$ 以及复合

$$\varphi\coloneqq(\lambda,\lambda)\circ\phi=(\lambda\circ\phi_1,\lambda\circ\phi_2):T^*G\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathfrak{b}}\times\mathbb{R}^{\mathfrak{b}}.$$

命题 3(i) 表明，φ 限制为 $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ 在该开子集上的哈密顿作用的动量映射

$$(T^*G)_{\text{s-reg}}\coloneqq\phi^{-1}(\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}\times\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}})=\phi_1^{-1}(\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}})\cap\phi_2^{-1}(\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}})\subset T^*G.$$

同时，考虑子环面

$$\mathbb{T}_{j1}\coloneqq\mathbb{T}_j\times\{e\}\subset\mathbb{T}\times\mathbb{T}\quad\text{and}\quad\mathbb{T}_{j2}\coloneqq\{e\}\times\mathbb{T}_j\subset\mathbb{T}\times\mathbb{T}$$

对每个 $j\in\{0,\dots,m\}$，这些子环面在 $(T^*G)_{\text{s-reg}}$ 上的作用随后由命题 3(ii) 的以下推论给出：

$$(t,e)\cdot\beta=((\tau_j)_{\sigma_j(\xi)}(t),e)\cdot\beta\quad\text{and}\quad(e,t)\cdot\beta=(e,(\tau_j)_{\sigma_j(\eta)}(t))\cdot\beta \tag{2.5}$$

对于所有 $j\in\{0,\dots,m\}$、$t\in\mathbb{T}_j$ 和 $\beta\in(T^*G)_{\text{s-reg}}$，其中 $(\xi,\ \eta)=\phi(\beta)$。

现在考虑子环面

$$\mathbb{S}\coloneqq\left\{((t_1,\dots,t_\ell,\underbrace{1,\dots,1}_{\mathfrak{b}-\ell\text{ times}}),(t_\ell,\dots,t_1,\underbrace{1,\dots,1}_{\mathfrak{b}-\ell\text{ times}})):(t_1,\dots,t_\ell)\in\mathbb{T}_0\right\}\subset\mathbb{T}\times\mathbb{T}$$

及其李代数

$$\mathfrak{S} \coloneqq \{((x_1,\dots,x_\ell,\underbrace{0,\dots,0}_{\mathrm{b}-\ell\text{ times}}),(x_\ell,\dots,x_1,\underbrace{0,\dots,0}_{\mathrm{b}-\ell\text{ times}})) : (x_1,\dots,x_\ell)\in\mathbb{R}^\ell\}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{b}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{b}}. \tag{2.6}$$

商环面

$$\mathcal{T} \coloneqq (\mathbb{T}\times\mathbb{T})/\mathbb{S}$$

于是具有

$$\mathcal{B} \coloneqq \mathfrak{S}^\perp \subset \mathbb{R}^{\mathrm{b}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{b}}$$

作为其李代数的对偶，其中正交补是相对于点积而言的。

命题 *4.* </*style*'>以下陈述成立。

(i) 我们有 $\varphi(T^*G)\subset\mathcal{B}$.(ii) $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 上的作用下降为 $\mathcal{T}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 上的自由哈密顿作用。(iii) φ 到映射 $(T^*G)_{\text{s-reg}}\longrightarrow\mathcal{B}$ 的限制是 $\mathcal{T}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 上的哈密顿作用的动量映射。(iv) 该动量映射的非空纤维恰好是 $\mathcal{T}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 中的轨道。

证明。 将 $\varphi\big|_{(T^*G)_{\text{s-reg}}}$ 与正交投影 $\mathbb{R}^{\mathrm{b}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{b}}\longrightarrow\mathfrak{S}$ 复合，得到 $\mathbb{S}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$上的哈密顿作用所对应的动量映射。这意味着，当且仅当 $\varphi((T^*G)^{\text{s-reg}})\subset\mathcal{B}$时， $\mathbb{S}$ 在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 上的作用是平凡的。因此，只需证明 (i)、(iv)，以及 $\mathcal{T}$在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$上自由作用这一断言。

设 $(g,\xi)\in G\times\mathfrak{g}^*=T^*G$。有

$$\lambda_k(\phi_1(g,\xi))=\lambda_k(\mathrm{Ad}_g^*(\xi))=\lambda_k(\xi)=-\lambda_{\ell+1-k}(-\xi)=-\lambda_{\ell+1-k}(\phi_2(g,\xi))$$

对所有 $k\in\{1,\dots,\ell\}$ 均成立。因此， $\varphi(g,\xi)\in\mathbb{R}^{\mathrm{b}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{b}}$ 具有如下形式

$$\varphi(g,\xi)=((y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_{\mathrm{b}-\ell}),(-y_\ell,\dots,-y_1,w_1,\dots,w_{\mathrm{b}-\ell})), \tag{2.7}$$

其中 $z_1,\dots,z_{\mathrm{b}-\ell},w_1,\dots,w_{\mathrm{b}-\ell}\in\mathbb{R}$，且对所有 $k\in\{1,\dots,\ell\}$， $y_k=\lambda_k(\phi_1(g,\xi))$。结合 (2.6) 可得 $\varphi(T^*G)\subset\mathcal{B}$，从而证明了 (i)。

我们现在证明 在（T^*G）$^{\text{s-reg}}$上自由作用。朝这一方向的第一个观察是， $\mathcal{T}$ t

$$\mathbb{T}_{\text{comp}} \coloneqq \left\{((t_1,\dots,t_{\mathrm{b}}),(\underbrace{1,\dots,1}_{\ell\text{ times}},s_1,\dots,s_{\mathrm{b}-\ell})) : (t_1,\dots,t_{\mathrm{b}})\in\mathbb{T},\ (s_1,\dots,s_{\mathrm{b}-\ell})\in\prod_{j=1}^m\mathbb{T}_j\right\}$$
$$=\mathbb{T}_{01}\times(\mathbb{T}_{11}\times\cdots\times\mathbb{T}_{m1})\times(\mathbb{T}_{12}\times\cdots\times\mathbb{T}_{m2})$$

是 $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$中的一个互补子环面。由此可知， $\mathbb{S}$ 在（T^*G）$^{\text{s-reg}}$ 上自由作用，当且仅当 $\mathbb{T}_{\text{comp}}$ 在（T^*G）$^{\text{s-reg}}$上自由作用。

设 $\beta\in$（T^*G）$^{\text{s-reg}}$。由于$\phi\big|_{(T^*G)_{\text{s-reg}}}$：（$T^*G$）$^{\text{s-reg}}\longrightarrow\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}\times\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$是 $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$-等变的，且 $\mathbb{T}_1\times\cdots\times\mathbb{T}_m\subset\mathbb{T}$在 $\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$上自由作用，因此 β的 $\mathbb{T}_{\text{comp}}$-稳定子必然包含于$\mathbb{T}_{01}$中。等式（2.5）使我们能够将 β 的 $\mathbb{T}_{01}$-稳定子与 β的 G_ξ-稳定子对应起来，其中$\xi=\phi_1$（β） $\in\mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$。后一个稳定子是平凡的，因为 $G\times\{e\}$ 在 T^*G上自由作用。这几句话共同说明， β 的 $\mathbb{T}_{\text{comp}}$-稳定子是平凡的。鉴于上一段，我们得出结论： $\mathcal{T}$在（T^*G）$^{\text{s-reg}}$上自由作用。

现在只需证明 (iv)。若对所有 $x\in\varphi((T^*G)^{\text{s-reg}})$，辛商 $(T^*G)_{\text{s-reg}}/\!\!/_x\,\mathcal{T}$ 是一个点，则结论成立。等价地，对所有 $x\in\varphi_{\text{comp}}((T^*G)^{\text{s-reg}})$， $(T^*G)_{\text{s-reg}}/\!\!/_x\,\mathbb{T}_{\text{comp}}$ 是一个点，其中

$$\varphi_{\text{comp}}:T^*G\longrightarrow\mathbb{R}^{\mathrm{b}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell}$$

它是将 $\varphi\colon T^*G \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}}$ 与到子空间$\mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times (\{0\} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell}) = \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell}$ 的正交投影复合得到的。为此，我们固定 $x = (y_1、\ldots\ldots、y_{\mathrm{b}}, z_1、\ldots\ldots、z_{\mathrm{b}-\ell}) \in \varphi_{\mathrm{comp}}((T^*G)^{\text{s-reg}})$。考虑元素 $y := (y_1、\ldots\ldots、y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$、对角矩阵 $\xi := \mathrm{diag}(y_1、\ldots\ldots、y_\ell) \in \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$，以及余伴随轨道 $\mathcal{O}_\xi := G \cdot \xi \subset \mathfrak{g}^*$ 和 $\mathcal{O}_{-\xi} := G \cdot (-\xi) \subset \mathfrak{g}^*$。于是，动量映射 $\phi\colon T^*G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ 限制并下降为一个辛同构

$$(T^*G)_{\text{s-reg}} /\!\!/_y \mathbb{T}_{01} \longrightarrow (\mathcal{O}_\xi \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}) \times (\mathcal{O}_{-\xi} \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}), \quad [(g,\eta)] \mapsto (\mathrm{Ad}^*_g(\eta), -\eta).$$

由于 $\phi\big|_{(T^*G)_{\text{s-reg}}}$ 是 $(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$-等变的，我们的辛同构在子环面作用下也是等变的

$$(\mathbb{T}_{11} \times \cdots \times \mathbb{T}_{m1}) \times (\mathbb{T}_{12} \times \cdots \times \mathbb{T}_{m2}) \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}.$$

我们还知道，该子环面对 $(\mathcal{O}_\xi \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}) \times (\mathcal{O}_{-\xi} \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}})$ 的每个非空辛商都是一个点 [2, 截面 5]。由此可知，同一子环面对 $(T^*G)_{\text{s-reg}} /\!\!/_y \mathbb{T}_{01}$ 的任何非空辛商也都是一个点。换言之，辛商 $(T^*G)_{\text{s-reg}} /\!\!/_x \mathbb{T}_{\mathrm{comp}}$ 是一个点。□

今后我们将 φ 视为映射 $T^*G \longrightarrow \mathcal{B}$。命题 4 表明，该映射在 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$ 上的限制是一个完全可积系统。以下术语由此概括了 $\varphi = (\lambda, \lambda) \circ \phi$ 与 Gelfand–Cetlin 系统 λ 之间的关系：$\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}}$。

定义 5. 我们称 $\varphi\colon T^*G \longrightarrow \mathcal{B}$ 为 双重 *Gelfand–Cetlin* 系统，定义在 T^*G上。

2.5. **动量映射像**。 现在我们确立关于双重 Gelfand–Cetlin 系统 $\varphi\colon T^*G \longrightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 的像的两个事实。

命题 6. 像 $\varphi((T^*G)^{\text{s-reg}}) \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 由所有满足下列条件的$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 组成：

(i) $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$; (ii) $\alpha_{\mathrm{b}+1+j} = -\alpha_{\ell-j}$ 对所有 $j \in \{0, \ldots, \ell-1\}$;
(iii) $(\alpha_{\ell+1}, \ldots, \alpha_{\mathrm{b}})$ ∈属于 GC_α 的内部，其中 $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$; (iv) (
$\alpha_{\mathrm{b}+\ell+1}, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}})$ ∈属于 GC_{α^*} 的内部，其中 $\alpha^* := (-\alpha_\ell, \ldots, -\alpha_1)$。

证明。 设 $(g,\xi) \in (G \times \mathfrak{g}^*)^{\text{s-reg}} = (T^*G)^{\text{s-reg}}$，并考虑元素 $\varphi(g,\xi) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}})$。由（2.7）可知，条件（ii）得到满足。描述（2.3）随后表明，（i）、（iii）和（iv）成立。因此，现在只需证明，满足（i）—（iv）的 $\mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 中任意元素都属于 $\varphi((T^*G)^{\text{s-reg}})$。

设 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 满足（i）—（iv）。由于

$$\alpha^* = (-\alpha_\ell, \ldots, -\alpha_1) = (\alpha_{\mathrm{b}+1}, \cdots, \alpha_{\mathrm{b}+\ell})$$

是严格递减序列，且 $(\alpha_{\mathrm{b}+\ell+1}, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in$是 interior($\mathrm{GC}_{\alpha^*}$)，存在满足 $\lambda(\xi) = (\alpha_{\mathrm{b}+1}, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}})$ 的 $\xi \in \mathcal{O}_{\alpha^*} \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$。由此可得

$$-\xi \in (-\mathcal{O}_{\alpha^*}) \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}} = \mathcal{O}_\alpha \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}.$$

另一方面，(i) 和 (iii) 蕴含存在满足 $\lambda(\eta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{b}})$ 的 $\eta \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$。因此，我们可以找到使 $\mathrm{Ad}_g(-\xi) = \eta$ 成立的 $g \in G$。于是，点 $(g, -\xi) \in G \times \mathfrak{g}^* = T^*G$ 属于 $(T^*G)^{\text{s-reg}}$，且满足 $\varphi(g,-\xi) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}})$。证明至此完成。□

类似的论　　证稍简单，可得双重 Gelfand–Cetlin 系统的像　　.

命题 7。 像 $\varphi(T^*G) \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 由所有满足以下条件的$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 组成：

(i) $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_\ell$; (ii) $\alpha_{\mathrm{b}+1+j} = -\alpha_{\ell-j}$ 对
所有 $j \in \{0, \ldots, \ell-1\}$均成立;

(iii) $(\alpha_{\ell+1}、\ldots、\alpha_{\mathrm{b}}) \in \mathrm{GC}_{\alpha}$，其中 $\alpha := (\alpha_1、\ldots、\alpha_{\ell})$；(iv) $(\alpha_{\mathrm{b}+\ell+1}、\ldots、\alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathrm{GC}_{\alpha^*}$，其中 $\alpha^* := (-\alpha_{\ell}、\ldots、-\alpha_1)$。

3. A geometric quantization of $T^*\mathrm{U}(n)$

3.1. Bohr–Sommerfeld 集。考虑平凡的 Hermitian 线丛 $\mathcal{L} := T^*G \times \mathbb{C} \longrightarrow T^*G$ 以及截面

$$s : T^*G \longrightarrow \mathcal{L}, \quad \beta \mapsto (\beta, 1).$$

令 ∇ 为满足以下条件的联络：$\mathcal{L}$

$$\nabla_X(fs) = (X(f) - i\theta(X)f)s$$

对于所有在 T^*G 上的光滑复向量场 X 以及光滑函数 f：$T^*G \longrightarrow \mathbb{C}$，其中 θ以显然的方式视为复一形式。由于 ω 是 ∇的曲率，因此（$\mathcal{L}$，∇）是 T^*G上的预量子线丛。

命题 4 意味着，受限双重 Gelfand–Cetlin 系统 $\varphi\big|_{(T^*G)_{\text{s-reg}}}$：$(T^*G)_{\text{s-reg}} \longrightarrow \mathcal{B}$ 构成了 $(T^*G)_{\text{s-reg}}$的实极化。在此背景下，我们有如下结果。

定理 8。 点 $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$ 满足 $\varphi(\beta) \in \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$ 当且仅当 $\varphi(\beta)$ 是受限 *Gelfand–Cetlin* 系统的 *Bohr–Sommerfeld* 点。

证明。注意到 $\mathbb{T}_{\mathrm{comp}}$ 的李代数为

$$\left\{ ((x_1, \ldots, x_{\mathrm{b}}), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\ell \text{ times}}, y_1, \ldots, y_{\mathrm{b}-\ell})) : (x_1, \ldots, x_{\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{b}},\ (y_1, \ldots, y_{\mathrm{b}-\ell}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell} \right\} \cong \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell},$$

其中，$\mathbb{T}_{\mathrm{comp}}$ 在命题 4 的证明中定义。还请注意

$$\varphi = (\lambda_1 \circ \phi_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{b}} \circ \phi_1, \lambda_1 \circ \phi_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{b}} \circ \phi_2) : T^*G \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}}$$

是 φ 按分量函数进行的分解。由此可得

$$\varphi_{\mathrm{comp}} := (\lambda_1 \circ \phi_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{b}} \circ \phi_1, \lambda_{\ell+1} \circ \phi_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{b}} \circ \phi_2) : T^*G \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{b}-\ell} \tag{3.1}$$

是 $\mathbb{T}_{\mathrm{comp}} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}$的哈密顿作用的动量映射。该证明还意味着

$$\lambda_k(\phi_1(\beta)) = -\lambda_{\ell+1-k}(\phi_2(\beta))$$

对所有 $\beta \in T^*G$ 和 $k \in \{1, \ldots, \ell\}$均成立。我们得出，$\varphi(\beta) \in \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$ 当且仅当 $\varphi_{\mathrm{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{Z}^{\mathrm{b}-\ell}$。因此，只需证明 $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$满足 $\varphi_{\mathrm{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{Z}^{\mathrm{b}-\ell}$当且仅当 $\varphi(\beta)$ 是一个 Bohr–Sommerfeld 点。根据 [2, 定理 2，4], 我们还可进一步归结为证明存在 $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$，使得 $\varphi_{\mathrm{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{Z}^{\mathrm{b}-\ell}$，且 $\varphi(\beta)$ 是一个 Bohr–So mmerfeld 点。

假设 at $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$ 满足 $\varphi_{\mathrm{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{b}} \times \mathbb{Z}^{\mathrm{b}-\ell}$，并回忆一下分解

$$\mathbb{T}_{\mathrm{comp}} = \mathbb{T}_{01} \times \cdots \times \mathbb{T}_{m1} \times \mathbb{T}_{12} \times \cdots \times \mathbb{T}_{m2} \tag{3.2}$$

$\mathbb{T}_{\mathrm{comp}}$为各个分支的分解。考虑一个特定分支，即 $\mathbb{T}_{jk}$，其中 $j \in \{0, \ldots, m\}$和 $k \in \{1, 2\}$满足 $(j,\ k) \neq (0,\ 2)$。轨道 $\Lambda_{jk} := \mathbb{T}_{jk} \cdot \beta \subset (T^*G)^{\text{s-reg}}$是一个各向同性子流形，下面我们将对其进行详细考察。

令 $\phi(\beta) = (\xi,\ \eta) \in \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}} \times \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$，并考虑子群的哈密顿作用 s

$$(G_j)_{\sigma_j(\xi)} \cong (G_j)_{\sigma_j(\xi)} \times \{e\} \subset G \times G \quad \text{and} \quad (G_j)_{\sigma_j(\eta)} \cong \{e\} \times (G_j)_{\sigma_j(\eta)} \subset G \times G$$

在 T^*G 上。公式（2.5）意味着

$$\Lambda_{jk} = (G_j)_{\sigma_j(\xi)} \cdot \beta \text{ if } k = 1 \quad \text{and} \quad \Lambda_{jk} = (G_j)_{\sigma_j(\eta)} \cdot \beta \text{ if } k = 2.$$

进一步值得注意的是，$(G_j)^{\sigma_j(\xi)}$ 和 $(G_j)^{\sigma_j(\eta)}$ 的作用分别具有如下动量映射

$$\mu_1 : (T^*G)_{\text{s-reg}} \longrightarrow (\mathfrak{g}_j)^*_{\sigma_j(\xi)}, \quad \beta \mapsto \phi_1(\beta)\Big|_{(\mathfrak{g}_j)_{\sigma_j(\xi)}}$$

and

$$\mu_2 : (T^*G)_{\text{s-reg}} \longrightarrow (\mathfrak{g}_j)^*_{\sigma_j(\eta)}, \quad \beta \mapsto \phi_2(\beta)\Big|_{(\mathfrak{g}_j)_{\sigma_j(\eta)}}.$$

由此可得

$$\mu_1(\Lambda_{jk}) = \left\{ \xi\big|_{(\mathfrak{g}_j)_{\sigma_j(\xi)}} \right\} \text{ if } k = 1 \quad \text{and} \quad \mu_2(\Lambda_{jk}) = \left\{ \eta\big|_{(\mathfrak{g}_j)_{\sigma_j(\eta)}} \right\} \text{ if } k = 2.$$

另一方面，命题 1 和方程 (3.1) 结合 $\varphi_{\text{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\text{b}} \times \mathbb{Z}^{\text{b}-\ell}$ 这一事实，可推出 $\xi\big|_{(\mathfrak{g}_j)^{\sigma_j(\xi)}}$ 和 $\eta\big|_{(\mathfrak{g}_j)^{\sigma_j(\eta)}}$ 分别属于 $(G_j)^{\sigma_j(\xi)}$ 和 $(G_j)^{\sigma_j(\eta)}$的权格。我们还注意到，$(G_j)^{\sigma_j(\xi)}$ 和 $(G_j)^{\sigma_j(\eta)}$ 的作用保持 T^*G 上的典范一形式不变，因此可提升为预量子线丛上的保持联络的作用。从 (2.4) 也显然可知

$$\mu_1^x = \theta(\underline{x}) \quad \text{and} \quad \mu_2^y = \theta(\underline{y})$$

对于所有 $x \in (\mathfrak{g}_j)^{\sigma_j(\xi)}$ 和 $y \in (\mathfrak{g}_j)^{\sigma_j(\eta)}$。最后这四句话意味着，根据 [3,第 12 节4] 和 [4, 第 2 节5], Λ_{jk} 相对于预量子线丛是整的。这等价于存在一个光滑映射 $f_{jk} : \Lambda_{jk} \longrightarrow \mathrm{U}(1)$，满足

$$\iota^*_{\Lambda_{jk}}\theta = \frac{1}{2\pi i} f_{jk}^{-1} \mathrm{d} f_{jk}, \tag{3.3}$$

其中 $\iota_{\Lambda_{jk}} : \Lambda_{jk} \longrightarrow T^*G$ 是包含映射。

考虑拉格朗日子流形

$$\Lambda := \mathbb{T}_{\text{comp}} \cdot \beta \subset (T^*G)_{\text{s-reg}}.$$

分解 (3.2) 由此给出一个微分同胚

$$\Lambda \cong \prod_{(j,k)\neq(0,2)} (\mathbb{T}_{jk} \cdot \beta) = \prod_{(j,k)\neq(0,2)} \Lambda_{jk},$$

从而也得到投影 $\pi_{jk} : \Lambda \longrightarrow \Lambda_{jk}$。这使我们能够考虑拉回 $\pi^*_{jk} f_{jk} : \Lambda \longrightarrow \mathrm{U}(1)$ 及其逐点乘积

$$f := \left(\prod_{(j,k)\neq(0,2)} \pi^*_{jk} f_{jk} \right) : \Lambda \longrightarrow \mathrm{U}(1).$$

恒等式 (3.3) 以及直接计算随后得到

$$\iota^*_{\Lambda}\theta = \frac{1}{2\pi i} f^{-1} \mathrm{d} f,$$

其中 $\iota_{\Lambda} : \Lambda \longrightarrow T^*G$ 是包含映射。特别地，$\varphi(\beta)$ 是一个 Bohr–Sommerfeld 点。

前面的段落说明，任何满足 $\varphi_{\text{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\text{b}} \times \mathbb{Z}^{\text{b}-\ell}$ 的 $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$ s 都使得 $\varphi(\beta)$ 是一个 Bohr–Sommerfeld 点。鉴于本证明的第一段，现在只需验证存在满足 $\varphi_{\text{comp}}(\beta) \in \mathbb{Z}^{\text{b}} \times \mathbb{Z}^{\text{b}-\ell}$ 的 $\beta \in (T^*G)^{\text{s-reg}}$。我们首先选取一个具有互不相同的整数特征值的 $\ell \times \ell = n \times n$ 对角矩阵 ξ。由此可得ξ，$-\xi \in \mathfrak{g}^*_{\text{s-reg}}$，这意味着 $(e, \xi) \in (G \times \mathfrak{g}^*)^{\text{s-reg}} = (T^*G)^{\text{s-reg}}$。另一方面，显然$\varphi_{\text{comp}}(e, \xi) \in \mathbb{Z}^{\text{b}} \times \mathbb{Z}^{\text{b}-\ell}$。□

推论 9。 点 $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 属于受限双重 *Gelfand–Cetlin* 系统 $\varphi : (T^*G)_{\text{s-reg}} \longrightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 的 *Bohr–Sommerfeld* 集，当且仅当它满足以下性质：

(i) $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$；(ii) $\alpha_1 > \cdots > \alpha_\ell$；(iii) $\alpha_{\mathrm{b}+1+j} = -\alpha_{\ell-j}$ 对所有 $j \in \{0, \ldots, \ell-1\}$；(iv) $(\alpha_{\ell+1}, \ldots\ldots, \alpha_{\mathrm{b}}) \in$ 内部(GC_α)，其中 $\alpha := (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_\ell)$；(v) $(\alpha_{\mathrm{b}+\ell+1}, \ldots\ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in$ 内部(GC_{α^*})，其中 $\alpha^* := (-\alpha_\ell, \ldots\ldots, -\alpha_1)$。

证明。 这可由命题 6 和定理 8 立即推出。 □

3.2. 彼得–外尔定理与极化不变性。如第 1.3 节所述，我们将通过把 Bohr–Sommerfeld 集 $\varphi((T^*G)_{\text{s-reg}}) \cap \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$ 替换为 $\varphi(T^*G) \cap \mathbb{Z}^{2\mathrm{b}}$，来对 T^*G 进行量子化。命题 7 告诉我们，这个新的 Bohr–Sommerfeld 集是满足推论 9 中条件 (i) 和 (iii)，以及 $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_\ell$，$(\alpha_{\ell+1}, \ldots, \alpha_{\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_\alpha$ 和 $(\alpha_{\mathrm{b}+\ell+1}, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathsf{GC}_{\alpha^*}$ 的 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\mathrm{b}}) \in \mathbb{R}^{2\mathrm{b}}$ 所构成的轨迹。因此，一个 Bohr–Sommerfeld 点由 G 的一个占优整权 α、GC_α 中的一个整元素，以及 GC_{α^*} 中的一个整元素组成。同时，记 V_α 和 V_{α^*} 为最高权分别是 α 和 α^* 的不可约复 G-模。应用 [2, 定理 6.1] 可知，GC_α（分别为 GC_{α^*}）中的整点数恰好等于 V_α（分别为 V_{α^*}）的维数。我们还注意到 $V_{\alpha^*} = V_\alpha^*$。因此，双重 Gelfand–Cetlin 系统 $\varphi : T^*G \longrightarrow \mathcal{B}$ 导出量子化

$$Q(T^*G) = \bigoplus_\alpha V_\alpha \otimes V_\alpha^*,$$

其中 α 遍历 G 的占优整权。应用彼得–外尔定理，可将此量子化与 $L^2(G)$ 识别起来，后者是由丛投影 $T^*G \longrightarrow G$ 导出的 T^*G 的几何量子化。因此，从几何量子化的角度来看，彼得–外尔定理可被解释为极化不变性的一个实例。

References

[1] Crooks, P., and Weitsman, J. 辛商的Gelfand–Cetlin阿贝尔化。arXiv:2209.04978 (2022)，14页。

[2] Guillemin, V., and Sternberg, S. Gel'fand-Cetlin系统与复旗流形的量子化。*J. Funct. Anal. 52*, 1 (1983), 106–128。[3] Guillemin, V., and Sternberg, S. *Semi-classical analysis*。International Press，波士顿，马萨诸塞州，2013。[4] Guillemin, V., Uribe, A., and Wang, Z. 各向同性半经典函数的积分表示及其应用。*J. Spectr. Theory 12*, 1 (2022), 227–258。[5] Hamilton, M. D. 托里克流形的量子化由动量多面体中的整数格点给出。载于 *Toric topology*，第460卷， *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2008，第131–140页。

[6] Hamilton, M. D. 局部托里克流形与奇异玻尔–索末菲叶。 *Mem. Amer. Math. Soc. 207*, 971 2010 +60 ( ), vi。[7] Hoffman, B., and Lane, J. 分层梯度哈密顿向量场与集体可积系统。arXiv:2008.13656 (2022)，44页。

[8] Jeffrey, L. C., and Weitsman, J. 平坦联络模空间中的玻尔–索末菲轨道与Verlinde维数公式。*Comm. Math. Phys. 150*, 3 (1992), 593–630。[9] Kirillov, A. A. 幂零李群的酉表示。 *Uspehi Mat. Nauk 17*, 4 (106) (1962), 57–110。[10] Kostant, B. *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential* 轨道、*Geometry (Kyoto, 1965)* 1966 71 辛结构与表示论。载于( )，日本评论社，东京，第p页。[11] Mumford, D. *Abelian varieties*，第5卷，*Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*。由塔塔基础研究所出版，孟买；印度斯坦图书代理社，新德里发行，2008。附录由C. P. Ramanujam和Yuri Manin撰写，为第二版（1974）的修订重印本。

[12] Śniatycki, J. 关于几何量子化中出现的上同调群。载于 *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)* 1977 570, ( ),

《数学讲义》，第卷。Springer，柏林，第46–66页。[13] Śniatycki, J. e. *Geometric quantization and quantum mechanics*，第30卷， *Applied Mathematical Sciences*。Springer-Verlag，纽约—柏林，1980。[14] Souriau, J.-M. 几何量子化。 *Comm. Math. Phys. 1* (1966), 374–398。

（Peter Crooks） Department of Mathematics and Statistics, Utah State University, 3900 Old Main Hill, Logan, UT 84322, USA*Email address*: peter.crooks@usu.edu（Jonathan Weitsman） Department of Mathematics, Northeastern University, 360 Huntington Avenue,Boston, MA 02115, USA*Email address*: j.weitsman@northeastern.edu