基于人工神经网络的扩展卡尔曼平滑算法快速在线求解逆热传递问题

Xinxin Zhang[a]、Dike Li[a]、Jianqin Zhu[a]、Zhi Tao[a]、Lu Qiu[a,*]

[a]*National Key Laboratory of Science and Technology on Aero-Engine Aero-Thermodynamics, School of Energy and Power Engineering,Beihang University,Beijing 100191, PR China*

arXiv:2304.00021v1 [eess.SY] 31 Mar 2023

摘要

数字孪生是许多先进应用中的一项现代技术。要构建热系统的数字孪生，需要根据传感器测量数据在线估计未知的时变边界条件，这需要求解逆传热问题（IHTPs）。然而，由于测量数据通常受到噪声污染，且传统的逆传热问题求解方法需要进行大量计算，因此要快速且准确地求解并非易事。因此，本研究开发了一种快速且稳健的反演算法，称为基于人工神经网络的扩展卡尔曼平滑算法，以实现基于测量值对目标参数进行在线预测。该算法通过将扩展卡尔曼平滑算法中的传统基于计算流体动力学的状态转移模型替换为预训练人工神经网络，实现快速预测。随后，采用一个二维内部对流传热问题作为案例研究，以测试该算法。结果证明，所提算法是一种计算成本低且稳健的逆传热问题求解方法。对于标准差为 10 K 的含噪温度测量数据，所提算法能够以 0.0580 的无量纲平均误差估计未知边界条件，同时大幅降低计算

*通讯作者*Email address:* qiulu@buaa.edu.cn
(Lu Qiu)

成本。与传统方法相比，该算法的计算成本显著降低。此外，还研究了训练数据、传感器位置和未来时间步选择对预测性能的影响。关键词：数字孪生、逆热传递问题、卡尔曼滤波器、人工神经网络、近实时估计

符号表

k_c 导热系数 (W/(m·K))ρ 密度 (kg/m^3)C_p 定压比热容 (J/(kg·K))L 长度 (m)h 高度 (m)q 壁面热流密度 (W/m^2)X X 轴方向的水平距离 (m)Y Y 轴方向的垂直距离 (m)T 温度 (K)u 流速 (m/s)m 传感器噪声水平 (K)Γ 状态转移算子H 测量算子ω 状态转移模型噪声向量ν 测量模型噪声向量Q 状态转移模型噪声的协方差矩阵R 测量噪声的协方差矩阵x 状态向量y 测量向量 $\hat{x}$ 预测状态向量 $\hat{y}$ 预测测量向量$\tilde{x}$ 校正状态向量$\tilde{y}$ 校正测量向量 $\hat{P}$ 状态向量的预测协方差矩阵$\tilde{P}$ 状态向量的校正协方差矩阵 F 雅可比矩阵ε 无穷小量e 单位向量K 卡尔曼增益$\tilde{x}'$ 平滑状态向量$\tilde{P}'_k$ 平滑协方差矩阵n_f 未来时间步G 平滑算法中的卡尔曼增益AE 无量纲平均误差 下标in 入口参数k 当前时间步i, j 网格节点索引

s 传感器参数

1. 引言

在许多瞬态对流换热问题中，未知且随时间变化的热边界条件（边界条件）难以直接测量[1], ，但在航空航天热防护 [2]、芯片冷却[3]、冶金反应器[4, 5] 和食品工程[6]等各种工程应用中，对其进行在线估计对于提高热系统的稳定性和性能至关重要。逆传热问题（IHTPS）已被用于根据内部温度场估计未知的时变边界条件。借助逆热传导问题算法，可以利用安装在流体域某处的温度传感器在线测量的数据，重建热边界条件以及完整的温度场。该技术也称为数字孪生。

然而，传统的逆热传导问题求解方法面临以下挑战和缺点。首先，由于逆热传导问题固有的不适定性，在含噪输入数据下难以获得相对稳定且准确的解[7, 8]。其次，由于热传递的扩散特性，热扰动沿下游方向衰减，因此难以根据滞后的传感器测量反演未知热流密度[9]。第三，求解逆热传导问题的传统算法计算密集且耗时[10]，难以用于在线估计。

用于估计时变边界条件的求解方法可分为两类，即全域算法和序贯算法。顾名思义，全域算法是一种离线方法，在获得整个时间段内的所有时间测量值后，计算未知边界条件。该算法将逆热传导问题转化为优化问题，通过迭代计算正向热传递过程，利用Levenberg-Marquardt方法等传统优化算法，最小化假定边界条件与未知边界条件精确值之间的误差[11]

或采用排斥粒子群算法[14], 、蚁群优化和布谷鸟搜索算法等启发式算法[15]。

另一方面，序贯算法以在线模式运行。通过连续测量瞬时温度，可以实时或近实时估计未知边界条件。已有许多序贯反演方法被提出，包括序贯函数指定法（SFSM）[16], 动态矩阵控制法[17], 多模型自适应反演（MMAI）方法[18], 人工神经网络（ANN）算法[10, 12, 13, 19, 20], 和数字滤波器（DF）方法[2, 4, 9, 21–26],等。

Beck J.V[16] 首次将未来测量的概念引入逆热传导问题，以解决传感延迟问题，确保获得稳定且无时间滞后或失真的解。为减少噪声造成的干扰，采用了数字滤波方法[2, 4, 9, 21–26] 。卡尔曼滤波方法通过权衡传感器测量与模型预测来获得平滑结果，因此在含噪输入数据下具有较强的鲁棒性，可用于解决病态问题[7]。Scarpa.F 和 Milan.G[27] 采用卡尔曼滤波（KF）技术求解线性一维热传导问题，结果表明 KF 算法具有抗干扰能力。该算法还可与 Rauch-Tung-Strieber（RTS）平滑相结合，利用未来时刻的测量值减少预测结果的时间滞后。尽管标准 KF 技术能够高效求解线性逆热传导问题，但并不适用于非线性逆热传导问题。因此，人们开发了扩展卡尔曼滤波（EKF）技术[28], 、无迹卡尔曼平滑算法[29], 及其他卡尔曼滤波相关方法[4, 9, 21, 24]，以处理非线性逆热传导问题。尽管卡尔曼滤波相关算法在噪声环境下表现良好，但它们都有一个共同的缺点：敏感性分析中需要反复进行计算流体动力学（CFD）正向计算，导致计算成本过高

敏感性分析中所需的正向计算。

其他算法，例如人工神经网络（ANN）算法，凭借其强大的映射能力[31]和较高的计算效率，或许有助于降低计算成本。例如，Najafi.H 等人[19, 20] 利用人工神经网络模型直接建立未知边界条件与传感器测量温度之间的关联；Huang.S 等人[10]则将训练充分的人工神经网络结构用作快速正向求解器，并结合反演算法，间接实现了对未知边界条件的在线估计。这两项研究均表明，人工神经网络算法能够以令人满意的精度加快逆热传导问题的计算。然而，人工神经网络算法的主要缺点是：训练人工神经网络需要大量具有较高表征负荷的数据集；此外，当传感器测量受到噪声污染时，模型容易出现过拟合。

总而言之，当测量噪声不可忽略时，卡尔曼滤波相关方法是一种稳健的方法，但其较高的计算成本限制了其在在线估计任务中的应用。另一方面，人工神经网络模型作为通用逼近器，可用于提高卡尔曼滤波相关算法的计算效率。因此，在本研究中，我们尝试将扩展卡尔曼平滑算法与人工神经网络算法相结合，以建立一种快速且稳健的逆热传导问题解决方案。此外，为减少传统扩展卡尔曼滤波方法中敏感性分析所需的冗余计算，我们借助人工神经网络模型构建了扩展卡尔曼滤波状态向量的简化形式，从而进一步提高计算效率。本文选取一个二维对流换热问题作为案例研究，以实施并评估所提算法。

2. 基于扩展卡尔曼平滑的反演过程

2.1. 基准问题

案例研究如图1所示，描述了一个二维矩形区域内的对流换热问题。该区域内布置了一个传感器，用于提供实时温度测量；同时，作为未知边界条件的时变热流施加在上边界上。所提算法的主要目标是利用连续测得的传感器温度 $T(t)$，在在线模式下估计未知的 $q(t)$。

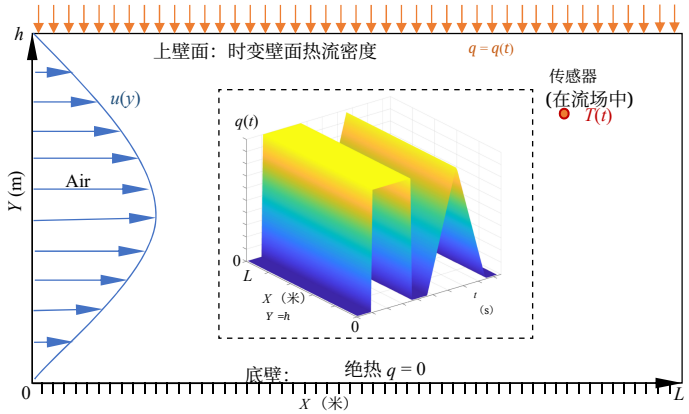


图 1：基准二维热对流反问题示意图。插图展示了施加于上边界的时变热流示例。

下边界被视为绝热边界。在左边界，初始温度为 $T_{in} = 300\text{K}$、平均入口速度为 $u_m = 0.033\ \text{m/s}$ 的充分发展空气流通过该区域。传感器位置设为 (0.820,0.089)，其他详细参数见表 1。随后，给出上述问题的控制方程，

$$\rho C_p \frac{\partial T(X,Y,t)}{\partial t} + \rho C_p u(Y) \frac{\partial T(X,Y,t)}{\partial X} = k_c \frac{\partial^2 T(X,Y,t)}{\partial Y^2} \tag{1}$$

其中边界条件和初始条件为。

$$
\begin{aligned}
k_c \frac{\partial T(X, Y=h, t)}{\partial Y} &= q(t) \\
k_c \frac{\partial T(X, Y=0, t)}{\partial Y} &= 0 \\
u(X=0, Y, t) = u(Y) &= 6u \left[\frac{Y}{h} \left(1 - \frac{Y}{h} \right) \right] \\
T(0, Y, t) &= T_{\text{in}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

表1：数值算例的详细参数。

符号	量	数值
k_c	导热系数	0.243 W/(m · K)
ρ	空气密度	1.29 千克/米^3
C_p	比热容	1005 J/(kg ·K)
L	长度	1 m
h	高度	0.1 米

2.2. 扩展卡尔曼平滑反演过程

在本研究中，采用基于人工神经网络的扩展卡尔曼平滑算法（ANN-EKS）求解逆热传导问题。该算法由两部分组成：基于人工神经网络的正向求解器和扩展卡尔曼平滑算法。整个过程如图 2 所示。扩展卡尔曼平滑算法逐步估计未知边界条件，并借助基于人工神经网络的正向求解器对局部温度场进行快速预测及敏感性分析来加速。

扩展卡尔曼平滑算法可进一步分为两个部分，即扩展卡尔曼滤波（EKF）算法和Rauch-Tung-Strieber（RTS）平滑算法。RTS平滑算法使EKF算法能够将未来测量纳入未知热流密度的估计中，从而解决逆热传导问题的传感延迟问题。

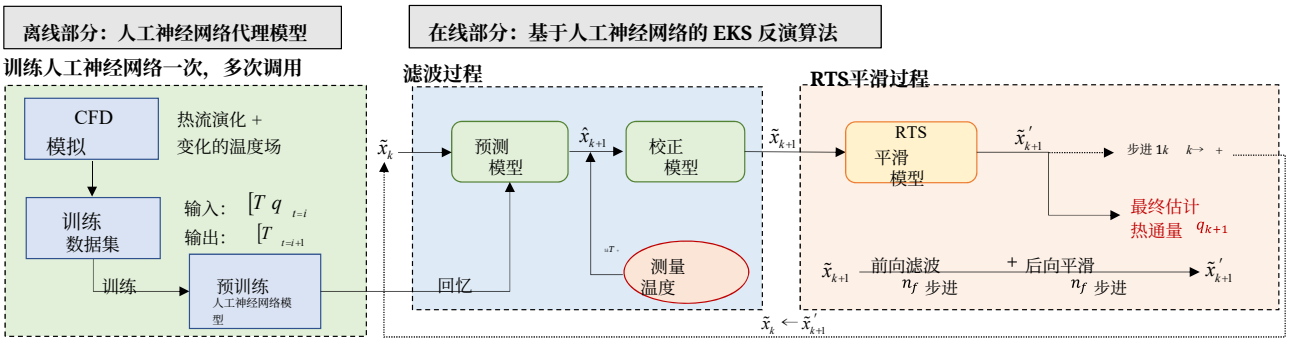


图2: 通过所提算法在 $t = k + 1$ 处估计时变热流的过程

2.2.1. 扩展卡尔曼滤波

如前所述，逆热传导问题本质上是不适定的[7], ，这意味着输入数据的微小扰动可能会导致输出结果产生较大误差。为解决这一挑战，采用扩展卡尔曼滤波算法，利用状态空间表示描述这一二维对流传热过程，并对模型误差和测量噪声进行统计量化。该算法在原始预测与含噪测量之间进行折衷，从而获得更精确的估计。

首先，需要在状态空间表示下描述基准问题，其非线性形式如公式3所示，

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Gamma\left(x_k, z_k\right) + \omega_{k+1} \\ y_{k+1} &= \mathrm{H}\left(x_{k+1}\right) + v_{k+1} \end{aligned} \tag{3}$$

其中， x 是描述系统当前状态的状态向量， y 是测量向量， z 是系统的输入。非线性算子 Γ 将系统状态从当前时间步转移到下一时间步，测量算子 H 则将状态向量映射为测量向量。 ω 和 ν 分别是状态传递模型误差和测量噪声，假设它们是相互独立的零均值高斯

噪声，其协方差矩阵分别为 Q 和 R。

为了应用 EKF 算法求解逆热传导问题，需要选择适当的状态变量，以完整描述给定热系统的状态。文献[27–29], 采用了如下形式的状态向量 x_k：

$$x_k = \begin{bmatrix} T_k^1 & T_k^2 \dots T_k^i \dots T_k^N & q_k \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

其中， $T_k^i(i = 1, 2, ..., N)$ 是节点 i 在时刻 k的温度， N 是数值计算基准问题所使用的网格节点数，以离散形式表示温度场。值得注意的是，为了估计未知热流密度，并未表示输入 z，而是将未知边界热通量 q_k 增广到状态向量中。

在逆热传导问题中，方程 3 中的测量向量 y 表示由传感器测得的温度，随后将非线性测量 H 算子化简为如下所示的线性矩阵 H:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \underbrace{1}_{i=n_s} & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1,N+1} \tag{5}$$

其中，节点索引 n_s 对应于温度场中的传感器位置。

扩展卡尔曼滤波方法分两个阶段估计下一时间步的未知边界热通量，即预测阶段和校正阶段。

在预测阶段，EKF 方法预测下一时间步的未知状态向量及其概率分布，这通过根据当前 x_k 以及公式 3 的状态空间模型更新状态向量的均值和协方差矩阵 x_{k+1} 来实现。

为计算 x_{k+1}的均值和协方差矩阵，EKF 方法进一步

线性 在 $\tilde{x}$处对 $\Gamma(x_k)$进行一阶泰勒展开近似，以此解决该问题 k，

$$\Gamma\left(x_k\right)=\Gamma\left(\tilde{x}_k\right)+\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k}\right|_{x_k=\tilde{x}_k}\left(x_k-\tilde{x}_k\right)+o\left(x_k-\tilde{x}_k\right) \tag{6}$$

其中， $\tilde{x}_k$ 是上一个时间步的校正估计结果， k是状态向量的雅可比矩阵，记为 $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k}$。

$$F_k=\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial x_k}\right|_{x_k=\tilde{x}_k}=\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_{k,N+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{N+1}}{\partial x_{k,N+1}} \end{array}\right]_{(N+1)\times(N+1)} \tag{7}$$

可以通过以下方法进行数值计算:

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_{k,j}} \approx \frac{\Gamma_i\left(x_k+e_j \varepsilon x_{k,j}\right)-\Gamma_i\left(x_k-e_j \varepsilon x_{k,j}\right)}{2 \varepsilon x_{k,j}} \tag{8}$$

其中， $e_j=[0 \cdots 1_j \cdots 0]_{N+1}^T$和 ε 是设定为 10^{-4} 的无穷小量。

由于该算法是一个递归过程，在时间步 k，校正状态向量$\hat{}x_k$ 及其˜协方差矩阵 P_k 已经获得，这些结果将用于计算下一个时间步的预测状态向量$\hat{}x_{k+1}$ （ x_{k+1}的方法）及其协方差矩阵$\hat{}$ P_{k+1} ，如下所示:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \Gamma\left(\tilde{x}_k\right) \\ \hat{y}_{k+1} &= H \hat{x}_{k+1} \\ \hat{P}_{k+1} &= F_k \tilde{P}_k F_k^T+Q \end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\hat{}y_{k+1}$ 是时间步 $k+1$ 的预测测量温度。

在校正阶段，卡尔曼增益计算如下，其可被视为——

被视为 t 模型预测与传感器测量之间的置信度水平比 s.

$$K = \hat{P}_{k+1} H^T \left(H \hat{P}_{k+1} H^T + R \right)^{-1} \tag{10}$$

在反演过程中，传感器测量温度 y_{k+1} 尽管受到噪声污染，仍提供了真实的物理信息。传感器测量值 y_{k+1} 与模型预测值 $\hat{}y_{k+1}$ 之间的差值乘以卡尔曼增益，形成校正值 $\Delta\tilde{x}$。

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x} &= K \left(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \right) \\ \tilde{x}_{k+1} &= \hat{x}_k + \Delta\tilde{x} \\ \tilde{P}_{k+1} &= \hat{P}_{k+1} - K H \hat{P}_{k+1} \end{aligned} \tag{11}$$

˜其中，校正状态向量 $\tilde{x}_{k+1}$ 及其协方差矩阵 P_{k+1} 也将用于对时间步 $k+2$ 进行预测，如公式 9 所示，从而形成完整的递归过程。

*2.2.2. RTS*平滑

扩展卡尔曼滤波方法是一种实时反演算法，利用当前可获得的数据来估计未知边界热通量。然而，由于热传递过程的扩散特性，传感器位置处的热响应滞后于变化中的边界热通量，这很难仅通过扩展卡尔曼滤波方法本身捕获。

在本研究中，采用一种称为 Rauch-Tung-Strieber（RTS）平滑技术的固定区间平滑算法，将未来时间测量数据纳入算法，以获得更准确的估计结果。如图 3 所示，RTS 算法向前循环执行卡尔曼滤波过程 n_f 次，然后向后滑动 n_f 次，以获得平滑结果。在前向滤波过程中，我们已经计算出

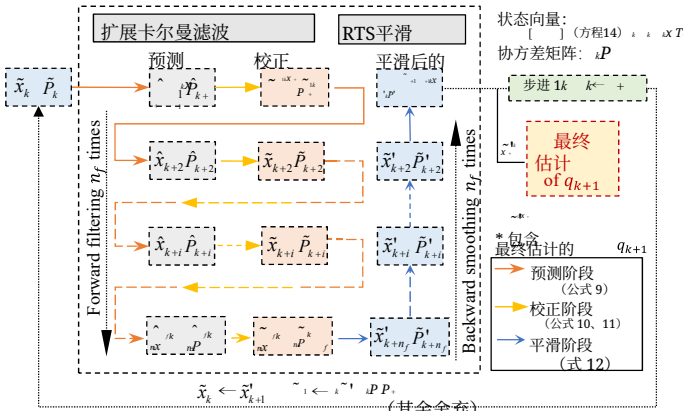


图3：时间步 $k+1$处RTS平滑的流程

预测的 $\hat{x}_k$、校正估计值 $\tilde{x}_k$、相应的预测误差协方差 $\hat{P}_k$、校正后的 $\tilde{P}_k$，以及时间步 k（$k = k_0 \ldots k_0 + n_f$）处的雅可比矩阵 F_k。因此，反向递推过程可进行如下：

$$
\begin{aligned}
G_k &= \tilde{P}_k F_k^T \left(\hat{P}_{k+1}\right)^{-1} \\
\Delta x' &= G_k \left(\tilde{x}'_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}\right) \\
\tilde{x}'_k &= \tilde{x}_k + \Delta x' \\
\tilde{P}'_k &= \tilde{P}_k + G_k \left(\tilde{P}'_{k+1} - \hat{P}_{k+1}\right) G_k^T
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中，$\tilde{x}'_k$、$\tilde{x}'_{k+1}$ 和 $\tilde{P}'_k$ 为平滑结果，G_k 表示RTS版本的卡尔曼增益。

3. 基于人工神经网络的快速状态转移模型

在传统卡尔曼滤波相关方法中，状态转移通常通过计算流体力学模拟实现。在复杂的流动与传热问题中，模拟计算耗时可能超过实际物理过程所需的时间，因此不适用于在线反演。

更改 自然地，采用人工神经网络作为代理模型，用于 -

预测 CFD 的温度场，从而显著降低计算成本，同时保持一定的精度[31]。

更重要的是，鉴于人工神经网络预测无需获取完整温度场的信息，因此可以降低 EKS 算法中状态向量的维度，从而大幅降低计算成本，最终实现在线预测。

3.1. 基于人工神经网络的状态传递模型的一般形式

EKS 算法中的关键模型是状态传递模型，它由两部分组成。第一部分用于近似下一时间步的热通量，如下所示:

$$q_{k+1} = q_k + \omega_q \tag{13}$$

其中，我们将这种近似所引入的误差视为噪声的一部分， ω 并将其应用于状态传递模型。第二部分根据当前温度场和热通量正向计算下一时间步的温度场；传统方法通过计算流体力学模拟实现这一过程[27–29], ，其中状态传递模型的输入是当前状态向量 $x_k = \begin{bmatrix} T_k^1 & T_k^2 \dots T_k^i \dots T_k^N & q_k \end{bmatrix}^T$ ，输出是下一时间步的完整温度场 $\begin{bmatrix} T_{k+1}^1 \dots T_{k+1}^i \dots T_{k+1}^N \end{bmatrix}^T$

尽管已证明所选状态向量具有可行性，但其计算成本对于在线估计而言仍然高得难以接受。包含所有网格节点完整温度场的高维状态向量会产生大量冗余的敏感性分析。

为解决这一问题，本文借助人工神经网络算法设计了一种新颖的降维状态传递模型。状态向量的降维形式如下，作为人工神经网络算法的输入。

$$x_k = \begin{bmatrix} T_k^{n_s} & T_k^{n_s+a} & T_k^{n_s-a} & T_k^{n_s+b} & T_k^{n_s+b} & q_k \end{bmatrix}^T \tag{14}$$

其中，传感器位置 $T_k^{n_s}$ 处的局部温度值与传感器附近其他四个点的温度值一同列于状态向量中。相应地，人工神经网络代理模型的输出可表示为 $\begin{bmatrix} T_{k+1}^{n_s} & T_{k+1}^{n_s+a} & T_{k+1}^{n_s-a} & T_{k+1}^{n_s+b} & T_{k+1}^{n_s+b} \end{bmatrix}^T$，代表下一时间步的局部温度场。

3.1.1. 数据集的生成与人工神经网络的训练过程

为训练人工神经网络模型，进行了大量数值模拟以生成训练数据集。

通过采用有限体积法求解第 2.1 节所述的控制方程，计算瞬态温度场。该方法在 x 方向采用迎风差分格式，在 y 方向采用中心差分格式，并采用隐式格式进行时间推进 [12]。总网格尺寸为 25×50，其中 $\Delta x = 0.04\text{m}$ 和$\Delta\text{y} = 0.002$ m。

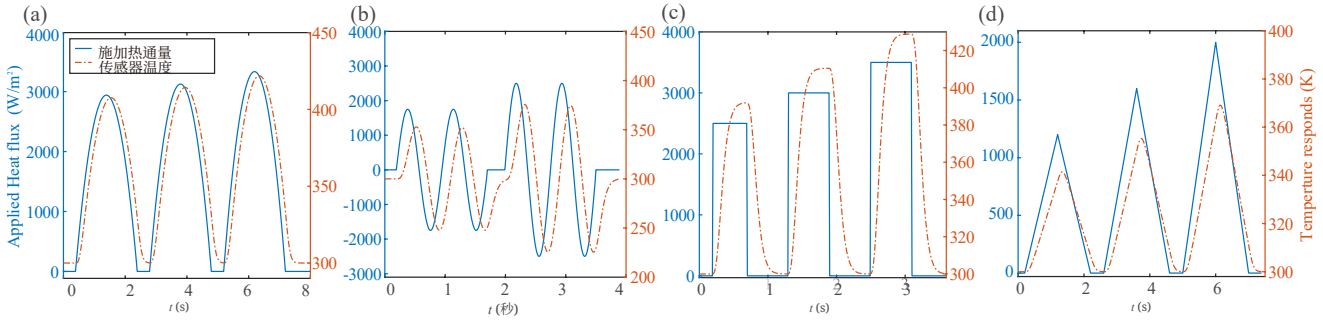


图 4：通过施加不同形式的热流并获取温度分布来生成数据集的示意图（a）抛物线热流（b）正弦热流（c）步进热流（d）三角形热流

为涵盖受热壁面上多种变化的热边界条件，如图4所示，采用了一系列热流演化形式，例如阶跃函数、

不同振幅和频率的多项式函数、正弦波和三角波，这些形式将为人工神经网络模型的训练生成丰富的状态转移信息。此外，在上述模拟过程中应用公式8，可进一步扩展训练数据集，从而通过提高或降低某一状态变量的值，再计算下一时刻的结果来模拟敏感性分析。

因此，最终训练热流密度的总时间步数为6794步（在测试计算机上的时间持续时长为67.94 s），并将其应用于基准问题，其中包括图4所示的四种具有不同振幅和频率的上述热流。随后，将计算流体动力学预测得到的温度场重新整理为用于训练人工神经网络的标准输入和输出形式。

最终数据集包括公式9所需的状态转移数据，以及公式7和8所需的敏感性分析数据。然而，前者的数据量仅为后者的1/12。不平衡数据集可能导致人工神经网络模型更贴合敏感性分析的模式，但在状态转移场景下表现不佳。为解决这一不平衡数据集问题，我们选择将数据集进行划分，并分别训练两个用于状态转移预测和敏感性分析的人工神经网络模型。因此，6794组数据用于训练状态转移人工神经网络模型，其余81529组数据用于训练敏感性分析人工神经网络模型。

本研究选用全连接多层感知机（MLP）神经网络。两个人工神经网络模型均由三层组成，隐藏层包含10个神经元。为提高训练性能，对输入和输出进行标准化处理。选用双曲正切（tanh）函数作为激活函数，并采用 Levenberg-Marquardt 反向传播算法训练神经网络。当验证数据集上的网络性能连续6个

训练周期未见改善后，状态转移预测人工神经网络模型的训练过程在迭代1422次后结束。为验证训练方法，将数据集随机分为三部分，分别将70%用于训练、15%用于验证、15%用于测试。预训练神经网络最终在测试数据集上取得7.14×10^{-9} 的均方误差，回归R值达到0.99999；而用于敏感性分析的人工神经网络模型在迭代552次后结束训练过程，在测试数据集上取得8.02×10^{-9} 的均方误差，回归R值达到0.99997。这表明训练成功，所得神经网络能够满足代理状态转移模型的精度标准。

4. 结果与讨论

4.1. 所提算法可行性的验证

为验证所提算法的可行性，进行了瞬态 CFD 仿真，其中上壁面的热通量按照图 5（实线）所示的方式变化。随后提取点 (x，y) 处 CFD 预测的温度变化，以模拟使用传感器进行的温度测量。

鉴于传感器测量的温度不可避免地受到噪声污染，在点 (x，y) 处的模拟温度演化中加入噪声水平为 m 的零均值高斯噪声 ($\sigma \sim N(0，1)$)，以模拟含噪测量值 y_k，

$$y_k = T_k + m\sigma \tag{15}$$

其中， T_k 表示时间步 k 时传感器位置处的模拟真实温度值。

在此测试中，噪声水平设为 m $= 5$。将人工测量值 y_k作为输入输入 ANN-EKS 算法，即可得到输出 q_k。图 5 将q_k 与 CFD 模拟中使用的壁面热边界条件 q_k^*进行了比较，后者可视为“真实”值。结果表明，预测热流密度演化

与“真实”值吻合良好，表明基于ANN-EKS的IHTPs求解器能够很好地预测随复杂波形变化的历史热边界条件，例如阶跃函数、三角波和任意光滑曲线。

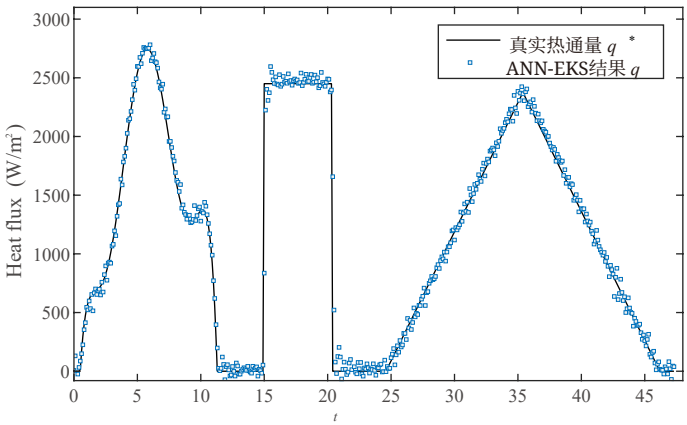


图5：噪声水平为 m =5 K 时实际热通量与估计结果的比较（绘图间隔：每 11 个时间步）

为定量评估算法的性能，定义平均误差（AE）以描述估计结果的精度，

$$AE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{q}_k^* - \bar{q}_k\right)^2} \tag{16}$$

其中， $\bar{q}_k^*$ 和 $\bar{q}_k$ 分别为施加热通量和估计结果的无量纲形式，n 为总时间步数。此外，定义每个时间步的平均计算时间，以评估我们算法的计算效率。本文涉及的所有模拟均在一台配备 2.50 GHz Intel (R) Core (TM) i7-11700F 处理器和 32 GB RAM 的个人计算机上完成。

根据计算结果，在测试计算机上，基准测试中的平均误差 AE 为 0.0342，平均耗时为每步 3.649 ms。上述结果表明了所提算法的可行性和精度。

4.2. 训练数据集对预测性能的影响

人工神经网络模型的离线训练过程是所提算法的关键部分，因此有必要考察训练数据集对反演性能的影响。

本研究采用消融研究的形式进行。第3.3节中使用的数据集被视为基准数据集，记为数据集#0。该数据集由包含四种不同形式热流变化、总长度为67.94 s的训练热流生成。阶跃函数、三角波、抛物线波和正弦波等不同类型的热流演化，在基准训练热流中均匀分布。随后，我们通过直接从基准数据集#0中移除某些类型的训练热流，逐步减少训练热流形式的多样性，然后训练新的人工神经网络模型，并测试相应的估计性能。测试热流由任意光滑曲线、阶跃函数和三角波组成，其振幅和频率均不同于训练热流，以便更好地考察算法处理未知热流中复杂变化条件的能力，例如平滑变化、突变以及持续增加或骤降。结果总结于表2中。

如表2所示，有一些值得注意的规律可为训练过程提供指导。首先，总体而言，训练数据集越丰富，越有可能获得更好的估计结果。例如，基准数据集的估计精度（使用 AE 评估）高于其他数据集，而缺少3/4热通量类型的训练数据集（数据集#11-14）表现最差，其他数据集的表现则大致介于两者之间。

其次，可以推断，训练数据集中缺失的某些形式的热通量可能会导致相应测试热通量的估计误差增加。

T表 2：不同训练数据集及对应的 AE 在不同测试热流下的情况

训练数据集		不同测试热流下对应的 AE			
No.	排除项[1]	任意曲线	阶跃函数	三角波	总体
0	None	0.0164	0.0654	0.0177	0.0320
1	Sin	0.0188	0.0715	0.0198	0.0336
2	Para	0.0265	0.0737	0.0267	0.0385
3	Step	0.0372	0.1145	0.0388	0.0586
4	Tri	0.184	0.0673	0.197	0.0337
5	Sin, Para	0.0172	0.0716	0.0152	0.0350
6	步进，平行	0.0218	0.2386	0.0653	0.1554
7	Tri, Para	0.0164	0.0684	0.0142	0.0331
8	Sin, Tri	0.0195	0.0681	0.0190	0.0333
9	正弦，步进	0.0163	0.0697	0.0158	0.0341
10	步进，三角	0.0166	0.0652	0.0172	0.0325
11	Sin, Para, Tri[2]	0.0300	0.0752	0.0348	0.0430
12	正弦，平行，步进	> 1 [3]	0.0915	0.0181	> 1
13	正弦，三角，步进	> 1	> 1	> 1	> 1
14	平行，三角，步进	> 1	> 1	> 1	> 1

[1] “排除项”列表示从基准数据集中移除的热通量类型。[2] “正弦”“平行”“三角”分别表示正弦波、抛物线波和三角波；“步进”表示阶跃函数。[3]“> 1”表示算法无法正常运行，且产生的结果严重无效。

例如，在数据集 #3 和数据集 #6 中，数据集缺失阶跃函数，导致测试阶跃热流下的平均误差分别明显增加至 0.1145 和 0.2386。类似地，在数据集 #1、#2 和 #4 中，当训练数据集缺失正弦波和抛物函数等渐变热通量时，测试平滑曲线和三角波中的 AE 也会相应增加。

第三，结果还表明，所提算法具有一定的泛化能力。例如，对于数据集 #11 和 #12，仅包含阶跃函数或三角波的数据集也能在其他类型的测试热流密度上得到相对准确的估计结果。

总而言之，训练数据集类型的多样性能够带来更好的估计性能。其中，阶跃函数相较于其他形式的训练热流密度更为重要，对于增强算法在突变条件下反演未知热流密度的能力至关重要。其他形式的训练热流密度，如三角波、正弦波和抛物函数，也有助于所提算法处理复杂变化的边界条件。因此，在构建训练数据集时，建议适当增加阶跃函数的数量，同时提高热流密度类型的多样性，以确保更好的反演性能。

4.3. 与其他算法的比较研究

为突出所提算法的优势，将其与逆向人工神经网络算法 [19, 20] 以及扩展卡尔曼平滑算法（EKS）[27,28]进行比较。

逆向人工神经网络算法[19, 20] 主要利用人工神经网络模型，将传感器测量温度直接映射为未知边界条件。人工神经网络模型的输入是传感器位置处过去和未来的温度测量值 $\left[T_{k+n_p} \dots T_{k-1} \quad T_k \quad T_{k+1} \dots T_{k+nf}\right]^T$，输出则是当前时间步的边界热流 $[q_k]$。由于能够根据传感器测量值直接预测未知边界条件，逆向人工神经网络算法具有较高的计算效率；但当测量噪声相对较大时，该算法可能容易出现过拟合，且表现不佳。

扩展卡尔曼平滑算法[27, 28] 采用完整形式的状态向量，其传递过程基于传统计算流体动力学方法进行计算。尽管该算法能够很好地应对含噪测量，但完整形式状态向量的高维特性会导致冗余的敏感性分析，进而大幅增加计算成本，并限制其在线估计方面的应用。

图6比较了三种算法在一系列传感器测量噪声水平 $m = 2$、5、10 和 15 K 下的预测精度（使用 AE 评估）和每步平均耗时。由于本算法的主要目标是在线估计，我们设定了一项标准来评估算法的在线能力，即每步平均耗时不应超过计算时间间隔（本例中为 0.01s）。

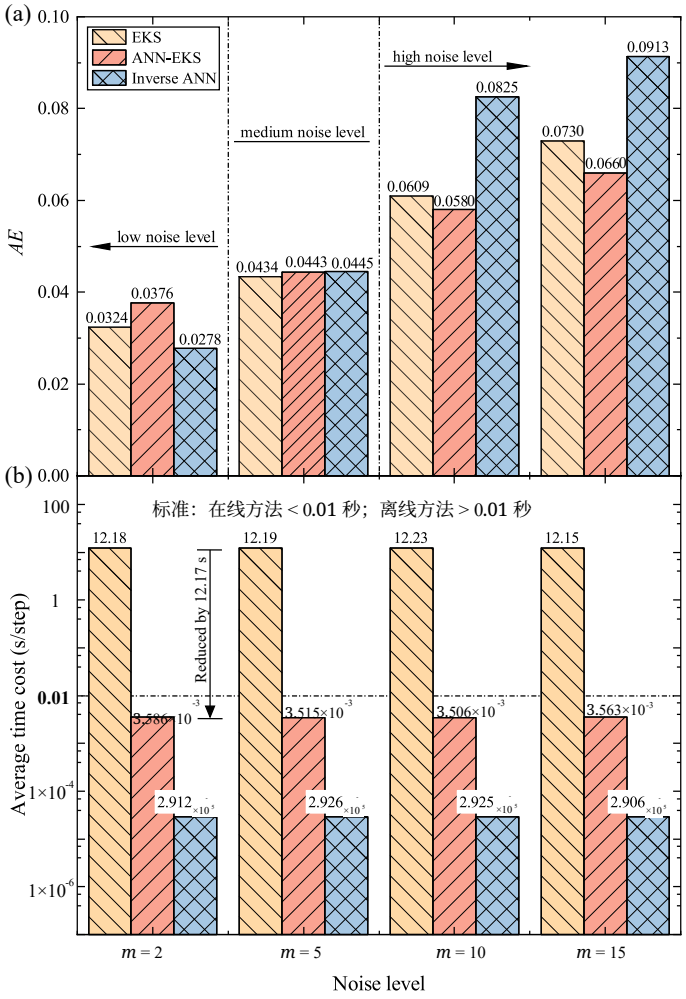


图6：不同噪声水平下三种不同算法的 (a) AE 以及 (b) 每步平均耗时 $m = 2$，5，10 和 15 K

它可以可以看出，所提算法的精度低于传统 al

逆向人工神经网络算法在噪声水平相对较低时的精度。然而，当噪声水平高于 10 时，其表现优于逆向人工神经网络算法，这表明所提算法在含噪输入数据下具有较强的鲁棒性。此外，所提算法的 AE 与基于计算流体力学的扩展卡尔曼平滑算法的结果接近，这证明了我们对状态向量所作的简化是合理的。

值得注意的是，图7展示了在噪声水平相对较高、为 $m = 10$ K 时，上述三种算法的反演结果（散点）与测试热流（实线）的对比。我们的 ANN-EKS 算法和传统 EKS 算法的结果都与真实热通量吻合良好，其 AE 分别为 0.0580 和 0.0609；而逆向人工神经网络算法在这一高噪声水平下似乎出现了较大的振荡，表现最差，其 AE 为 0.0825。此外，我们可以发现，与另外两种方法相比，所提 ANN-EKS 算法更能抑制预测中的超调和振荡，这进一步证明了该算法在含噪环境中的鲁棒性。

更重要的是，从图6可以清楚地看出，所提算法在计算效率方面具有显著优势。ANN-EKS 算法可将传统扩展卡尔曼平滑方法每个时间步的计算时间从 12.23s 大幅缩短至 3.506ms。根据在线估计的判定标准，3.506ms 远短于 0.01s 的时间步间隔，这意味着我们的算法完全能够执行在线估计任务，而传统扩展卡尔曼平滑方法则无法做到。根据比较结果，可以认为所提算法确实是一种鲁棒且快速的方法，能够实现逆热传导问题的在线估计。

根据比较结果，可以肯定地说，所提算法确实是一种稳健且快速的方法，能够完成求解逆热传导问题的在线估计任务。

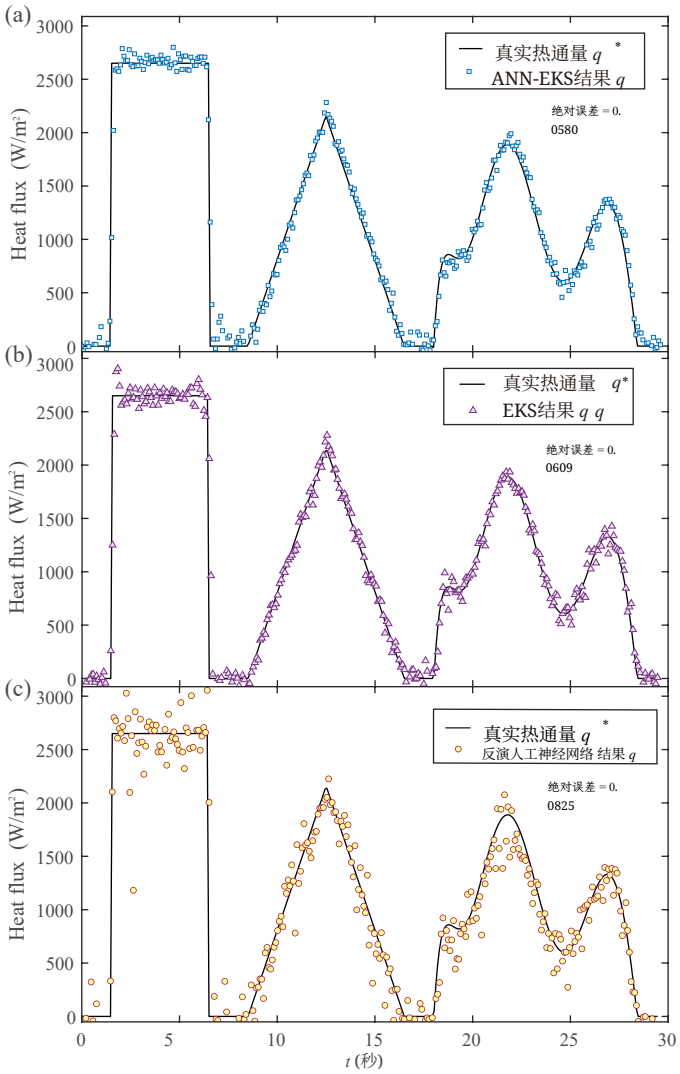


图7：噪声水平为 $m = 10$ K 时三种算法的估计结果（绘图间隔：每 9 个时间步）

4.4. 未来时间步和传感器位置对反演性能的影响 e

有几个超参数会显著影响所提算法的性能，其中，本节将研究传感器位置和未来时间步n_f，以便合理选择这些参数，并引导我们的算法达到其最佳性能。

4.4.1. 传感器位置

传感器位置在估计精度方面发挥着重要作用。为了详细考察其影响，遍历传感器所有可能的位置，以获得相应的估计结果。

图8a描绘了基准问题在2500 W/s恒定热通量加热2 s时的瞬态温度场，展示了上边界热通量作用下的总体温度分布模式。图8b显示了传感器置于不同位置时，我们的ANN-EKS算法所获得的相应估计精度（使用 AE评估）。

图8中的结果清晰地表明了实际物理现象（温度等值线）与反演性能（AE 热力图）之间的联系。首先，距离施加未知热流密度的上边界越近的传感器位置，通常表现越好。其次，沿着气流方向，下游位置相比上游位置也能获得相对更高的估计精度，形成了清晰的平均误差“边界层”，这与图8a所示从上边界进入流体场的热传播模式非常相似。

这种呈现出的模式表明，我们可以将反演过程视为：从经过传播路径的扭曲和衰减后的传感器测量中，恢复未知的原始能量输入（此处为热通量）。传感器越靠近上边界，或位于更下游的位置，其接收到的信息就越清晰、衰减越少，因而能够

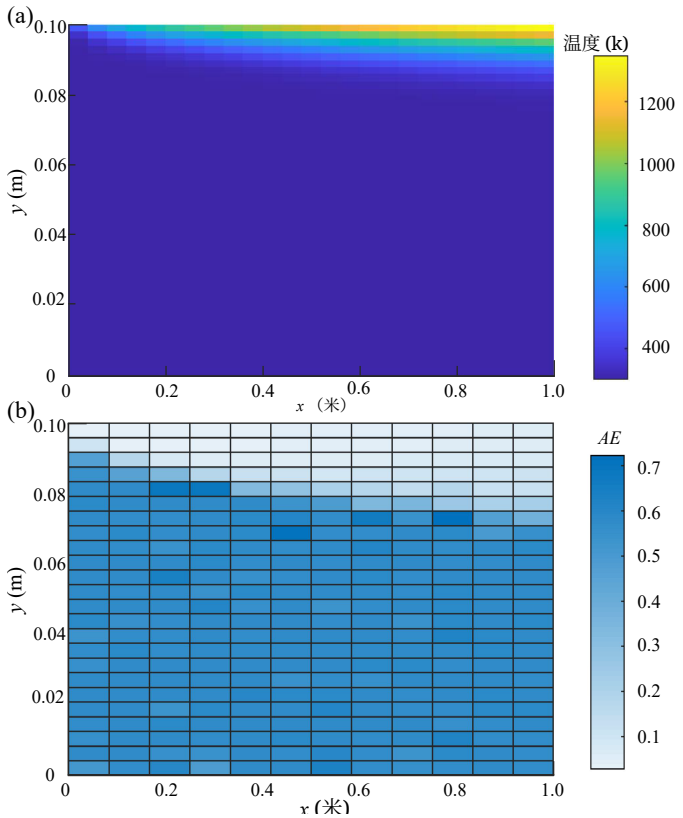


图8：基准问题中的温度分布等值线图，以及不同传感器位置下的估计误差热图。(a) 该等值线图用于演示，绘制时基准问题施加了 2500 $\mathrm{W/m^2}$ 的恒定热通量，持续 2 s。(b) 传感器在整个计算域内不同位置时对应的估计AE热图。位置越浅，使用我们的算法在该传感器位置下得到的估计结果越好。

获得更好的反演结果。由于热通量穿透流体场的能力有限，位于更远位置的传感器（图8b中的深蓝色区域）无法接收到足够的信息，因此会产生高度无效的估计结果。

因此，在实际应用中，建议将传感器尽可能放置在热传播直接路径上最靠近的位置，以获得更好的估计性能。

4.4.2. 未来时间步 n_f

从此前关于传感器位置的研究中可以得知，未知边界条件与传感器之间的空间距离会显著影响最终的反演精度。自然也可以认为，传感器测量的时间效应同样不可忽视，在本例中，该效应可由RTS平滑算法中的未来时间步n_f 表示。

为了考察n_f的影响，针对n_f 从 0 到 30 的不同取值进行了数值实验，在此情况下，传感器被放置在若干合理的位置。所提算法的性能，包括平均误差和每个时间步的计算成本，如图 9 所示。

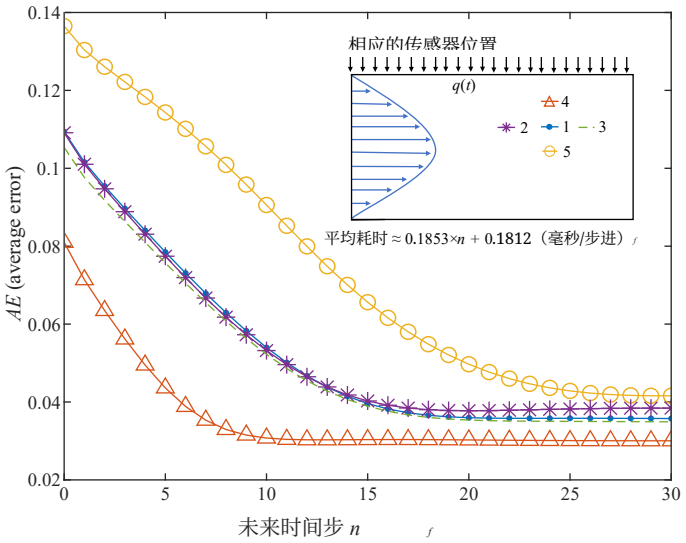


图 9：所提算法在不同 n_f和传感器位置下的性能。传感器 #1-5 分别位于 (0.820,0.091), (0.940, 0.091), (0.700, 0.091), (0.820, 0.091)、(0.820, 0.087)。噪声水平 $\mathrm{m} = 5\,\mathrm{K}$，训练数据集为基准数据集。其他参数与前几节相同。由于不同传感器位置下的计算成本保持一致，因此得到关于 n_f的平均耗时线性表达式。

总体而言，布置在不同位置的五个传感器均呈现一致的模式。五个传感器的平均计算成本随

未来时间步n_f线性增长，而相应的估计 AEs则先下降，并在n_f 达到某个阈值后逐渐趋于稳定。

对于不同未来时间步 n_f，传感器测量的时间效应明显体现在绝对误差的变化模式上。如图 9 所示，五个传感器在 $n_f = 0$ 下均达到最低估计精度。当 $n_f = 0$ 时，我们的基于人工神经网络的扩展卡尔曼平滑（EKS）算法退化为基于人工神经网络的扩展卡尔曼滤波（EKF）算法；后者不利用未来测量来解决传感延迟问题，因此可能得到滞后的解。为展示这一效应，图 10 对比了 $n_f = 0$ （点划线）和 $n_f = 18$ （隐线）时的估计结果；在 $nf = 0$ 下，估计结果相较于实际热通量或 n_f 下的结果，表现出明显的滞后问题。

随后，随着未来时间步 n_f 增加，估计精度也随之提高，如图 9 所示。这可能是因为利用更多未来时间步的测量（更大的 n_f）逐渐缓解了传感延迟问题。然而，超过 n_f 的某个阈值后，估计精度的提升似乎停滞不前，这表明传感器延迟问题已得到妥善解决，因此增加未来测量并不能进一步提高估计精度。结果还表明，不同传感器位置对应的阈值不同：距离最近的传感器 4 需要约 10 个未来时间步才能达到最佳估计精度，而距离最远的传感器 5 则需要约 28 个未来时间步。这一现象的原因在于，未知边界热通量可能首先传至较近的传感器；这些传感器受到的传感延迟问题可能较轻，因此只需较少的未来测量即可达到相对较高的估计精度。

另一方面，还可以观察到传感器位置对反演性能的空间效应。从图 9 可以看出，沿y

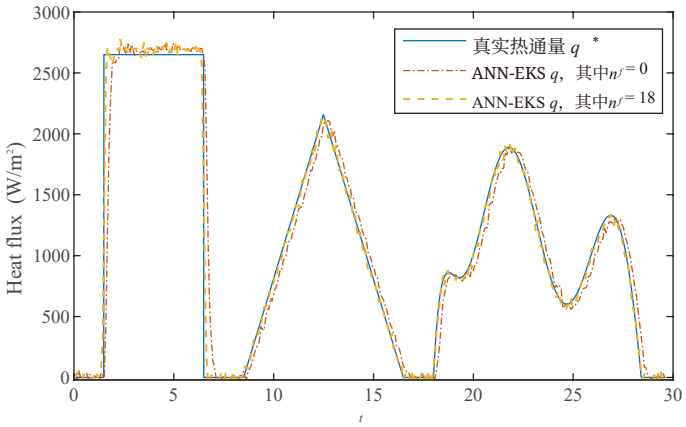


图10： $n_f = 0$ 和 $n_f = 18$条件下所提算法的估计结果。噪声水平为 $\mathrm{m} = 5$ K，传感器位于 (0.820，0.091)，训练数据集为基准数据集。其他参数与前几节相同。

方向越靠近上边界，往往能获得更高的估计精度；与上游位置相比，传感器位于下游位置时也能获得略高的估计精度，这与我们在上一节中发现的规律一致。此外，我们可以看到，沿流动方向的空间效应并不像沿 y 方向的空间效应那样明显，这表明在基准问题中，沿 y 方向的热传导比沿流动方向的对流传热更强。

因此可以推断，未来时间步过小会导致滞后问题，并产生较大的估计误差；而时间步过大则需要更多计算时间，却无法显著提高估计精度。因此，应在估计精度与计算效率之间进行适当权衡来选择未来时间步n_f ，同时还要考虑传感器位置的空间效应。

5. 结论

本文提出了一种快速且稳健的反演算法——基于人工神经网络的扩展卡尔曼平滑算法（ANN-EKS），用于实现对二维管内对流换热问题中时变热边界条件的在线估计。主要研究结果总结如下:

(1) 所提算法是一种计算成本低的在线方法，可用于估计未知边界条件。与传统的基于计算流体力学的扩展卡尔曼平滑算法相比，所提算法的计算成本从每个时间步 12.23 s 大幅降至 3.506 ms，使其完全能够执行在线估计任务。

(2) 所提算法能够较好地处理信噪比较高的测量数据，具有相对较强的鲁棒性。该算法估计未知边界热通量的平均误差为 0.0580，精度基本与传统 EKS算法（平均误差为 0.0609）相当，且相较于逆向人工神经网络算法（平均误差为 0.0825）有显著提升。

(3) 采用人工神经网络模型作为代理模型，预测给定热系统的状态转移过程。该模型使用非稳态计算流体力学模拟数据进行训练，数据涵盖管壁多种随时间变化的热边界条件，例如阶跃函数热通量、三角波热通量、正弦波热通量和抛物线热流。其中，阶跃函数比其他形式的数据更为关键，因为在消融研究中，缺少阶跃函数的数据集，其估计误差的增幅相对更大：数据集 #3 的误差从 0.0320 增至 0.0586，数据集 #6 的误差增至 0.1554。

(4) 传感器位置和未来时间步 n_f 是影响壁面热边界条件预测的两个耦合因素。从空间上看，传感器向下游移动或靠近壁面时，预测效果会更好，这表明

传感器位置的设计应考虑热扰动从壁面传播的路径。从时间上看，较大的未来时间步 n_f 有助于算法更好地应对传感延迟问题，这表明选择未来时间步 n_f 时也应考虑施加的边界热流到达传感器的时间滞后模式。

致谢

中国国家自然科学基金委员会资助项目51806005

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可根据合理请求向通讯作者获取。

参考文献

[1] C.Y. Ku、C.Y. Liu、J.E. Xiao、S.M. Hsu、W. Yeih，采用时空径向多项式的配置点法求解逆热传导问题，《Engineering Analysis with Boundary Elements》，122（2021）：117-131。

[2] O. Uyanna、H. Najafi、B. Rajendra，《航天器热防护系统气动热加热实时估计的逆方法》，《国际传热与传质杂志》，177.2（2021）：121482。

[3] H.Y.Jang, C.H. Cheng，《电子设备非线性最优在线散热控制方法》。《国际传热与传质杂志》，52.7-8(2009):2049-2058

[4] M. Lebreux, M. Desilets, M. Lacroix，基于无迹卡尔曼滤波器的逆热传递方法，用于预测高温冶金反应器内部的炉帮厚度。《国际传热与传质杂志》，57.1(2013):265-273。

[5] G. Wang，S. Wan，H. Chen，K.Wang，C. Lv，板坯连铸结晶器时空相关内表面热通量的模糊辨识。《传热学杂志》，140.12（2018）：122301.1-122301.9。

[6] I. Bia-lobrzewski，芹菜根干燥过程中通过逆问题表述确定传热系数。《食品工程杂志》，74.3（2006）：383-391。

[7] O.M. Alifanov，逆热传递问题，Springer Berlin Heidelberg（1994）。

[8] D.V.Patel，D. Ray，A. A. Oberai。利用深度生成先验求解基于物理的贝叶斯逆问题。《应用力学与工程中的计算机方法》，第400卷（2022）。

[9] N. Daouas，M.S. Radhouani，利用未来温度测量的卡尔曼滤波器求解非线性逆热传导问题的新方法。《数值传热：B辑：基础》，45(6)（2004）：565-585。

[10] S. Huang、B. Tao、J. Li、Z. Yin，利用序贯逆方法和人工神经网络对复杂几何结构非线性热传导系统进行在线热流估计。《国际传热与传质杂志》（2019），143。

[11] N.A. Golsorkhi、H.A. Tehrani，《用 Levenberg-Marquardt方法求解逆热传递问题》。《数学与计算机科学杂志》，13（2014），第4期，300-310。

[12] H.R. Tamaddon-Jahromi、N.K. Chakshu、I.Sazonov、L.M. Evans、P.Nithiarasu。通过神经网络（深度学习）和计算传热实现数据驱动的反问题建模。《计算力学与工程方法》，369（2020）。

[13] P. Florent、D. Christophe、Z.Tianyu，采用人工神经网络求解多尺度计算力学中的统计反问题。发表于《计算力学与工程方法》，第373卷（2021年）。

[14] K.H. Lee，排斥粒子群优化在逆热传导问题中的应用——未知平面热源的参数估计。发表于《国际传热与传质杂志》，137（2019年）：第268–279页。

[15] Udayraj、K. Mulani、P. Talukdar、A. Das、R. Alagirusamy，蚁群优化、粒子群优化和布谷鸟搜索算法在逆传热问题中的性能分析与可行性研究。发表于《国际传热与传质杂志》，89（2015年）：359–378。

[16] J.V. Beck，将非线性估计应用于非线性逆热传导问题。《国际传热与传质杂志》，13(4)（1970年）：703–716。

[17] Y. Li, G. Wang, H. Chen，基于动态矩阵控制的非稳态加热边界条件同步正则反演，《国际热科学杂志》88 (2015): 148-157。

[18] G. Wang, L. Cai, C. Hong, S. Wan, D. Zhang，一种适用于具有温度依赖性热物理性质的非线性传热系统的多模型自适应反演方法。《国际传热与传质杂志》118 (2018): 847-856。

[19] H.Najafi、O. Uyanna、J. Zhang，应用人工神经网络作为近实时技术求解具有移动边界的一维非线性逆热传导问题，载于

《美国机械工程师学会2020年夏季传热会议论文集》（2020年）。

[20] H. Najafi, K.A. Woodbury，采用人工神经网络数字滤波方法进行在线热流估计。《国际传热与传质杂志》，91（2015）：808-817。

[21] S. Wen, H. Qi, Y.T. Ren, X.Y. Yu, L.M. Ruan，KF-RLSE算法在参与性介质中在线估计随时间变化的熔化厚度和输入热流的应用，《国际热科学杂志》，125（2018）：1-10。

[22] Y.H. Ko, J.Z. Lu, K.T. Lu, T.F. Yeh，确定底火快速热源未知的随时间变化强度的反演估计问题，《工程学报》，2014.79：295-304。

[23] S. Wen, H. Qi, Y. Li, Y.T. Ren, L.M. Ruan，一种用于重建二维参与性介质中瞬态热流和温度场的在线扩展卡尔曼滤波技术。《国际热科学杂志》，148（2020）。

[24] S. Wen、H. Qi、X.Y. Yu、Y.T. Ren、L.M. Ruan，基于KF-RLSE算法对梯度折射率介质中时变施加热通量进行实时估计，《应用热工程》，150（2019）：1-10。

[25] W.D. Silva、J. Dutra、C. Kopperschimidt、D. Lesnic、R.G. Aykroyd，非线性多维逆热传导问题中时变传热系数的序贯粒子滤波估计。《应用数学建模》89（2021）：654–668。

[26] A. Jahangiri、S. Mohammadi、M. Akbari，使用Haar小波配置法对一维逆热传递问题进行建模。《物理学A：统计力学及其应用》525（2019）：13–26。

[27] F. Scarpa, G. Milano，《卡尔曼平滑技术在逆热传导问题中的应用》，《数值传热》B辑：基础，28(1)(1995)：79-96。

[28] N. Gaaloul, N. Daouas，《卡尔曼平滑技术应用于瞬态非线性二维逆热传导问题的扩展方法》，《国际热科学杂志》，134 (2018)：224-241。

[29] S. Wen, H. Qi, Y.X. Su, J.Q. Zhang, YT. Ren，《采用无迹卡尔曼平滑技术同时估计吸收和散射介质中的内部温度场与边界时变热流》，《定量光谱学与辐射传递杂志》，255 (2020)。

[30] Y.Bai, W. Chen, J. Chen, W. Guo，《用于求解线性逆问题的深度学习方法：研究方向与范式》，《信号处理》，177(2020)。

[31] K. Hornik、M. Stinchcombe、H. White，多层前馈网络是通用逼近器，《神经网络》，2(5)(1989)：359-366。