arXiv:2304.00017v1 [cs.CE] 30 Mar 2023

一种通过电场降低应力的新型电-力学超材料

Mischa Blaszczyk* Klaus Hackl†

2023年4月4日

摘要

尽管以往开发的大多数超材料仅考虑单一物理效应，但我们提出了一种新型电-力学超材料，可通过施加抵消机械应力的电场，直接控制总应力的降低。由此产生的最小化问题的解给出了一个涉及机械应力张量特征值的关系。此外，我们还评估了分别仅允许拉应力或压应力的受限情况，并考虑了平面应力问题。我们展示了所有情况下的数值结果，并讨论了应力降低在何种程度上是可能的。

关键词—超材料、电-力学耦合、应力降低、麦克斯韦应力张量

1 引言

超材料是人工制造的多尺度材料，可能具有自然界中不存在的特性。与特定长度尺度相对应的是，通过将微观尺度视为由一系列（周期性）单元胞组成的阵列来区分不同尺度。这些单元胞的精确几何形状和排列方式使超材料能够产生通常不寻常的物理效应，而宏观尺度则指这些效应显现的尺度。超材料的材料特性可能与其构成的原始组分存在显著差异。相关综述文章 [1, 2]中介绍了该领域的概况和最新进展。

电磁超材料的例子包括同时具有负介电常数和负磁导率的物质 [3], 超材料吸波器 [4], 人工磁性 [5], 负折射率 [6], 拓扑绝缘体 [7], 电磁波导 [8]以及性能增强型天线 [9]。超材料并不局限于电磁领域。声学、光学和机械超材料也备受研究关注，而且往往与电磁超材料表现出相似之处。已提出或观察到的现象包括声波导 [10],带隙 [11], 光学超透镜 [12], 地震超材料 [13, 14], 具有负体积模量和负质量密度的材料 [15], 负泊松比材料，即泊松比为负的材料 [16], 超轻但强度极高的材料 [17] 以及超材料隐身 [18]。

虽然大多数超材料只考虑单一物理效应（例如声学或电超材料），但在本文中，我们提出了一类新颖的理论超材料，同时考虑机械效应和电效应。其核心思想是结合绝缘材料与导电材料，旨在通过施加由导电材料产生的电场来直接控制绝缘材料的总应力，从而抵消机械应力。例如，我们材料的一个晶胞可以通过在绝缘材料立方体的每个空间方向上分别布置一个（导电）电容器来构成。图1展示了二维情况下的一种可能的周期性阵列。可以假设两个电容器极板之间的电场保持恒定，而在每个空间方向上组合电容器，可确保任意控制所得电场的方向。对于足够小的晶胞尺寸，单个晶胞内块体材料中的机械应力也可认为是恒定的，因此有可能实现应力降低。

某些材料在承受拉伸载荷和压缩载荷时表现出截然不同的特性，例如混凝土 [19], , 这在许多工程应用中都很重要。因此，我们还研究了带有附加约束的最小化问题，即只允许存在拉应力或压

*电子邮箱：mischa.blaszczyk@rub.de。波鸿鲁尔大学，材料力学研究所，Univer-¨atsstaße 150，44801 波鸿，德国

†电子邮箱：klaus.hackl@rub.de。波鸿鲁尔大学，材料力学研究所，Universit¨atsstaße 150，44801 波鸿，德国

缩应力。此外，我们还讨论了平面应力的二维情形。对于不同的问题，我们得到了与特征值相关的映射。最后，我们讨论了研究结果，以及机械应力在多大程度上可以降低。

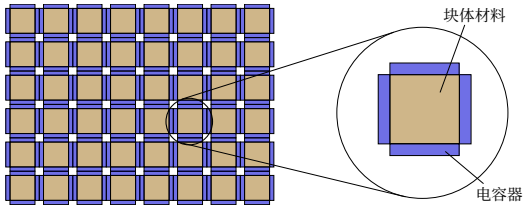


图 1：概念性的周期性微观尺度排列（左）和二维单胞（右）。

2 材料模型

2.1 应力最小化

我们首先假设，绝缘块体材料中的应力取决于机械应力张量

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

以及线性材料的麦克斯韦应力张量 [20]

$$\boldsymbol{\tau}^m = \varepsilon_0(\varepsilon_r \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\, \mathbf{I}), \tag{2}$$

二者均采用张量记号表示。这里， ε_0 是真空介电常数， ε_r 是材料的相对介电常数，而$\mathbf{E}$ 是电场。符号$\mathbf{I}$ 表示单位张量。因此，我们材料的总应力 $\boldsymbol{\sigma}^t$ 可写为

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m, \tag{3}$$

从而得到一个对称张量，因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}^m$ 均为对称张量。在三维空间中，机械应力张量由六个独立分量组成，而电场仅具有三个独立分量。因此，很明显，完美的应力吸收（即 $\boldsymbol{\sigma}^t = \mathbf{0}$）仅在少数特殊情况下才有可能实现。然而，仍然可以计算可能达到的最佳减小量——选择 $\mathbf{E}$ 使 $||\boldsymbol{\sigma}^t||^2$ 达到最小值。这里， $||\cdot||$ 是弗罗贝尼乌斯范数。最小化问题写作

$$||\boldsymbol{\sigma}^t||^2 = ||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||^2 \to \min_{\mathbf{E}}. \tag{4}$$

最小化的必要条件为

$$\nabla_{\mathbf{E}} ||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||^2 \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \tag{5}$$

其中， ∇ 是纳布拉算子。为求解该问题，我们首先使用爱因斯坦求和约定，以指标记号写出麦克斯韦应力张量:

$$\tau_{ij}^m = \varepsilon_0(\varepsilon_r E_i E_j - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ij}). \tag{6}$$

然后，我们计算其关于电场的导数

$$\frac{\partial \tau_{ij}^m}{\partial E_e} = \varepsilon_0(\varepsilon_r \delta_{ie} E_j + \varepsilon_r E_i \delta_{je} - \frac{1}{2} 2\delta_{ke} E_k \delta_{ij}). \tag{7}$$

利用所涉及张量的对称性，方程（5）在指标记号下可表示为

$$\frac{\partial(||\sigma_{ij} + \tau_{ij}^m||^2)}{\partial E_e} = 2(\sigma_{ij} + \tau_{ij}^m)\frac{\partial \tau_{ij}^m}{\partial E_e} = 0. \tag{8}$$

代入导数（方程（7））并除以 $2\varepsilon_0$，得到

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0(\varepsilon_r E_i E_j - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ij})(\varepsilon_r \delta_{ie} E_j + \varepsilon_r \delta_{je} E_i \\ &-\delta_{ij} E_e) + \sigma_{ij}(\varepsilon_r \delta_{ie} E_j + \varepsilon_r \delta_{je} E_i - \delta_{ij} E_e) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

可简化为

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0(2\varepsilon_r^2 - \varepsilon_r) E_e E_j E_j + \varepsilon_0(\frac{3}{2} - \varepsilon_r)(E_k E_k E_e) \\ &+\varepsilon_r \sigma_{ej} E_j + \varepsilon_r \sigma_{ie} E_i - \sigma_{ii} E_e = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

在这种形式下，结果可以转换回张量记号:

$$\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}(2\varepsilon_r^2 - 2\varepsilon_r + \frac{3}{2}) + 2\varepsilon_r \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} - \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

在方程 (11) 中， $|\cdot|$ 表示欧几里得范数。我们重新排列该方程，以得到机械应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的特征值问题:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} = (\frac{1}{2\varepsilon_r}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} - (\varepsilon_r - 1 + \frac{3}{4\varepsilon_r})\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2)\, \mathbf{E}. \tag{12}$$

因此可以得出，为了使总应力最小，电场需要具有 $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{N}$ 的形式，其中 $\mathbf{N}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的单位特征向量，且满足 $\alpha := |\mathbf{E}|$ 可根据方程 (12) 计算，其中应力张量特征值为 λ_i，即

$$\lambda_i = \frac{1}{2\varepsilon_r}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} - (\varepsilon_r - 1 + \frac{3}{4\varepsilon_r})\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2, \tag{13}$$

从而导致

$$\alpha = |\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} - 2\varepsilon_r \lambda_i}{2\varepsilon_0(\varepsilon_r^2 - \varepsilon_r + \frac{3}{4})}}. \tag{14}$$

需要指出的是，取决于具体的应力状态和参数 ε_r，并非总能找到实数解。为了获得该问题的最小化解，$|\mathbf{E}|$ 需要变为虚数，而这不符合物理实际。

在本文的其余部分，我们将仅讨论非极化材料的情况，即 $\varepsilon_r = 1$。虽然 ε_r 的影响可能对结果具有重要意义，但参数研究将超出本文的研究范围。需要指出的是，此时麦克斯韦应力张量的特征值始终呈现为 [21]

$$\lambda_\tau = \{-\lambda_m, -\lambda_m, +\lambda_m\}, \tag{15}$$

with

$$\lambda_m = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \geq 0. \tag{16}$$

下文中，我们采用约定 $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$。利用最小化的结果，麦克斯韦应力张量特征值的绝对值取决于机械应力的特征值，具体为

$$\begin{aligned}
\lambda_{m,1} &= \frac{1}{3}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\
\lambda_{m,2} &= \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \\
\lambda_{m,3} &= \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3),
\end{aligned} \tag{17}$$

通过根据方程 (14) 计算 α 的相应值，并利用 $\boldsymbol{\sigma}$的主轴形式将结果代入方程 (16)，即可证明这一点。索引编号对应于应力张量的特定特征值。相对于原始坐标系，麦克斯韦应力张量呈现为

$$\boldsymbol{\tau}^m = \varepsilon_0(\alpha^2 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} - \frac{1}{2}\alpha^2 \mathbf{I}). \tag{18}$$

再次考虑主轴，我们现在计算相对应力减小量

$$\sigma_{\text{rel}} := \frac{||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||}{||\boldsymbol{\sigma}||}, \tag{19}$$

取决于机械应力张量的特征值。利用表达式

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||^2 &= ||\boldsymbol{\sigma}||^2 + 2\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}^m) + ||\boldsymbol{\tau}^m||^2 \\
&= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2(\lambda_1\lambda_m - \lambda_2\lambda_m - \lambda_3\lambda_m) \\
&\quad + \frac{1}{3}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

我们得到

$$\sigma_{\text{rel},1} = \sqrt{\frac{2}{3}(1 + \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2})}, \tag{21}$$

$$\sigma_{\text{rel},2} = \sqrt{\frac{2}{3}(1 + \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2})}, \tag{22}$$

$$\sigma_{\text{rel }3} = \sqrt{\frac{2}{3}(1 + \frac{-\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2})}。 \tag{23}$$

由此结果可以证明，选择 $\boldsymbol{\sigma}$、λ_1 中最小的特征值会得到最优解，即与其他特征值相比，σ_{rel} 达到最小值。详细推导见补充材料 [22], ，其中还包含有关约束最小化的更多细节以及一些简单的数值示例。最后需要指出，由于我们的出发点（方程 (4)）使用的是 Frobenius 范数，其取值范围仅为 ≥ 0，且当 $|\mathbf{E}| \to \infty$ 时趋于无穷大，因此计算得到的临界点 $\lambda_{m,1}$ 是我们函数的全局最小值。

2.2 拉伸应力

在本文的其余部分，我们仅考虑主轴坐标系，因为正如我们之前所展示的，我们总能将问题转换到相对于主轴的坐标系中。这里的目标是评估在仅允许产生拉伸应力时，是否能够实现应力最小化，以及应如何计算麦克斯韦应力张量的特征值，以获得可能的最小应力。然后，将这一结果代入方程（16），即可得到完成这一任务所需的电场。

由于麦克斯韦应力张量及其方程（15）中的特征值的结构，当 $\boldsymbol{\sigma}$ 具有两个或三个负特征值时，这一任务显然是不可能的。我们将详细讨论其他情况。对于拉伸应力的情况，我们在此完整展示一次计算过程。按照相同步骤对所有情况进行的详细推导见补充材料 [22]。首先，我们假设

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$。我们得到最小化问题

$$||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||^2 \to \min_{\lambda_m}, \tag{25}$$

满足不等式条件

$$\lambda_2 \geq \lambda_m \quad \text{and} \quad \lambda_m \geq \lambda_3. \tag{26}$$

将这些条件纳入最小化问题后，我们得到拉格朗日函数

$$\begin{aligned}
L(\lambda_m, \alpha, \beta) &= (\lambda_1 - \lambda_m)^2 + (\lambda_2 - \lambda_m)^2 \\
&+ (-\lambda_3 + \lambda_m)^2 - \alpha g(s) - \beta h(t) \to \min_{\lambda_m, \alpha, \beta},
\end{aligned} \tag{27}$$

这里，s 和 t 是松弛变量，α 和 β 是拉格朗日乘子。函数 $g(s)$和 $h(t)$包含

该问题的约束信息：

$$\begin{aligned} g(s) &= \lambda_m - \lambda_2 + s^2 \,, \\ h(t) &= \lambda_3 - \lambda_m + t^2 \,, \end{aligned} \tag{28}$$

我们得到导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \quad & -2(\lambda_1 - \lambda_m) - 2(\lambda_2 - \lambda_m) + 2(\lambda_m - \lambda_3) \\ & -\alpha + \beta = 0, \qquad (29) \\ -\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \quad & g(s) = \lambda_m - \lambda_2 + s^2 = 0, \qquad (30) \\ -\frac{\partial L}{\partial \beta} = \quad & h(t) = \lambda_3 - \lambda_m + t^2 = 0, \qquad (31) \end{aligned}$$

以及 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件

$$\alpha s = 0 \quad \text{and} \quad \beta t = 0, \tag{32}$$

由此可以得出四种情况

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \alpha = \beta = 0, \quad s^2 > 0, t^2 > 0, \\ &(2) \qquad \alpha \neq 0, \beta = 0, \quad s^2 = 0, t^2 > 0, \\ &(3) \qquad \alpha = 0, \beta \neq 0, \quad s^2 > 0, t^2 = 0, \\ &(4) \qquad \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \quad s^2 = t^2 = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

接下来。以下示例中我们也使用这一符号表示法。我们从情况 (1) 开始。由于两个拉格朗日乘子均为零，根据方程 (29)，我们得到解

$$\lambda_m = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \tag{34}$$

结合方程 (30) 和 (31)，我们的结果仅在以下两个不等式均成立时才有效：

$$2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 \geq 0 \quad \text{and} \quad \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0. \tag{35}$$

对于情况 (2)，根据方程 (30)，我们计算得

$$\lambda_m = \lambda_2. \tag{36}$$

方程 (31) 要求

$$t^2 = \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0, \tag{37}$$

由于我们要求 $\lambda_3 \qquad 3 \qquad 31 \qquad \lambda_2 \geq$，因此该条件自动满足。同理，对于方程 ( ) 中的情形 ( )，我们得到

$$\lambda_m = \lambda_3. \tag{38}$$

该解始终等于或劣于前一个解。最后，对于情形 (4)，我们得到极限情形 $\lambda_m = \lambda_2 = \lambda_3$。因此，总而言之，如果可能（即两个不等式均成立），就应始终选择解 $\lambda_m = \frac{1}{3}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ $\lambda_m =$ ( )；否则则应选择另一个解。这可以通过将两个解代入拉格朗日函数，并计算第一个解与第二个解之间的差值得到，其表达式为 λ_2 $-\frac{1}{2}(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)^2 \leq 0$，这意味着第一个解是全局最小值。类似地，也可以对以下示例进行同样的处理。

接下来，我们考虑以下情形

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$。因此，允许的最大解为 $\lambda_m = \lambda_2$，否则总应力将至少有一个负特征值（参见方程 (15)）。于是，拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(\lambda_m, \alpha) \quad = \quad & (\lambda_1 - \lambda_m)^2 + (\lambda_2 - \lambda_m)^2 + (\lambda_3 + \lambda_m)^2 \\ & -\alpha g(s) \to \min_{\lambda_m, \alpha}, \end{aligned} \tag{40}$$

其导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \quad & -2(\lambda_1 - \lambda_m) - 2(\lambda_2 - \lambda_m) + 2(\lambda_3 + \lambda_m) \\ & -\alpha = 0, \qquad (41) \\ -\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \quad & g(s) = \lambda_m - \lambda_2 + s^2 = 0, \qquad (42) \end{aligned}$$

以及 KKT条件

$$\alpha s = 0, \tag{43}$$

由此得到以下两种情况

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \alpha = 0, \quad s^2 > 0, \\ &(2) \qquad \alpha \neq 0, \quad s^2 = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

由情况（1）可计算得

$$\lambda_m = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3), \tag{45}$$

使用方程（41），若 $\lambda_m \leq \lambda_2$ 成立（方程（42））。否则，情况（2）给出

$$\lambda_m = \lambda_2. \tag{46}$$

2.3 压应力

与前面的拉伸最小化类似，我们现在通过在主轴坐标系中计算方程，来考虑一个约束最小化问题：材料中仅保留压应力。若 $\boldsymbol{\sigma}$ 仅包含正特征值，则无法找到解。首先，我们假设

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix}, \tag{47}$$

其中 λ_1，λ_2，$\lambda_3 > 0$ 且 $\lambda_3 \geq \lambda_1$。允许的最大解为 $\lambda_m = \lambda_3$。此外，我们要求 $\lambda_m \geq \lambda_1$。拉格朗日函数为

$$L(\lambda_m, \alpha, \beta) = (\lambda_1 - \lambda_m)^2 + (\lambda_2 - \lambda_m)^2 + (\lambda_m - \lambda_3)^2 - \alpha g(s) - \beta h(t) \to \min_{\lambda_m, \alpha, \beta}. \quad (48)$$

我们计算

$$\lambda_m = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad (49)$$

如果以下两个不等式均成立

$$\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1 \geq 0 \quad \text{and} \quad 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0\,. \quad (50)$$

否则，我们得到

$$\lambda_m = \lambda_1. \quad (51)$$

同样，剩余情况为 $\lambda_m = \lambda_3$，其结果从不优于解（2），以及极限情形 $\lambda_1 = \lambda_3$。

作为压缩的第二个示例，我们假设

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

其中 λ_1，λ_2，$\lambda_3 > 0$，并要求 $\lambda_3 \geq \lambda_1$。拉格朗日函数为

$$L(\lambda_m, \alpha, \beta) = (\lambda_1 - \lambda_m)^2 + (-\lambda_2 - \lambda_m)^2 + (\lambda_m - \lambda_3)^2 - \alpha g(s) - \beta h(t) \to \min_{\lambda_m, \alpha, \beta}. \quad (53)$$

我们计算

$$\lambda_m = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \quad (54)$$

如果以下两个不等式均成立

$$\lambda_3 - \lambda_2 - 2\lambda_1 \geq 0 \quad \text{and} \quad 2\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1 \geq 0. \quad (55)$$

否则，我们计算

$$\lambda_m = \lambda_1. \quad (56)$$

剩余情况得到 $\lambda_m \leq \lambda_3$，其结果从未优于解（2）和极限情形 $\lambda_1 = \lambda_3$。最后，我们假设

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ 拉格朗日函数为

$$L(\lambda_m, \alpha) = (-\lambda_1 + \lambda_m)^2 + (-\lambda_2 - \lambda_m)^2 + (-\lambda_3 - \lambda_m)^2 - \alpha g(s) \to \min_{\lambda_m, \alpha}. \quad (58)$$

我们计算

$$\lambda_m = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3), \quad (59)$$

如果 $\lambda_m \leq \lambda_1$ 成立。否则，我们得到

$$\lambda_m = \lambda_1. \quad (60)$$

2.4 平面应力

作为最后一个问题，我们考虑处于平面应力状态下的材料薄片。不失一般性地，我们假设材料的总应力 $\boldsymbol{\sigma}^t$ 在所有 z 方向上均等于零。这意味着，材料在该方向上的弹性应力会自动调整，以抵消麦克斯韦应力，从而保持平面应力状态。对于我们的优化问题，这带来了更多可能性，因为 xy 平面内剩余的麦克斯韦应力（由下标表示）现在具有如下形式

$$\boldsymbol{\tau}^m_{xy} = \begin{bmatrix} \pm\lambda_m & 0 \\ 0 & -\lambda_m \end{bmatrix}, \quad (61)$$

此时，第一个特征值的符号可以任意选择。同样地，我们使用相对于主轴的坐标系。对于弹性应力，我们得到

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

其中我们区分三种情况（1 $\lambda_1 \leq$）、（）、、（）。$\lambda_2 \leq 0$ 2 $\lambda_1 \leq 0$ $\lambda_2 \geq 0$ 3 $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$ 对于所有情况，我们计算

$$||\boldsymbol{\sigma}^t||^2 \to \min_{\lambda_m}, \quad (63)$$

其中 $||\boldsymbol{\sigma}^t||^2 = (\sigma_{xx} + \tau^m_{xx})^2 + (\sigma_{yy} + \tau^m_{yy})^2$。我们得到

$$\lambda_m = \tfrac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2) \qquad \text{for case (1) and (2)}, \quad (64)$$

$$\lambda_m = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad \text{for case (3)}. \quad (65)$$

在这里，对于情况（1）和（2），我们对 $\boldsymbol{\tau}^m_{xy}$ 采用第一个特征值的正号；对于情况（3），我们采用负号。

3 数值结果

本节展示所有情形的计算结果和数值示例。由于这些示例仅用于说明，我们不使用具体的单位。

我们从平面应力情形开始。由于其二维性质，该情形更易于理解和可视化。图 2 显示了剩余应力 σ_{rel} 随应力张量特征值变化的分布图。

我们注意到，根据相对应力减小量 $\sigma_{\text{rel}} = ||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}^m||/||\boldsymbol{\sigma}||$（方程 (19)）的定义，它仅取决于相对于极轴的角度（按照通常定义，该极轴从 $O = (0,\ 0)$ 开始并水平向右延伸），而与其到原点的距离无关。因此，将两个特征值同时按相同因子缩放不会改变结果。我们通过引入极坐标进一步研究这一效应

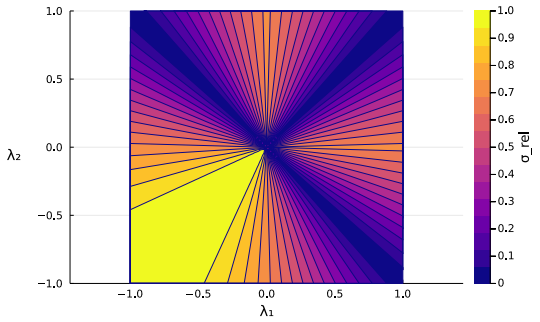


图 2：平面应力情况下，剩余应力 σ_{rel} 随特征值的变化。

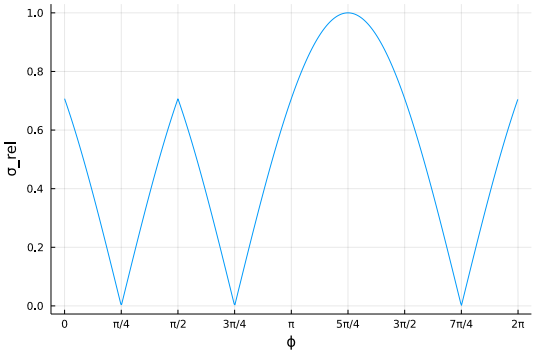


图 3：平面应力情况下，剩余应力 σ_{rel} 随相位角 ϕ 的变化。

$(r,\ \phi)$，其中 $\lambda_1 = r\cos\,\phi$、 $\lambda_2 = r\sin\,\phi$，由此可得 $\phi =$ arctan2$(\lambda_2,\ \lambda_1)$ 和 $r = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$。利用此定义，我们计算剩余应力如下

$$\sigma_{\mathrm{rel}}(\phi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sin(2\phi)} & \text{for } \phi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\sqrt{2}}{2}|\sin\phi + \cos\phi| & \text{for } \phi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}, \tag{66}$$

正如预期，该函数与 r 无关。图 3 展示了该函数得到的曲线，与图 2 一致。根据方程 (66)，我们还可以计算平均剩余应力，其定义为平均积分

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sigma_{\mathrm{rel}}(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right). \tag{67}$$

我们通过解析方法得到如下解

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\mathrm{rel}} &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sin(2\phi)}\,\mathrm{d}\phi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}|\sin\phi + \cos\phi|\,\mathrm{d}\phi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(2 - \sqrt{2} + 4 - \sqrt{2}) \approx 0.505. \end{aligned} \tag{68}$$

如后文所示，与三维情况相比，该结果相当理想，这可以通过方程 (61) 中特征值的符号来解释。平面应力最小化的情况 (1) 是唯一无法选择符号以同时减小 σ_{xx} 和 σ_{yy} 绝对值的情况；相反，其中一个值增加的幅度与另一个值减小的幅度相同。这一点也可以从图 2 中看出，与其他象限相比，左下象限的结果最差。对于其他情况，任意选择麦克斯韦应力张量中特征值的一个符号非常有利。然而，这些结果的差异很大，因为存在一些少见情况，此时总应力完全消失，而在另一些情况下，几乎无法进行应力最小化。需要注意的是，对于二维和三维情况，均匀随机生成所有特征值都会产生偏差，因此应采用正确的方法，例如 [23], 中提出的方法。针对已知平均应力的实际应用， [24]中提出了一种方法。

下一步，我们评估三维问题。与平面问题类似，我们使用球坐标 $(r,\ \theta,\ \phi)$，其中 $\lambda_1 = r\sin\theta\cos\,\phi$, $\lambda_2 = r\sin\theta\sin\,\phi$ and $\lambda_3 = r\cos\,\theta$，由此可得 $\phi =$ arctan2$(\lambda_2,\ \lambda_1)$ 和 $\theta =$ arccos$(\frac{\lambda_3}{r})$，其中 $r = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$。将其代入相对应力 σ_{rel} 的计算中（方程 (19)），我们再次可以证明，该应力与半径 r 无关。图4展示了三维最小化问题的结果。对于无约束最小化（上排），我们得到三个区域，在这些区域中几乎可以完全降低应力。在这里，三个特征值中恰有两个为正，且所有特征值的绝对值相同或相近。另一方面，在三个负特征值对应的区域中存在显著的空白区域，如方程 (14) 所示，在此无法找到解。与前一个例子不同，不同情形下得到的函数没有解析原函数。因此，我们通过在单位球面上随机生成 100000 个均匀分布的点，以数值方式求解该问题。用于生成这些点的角度服从分布r和 arccos () θ。

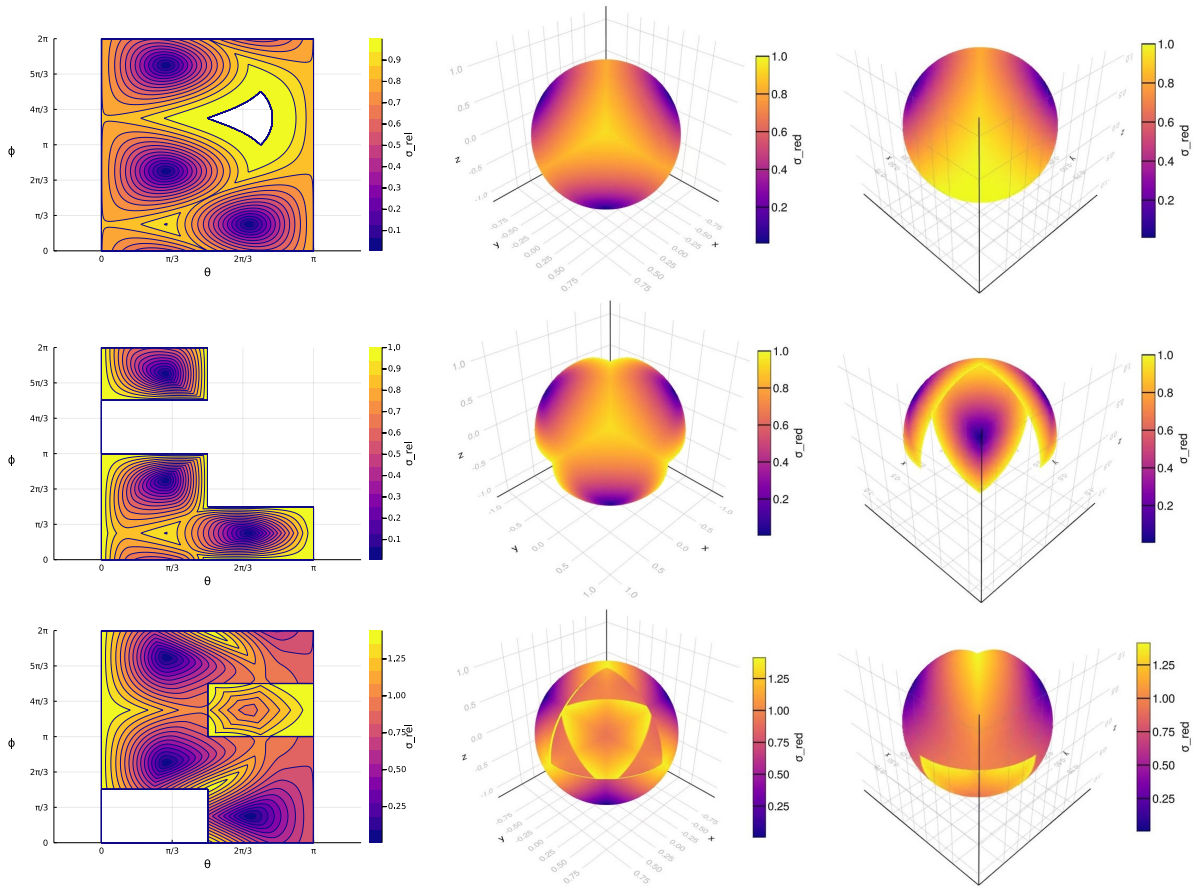


图4：左： σ_{rel} 剩余应力随三维情况下的极角 θ 和方位角 ϕ 的变化。中间/右：分别为根据特征值（ $x\widehat{=}\lambda_1$、 $y\widehat{=}\lambda_2$、 $z\widehat{=}\lambda_3$）得到的正面和背面的三维投影。顶部：无约束最小化；中部：拉伸最小化；底部：压缩最小化。

然后，对应力降低结果取平均，得到 $\bar{\sigma}_{\mathrm{rel}} = 0.70$；对于没有实数解的情况，我们假设 $\sigma_{\mathrm{rel}} = 1$。我们对拉伸最小化问题重复这一过程，其结果随两个角度变化的情况绘于图4中排。

同样，我们在相同位置得到三个剩余应力非常低的区域，但从这些点向外移动时， σ_{rel} 增加的速率更高。这一次，空白区域的大小是总大小的一半，并包含至少有两个负特征值的所有情况；对于这些情况，在拉伸约束下无法进行最小化。计算平均剩余应力时，我们排除这些区域，并再次使用我们的均匀 $\bar{\sigma}_{\mathrm{rel}} = 0.66$ 进行计算分布。

最后，图4的底行展示了压缩问题的结果。在所有特征值均为正的区域内，无法找到解。与其他示例类似，我们得到了三个区域，在这些区域中可以实现非常良好的应力吸收。对于压缩问题，尤为明显的是，在具有三个负特征值的区域内， σ_{rel} 会突然增加。为了满足压缩约束，在某些情况下，所得应力会高于之前的应力（ $\sigma_{\mathrm{rel}} > 1$）。通过随机化计算，我们得到了平均应力降低值$\bar{\sigma}_{\mathrm{rel}} = 0.87$，同样排除了无法找到解的区域。

4 讨论

尽管我们的计算结果看起来很有希望，但仍存在一些局限性。要将我们的方法付诸实践，单元胞必须足够小，以便可以假定晶胞内的机械应力保持恒定。在此情况下，具体尺寸可能因应用而异。我们重点进行了微尺度计算，但相邻单元胞的电场干扰可能是一个需要考虑的重要影响因素。正如我们的计算所示，只有在少数特殊情况下才能完全吸收机械应力；然而，在大多数情况下都可以实现显著的应力降低。应力降低的方差非常高，结果取决于具体的应力状态。此外，可降低应力的最大绝对值取决于所用电容器和块体材料的技术性能，因为过高的电压可能导致介电击穿。因此，潜在应用可能存在于更小的尺度上，例如医疗工程中的内窥镜检查或药物递送机器人胶囊 [26]。为了实现流程自动化，并使其不仅能够用于静态问题，还能用于动态问题或材料载荷事先未知的应用，传感器技术发挥着重要作用。为了抵消机械应力，必须根据传感器测量结果快速计算并施加电场，尤其是在载荷随时间快速变化的情况下。对于进一步的发展，我们建议对所提出的材料开展实验研究。最后，可以开展一项参数研究，以评估相对介电常数 ε_r 的影响。

参考文献

[1] D. R. Smith、J. B. Pendry 和 M. C. K. Wiltshire。超材料与负折射率。 *Science* 305 5685 788 792, 2004 , ( ) :

[2] Y. Liu 和 X. Zhang。超材料：科学与技术的新前沿。 *Chemical Society Reviews* 40 5 2494 2507, 2011 ,

( ) : –。[3] V. G. Veselago。具有同时为负的电介质和磁导率物质的电动力学。*Soviet Physics Uspekhi*，10 4 504 509，1968 ( ) : –。[4] N. I. Landy、S. Sajuyigbe、J. J. Mock、D. R. Smith 和 W. J. Padilla。完美超材料吸收器。*Physical review letters*，100(20):207402，2008。[5] J. C. Ginn、I. Brener、D. W. Peters、J. R. Wendt、J. O. Stevens、P. F. Hines、L. I. Basilio、L. K. Warne、J. F. Ihlefeld、P. G. Clem 等。利用介电超材料实现光学磁性。*Physical review letters*，108(9):097402，2012。

[6] J. Valentine、S. Zhang、T. Zentgraf、E. Ulin-Avila、D. A. Genov、G. Bartal 和 X. Zhang。具有负折射率的三维光学超材料。 *nature*, 455(7211):376–379，2008。[7] A. B. Khanikaev、S. Hossein Mousavi、W.-K. Tse、M. Kargarian、A. H. MacDonald 和 G. Shvets。光子拓扑绝缘体。 *Nature materials*，12 3 233 239，2013 ( ): – 。[8] J. D. Baena、L. Jelinek、R. Marqu´es 和 F. Med- ina。充满超材料的波导中倏逝电磁波的近乎完美隧穿与放大：理论与实验。*Physical Review B*，72(7):075116，2005。[9] Y. Dong 和 T. Itoh。基于超材料的天线。 *Proceedings of the IEEE* 100 7 2271 2285, , ( ): 2012 – 。[10] V. M. Garcia-Chocano 、 R. Graci´a-Salgado 、 D. Tor- rent、F. Cervera 和 J. Sanchez-Dehesa。具有负体积模量的准二维声学超材料。*Physical Review B*，85 18( ):184102，2012。[11] G. L. Huang 和 C. T. Sun。多谐振器声学超材料中的带隙。 *Journal of Vibration and Acoustics* 132 3 2010 , ( ), 。

[12] N. Fang 和 X. Zhang。超材料超透镜的成像特性。在 *Proceedings of the 2nd IEEE Conference on Nanotechnology* 中，第 225–228 页。IEEE，2002。[13] S. Brˆul´e、E. H. Javelaud、S. Enoch 和 S. Guen- neau。地震超材料实验：塑造表面波。*Physical review letters*，112 13( ):133901，2014。[14] A. Colombi、P. Colquitt、D.and Roux、S. Guenneau 和 R. V. Craster。一种地震超材料：谐振超楔。 *Scientific reports*，6 1 1 6，2016( ): – 。[15] Y. Ding、Z. Liu、C. Qiu 和 J. Shi。具有同时为负的体积模量和质量密度的超材料。 *Phys. Rev. Lett.*，99:093904，2007 年 8 月。[16]X. Ren、R. Das、P. Tran、T. D. Ngo 和 Y. M. Xie。负泊松比超材料与结构：综述。 *Smart materials and structures*，27 2 023001，2018 ( ): 。[17] L. R. Meza、A. J. Zelhofer、N. Clarke、A. J. Ma- teos、D. M. Kochmann 和 J. R. Greer。具有韧性的三维分层架构超材料。 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，112 37 11502 11507，2015 ( ): – 。

[18] A. Greenleaf、Y. Kurylev、M. Lassas、U. Leonhardt 和 G. Uhlmann。通过变换光学实现隐身的电磁、声学和量子放大器。*Proceedings of the National Academy of Sciences* 109 26 10169 10174, 2012 , ( ): – 。[19] C. D. Johnston。混凝土的拉伸与压缩试验。 *Magazine of Concrete Research*, 20 65 221 228, 1968 ( ): – 。[20] L. Dorfmann 和 R. W. Ogden。 *Nonlinear theory of electroelastic and magnetoelastic interactions*, 第 1 卷。施普林格, 2014。[21] T.J. Hoffmann 和 M. Chudzicka-Adamczak。磁弹性材料的麦克斯韦应力张量。 *International Journal of Engineering Science*, 47 5 735 739, 2009 ( ): – 。[22]M. Blaszczyk 和 K. Hackl。通过电场降低应力的新型电-力学超材料：补充材料。2023。[23] Y. Tashiro。关于在球面上生成均匀随机点的方法。 *Annals ofthe Institute of Statistical Mathematics*, 29(1):295–300, 1977。[24] K. Gao 和 J. P. Harrison。随机应力张量的生成。*International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 94 18 26, 2017 , : – 。

[25]E. W. Weisstein。球面点选取。 https://mathworld.wolfram.com/ SpherePointPicking.html。[26] Pablo Cortegoso V.、Alexander R. R.、N. K. H. De Boer、W. Marlicz 和 A. Koulaouzidis。用于向胃肠道进行药物递送的机器人胶囊概述。*Journal of Clinical Medicine* 10 24 5791, 2021 , ( ): 。