arXiv:2304.00064v1 [math.GT] 31 Mar 2023

Birman-Ko-Lee 左规范形及其应用

MICHELE CAPOVILLA-SEARLE、KEIKO KAWAMURO 和 REBECCA SORSEN

Abstract. 利用 Birman、Ko 和 Lee 的辫子左规范形，我们刻画了几乎强拟正辫子，并给出了分数Dehn扭转系数的估计。

Contents

1. 引言 2 2. 通过图的规范因子 5 2.1. 带生成元 5 2.2. 非交分划图 6 2.3. 规范因子 9 3. CnFct(B_n)上的偏序 9 3.1. CnFct(B_n)上的运算 $\diamond$ 和 $*$。10 3.2. 定理 3.4 的证明 15 4. 偏序集 (Wds(β) $\Rightarrow$) 21 5. 左规范形 26 5.1. 左规范形的定义 26 5.2. 左规范形算法 27 5.3. 超峰集与左规范形 28 6. SQP 辫和 ASQP 辫的判定 29 7. Bennequin不等式与 LCF(β) 31 8. 负带数与 LCF(β) 的约化 34 8.1. 约化操作回顾 34 8.2. 根据 inf(β) 和 sup(β) 对 nb(β) 的界定 36 9. $\beta \in$SSS(β) 的 inf(β) 与 nb(β) 之间的关系 38 10. 分数 Dehn 扭转系数 41

参考文献 46

1. Introduction

辫群 B_n（$n = 1$ 条股线）最初由 Emil Artin 于 [1] 年引入。以下表示称为 B_n 的标准表示，其中使用 Artin生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$。

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \ |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \ i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\rangle$$

在 B_n 的标准表示中，Artin生成元只交换相邻股线。在带生成元表示中，任意两条股线都可以交换。对于每个 i, j，其中 $1 \le i < j \le n$，定义

$$a_{ij} = (\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{i+1})^{-1}.$$

这里，a_{ij} 是 B_n 中交换第 i股线和第 j股线、同时保持其他所有股线不动的元素。此外，被交换的两股线必须位于所有固定股线的前方。由此得到如下带生成元表示（或 Birman-Ko-Lee 表示）[3]:

$$B_n = \left\langle a_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{jk}a_{ij} = a_{ij}a_{ik} = a_{ik}a_{jk}, \ i < j < k \\ a_{ij}a_{kl} = a_{kl}a_{ij}, \ i < j < k < l \end{array} \right\rangle$$

字问题和共轭问题一直是辫子研究中的核心问题。给定两个 n辫子词 w 和 w'，判断 $w =$$w'$ 是否表示 B_n 中的同一个辫子群元素，称为字问题；判断是否存在某个 $v \in B_n$ 使得 $w = vw'v^{-1}$，即 w 和 w' 共轭，称为共轭问题。

许多人解决了这些问题，其中包括 Artin[1], Garside [9], Elrifai 和 Morton [7], 徐 [25], Kang、Ko 和 Lee [15], 以及 Birman、Ko 和 Lee [3]。后三篇论文使用带生成元解决了这些问题。

Birman-Ko-Lee 的左规范形 LCF(β) 利用带生成元技术解决了字问题。具体而言，Birman、Ko 和 Lee 将徐 [25] 以及 Kang、Ko 和 Lee [15], 先前的工作推广后证明，对于 n-辫子词 w 和 w'，当且仅当 LCF(w) = LCF(w') 时，我们有 $w = w'$ 属于 B_n。他们还利用左规范形解决了共轭问题。LCF(β) 的定义见定理 5.2。

Birman、Ko 和 Lee 对 LCF(β) 的定义是代数性的。本文使用非交叉分划图研究 LCF(β)。这些图示可见于相关文献中，包括 Dehornoy、Dynnikov、Rolfsen 和 Wiest 所著的书籍 [5]，以及 Calvez 和 Wiest 撰写的一篇论文 [4]。

我们将概述本文内容，并陈述一些主要结果。

在第 2 节中，我们首先回顾带生成元和非交分划图。随后定义在左规范形 LCF(β) 中起关键作用的典范因子，并将典范因子与非交分划图联系起来。

在第 3 节中，我们在 B_n 的典范因子集合上引入偏序 $\prec$，记作 CnFct(B_n)。$\prec$ 的定义是代数性的。我们给出一种图示解释。

定理 3.4。对于典范因子 A 和 B，$A \prec B$ 当且仅当它们的凸包满足 凸包(A) $\subset$凸包(B)。

为此，我们在 CnFct(B_n) 集合上引入一个二元运算 $\diamond$。作为一个副产品，我们得到一个有用的推论：

推论 3.19. 对于每个典范因子 $A \in \mathtt{CnFct}(B_n)$，存在一个$B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 使得 $A \diamond B = AB = \delta$.

在 §4 中，我们利用 §3 中的偏序 $\prec$，在表示辫子 β 的辫子词集合 Wds(β) 上引入另一种排序 $\Rightarrow$。我们通过详细的例子说明这种排序在辫群 B_4 中如何运作。

在 §5 中，我们研究左规范形。集合 Wds(β) 是无限集；然而，Birman、Ko 和 Lee 定理 [3] 指出，相对于排序 $\Rightarrow$，Wds(β) 中存在唯一的极大元。这个唯一的极大元称为 β 的左规范形，记作 LCF(β)。我们还回顾了用于求左规范形的 Kang、Ko 和 Lee 算法 [15]，并利用非交分划图计算示例。

在第 6 节中，我们开始讨论结与链环的正性概念。在这种情况下，正性是指链环的所有交叉都具有相同符号这一性质。在相关文献中，人们研究了辫子的多种正性概念，包括正（P）辫子，即由 Artin生成元 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n-1}$ 生成的幺半群；拟正（QP）辫子，即由 Artin生成元正规生成的幺半群；以及强拟正（SQP）辫子，即由正带生成元 $a_{i,\ j}$ 生成的幺半群。

研究几乎正性的概念也很有意义。例如，如果允许一个交叉为负，这是否会改变正性的某些性质？我们将这样的辫子称为几乎强拟正（ASQP）辫子。在[10], Hamer、Ito 和 Kawamuro 讨论了各种正性与几乎正性概念之间的性质和关系。

这些正性概念之间存在如下包含关系：

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{QP} & \subset & \mathrm{AQP} & \subset & B_n \\ & & \cup & & \cup & & \\ \mathrm{P} & \subset & \mathrm{SQP} = B_n^+ & \subset & \mathrm{ASQP} & & \end{array}$$

辫子 β 的下确界记作 inf(β)，是该辫子的不变量，可直接从 LCF(β) 读出（参见定义 5.1 和定理 5.2）。我们讨论 SQP 和 ASQP 辫的不变量 inf(β)。对于 SQP 辫，得到以下充要命题。

定理 6.3。 一个 n-辫子 $\beta \in B_n$ 是强拟正的，当且仅当$\inf(\beta) \geq 0$。

对于 ASQP 辫，我们在下文讨论的定理 9.4 中得到了一个充要条件。

在 §7 中，我们研究负带数 nb(β)。它是 $\beta \in B_n$ 的负带数的最小值，即

$$\mathtt{nb}(\beta) = \min\left\{k \;\middle|\; \begin{array}{l}\beta \text{ is represented by a word in band}\\ \text{generators containing } k \text{ negative bands}\end{array}\right\}$$

不变量 nb(β) 是 Bennequin 不等式 [13] 中亏格差的上界。

$$\frac{1}{2}(-\chi(K) - \mathtt{SL}(K)) \leq \mathtt{nb}[\beta]$$

ˆ 其中， K 是辫子闭合 β 的纽结（或链环）类型， χ(K) 是 K 的最大欧拉示性数，而 SL(K) 是 K 的最大自链接数。我们根据左规范形给出了负带数 nb(β) 的两个估计。第一个是 –nb(β) 的上界。第二个估计是下界，见第 §8 节。

定理 7.3。 令 $\beta \in B_n$ 满足 $\mathtt{nb}(\beta) \geq 1$。则

$$0 < -\inf(\beta) = |\inf(\beta)| \leq \mathtt{nb}(\beta).$$

在 § 8 中，我们回顾了 Kang、Ko 和 Lee [15] 为解决 4-辫的最短词问题而引入的约化操作。我们利用该约化操作给出 –nb(β) 的另一个估计，该估计与定理 7.3 互补，如下所示：

定理 8.7. </style}设 是一个 n 股辫。若 inf(β) < 0 ，则

$$\mathtt{nb}(\beta) \leq (n-2)|\inf(\beta)| - \min\{0, \sup(\beta)\}.$$

此外，当 $n = 3$ 时等号成立，并且我们有

$$\mathtt{nb}(\beta) = |\inf(\beta)| - \min\{0, \sup(\beta)\}.$$

在第9节中，我们讨论特定超上确界元 β ∈SSS(β) 的 inf(β) 与 nb(β) 之间的更多关系。我们根据左规范形刻画严格 ASQP 辫。

定理 9.4。 一个辫子 $\beta \in B_n$ 满足 $n \leq 4$ 当且仅当每个超上确界元都共轭于严格几乎强拟正辫

$\beta' \in \mathsf{SSS}(\beta)$ 具有 $\inf(\beta') = -1$ ，并且 左规范形(β') 包含一个词长为 $n-2$ 的典范因子。

在上述定理中，对辫指标 $n = 3$，4 的限制仅在唯一性方向（$\Rightarrow$）中需要。如果方向（$\Leftarrow$）的陈述对一般的 n成立。

在第 §10 章节中，我们应用辫子 β 的左规范形来研究其分数Dehn扭转系数（记作 FDTC）。根据 [14] 和 [12], 中对分数Dehn扭转系数的描述, 我们首先构建工具，以便轻松计算辫子 β的 FDTC。然后，应用左规范形, 我们得到 β的 FDTC 的一个界。

定理 10.7。设 左规范形$(\beta) = \delta^r A_1 \cdots A_k$ 则

$$\frac{\inf(\beta)}{n} = \frac{r}{n} \leq c(\beta) \leq \frac{r+k}{n} = \frac{\sup(\beta)}{n}.$$

Acknowledgements. 作者谨此感谢 Juan Gonzalez-Meneses 在2022年4月于 ICERM布朗大学 举办的研讨会上进行的有益交流。

2. Canonical Factors via Diagram

本节回顾辫群 B_n 的带生成元，并将 B_n 的典范因子与 n孔圆盘 D_n的非交分划图联系起来。

2.1. 带生成元。 在 B_n中，传统表示里的 Artin 生成元只能交换相邻股线。在带生成元表示中，现在任意两股线都可以交换。对于每个 i， j 满足 $1 \leq i < j \leq n$，定义

$$a_{ij} = (\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i(\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{i+1})^{-1}.$$

这里，a_{ij} 是 B_n 中交换第 i股与第 j股、同时保持其余股线不动的元素。此外，被交换的两股线必须位于所有固定股线的前方。由此得到如下带生成元表示（或 Birman-Ko-Lee表示） [3]:

$$B_n = \left\langle a_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{jk}a_{ij} = a_{ij}a_{ik} = a_{ik}a_{jk}, \ i<j<k \\ a_{ij}a_{kl} = a_{kl}a_{ij}, \ i<j<k<l \end{array} \right\rangle \tag{2.1}$$

B_n 的带生成元集合记为 BGen(B_n)。带生成元$a_{i,\ j}$ 通常称为正带，因为每个带生成元都会在辫图中产生一个正交叉；而它们的逆元 $a_{i}^{-1}{}_{,\ j}$ 则称为负带。

在 B_4中，按照 [15], 中的记号，带生成元重新命名如下:

$$a_1 := a_{1,2},\ a_2 := a_{2,3},\ a_3 := a_{3,4},\ a_4 := a_{1,4},\ b_1 := a_{1,3},\ b_2 := a_{2,4}.$$

从视觉上看，这六个带生成元如下所示。辫子股从 1（底部股线）到 4（顶部股线）编号。这些带生成元

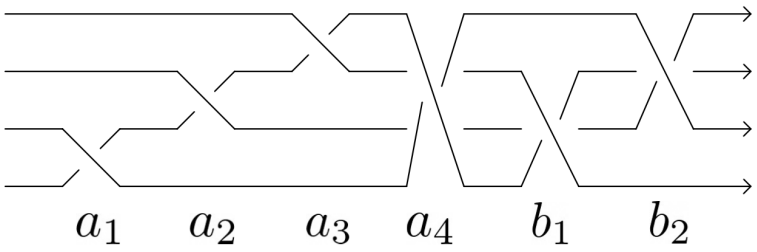


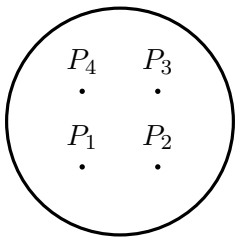
FIGURE 1. 的带生成元 B_4

a_1、.....、 a_4、 b_1、 b_2 是正带，其逆元 a_1^{-1}、.....、 a_4^{-1}、 b_1^{-1}、 b_2^{-1}是负带。

2.2. 非交分划图。在本小节中，我们回顾非交分划图。它们最早由 Dehornoy、Dynnikov、Rolfsen 和 Wiest 在著作 [5] 中引入；Calvez 和 Wiest [4] 则利用图示研究 4股辫。

回想一下， B_4 可视为四次穿孔圆盘 D_4 的映射类群。我们将 D_4 参数化为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，其穿孔点位于

$$P_1 = \frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi i}{4}}, \quad P_2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}},$$
$$P_3 = \frac{1}{2}e^{-\frac{7\pi i}{4}}, \quad P_4 = \frac{1}{2}e^{-\frac{5\pi i}{4}}.$$



请注意，我们将穿孔点按逆时针方向放置，而在[5]和 [4] 中，穿孔点按顺时针方向放置。

类似地，我们定义一个 n 带孔圆盘 D_n。穿孔点按逆时针方向标记为 P_1，……，P_n，而 P_1 和 P_n 由一条从原点出发、角度为 π 的半直线分隔。

辫子股可以看作圆柱体中的 $\{P_1, \dots P_n\} \times [0,1]\, D_4 \times [0,1]$，其中第 k 股是 $\{P_k\} \times [0,1]$。辫图可以看作从位置（-1，0.5）$\in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$观察圆柱体 $D_n \times [0,1] \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 所得的视图。

圆柱体中的线段 $\overline{P_iP_j} \times \{0.5\}$ 在辫图中可视为跨越辫子股 $i+1$，$i+2$，…，$j-1$ 的一条弧。这提供了一种用线段 P_iP_j 在 D_n 中图示表示正带 $a_{i,\,j}$ 的方法。事实上，在辫群 B_n 与带 n个孔的圆盘 D_n的映射类群之间的对应下，辫子群元素$a_{i,\,j}$ 对应于沿线段 P_iP_j的正半德恩扭转（逆时针）。

基于这一想法，我们将某个辫子词与一个图联系起来；在下面的定义 2.8 中，该辫子词将被称为典范因子。这些图曾用于研究非交叉划分。

定义 2.1。 n 个点的图（没有边）表示辫群 B_n 的单位元 e。当 $n = 4$ 我们定义：

$$(\;\vdots\;\vdots\;) := e.$$

定义 2.2。**（边，二边形）** n 个点的图中，用一条边连接两个点 P_i 和 P_j（$i < j$），表示带生成元$a_{i,\,j} \in B_n$。当 $n = 4$ 我们定义：

$$(\;\vdots\!\!:\;) := a_1 \qquad (\;\vdots\;\vdots\;) := a_2$$

$$(\;\overset{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\;) := a_3 \qquad (\;\vdots\;\vdots\;) := a_4$$

$$(\;\diagup\!\!:\;) := b_1 \qquad (\;\diagdown\!\!:\;) := b_2.$$

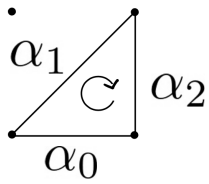
使用新记号，我们有：

$$\begin{aligned}\texttt{BGen}(B_4) &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2\} \\ &= \{(\;\vdots\!\!:\;), (\;\vdots\;\vdots\;), (\;\overset{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\;), (\;\vdots\;\vdots\;), (\;\diagup\!\!:\;), (\;\diagdown\!\!:\;)\}.\end{aligned}$$

注 2.3。 在下文中，我们将定义三边形、四边形、…，使得一个 n 边形对应于一个长度为 $n-1$ 的词。这说明，将连接两个顶点的一条单边（定义 2.2）视为一个二边形是合理的。

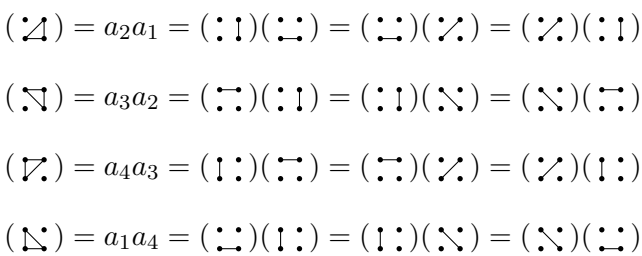
定义 2.4.（三角形，三边形）考虑一个顶点为 P_i、P_j、$P_k \in D_n$ 的三角形。将各条边对应的带生成元按顺时针方向记为α_0、α_1、$\alpha_2 \in \texttt{BGen}(B_n)$。例如，在圆盘$D_4$内的三角形中，三条边分别为 $\alpha_0 = a_1 =$( )、$\alpha_1 = b_1 =$( ) 和 $\alpha_2 = a_2 =$( )。

$\;\vdots\!\!:\;$ $\;\diagup\!\!:\;$ $\;\vdots\;\vdots\;$



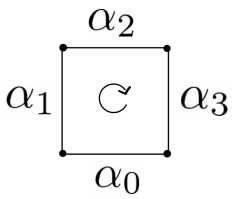
根据带生成元表示的第二个关系式（式 (2.1)），对于 B_n，我们知道 $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_0$ 成立。因此，我们将该三角形表示为长度为 2 的辫子 $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_0$。

对于 B_4，我们有四个不同的三角形，每个三角形都具有三种带生成元分解：



定义 2.5。（正方形，4 边形）考虑一个顶点为 P_i、P_j、P_k、$P_\ell \in D_n$ 的正方形。按顺时针方向，将与每条边对应的带生成元记为α_0、α_1、α_2、$\alpha_3 \in \mathrm{BGen}(B_n)$。根据 B_n 的带生成元表示，我们知道 $\alpha_0\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3\alpha_0 = \alpha_3\alpha_0\alpha_1$。我们可以定义该正方形来表示长度为 3 的辫元素。

在 B_4 中，存在唯一的正方形：



这个正方形与基本元素 $\delta := a_3a_2a_1$ 的 B_4相同。已知 [15] δ 在 $\mathrm{BGen}(B_4)$ 中有 12 种不同的分解，如下所示：

$$\begin{array}{cccccc} a_3a_2a_1 & a_4a_3a_2 & a_1a_4a_3 & a_2a_1a_4 & b_1a_2a_4 & a_1b_1a_4 \\ a_3b_1a_2 & a_1a_3b_1 & b_2a_1a_3 & a_2b_2a_1 & a_4b_2a_3 & a_2a_4b_2 \end{array} \tag{2.2}$$

注意，$\delta^4 = \Delta^2$ 是一个全扭，因此 δ^4 生成了辫群 B_4的中心。

我们可以将上述构造推广到一个 k边形。

定义 2.6。（k**-边形**）令 $2 \leq k \leq n$。 D_n 中的一个 k边形，其顶点按顺时针方向定向，表示一个长度为 $k-1$ 的词，该词按顺时针方向读取 k边形的连续 $k-1$条边。

定义 2.7. 多边形的不相交并表示与这些多边形对应的辫子的乘积。

对于 B_4，我们有两个这样的图，分别表示 a_1a_3 和 a_2a_4。

$$:= a_1a_3$$

$$:= a_2a_4.$$

根据不相交条件，这些图中的每一个都允许在 BGen(B_4) 中作如下两种分解:

$$= (\quad)(\quad) = (\quad)(\quad)$$

$$= (\quad)(\quad) = (\quad)(\quad).$$

2.3. **典范因子**。 本节定义在辫子的左规范形中发挥重要作用的典范因子。

一个 n-辫子如果可表示为由正带生成元组成的词，则称为正的 。令 B_n^+ 表示正 n-辫子组成的幺半群。

定义 2.8。 对于两个辫子词 V， $W \in B_n$，如果存在某些（可能为空的）正词 P， $Q \in B_n^+$，使得 $W = PVQ$，则称 $V \leq W$。集合 $\{W \in B_n \mid e \leq W \leq \delta\}$ 中的元素称为规范因子，该集合记为 CnFct(B_n)。

在 [3, 推论 3.5], 中，Birman、Ko 和 Lee 证明了集合 CnFct(B_n) 的基数是第 n 个卡特兰数 $\mathcal{C}_n = (2n)!/n!(n+1)!$。在他们的证明中，隐含了下面的定理。

定理 2.9。 集合 $\mathtt{CnFct}(B_n)$与 n 个元素的非交叉划分集合之间存在一一对应关系。

例如， B_4 中有 14 个典范因子。

$$\mathtt{CnFct}(B_4) = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, a_2a_1, a_3a_2, a_4a_3, a_1a_4, a_1a_3, a_2a_4, \delta\}$$

$$= \{(\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad),$$

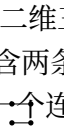
$$(\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad), (\quad)\}.$$

3. Partial Ordering on $\mathtt{CnFct}(B_n)$

本章节将讨论由图示所产生的集合 CnFct(B_n) 上的自然偏序。

定义 3.1. 典范因子 A 的凸包集合记为 cvh(A)，它是图 A 与边所围成的区域的并集。

例 3.2. 三角形 cvh( ) 的凸包集合由二维三角形以及三条边围成的三角形内部区域组成。凸包集合 cvh( ) 仅包含两条不连通的边。我们不包含这两条边之间的区域，因为它们并未围成一个连通区域。



类似于 $\leq$ 在 B_n 上的偏序（定义 2.8），我们在集合 CnFct(B_n) 上定义一个偏序 $\prec$。

定义 3.3. 对于典范因子 $A, B \in$ CnFct(B_n)，我们称 $A \prec B$，如果对于某个典范因子 $Q \in$ CnFct(B_n)，有 $AQ = B$。

我们注意到 $A \prec B$ 蕴含 $A \leq B$。

下面的引理给出了该偏序的图示解释。

定理 3.4。设 $A, B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 为典范因子。当且仅当 $A \prec B$ 时，我们有 凸包(A) $\subset$凸包(B)。

该定理将在命题 3.18 和 5.4 中得到证明。

利用定理 3.4，我们可以轻松得到集合 CnFct(B_4) 上偏序 $\prec$ 的哈斯图（图 2）。此外，我们注意到，$\prec$和 $\leq$ 是 CnFct(B_4) 上等价的偏序。

3.1. **运算 $\diamond$ 和 $*$ 在** CnFct(B_n)。为了证明定理 3.4，我们将引入定义在 CnFct(B_n) 上的运算 $\sqcup$、$\diamond$ 和 $*$。我们采用如下约定：典范因子用罗马字体表示（例如 A），其对应的图则用相同字母的书法字体表示（例如 $\mathcal{A}$）。

定义 3.5. 设 A 和 B 是其图示互不相交的典范因子；$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$。它们在辫群 B_n 中的乘积 AB 记作 $A \sqcup B$，相应的图记作 $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$。由于 $AB = BA$，我们有 $A \sqcup B = B \sqcup A$。

定义 3.6.（见图 3）设 $A \in$CnFct(B_n) 是一个典范因子，其图示 $\mathcal{A}$ 是多边形分量的不相交并。若 $\mathcal{A}$ 的分量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 之间存在唯一的边 $x_0 \subset \mathcal{X}$ 和 $y_0 \subset \mathcal{Y}$，且 $\mathcal{A}$ 中没有其他分量位于 x_0 与 y_0 之间，则称这两个分量彼此相对。边 x_0 和 y_0 组成的边对称为相对边对。

$\diamond$运算的定义分为 4 个步骤。

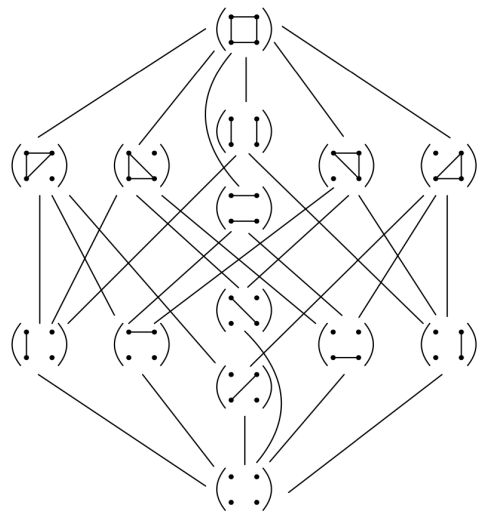


FIGURE 2. 偏序集 (CnFct(B_4) $\prec$) 的哈斯图

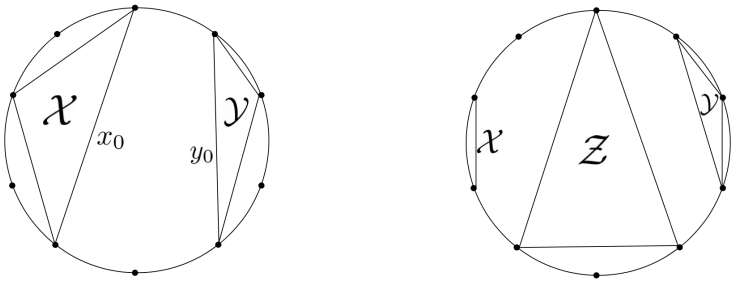


FIGURE 3. 左侧， $A = X \sqcup Y$ 与 $\mathcal{X}$ 以及 $\mathcal{Y}$ 彼此相对。右侧，$A = X \sqcup Y \sqcup Z$。 $\mathcal{Z}$ 与 $\mathcal{Y}$之间存在一个三边形 $\mathcal{X}$，因此 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 彼此不相对。

定义 3.7。 **(步骤 1**。 见图 4) 令 A， $B \in$ CnFct(B_n) 为典范因子，使得

(1) 它们的图示 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是连通的；(2) 图示 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 交于单个顶点，即 P；(3) 从顶点 P 附近看， $\mathcal{B}$ 位于 $\mathcal{A}$ 的左侧（如果你站在 p 上，面前是圆盘的内部）。

设 a_0 和 b_0 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的唯一边，使得 $a_0 \cap b_0 = P$ 且 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 位于 a_0 与 b_0之间的扇形区域之外。假设多边形 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{B}$）有 k（分别为 l）条边。将 $\mathcal{A}$ 的边从

a_0 开始按顺时针方向编号， a_1、……、 a_{k-1}。将 $\mathcal{B}$ 的边从 b_0 开始按顺时针方向编号，b_1、……、 b_{l-1}。稍微滥用一下记号，每个 a_i 和 b_j 均表示一个正带生成元。

当 A 和 B 满足上述条件时（若要强调这一点），辫群 B_n 中的通常乘积 AB 记作 $A \diamond B$。

$$A \diamond B := AB = a_1 \cdots a_{k-1} b_1 \cdots b_{l-1}.$$

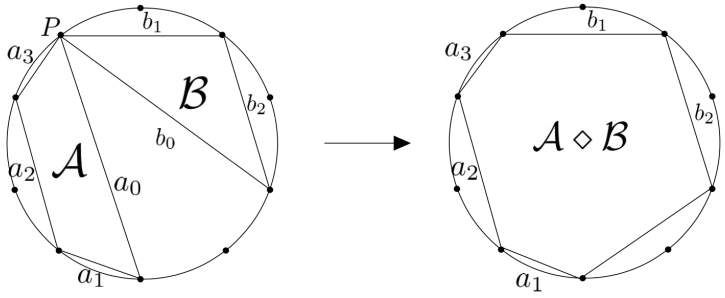


FIGURE 4. 定义 3.7 的一个例子， $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$。左图显示两个多边形在点 P处相交。这里， $\mathcal{A}$ 是一个四边形， $\mathcal{B}$ 是一个三边形，而 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$ 是一个六边形。

我们列出 $A \diamond B$的性质：

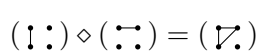
- $A \diamond B$的图记为 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$，是一个具有 $k + l - 1$ 条边的单个多边形。

根据定理 2.9，乘积 $A \diamond B$ 是一个典范因子。

- 凸包(A) $\cup$凸包(B) $\subset$凸包($A \diamond B$)。 更确切地说， $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$是包含 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$的凸包的最小多边形。

根据条件（3）， $B \diamond A$ 没有意义，即 $\diamond$ 是一个非交换运算。

运算 $\diamond$ 的一个简单例子是：



我们将把运算 $\diamond$ 扩展到限制较少的典范因子对。

定义 3.8。 (步骤2。 见图5) 设 $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$和 $B \in$CnFct(B_n) 是满足以下条件的典范因子：

- 每个图示 $\mathcal{A}_1$、……、 $\mathcal{A}_k$和 $\mathcal{B}$都是一个连通分支。
- 对于每个 $i = 1$、……、 k，有序对 (A_i， B) 满足（步骤1）条件；也就是说，交集 $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}$是圆盘$D_n$的单个顶点，记为 P_{A_i}，并且
- 在 P_{A_i}的小邻域内，图 $\mathcal{B}$ 位于 $\mathcal{A}_i$的左侧。

我们将运算 $\diamond$ 扩展到 A 和 B 这一对，定义为

$$A \diamond B := A_1 \diamond (A_2 \diamond (\cdots \diamond (A_k \diamond B)))$$

其中，右侧的 $\diamond$ 在定义 3.7 的（步骤2）中定义。

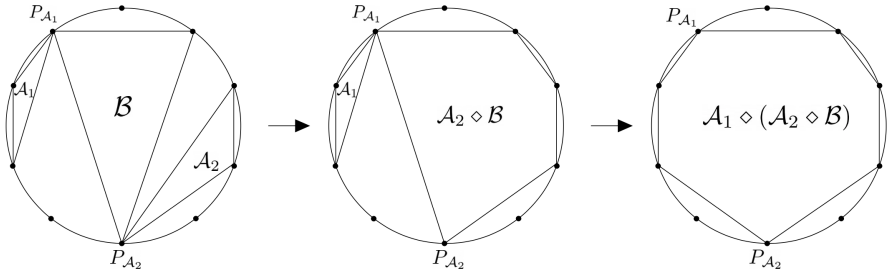


FIGURE 5. 定义 3.8 的一个例子。我们有$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ 以及一个三边形 $\mathcal{B}$。应用定义 3.8，我们得到 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \diamond$（$\mathcal{A}_2 \diamond \mathcal{B}$）。

我们指出，对于 k 个元素的每个排列 $\sigma \in S_k$， $\diamond$ 都定义良好，

$$A_1 \diamond (A_2 \diamond (\cdots \diamond (A_k \diamond B))) = A_{\sigma(1)} \diamond (A_{\sigma(2)} \diamond (\cdots \diamond (A_{\sigma(k)} \diamond B))).$$

命题 3.9。下面列出运算 $\diamond$ 的性质：

(a) 作为辫子，$A \diamond B = AB$。(b) $A \diamond B$ 的对应图记为 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$，它是包含凸包 (A) 和凸包 (B) 的多边形的最小不相交并。(c) 特别地，凸包 $(A) \cup$ 凸包$(B) \subset$ 凸包$(A \diamond B)$。(d) $A \diamond B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 由定理 *2.9* 得出。

对于步骤2，关于 (b)，图 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$ 是一个单个多边形。

定义 3.10. (步骤3. 参见图6) 令 $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k \sqcup A'$和$B \in$CnFct($B_n$) 为典范因子，使得

- the pair $(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k, B)$ satisfy the (Step 2) condition for Definition 3.8,
- and $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

我们定义

$$A \diamond B := A' \sqcup ((A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k) \diamond B)$$

其中，右侧的 $\diamond$ 是指（步骤2）。右侧 A' 与（$A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$）$\diamond$ B 之间的不相交运算由上述性质（b）和不相交性 $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B} = \emptyset$ 得到证明。图 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}'$ 与多边形（$\mathcal{A}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_k$）$\diamond \mathcal{B}$ 的不相交并。因此，上述性质 (a)、(b)、(c) 和 (d) 也成立。

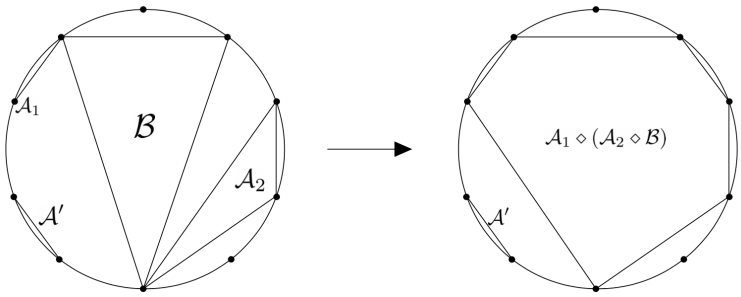


FIGURE 6. 定义 3.10 的一个例子。我们有$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}'$ 和一个三边形 $\mathcal{B}$。我们应用定义 3.10 得到 $\mathcal{A} \diamond \mathcal{B} = \mathcal{A}' \sqcup ((\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2) \diamond \mathcal{B})$。

定义 3.11。(**步骤4)** 令 A, $B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$，使得

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} =$ 凸包$(A) \cap$ 凸包$(B) \subset \{D_n\}$ 的顶点以及
- 如果 $P \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$，在 P附近，图 $\mathcal{B}$ 位于 $\mathcal{A}$的左侧。

因此， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在远离顶点处没有任何公共的边或点。 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$这种情况是可能的。

该因子可能存在分解 $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l \sqcup B' \in$CnFct$(B_n)$，使得对每个 $i = 1$、.....、 l，数对 (A, B_i) 满足定义 3.10 中的（步骤 3）条件，并且 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$.

我们定义

$$A \diamond B := B' \sqcup ((((A \diamond B_1) \diamond B_2) \diamond \cdots) \diamond B_l)$$

其中，右侧的 $\diamond$ 是定义 3.10 意义下的。运算 $\diamond$ 与因子 B_is 的排序无关。上述性质 (a)、(c) 和 (d) 也成立。

接下来我们定义运算 $*$。

定义3.12。 （见图 7）设 A、 $B \in$ CnFct(B_n) 是典范因子，满足

- 它们的图示均为连通的 $\mathcal{A}$ ，并且 $\mathcal{B}$
- 它们的图示不相交 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ （即 $AB = BA$ 在 B_n中）。

设多边形 $\mathcal{A}$ （分别为 $\mathcal{B}$）有 k （分别为 l）条边。令 a_0 和b_0 为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中构成相对边对的边。 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的边按顺时针方向分别标记为 a_0、.....、 a_{k-1} 和 b_0、.....、 b_{l-1}。因此 $A = a_1 \cdots a_{k-1}$和 $B = b_1 \cdots b_{l-1}$。记 P_A为 $\mathcal{A}$中边 a_0 和 a_{k-1} 相交处的顶点。类似地，记 P_B 为 $\mathcal{B}$ 中边 b_0 和 b_{l-1} 相交处的顶点。令 $\mathcal{C}$ 表示连接顶点 P_A 和 P_B的边。我们称 $\mathcal{C}$为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$的连接边 。连接边 $\mathcal{C}$ 对应于一个正

带生成元，记为 $C \in$BGen(B_n)，可以将其视为一个二边形（参见注 2.3）。定义运算 $*$ 如下

$$A * B := A \diamond (B \diamond C) = B \diamond (A \diamond C) = (A \sqcup B) \diamond C.$$

作为辫子，$A * B = ABC = BAC$ 属于辫群 B_n。

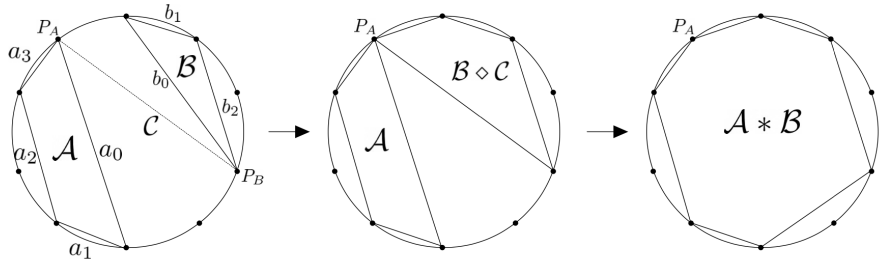


FIGURE 7. 运算 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$的一个例子。左图显示了两个互不相交的多边形。 $\mathcal{A}$ 是一个四边形， $\mathcal{B}$ 是一个三边形， $\mathcal{C}$ 是连接边。中图显示了 $\mathcal{B} \diamond \mathcal{C}$的计算过程。右图显示了 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$的计算过程。

注 3.13。 为后文使用，我们注意到，在 P_A 的邻域内，连接边 $\mathcal{C}$ 位于 cvh(A)的左侧。同样地，在 P_B 附近，边 $\mathcal{C}$ 位于 cvh(B)的左侧 。

我们列出运算 $*$ 的性质，这些性质直接由定义得出。

命题 3.14。 运算 $*$ 满足交换律： $A * B = B * A$. $A * B$的图记为 $\mathcal{A} * \mathcal{B}$，满足

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathcal{A} \diamond (\mathcal{B} \diamond \mathcal{C}) = \mathcal{B} \diamond (\mathcal{A} \diamond \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}) \diamond \mathcal{C}$$

并且它是一个有 $k + l$ 条边的单个多边形。因此，根据定理 *2.9*，我们得到 $A * B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$。定义还意味着

$$\mathtt{cvh}(A) \sqcup \mathtt{cvh}(B) \subset \mathtt{cvh}(A * B).$$

3.2. **定理 3.4 的证明**。

引理 3.15。 (见图 8) 设 $A, B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 为典范因子，使得

- 图 $\mathcal{B}$ 是连通的，
- 图 $\mathcal{A}$ 有 $k(> 1)$ 个连通分支，并且
- 凸包(A) $\subset$凸包(B)。

于是存在一个带生成元 $C \in$BGen(B_n) ，使得 $A' := AC$ 满足

- $A' = A \diamond C$,
- A' 是一个典范因子，
- 其图 $\mathcal{A}'$ 有 $k-1$ 个连通分支，并且
- 凸包(A) $\cup \mathcal{C} \subset$ 凸包(A') $\subset$ 凸包(B)。

证明。图 $\mathcal{A}$ 包含一对彼此相对的不相交连通分支。将它们分别记为 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，相应的典范因子分别记为 X 和 Y。因此，对于某个 $Z \in$CnFct(B_n)，有 $A = X \sqcup Y \sqcup Z$。将 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的连接边记为 $\mathcal{C}$。令$C \in$ BGen(B_n)表示对应于 $\mathcal{C}$的正带生成元。注意，(A, C)这一对满足 $\diamond$的（步骤 3）条件。我们可以定义

$$A' := A \diamond C = (X * Y) \sqcup Z$$

其图 $\mathcal{A}'$ 与 $\mathcal{A}$ 完全相同，只是将分支 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 替换为单个多边形 $\mathcal{X}*\mathcal{Y} = \mathcal{X}\diamond(\mathcal{Y}\diamond\mathcal{C})$。因此，根据定理 2.9, A' 是一个典范因子，且 $\mathcal{A}'$ 由 $n-1$ 个分支组成。根据运算 $*$ 的性质，有以下包含关系：cvh(A) $\subset$ cvh(A') $\subset$ cvh(B). □

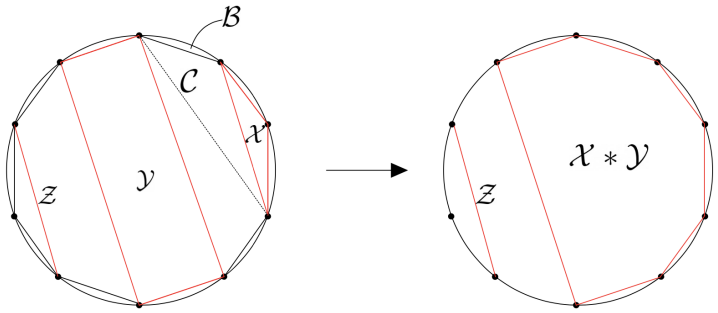


FIGURE 8. 上图是引理??的一个例子。左图包含一个十边形 $\mathcal{B}$ 和一个红色的三分量图 $\mathcal{A} = \mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y} \sqcup \mathcal{Z}$。在右图中，我们计算 $\mathcal{A}' = (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) \sqcup \mathcal{Z}$，它是一个红色的二分量图。

推论 3.16. (见图 9 和图 10) 设 $A, B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 是典范因子，使得

- 图 $\mathcal{B}$ 是连通的，
- 图 $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$其中 $k > 1$且 $\mathcal{A}_i$是连通的，并且
- 凸包(A) $\subset$ 凸包(B)。

那么存在一个典范因子 $C \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 使得 $A' := AC$满足

- $A' = A \diamond C$,
- A' 是一个典范因子，

- 其图 $\mathcal{A}'$ 是一个单个多边形，并且
- 凸包(A) $\subset$ 凸包(A') $\subset$ 凸包(B).

此外，在对不相交的分支重新排序后，

$$A' = (((A_1 * A_2) * A_3) * \cdots A_{k-1}) * A_k.$$

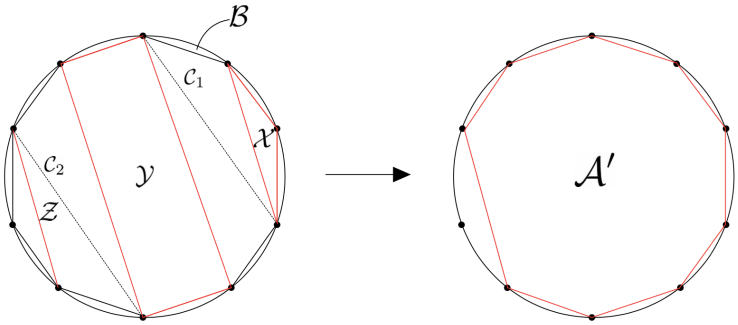


FIGURE 9. 推论 3.16 的一个例子。左图包含一个十边形 $\mathcal{B}$、一个红色的三分量图$\mathcal{A} = \mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y} \sqcup \mathcal{Z}$ 以及 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$。在右图中，我们计算了 $\mathcal{A}'$，它是一个红色的单个多边形。

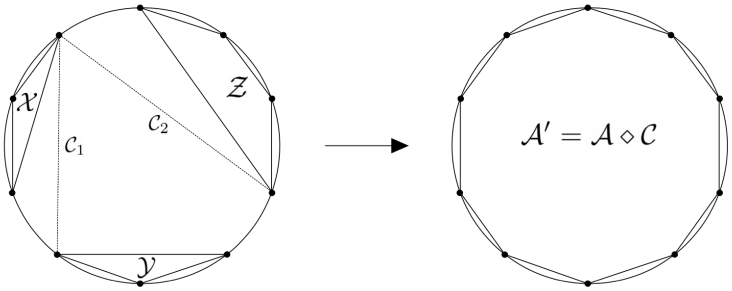


FIGURE 10. 推论 3.16 的另一个例子。左图包含一个三分量图 $\mathcal{A} = \mathcal{X} \sqcup \mathcal{Y} \sqcup \mathcal{Z}$。在右图中，我们计算了 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \diamond C$，它是一个单个多边形。

证明。 应用引理 3.15 $k-1$ 次，我们通过归纳得到带生成元 C_1、$\cdots$、$C_{k-1} \in \mathsf{BGen}(B_n)$，使得

$$\begin{aligned} A' &:= (\cdots((A \diamond C_1) \diamond C_2) \diamond \cdots) \diamond C_{k-1} \\ &= AC_1C_2\cdots C_{k-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

是一个典范因子，图 $\mathcal{A}'$ 是连通的，并且 $\mathsf{cvh}(A) \subset \mathsf{cvh}(A') \subset \mathsf{cvh}(B)$。因此，只需证明乘积 $C := C_1 \cdots C_{k-1}$ 是一个典范因子。

由引理 3.15 的构造可知

$$\mathcal{C}_1 \subset \texttt{cvh}(A \diamond C_1) \quad \text{and} \quad \texttt{cvh}(A \diamond C_1) \cap \text{int}(\mathcal{C}_2) = \emptyset.$$

因此，连接边 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 的内部不相交。对于每个$i = 1$、.....、$k-2$，同样有

$$\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_i \subset \texttt{cvh}(AC_1 \cdots C_i)$$

and

$$\texttt{cvh}(AC_1 \cdots C_i) \cap \text{int}(\mathcal{C}_{i+1}) = \emptyset.$$

这意味着连接边 $\mathcal{C}_1$、.....、$\mathcal{C}_k$的内部两两不相交。

如果 $\mathcal{C}_i$ 和 $\mathcal{C}_j$ 相交，它们只在一个单个顶点处相交，记为 $P \in D_n$。此外，关于连接边的注 3.13 表明： $i < j$ 当且仅当在 P的小邻域内，边 $\mathcal{C}_j$ 位于 $\mathcal{C}_i$的左侧。换言之，在 P附近，连接边以逆时针方式相交。内部不相交性质和逆时针性质保证

$$C = C_1 \cdots C_{k-1} = (((C_1 \diamond C_2) \diamond C_3) \diamond \cdots) \diamond C_{k-1}$$

且其图是若干多边形的不相交并，也就是说，根据定理 2.9， C 是一个典范因子。由于这一对（A， C）满足定义 3.11 中 $\diamond$的（步骤4）条件，因此我们有 $A' = A \diamond C$。□

我们注意到，内部不相交性质和逆时针性质已在定义 3.7 的情形中出现。

引理 3.17。（见图 11）设 A、$B \in \texttt{CnFct}(B_n)$ 为典范因子，使得

- 图 $\mathcal{B}$ 是连通的，
- 图 $\mathcal{A}$ 是连通的或为空的，并且
- 凸包(A) $\subset$ 凸包(B)。

则存在一个典范因子 $C \in \texttt{CnFct}(B_n)$ 使得

$$B = A \diamond C = AC.$$

证明。若 $\mathcal{A}$ 为空，则 $A = e$，并令 $C := B$，证毕。下文假设 $\mathcal{A}$ 非空且连通。

集合 $\mathcal{B} \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ 由不相交弧组成。令 k 表示这些不相交弧的数量。若 $k = 0$，则无需论证，因为 $A = B$。假设 $k > 0$。选取其中一条弧。令 m 表示形成该弧所需的边数。将多边形 $\mathcal{B}$ 按顺时针方向定向。沿此方向，将该弧的 m 条边记为 b_1、.....、b_m。乘积 $C_1 := b_1 \cdots b_{m-1}$ 是一个典范因子，其图 $\mathcal{C}_1$ 是一个 m 边形。注意，数对 (A， C_1) 满足运算 $\diamond$ 的（步骤 1）条件。根据定义 3.7，我们看到

- the product $AC_1 = A \diamond C_1$ is a canonical factor

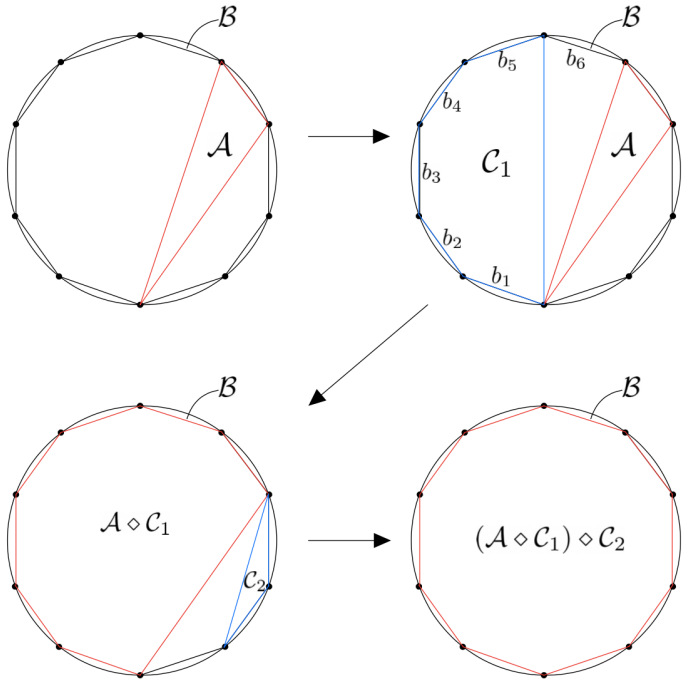


FIGURE 11. 上图是引理 3.17 的一个例子。左上图包含一个十边形 $\mathcal{B}$ 和一个用红色标出的三边形 $\mathcal{A}$。在右上图中，我们用蓝色绘制了 $\mathcal{C}_1$ 。在左下图中，我们计算 $\mathcal{A}\diamond\mathcal{C}_1$。我们还用蓝色绘制了 $\mathcal{C}_2$ 。在右下图中，我们计算 $\mathcal{B} = (\mathcal{A}\diamond\mathcal{C}_1)\diamond\mathcal{C}_2$

.

- 其图 $\mathcal{A}\diamond\mathcal{C}_1$ 是连通的,
- $\mathcal{B}\setminus((\mathcal{A}\diamond\mathcal{C}_1)\cap\mathcal{B})$ 的弧分支数为 $k-1$，并且
- 凸包(A) $\subset$凸包(AC_1) $\subset$凸包(B)。

因此，我们可以对 AC_1 和 B 重复该过程，从而得到一个典范因子 AC_1C_2 ，使得

$$\texttt{cvh}(AC_1)\subset\texttt{cvh}(AC_1C_2)\subset\texttt{cvh}(B).$$

我们继续这一过程，直到穷尽$\mathcal{B}\setminus(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$的所有原始 k 弧。最后，我们得到典范因子 C_1，$\cdots$，$C_k\in\mathsf{CnFct}(B_n)$，满足

$$AC_1\cdots C_k = (((A\diamond C_1)\diamond C_2)\diamond\cdots)\diamond C_k = B.$$

由于它们的图示 $\mathcal{C}_1$，$\cdots$，$\mathcal{C}_k$两两不相交，根据定理 2.9，乘积 C:
$= C_1\cdots C_k = C_1\sqcup\cdots\sqcup C_k$也是一个典范因子，并且有 $B = AC = A\diamond C$。□

我们证明定理 3.4 的“仅当”部分。定理 3.4 的“如果”部分将在命题 5.4 中证明。

命题 3.18. 设 $A, B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$。若 凸包$(A) \subset$ 凸包(B)，则存在一个 $Q \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 使得 $B = AQ$；因此，$A \prec B$。

证明。假设凸包$(A) \subset$凸包(B)，且图 $\mathcal{B}$ 有 k 个连通分支 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$。假设 A 存在分解 $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$ 使得凸包$(A_i) \subset$ 凸包(B_i) 或 $A_i = e$。图 $\mathcal{A}_i$ 可能有多个分支。

若对每一对 (A_i, B_i) 应用推论 3.16，则可以找到一个典范因子 $C_i \in \mathsf{CnFct}(B_n)$，使得

- $A_i' := A_i C_i = A_i \diamond C_i \in \mathsf{CnFct}(B_n)$,
- 新图 $\mathcal{A}_i'$ 是连通的，并且
- 凸包$(A_i) \subset$凸包$(A_i') \subset$凸包(B_i)。
- 凸包$(C_i) \subset$凸包$(A_i') \subset$凸包(B_i)。

若 $A_i = e$，则可以令 $C_i = e$。

接下来，对每个 $i = 1, \dots, k$，我们将引理 3.17 应用于有序对 (A_i', B_i)。于是存在一个典范因子 $D_i \in \mathsf{CnFct}(B_n)$，使得 $B_i = A_i' \diamond D_i$.

由于 $\mathcal{B}$ 的分支两两不相交，图示 $\mathcal{C}_i$ 两两不相交，因此乘积 $C := C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_k$ 是一个典范因子。同理，乘积 $D := D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k$ 是一个典范因子。结合 C 和 D，我们有 $B = (A \diamond C) \diamond D$。

尚需证明乘积 $Q := CD$ 满足 $CD = C \diamond D$；因此，Q 是一个典范因子，且 $B = A \diamond Q$。

注意，

$$\mathtt{cvh}(C) \subset \mathtt{cvh}(A \diamond C) \subset \mathtt{cvh}(B), \tag{3.2}$$

$$\mathtt{cvh}(D) \subset \mathtt{cvh}(B), \tag{3.3}$$

$$\mathrm{int}(\mathtt{cvh}(D)) \cap \mathtt{cvh}(A \diamond C) = \emptyset.$$

这意味着，如果 $\mathcal{C}$ 的一个分支与 $\mathcal{D}$ 的一个分支相交，那么它们必定交于 D_n 的一个顶点。此外，在该顶点附近，$\mathcal{D}$ 的分支位于 $\mathcal{C}$ 的分支左侧。因此，Definition 3.7 中的 $\diamond$ 的 (Step 4) 条件得到满足，从而得到乘积 $Q = CD = C \diamond D$。□

推论 3.19. 对于每个典范因子 $A \in \mathtt{CnFct}(B_n)$，都存在一个$B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 使得 $A \diamond B = AB = \delta$.

4. Partially Ordered Set (Wds(β) $\Rightarrow$)

给定 $\beta \in B_n$，我们定义一个集合：

$$\texttt{Wds}(\beta) := \left\{ W = \delta^r A_1 \cdots A_k \,\middle|\, \begin{array}{l} W \text{ is a word representing } \beta, \\ r \in \mathbb{Z},\ A_i \in \texttt{CnFct}(B_n) \end{array} \right\}$$

本节将集合 CnFct(B_n) 上的偏序 $\prec$ 扩展到集合 Wds(β) 上，从而在表示$\beta \in B_n$的辫子词集合上引入偏序 $\Rightarrow$ 。

我们先定义词之间的关系 $\Rightarrow$ 。

定义 4.1. 设 $A, B, A', B' \in$ CnFct(B_n)。我们记

$$AB \Rightarrow A'B'$$

若满足以下条件：

a) $AB = A'B'$ 作为 B_n中的辫元素。b)
$A \prec A'$ （等价地，cvh(A) $\subset$cvh(A')）。

换句话说，词 $A'B'$ 比 AB更左加权。如果没有 A'， $B' \in$CnFct(B_n) 满足 $AB \Rightarrow A'B'$ ，那么我们称词 AB 为最大左加权。在 $B' = e$的情况下，可以省略 B' 。

在给出 $AB \Rightarrow A'B'$ 的例子之前，我们先回顾右补集 $R(A)$ 和起始集 $S(B)$。我们在此这样做的原因是：词 AB 当且仅当 $R(A) \cap S(B) \neq \emptyset$ 时，存在一个比其更左加权的词 $A'B$"（参见注 4.4）。

定义 4.2。 令 $A \in$CnFct(B_n)。定义右补集$R(A)$和起始集 $S(A)$如下：

$$R(A) = \{c \in \texttt{BGen}(B_n) \mid Ac \in \texttt{CnFct}(B_n)\}$$
$$S(A) = \{c \in \texttt{BGen}(B_n) \mid A = cA' \text{ for some } A' \in \texttt{CnFct}(B_n)\}.$$

就图而言， $R(A)$是满足以下条件的边集 $\mathcal{C}$

- 与图 $\mathcal{A}$ 不相交的 A；即 $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$，或
- 满足定义 3.11 中的两个条件；即 cvh(A) $\cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \subset$ {是 D_n} 的顶点，并且在每个 $P \in$cvh(A) $\cap \mathcal{C}$ 的小邻域内，边 $\mathcal{C}$ 位于 $\mathcal{A}$的左侧。

容易看出， $S(A)$ 是图 $\mathcal{A}$ 的所有边的集合。

例 4.3. 对于 B_4 的每个典范因子 $A \in \mathrm{CnFct}(B_4)$，集合 $R(A)$ 描述如下（忽略旋转）：

$R(\ddots) = \{(\ddots), (\ddots), (\ddots)\} = (\ddots)$ $R(\ddots) = \{(\ddots), (\ddots)\} = (\ddots)$

$R(\ddots) = \{(\ddots)\} = (\ddots)$ $R(\ddots) = \{(\ddots)\} = (\ddots)$

$R(\ddots) = \{(\ddots)\} = (\ddots)$

粗高亮边表示 $R(A)$ 的元素，而黑色边表示 A。关于 $R(\ddots)$ 的解释，请参见下文的例4.6。

集合 $S(A)$ 描述如下（忽略旋转）：

$S(\ddots) = \{(\ddots)\}$ $S(\ddots) = \{\ddots\}$

$S(\ddots) = \{(\ddots), (\ddots), (\ddots)\}$ $S(\ddots) = \{(\ddots), (\ddots)\}$

$S(\ddots) = \{(\ddots), (\ddots), (\ddots), (\ddots), (\ddots), (\ddots)\}$

最后一个等式由（2.2）得出。

词 AB 的最大左加权条件（定义 4.1）可以用集合 $R(A)$ 和 $S(B)$ 来解释。

注 4.4. 代数条件 $R(A) \cap S(B) = \emptyset$ 等价于图示条件：图 B 不与 A 的高亮边相交（参见例 4.3）。因此， $R(A) \cap S(B) = \emptyset$ 当且仅当没有因子 A, $B \in \mathrm{CnFct}(B_4)$ 能增大偏序 $AB \Rightarrow A'B'$；等价地， AB 是最大左加权的。

接下来，我们将通过 $R(A)$ 和 $S(B)$ 展示词 $AB \Rightarrow A'B'$ 的两个例子。

例 4.5. 本例将说明

$$AB := (\ddots)(\ddots) \Rightarrow (\ddots)(\ddots) \Rightarrow (\ddots)(\ddots) = (\ddots).$$

我们将首先如下高亮 A：

$$(\ddots)(\ddots).$$

注意， B 包含在 A中高亮的边内。将其中一条线从 B 移到 A，使其更偏左。移动哪一条线都可以。然后，我们得到

$$AB \Rightarrow A'B' := (\ddots)(\ddots).$$

接下来，我们重复这一过程，直到 $R(A')\cap S(B')=\emptyset$。如果我们高亮 A'，则有

注意， B' 的边包含在 A'的高亮边中。将这条线从 B' 移至 A'，使其更偏左。然后，我们得到

$$A'B' \Rightarrow A''B'' := (\ )(\ ).$$

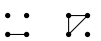
例4.6。 本例将展示

$$(\ )(\ ) \Rightarrow (\ ).$$

注意，左因子（ ）由两条线组成。每当左因子由两条不相交的线组成时，我们必须先执行一个额外步骤，再对其进行高亮。首先，将其中一条线从（ ）移至（ ），以减少



偏序，并得到词（） （）。我们有



$$AB := (\ )(\ ) \Rightarrow (\ )(\ ).$$

现在我们可以高亮 A:



注意， B 的边包含在 A的高亮边中。将一条边从 B 移到 A，以增大偏序。我们选择移动最左侧的边，得到:

$$AB \Rightarrow A'B' := (\ )(\ ).$$

请记住，三角形的方向为顺时针，因此我们得到 $B'=$( )。

写成 $B'=$( )不符合方向，因此不允许这样做。然后，我们高亮 A':

再次可以看到， B' 的边包含在A'的高亮边中。将剩余的边从 B' 移到 A'，以得到一个左权重更大的词

$$A'B' \Rightarrow A''B'' := (\ )(\ ).$$

由此可得: ( )( )⇒( )。

下文表1（分别为表2）列出了具有 $R(A)\cap S(B)\neq\emptyset$（分别为$=\emptyset$）的4股辫的典范因子对 $(A,\ B)$。

例4.7。 在表1中，我们列出了偏序可以增大的、在旋转意义下所有可能的典范因子对 $(A_i,\ A_{i+1})$。也就是说，存在 $A_i',\ A_{i+1}' \in \mathsf{CnFct}(B_4)$，使得 $A_iA_{i+1} \Rightarrow A_i'A_{i+1}'$。

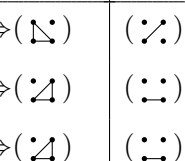
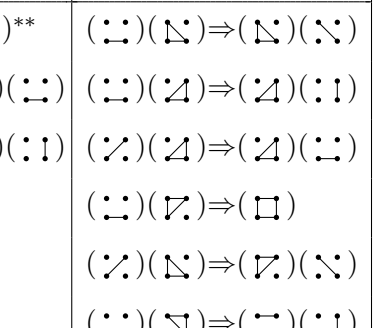
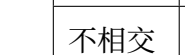
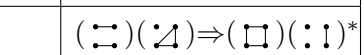
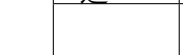
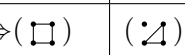
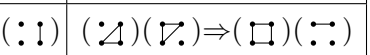
$\mathsf{CnFct}(B_4)$ 的可增加序的乘法（模旋转）			
A_i \ A_{i+1}	单边	不相交边	三角形
单个 Edge			
不相交边			
三角形			

TABLE 1. $\mathsf{CnFct}(B_4)$ 的可增加序乘法（忽略旋转）。*见例 2.16。**见例 2.15。

例 4.8。 除表1中的列表外，如果 $A_i \in \mathsf{CnFct}(B_4)$ 且 $A_{i+1} =$ ，则

$$A_i(\ \ ) \Rightarrow (\ \ )\ \tau(A_i)$$

其中 $\tau\colon\ B_4 \to B_4$ 是由 $\tau(a_i) = \delta^{-1}a_i\delta = a_{i+1}$ 和 $\tau(b_i) = \delta^{-1}b_i\delta = b_{i+1}$ 定义的内自同构。因此，τ 将典范因子图 90° 逆时针旋转。

例4.9。 在表2中，我们列出了所有在旋转意义下偏序无法增大的可能对 $(A_i,\ A_{i+1})$。等价地，$R(A_i) \cap S(A_{i+1}) = \emptyset$。我们省略了满足 $A_i = A_{i+1}$ 的 $(A_i,\ A_{i+1})$ 对。

最后，我们将关系 $\Rightarrow$ （定义 4.1）扩展到集合 $\mathsf{Wds}(\beta)$。

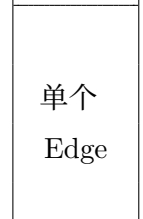
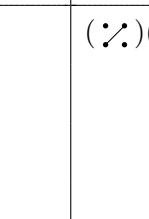
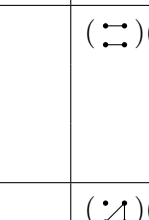
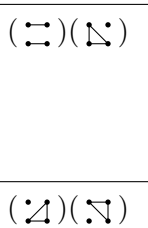
按非递增顺序相乘，直至 B_4 旋转			
A_i \ A_{i+1}	单边	不相交边	三角形
单个 Edge			
不相交边			
三角形			

TABLE 2. 最大左加权词 A_iA_{i+1} （模旋转）。省略 $A_i = A_{i+1}$ 或 $A_i = \delta$ 的情况。

定义4.10。 对于 Wds(β) 中的辫子词 $\delta^\ell A_1 \cdots A_k$ 和 $\delta^m A'_1 \cdots A'_n$，我们定义

$$\delta^\ell A_1 \cdots A_k \Rightarrow \delta^m A'_1 \cdots A'_n$$

如果以下条件之一成立：

a) $\ell < m$
b) $\ell = m$, $k = n+1$, and there exists some $i \in \{1, \ldots, k\}$ such that $A_i = (\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix})$, $A_j = A'_j$ for all $j < i$ and $A_j = A'_{j-1}$ for all $j > i$.
c) $\ell = m$, $k = n$, and there exists some $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ such that $A_j = A'_j$ for all $j \neq i, i+1$ and $A_iA_{i+1} \Rightarrow A'_iA'_{i+1}$.

根据该关系，(Wds(β) $\Rightarrow$) 成为一个偏序集。

5. The Left Canonical Form

5.1. 左规范形的定义。 本节将辫子 $\beta \in B_n$ 的左规范形 LCF(β) 定义为偏序集 (Wds(β) $\Rightarrow$) 中的最大元。

徐提出的左规范形可用于解决3股辫的字问题 [25], Kang、Ko 和 Lee 提出的左规范形可用于解决4股辫的字问题 [15], 而 Birman、Ko、Lee 提出的左规范形则适用于一般的n股辫 [3]。也就是说， $\beta = \beta'$ 当且仅当 LCF(β) =LCF(β')。

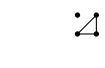
我们首先引入 inf(β)，sup(β) $\ell(\beta)$，因为左规范形 LCF(β) 将被定义为 Wds(β) 中唯一满足以下条件的元素

(1) 同时达到 inf(β) 和 sup(β)，且 (2) 在偏序集 (Wds(β) $\Rightarrow$) 中为极大元。

定义 5.1. 对于 $\beta \in B_n$，定义

$$\begin{aligned} \inf(\beta) &:= \max\{r \in \mathbb{Z} \mid \delta^r \leq \beta\}, \\ \sup(\beta) &:= \min\{s \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq \delta^s\}, \\ \ell(\beta) &:= \sup(\beta) - \inf(\beta). \end{aligned}$$

这里， ℓ(β) 称为典范长度，它不同于 $||\beta||$，后者是以带生成元表示的通常最小字长。例如， $\ell(\ ) = 1$ 且



$||(\ )|| = ||a_2a_1|| = 2.$

利用这些定义，我们可以引入左规范形。

定理 5.2. [25, 15, 3] 对于任意 n-辫子 β，存在唯一的 $r \in \mathbb{Z}$、唯一的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及唯一的规范因子 $A_1, \ldots, A_k \in \mathtt{CnFct}(B_n)\backslash\{e, \delta\}$，使得

- $\beta = \delta^r A_1 A_2 \cdots A_k$ 作为 B_n 中的辫元素，且
- 任意连续的数对 $A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k$ 都是最大左加权的。

此外， r 和 k 满足

$$\inf(\beta) = r, \quad \sup(\beta) = r + k, \quad \textit{and} \quad \ell(\beta) = k.$$

β 的唯一分解 $\delta^r A_1 A_2 \cdots A_k$ 称为 β 的左规范形，记作左规范形(β)。

注 5.3. 左规范形不是共轭不变量。参见例5.6。

我们以证明定理 3.4 的“若”部分来结束本节。

命题 5.4。 设 $A, B \in \mathtt{CnFct}(B_n)$。若存在 $Q \in \mathtt{CnFct}(B_n)$使得 $AQ = B$，则 凸包(A) $\subset$ 凸包(B)。

证明。 假设典范因子 A, B, Q 满足 $AQ = B$。若配对 (A, Q) 满足定义 3.11 中的所有条件，从而有 $AQ = A \diamond Q$，则根据定义 3.10 上述性质 (c)，可得凸包(A) $\subset$凸包(B)。

如果 $(A,\ Q)$ 不满足 $\diamond$ 定义 3.11 中的条件，那么 LCF(AQ) 的典范长度为 $\ell(AQ) = 2$。然而，由于 LCF(AQ) =LCF$(B) = B$，典范长度 $\ell(AQ) = \ell(B) = 1$，这与上述结论矛盾。□

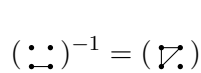
5.2. **左规范形算法**。 本节将回顾 Kang、Ko 和 Lee 针对 [15] 4-辫所提出的左规范形算法。该算法可以推广到一般的 n-辫 [3]。这是一个多项式时间算法，可以为辫子词 β给出唯一的左规范形。

设 $\beta \in B_4$ 为一个辫子群元素。假设 β 由带生成元中的一个正辫子词表示； $\beta = A_1 A_2 \cdots A_k \in B_4^+$。注意，$A_i \in$ BGen$(B_4) \subset$ CnFct(B_4)，因此 $A_i \in$ CnFct(B_4)。按照以下规则改变 β 的复合。

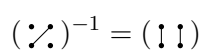
a) 如果对于某个 i， $A_i =$( )，则从词 $A_1 \cdots A_k$ 中删除 A_i。 b) 将 $A_i A_{i+1}$ 替换为 $A_i' A_{i+1}'$ ，使得 $A_i A_{i+1} \Rightarrow A_i' A_{i+1}'$ （如表1所列）。

重复应用 (a) 和 (b)，直到偏序无法再提高。所得的词即为定理 5.2 中定义的左规范形 LCF(β)。我们指出，所得的词 LCF(β) 不依赖于应用 (a) 和 (b) 的方式。可以从提高辫子词中任意一对 $(A_i,\ A_{i+1})$ 的偏序开始。

如果 β 不为正（$\beta \notin B_4^+$），我们就去掉负指数项。设 $\beta = A_1^{\epsilon_1} A_2^{\epsilon^2} \cdots A_k^{\epsilon_k}$，其中 $A_i \in$CnFct(B_4) 且 $\epsilon_i = \pm 1$。设对于某个 i， $\epsilon_i = -1$ 。那么，将 A_i^{-1} 替换为 $A_i' \delta^{-1}$ ，其中 $A_i' \in$CnFct(B_4) 是某个典范因子。经过旋转，我们有：



$$(\ )^{-1} = (\ )\delta^{-1}$$



$$(\ )^{-1} = (\ )\delta^{-1}$$

多次应用规则 $A_i' \delta^{-1} = \delta^{-1} \tau^{-1}(A_i')$，即可将 δ^{-1} 移到词的开头。重复这一过程，直到所有带负指数的因子都处理完毕。这样便得到一个词 $\delta^{-r} P$，其中某个 $r \in \mathbb{N}$ 和正词 $P \in B_4^+$ 都由带生成元构成。最后，我们对正词 P 应用上述算法，得到 LCF(β)。

例5.5. 我们将使用图示左规范形算法来求 LCF(β)，其中

$$\begin{aligned}\beta &= b_2a_1b_1a_4a_2\\ &= (\;)(\;)(\;)(\;)(\;)\\ &= A_1A_2A_3A_4A_5\end{aligned}$$

在带生成元中。我们将考察每一对（A_i， A_{i+1}），以确定能否利用算法的 (b) 部分增加偏序。

$\beta = (\;)(\;)(\;)(\;)(\;)$ 高亮 A_4

$= (\;)(\;)(\;)(\;)$ 增加偏序

$= (\;)(\;)(\;)$ 增加偏序（见例2.16）

$= (\;)(\;)(\;)$ Apply $A_i(\;) \Rightarrow (\;)\tau(A_i)$

$= (\;)(\;)(\;)$ 高亮 A_2'

$= (\;)(\;)$ 增加偏序

因此，

$$\texttt{LCF}(\beta) = (\;)(\;).$$

注意，先考虑哪一对（A_i， A_{i+1}）并不重要。

例5.6. 考虑由 4-辫表示的纽结 7_2

$$\beta = a_1a_1a_1a_2a_1^{-1}a_2a_3a_2^{-1}a_3.$$

使用 LCF 算法，我们得到

$$\texttt{LCF}(\beta) = \delta^{-1}a_4a_4a_4a_1b_2a_2a_3a_3.$$

纽结 7_2 是强拟正的，因为它可以表示为另一个强拟正的辫子 $\beta' = a_1a_1b_2b_1a_3$ 。我们可以观察到 LCF(β') $= \beta'$。在这个例子中， β 和 β' 互为共轭，但 LCF(β) $\neq$LCF(β')。

5.3. **超峰集与左规范形**。 本节回顾超峰集的定义。超峰集是辫子的共轭类不变量。我们还在命题5.9和定理5.10中给出超峰集的重要性质。关于使用带生成元解决共轭问题， B_3 徐 [25], 针对 B_4 给出了方法，Kang、Ko 和 Lee [15], 针对 B_n 给出了方法，而 Birman、Ko 和 Lee [3]针对 B_n 给出了方法。

定义5.7。 对于 $[\beta]$ $\beta \in B_n$ 的共轭类，我们定义：

$$\inf[\beta] := \max\{\inf(\beta') \mid \beta' \text{ is conjugate to } \beta\} \tag{5.1}$$
$$\sup[\beta] := \min\{\sup(\beta') \mid \beta' \text{ is conjugate to } \beta\}$$

定义 5.8。辫子 β的超峰集记作 SSS(β)，是 β 的所有共轭 β' 中典范长度 ℓ (β') 最小的那些共轭的集合。 β的所有共轭。

在 [15, 推论 4.6] 中已证明，inf$[\beta]$ 和 sup$[\beta]$ 可以由同一个元素同时达到。由于典范长度 $\ell(\beta)$ =sup(β) –inf(β)，我们得到如下结论：

命题5.9。 任何超上确界元 $\beta' \in$SSS(β) 都实现 下确界$[\beta]$和 上确界$[\beta]$。即 下确界$[\beta]$ = 下确界(β') 以及 上确界$[\beta]$ = 上确界(β')。

Elrifai 和 Morton 证明了一个重要事实：两个辫子共轭，当且仅当它们的超峰集相同，也当且仅当它们的超峰集相交 [7, 9]。

设 W:=LCF(β) $= \delta^r A_1 A_2 \cdots A_k$是 $\beta \in B_n$的左规范形。设 τ 是由 B_n 定义的内自同构

$$\tau(\beta) = \delta^{-1}\beta\delta.$$

从非交叉分划图的角度看， τ 将典范因子图 $2\pi/n$ 逆时针旋转。将词 W 的循环 $c(W)$和反循环$d(W)$定义如下：

$$c(W) := \delta^r A_2 \cdots A_k \tau^{-r}(A_1)$$
$$d(W) := \delta^r \tau^r(A_k) A_1 \cdots A_{k-1}$$

一般来说， $\beta \in B_n$ 不一定是 SSS(β) 的元素。下一个定理刻画了 SSS(β) 的元素。

定理5.10 (Kang、Ko、Lee [15] 和 Birman、Ko、Lee [3])。 设 $\beta \in B_n$是一个 n-辫子，其典范长度为 $\ell(\beta) \geq 3$。设 $W =$ 左规范形(β)。若 $\ell(W) = \ell(c(W)) = \ell(d(W))$，则 β是超峰集SSS(β)的一个元素。

这是解决共轭问题的一个关键定理。关于共轭问题的解，读者可参阅 [3, 章节 5]。

6. Detection of SQP and ASQP braids

在本章节中，我们探讨（几乎）强拟正辫子的左规范形。

定义 6.1. 若辫子 β 可表示为由若干带生成元的正幂相乘而成的词 W，则称其为强拟正辫 （SQP）。若链环 $\mathcal{K}$ 可由强拟正辫表示，则称其为强拟正链环 。

定义 6.2. 若辫子 β 可表示为由带生成元及其逆元构成的词 W，且所用逆元至多一个，则称其为几乎强拟正辫子 （ASQP）。若链环 $\mathcal{K}$可由几乎强拟正辫子表示，则称其为几乎强拟正链环 。

此外，如果一个辫子 β 是严格几乎强拟正辫，那么β 几乎强拟正，但不是强拟正。若一个链环 $\mathcal{K}$严格几乎强拟正，则 $\mathcal{K}$ 几乎强拟正，但不是强拟正。

我们关于 SQP 辫和 ASQP 辫有四个结果。

定理 6.3. 设 $n \geq 3$。一个 n-辫子 $\beta \in B_n$ 是强拟正的，当且仅当$\inf(\beta) \geq 0$。

证明。 ($\Rightarrow$) 设 $\beta \in B_n$ 是强拟正的。根据定义， β 可以表示为由 B_n的带生成元构成的正词 W。对 W 应用左规范形算法（第 5.2 节），我们得到 $\inf(\beta) \geq 0$。

($\Leftarrow$) 假设 β 的 $\inf(\beta)$ 为 ≥ 0。那么，

$$\mathtt{LCF}(\beta) = \delta^r A_1 A_2 \cdots A_k$$

其中 $r \geq 0$, $A_i \in \mathsf{CnFct}(B_n)$，且 $R(A_i) \cap S(A_{i+1}) = \emptyset$。由于 $\mathsf{CnFct}(B_n) \subset B_n^+$，每个 A_i 都是由带生成元构成的正词。因此， $\beta \in B_n^+$，尤其是 β 是强拟正的。□

下面的推论由关于超峰集的命题5.9得出。

推论 6.4. 辫子 $\beta \in B_n$ 与某个强拟正辫共轭，当且仅当 $\mathtt{SSS}(\beta)$ 中的每个元素 $\beta' \in$ 都满足 $\inf(\beta') \geq 0$。

在例5.6中，我们给出了该纽结的一个辫表示 $\beta \in B_4$ ，它并非强拟正，但与一个强拟正辫共轭。下一个定理是定理 6.3 在几乎强拟正情形下的对应版本。

定理 6.5。 设 $\beta \in B_n$ 满足 $n \geq 3$。若 β 几乎强拟正，则 $\inf(\beta) \geq -1$。此外，若 β 严格几乎强拟正，则$\inf(\beta) = -1$。

证明。 设 $\beta \in B_n$ 是几乎强拟正的。如果 β 是强拟正的，我们可以应用定理 6.3。因此，我们将假设 β是严格几乎强拟正的。设 β 可以表示为一个词 W，其中恰好有一个负带。在左规范形算法中，一个负带贡献 δ^{-1}。这意味着 $\inf(W) \geq -1$。另一方面，由于 β 不是强拟正的，根据定理 6.3，我们有 $\inf(\beta) < 0$ 。因此，我们得到 $\inf(W) = -1$。由于 $\mathsf{LCF}(\beta) = \mathsf{LCF}(W)$，我们得到 $\inf(\beta) = -1$。□

定理 6.3 和 6.5以及推论 6.4给出如下结论:

推论6.6。 如果 $\beta \in B_n$ 与 $n \geq 3$ 共轭于一个*ASQP*（分别为严格几乎强拟正）辫子，则每个元素 $\beta' \in \mathtt{SSS}(\beta)$ 都具有$\inf(\beta') \geq -1$（分别为$\inf(\beta') = -1$）。

对于定理 6.5 和推论6.6，逆向命题一般并不成立。见下文的例 7.4。不过，如果增加一个附加条件，推论6.6的逆命题成立。见下文的定理 9.4。

7. The Bennequin Inequality and 左规范形(β)

我们定义三个负带数 nb(β)，nb$[\beta]$，nb(K)如下:

定义 7.1. 对于辫子 $\beta \in B_n$，负带的最小数量 nb(β) 定义如下:

$$\mathtt{nb}(\beta) = \min\left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} \beta \text{ is represented by a word in band} \\ \text{generators containing } k \text{ negative bands} \end{array} \right\}$$

类似地，对于 β 的共轭类 $[\beta]$，我们定义:

$$\mathtt{nb}[\beta] = \min\{\mathtt{nb}(\beta') \mid \beta' \text{ is conjugate to } \beta \}$$

对于纽结或链环 $K \subset S^3$，我们定义:

$$\mathtt{nb}(K) = \min\{\mathtt{nb}(\beta) \mid \beta \text{ is a braid representative of } K \}$$

对于纽结 K的一个辫表示 β，

$$0 \leq \mathtt{nb}(K) \leq \mathtt{nb}[\beta] \leq \mathtt{nb}(\beta).$$

我们可以用负带数来刻画 SQP 辫和 ASQP 辫。

- 辫子 β 是 SQP，当且仅当 nb(β) $= 0$。
- β 是 ASQP，当且仅当 nb(β) ≤ 1。
- β 是严格几乎强拟正，当且仅当 nb(β) $= 1$。

不变量 nb(K) 与 Bennequin 型不等式密切相关。Bennequin [2]证明，对于给定结型 K，其最大自链接数 SL(K) 不超过 $-\chi(K) = 2g(K) - 1$，其中 $g(K)$ 是该纽结的亏格。

$$\mathtt{SL}(K) \leq 2g(K) - 1$$

Bennequin 不等式已推广到同痕不变量，包括切片亏格 $g_4(K)$、Ozsv´ath-Szab´o 的 tau 不变量 $\tau(K)$ [21] 以及 Rasmussen 的 s 不变量 $s(K)$ [22]，如下所示。

$$\mathtt{SL}(K) \leq 2\tau(K) - 1 \leq 2g_4(K) - 1 \leq 2g(K) - 1$$

$$\mathtt{SL}(K) \leq s(K) - 1 \leq 2g_4(K) - 1 \leq 2g(K) - 1$$

Ito 和 Kawamuro [13] 定义了（原始）Bennequin 不等式的亏格差 $\mathcal{D}(K)$

$$\mathcal{D}(K) = \frac{1}{2}(2g(K) - 1 - \mathtt{SL}(K)).$$

已证明 $\mathcal{D}(K) \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{D}(K) \leq \mathrm{nb}(K)$。事实上，猜想认为 $\mathcal{D}(K) = \mathrm{nb}(K)$。

我们将根据左规范形研究负带数 $\mathrm{nb}(\beta)$、$\mathrm{nb}[\beta]$ 和 $\mathrm{nb}(K)$。

引理 7.2。 我们有 $\mathtt{nb}(\beta) \geq 1$ 当且仅当 $\inf(\beta) < 0$。（等价地，$\mathtt{nb}(\beta) = 0$ 当且仅当 $\inf(\beta) \geq 0$.）

证明。令 $\beta \in B_n$ 满足 $n \geq 3$，并设 $\mathrm{nb}(\beta) \geq 1$。注意到，当且仅当 β 不是强拟正时，$\mathrm{nb}(\beta) \geq 1$。因此，根据定理 6.3，$\mathrm{nb}(\beta) \geq 1$ 等价于 $\inf(\beta) < 0$。□

定理 7.3。 令 $\beta \in B_n$ 满足 $n \geq 3$，且 $\mathtt{nb}(\beta) \geq 1$。

$$0 < -\inf(\beta) = |\inf(\beta)| \leq \mathtt{nb}(\beta).$$

证明。第一个不等式由引理 7.2 得出。

假设 β 可表示为带生成元中的一个词 W，其中 $\mathrm{nb}(\beta)(\geq 1)$ 个负带。对 W 应用左规范形算法（第 5.2 节）。该算法首先将每个负带替换为某个典范因子 $A \in \mathrm{CnFct}(B_n)$ 的一个 $A\delta^{-1}$，然后将 δ^{-1} 向左移动。在移动过程中，如果发生消去，某些 δ^{-1} 可能会消失。因此，我们得到 $-\mathrm{nb}(\beta) \leq \inf(\beta)$。□

我们研究命题 8.6 中定理 7.3 的不等式 $-\mathrm{nb}(\beta) \leq \inf(\beta)$ 何时成为严格不等式。

例 7.4. 我们给出一个定理 7.3 中严格不等式 $-\mathrm{nb}(\beta) < \inf(\beta)$ 成立的例子。考虑一个 4-辫 $\beta := a_3a_1^{-1}a_2^{-1}b_2b_1a_1b_2b_1a_3$。运行 LCF 算法（第 5.2 节）后，我们得到

$$\mathtt{LCF}(\beta) = \delta^{-1}a_2a_3b_2b_1a_1b_2b_1a_3,$$

即，$\inf(\beta) = -1$. 显然，$\mathrm{nb}(\beta) \leq 2$. 下面我们将证明 $\mathrm{nb}(\beta) = 2$。



FIGURE 12. 辫子 $\beta := a_3a_1^{-1}a_2^{-1}b_2b_1a_1b_2b_1a_3$。

为此，我们首先证明 β 的拓扑结类型的辫指标为 4。为此，我们将使用 Morton-Franks-Williams不等式[20, 8]。设 K 为辫子闭合 β的拓扑类型。设 i 为 K的辫指标。我们将证明 $i(K) = 4$，即， β 实现了 K的辫指标。设 E 为 a的 HOMFLY-PT多项式中的最高次幂， e 为最低次幂。那么，Morton-Franks-Williams不等式表明

$$i \geq \frac{1}{2}(E - e) + 1.$$

Mathematica 的纽结理论软件包计算出 K 的 HOMFLY-PT 多项式为

$$-a^{-6}+a^{-4}+a^{-2}+z^2a^{-8}-3z^2a^{-6}+4z^2a^{-4}-2z^4a^{-6}+3z^4a^{-4}-z^4a^{-2}+z^5a^{-4}.$$

在上述多项式中，我们有 $E = -2$ 和 $e = -8$。因此，
Morton-Franks-Williams不等式告诉我们

$$i \geq 4.$$

因此， K 的辫指标为 4。现在我们可以继续证明我们的结论。

断言： $\mathtt{nb}(\beta) \geq 2$。

证明。 首先，我们将证明 $g(K) \leq 3$，其中 $g(K)$ 是 K 的亏格。考虑一个来自辫子 β 的 Bennequin曲面 Σ_W；该辫子由词 $W = a_3a_1^{-1}a_2^{-1}b_2b_1a_1b_2b_1a_3$ 表示， K 由四个圆盘通过九条扭带连接而成。



FIGURE 13. Bennequin曲面 Σ_W

因此，

$$\chi(K) \geq \chi(\Sigma_W) = 4 - 9 = -5.$$

利用对任意纽结 K 都有 $\chi(K) = 1-2g(K)$ 这一事实，我们得到 $g(K) \leq 3$。

接下来，我们将证明 $g(K) \geq 3$。回顾一下，

$$\text{degree}(\Delta_K(t)) \leq 2g(K)$$

其中， $\Delta_K(t)$ 是纽结 [23] 的亚历山大多项式。使用 Mathematica 的纽结理论软件包， K 的亚历山大多项式可表示为

by

$$1 - 6t + 17t^2 - 23t^3 + 17t^4 - 6t^5 + t^6.$$

该多项式的次数为 6。因此， $g(K) \geq 3$。

我们已经证明了 $g(K) = 3$。因此， $\chi(K) = -5$。回顾 Bennequin 不等式 [2]

$$\mathtt{SL}(K) \leq -\chi(K)$$

其中，SL(K) 是链环类型 K 的最大自链接数。根据广义Jones猜想的正确性 [6, 16, 18], SL(K) $= -4 + p - n$。这里， p 是实现最小辫指数 4 的辫表示中的正带数量，而 n 是负带数量。在我们的例子中，SL(K) $= -4 + 7 - 2 = 1$。注意以下不等式:

$$\mathtt{SL}(K) \leq -\chi(K) \leq -4 + p + n$$

从两边分别减去 SL(K) $= -4 + p - n$，得到

$$0 \leq -\chi(K) - \mathtt{SL}(K) \leq 2n$$

我们有 $\chi(K) = -5$ 且 SL(K) $= 1$。因此,

$$0 \leq 5 - 1 \leq 2n$$

因此， $2 \leq n$。这表明 β 必须至少包含 2 个负带，即 nb(β) ≥ 2。□

我们可以得出 nb(β) $= 2$。

注意，nb(β) $= 2$ 意味着 β 不是 ASQP。此外，计算 LCF(β) 的循环操作和逆循环操作后，我们可以应用定理2.27来验证$\beta \in$ SSS(β)。我们还得知 inf(β) $= -1$，这意味着推论6.6的逆命题一般不成立。

8. The Negative Band Number and Reduction of 左规范形(β)

Kang、Ko 和 Lee [15] 引入了辫子的约化操作，以求解 4-辫的最短词问题（见定理 9.1）。我们首先回顾约化操作，然后用它来研究负带数 nb(β) 与左规范形 LCF(β) 之间的关系。

8.1. **约化操作回顾**。

定义 8.1。 给定一个词 $W = \delta^r W_1 W_2 \cdots W_s$，其满足 $\delta^{-1} < W_i < \delta$ 和 $W_i \neq e$，定义 red(W) 为:

(1) if $r \geq 0$ or $W_i < e$ for all $i = 1, \ldots, s$, then $\mathtt{red}(W) = W$;

(2) 否则（即 $r<0$ 并且存在某个 i，使得 $W_i \in$ CnFct(B_4)），选择一个词 $W_k \in$ CnFct(B_4)，其词长 $||W_k||$ 在所有 $W_1, \ldots, W_k$ 中最大。

由推论 3.19，存在 $V_k \in$ CnFct(B_4)，使得 $W_k \diamond V_k = W_k V_k = \delta$。令 $W_k' = (V_k)^{-1}$. 我们定义

$$\mathtt{red}(W) = \delta^{r+1}\tau(W_1)\cdots\tau(W_{k-1})W_k'W_{k+1}\cdots W_s,$$

定义 Red(W) := red$^{|r|}$(W)，即重复上述算法，直到 δ 的指数为非负数。

例 8.2. 本例将说明如何计算 Red(W)，其中

$$\begin{aligned} W &= \delta^{-2}(a_3a_2)(a_4a_3)a_4b_1b_2 \\ &= (\ \square\ )^{-2}(\ \diagdown\!\!\!\!\diagdown\ )(\ \diagup\!\!\!\!\diagup\ )(\ \vdots\ )(\ \diagup\!\!\!\!\diagup\ )(\ \diagdown\!\!\!\!\diagdown\ ) \\ &= \delta^{-2}W_1W_2W_3W_4W_5 \end{aligned}$$

这里，$r<0$，因此我们将继续执行算法中的选项 (2)。我们将在所有 W_i 中选择词长最大的词 $W_2 = (a_4a_3)$。然后，

$$\begin{aligned} W_2' &= \delta^{-1}W_2 \\ &= \delta^{-1}(a_4a_3) \\ &= (a_4a_3a_2)^{-1}(a_4a_3) \\ &= a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_4a_3 \\ &= a_2^{-1} \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathtt{red}(W) &= \delta^{-1}\tau(W_1)W_2'W_3W_4W_5 \\ &= \delta^{-1}(a_4a_3)a_2^{-1}a_4b_1b_2 \end{aligned}$$

我们将再次重复这一过程。我们再次在所有 W_i中选择长度最大的词 (a_4a_3)。然后，

$$\mathtt{Red}(W) = \mathtt{red}^2(W) = a_2^{-1}a_2^{-1}a_4b_1b_2.$$

我们注意到，red(W) 和 Red(W) 都取决于选择。然而，下一个引理表明，词长 $||$Red(W))$||$ 是唯一确定的。

引理 8.3。(Kang、Ko、Lee [15, 引理 5。1]) 设 $\beta \in B_n$ 是一个 n-辫子。对于 β 的任意词表示 W，左规范形的每个约化词都使词长达到最小；即，

$$||\mathtt{Red}(\mathtt{LCF}(\beta))|| \leq ||W||.$$

关于负带数 nb(β) 和最短词，我们观察到以下事实：

引理 8.4。 设 W 是表示 $\beta \in B_n$ 的一个词。当且仅当 W 给出了表示 β 的最短词时，负带数 $\mathtt{nb}(\beta)$ 由 W 实现。

证明。 设 W 是表示 β 的最短词，并设 p （分别为 n）是词 W中的正带（分别为负带）数量。假设辫子词 W' 表示 β ，且实现了 nb(β)。设 p' （分别为 n'）是词 W'中的正带（分别为负带）数量。于是得到

$$n' = \mathtt{nb}(\beta) \leq n.$$

由于 W 是最短词,

$$p' + n' = ||W'|| \geq ||W|| = p + n.$$

由于 W 和 W' 属于同一个共轭类 $[\beta]$，它们具有相同的绕度。

$$p' - n' = \mathrm{writhe}(W') = \mathrm{writhe}(W) = p - n$$

因此， $n' \geq n$。

上述两个段落给出 $n = n' =$nb(β)。 □

作为上述两个引理的推论，我们得到以下结论:

推论 8.5. 每个约化词$\mathtt{Red}$(左规范形(β)) 都达到 $\mathtt{nb}(\beta)$。

8.2. **nb() 的界 关于** inf(β) **和** sup(β)。 经过上述准备，我们现在可以讨论 nb(β) 与 inf(β) 之间的关系。首先讨论定理 7.3 中的不等式 $-$nb(β) $\leq$ inf(β) 何时成为严格不等式。

命题 8.6. 设 $\beta \in B_n$ 满足 $n \geq 3$ ，且 $\mathtt{nb}(\beta) \geq 1$。若存在一个表示 β 的最短词，其中包含某个典范因子 $A \in \mathtt{CnFct}(B_n)$ 的 A^{-1} ，且该典范因子的词长为 $||A|| \geq 2$ ，则可得严格不等式

$$-\mathtt{nb}(\beta) < \inf(\beta).$$

证明。设 W 是表示 β 且包含 A^{-1} 的最短词，其中 A^{-1} 是词长为 $||A|| \geq 2$ 的某个典范因子 $A \in$ CnFct(B_n)。根据引理 8.4，W 实现了负带数 nb(β)，而 A^{-1} 对数值 nb(β) 的贡献为 $||A|| \geq 2$。

注意， W 是一个非正词。根据针对非正词的 LCF 算法（第 5.2 节），每个指数为负的典范因子都会向左规范形贡献一个 δ^{-1} 。特别地，因子 $A^{-1} \in W$ 对 LCF(β) 的贡献为 δ^{-1} （如果发生某种消去，则为 $\delta^0 = e$ ）。换言之， A^{-1} 对 inf(β) 的贡献为 -1 （如果发生某种消去，则为 0）。

比较 A^{-1} 对 nb(β) 和 inf(β) 的贡献，我们得到所需的严格不等式。□

在下一个定理中，我们利用约化操作，将定理 7.3 中的不等式 $-\mathrm{nb}(\beta) \leq \inf(\beta)$ 对 3 股辫改进为等式：

定理 8.7. 设 β 是一个 n 股辫。若 $\inf(\beta) < 0$ 则

$$\mathtt{nb}(\beta) \leq (n-2)|\inf(\beta)| - \min\{0, \sup(\beta)\}.$$

此外，当 $n = 3$ 时等式成立，并且有

$$\mathtt{nb}(\beta) = |\inf(\beta)| - \min\{0, \sup(\beta)\}.$$

证明。回忆定义 5.1，并令 $r := -\inf(\beta) = |\inf(\beta)| > 0$ 且 $k := \ell(\beta) \geq 0$。我们有

$$\sup(\beta) = -r + k.$$

定理 5.2 表明，对于某些 $A_1, \cdots, A_k \in \mathrm{CnFct}(B_n) \setminus \{e, \delta\}$，我们有 $\mathrm{LCF}(\beta) = \delta^{-r} A_1 \cdots A_k$.。根据推论 3.19，对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, k$，存在一个规范因子 $A_i' \in \mathrm{CnFct}(B_n) \setminus \{e, \delta\}$，使得 $A_i A_i' = \delta$。

回顾内自同构 $\tau : B_n \to B_n$，其定义为 $\tau(\beta) = \delta^{-1}\beta\delta$。对于规范因子 $A \in \mathrm{CnFct}(B_n)$，$\tau(A)$ 是 A 的图示逆时针 $2\pi/n$ 旋转，而 $\tau(A^{-1}) = (\tau(A))^{-1}$。因此，$\tau$ 保持词长；

$$||\tau(A)|| = ||A|| = ||\tau(A^{-1})||.$$

情形 1： 假设 $-r + k \geq 0$。那么 $\min\{0, \sup(\beta')\} = 0$。我们对 $\mathrm{LCF}(\beta)$ 应用约化操作，并得到一个 $\mathrm{Red}(\mathrm{LCF}(\beta))$。根据定义 8.1，在 $\mathrm{LCF}(\beta)$ 中的规范因子 $A_1, \cdots, A_k$ 里，词长最大的那些因子，记为 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$，会被负字 $(A_{i_1}')^{-1}, \cdots, (A_{i_r}')^{-1}$ 替换，且允许通过 τ 旋转。$\mathrm{LCF}(\beta)$ 中其余的 $k - r$ 规范因子保持不变，且允许通过 τ 旋转。

由于 $\mathrm{CnFct}(B_n) \setminus \{e, \delta\}$ 中的每个典范因子的词长至多为 $n-2$，且 τ 保持典范因子及其逆元的词长不变，因此 $\mathrm{Red}(W)$ 中负带的数量至多为 $(n-2)r$。由此可得

$$\mathtt{nb}(\beta) \leq (n-2)r = -(n-2)\inf(\beta).$$

当 $n = 3$ 时，我们还可以进一步说明。每个典范因子都在

$$\mathtt{CnFct}(B_3) \setminus \{e, \delta\} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

中的词长恰好为 1。这意味着 $(A_{i_1}')^{-1}, \cdots, (A_{i_r}')^{-1}$ 分别恰好对应一个负带，因此我们得到

$$\mathtt{nb}(\beta) \leq r = -\inf(\beta).$$

另一方面，定理 7.3 给出 $-\mathrm{nb}(\beta') \leq \inf(\beta')$。因此，对于三辫，我们得到

$$-\mathtt{nb}(\beta) = \inf(\beta).$$

情形 2： 如果 $-r+k<0$ 我们有 $\min\{0,\sup(\beta)\}=\sup(\beta)$。约化操作给出：在旋转 τ后

$$\mathtt{Red}(\mathtt{LCF}(\beta))=\delta^{-r+k}\ (A_1')^{-1}\cdots(A_k')^{-1}.$$

回顾引理 8.3 和引理 8.4，它们指出 Red(左规范形(β)) 实现了负带数 nb(β)。因此，我们有

$$\mathtt{nb}(\beta)=||\delta||(r-k)+||A_1'||+\cdots+||A_k'||.$$

由于 δ的词长为 $||\delta||=n-1$ 和$||A_i'||\leq n-2$，我们得到 nb(β)的一个上界

$$\begin{aligned}\mathtt{nb}(\beta)&\leq(n-1)(r-k)+(n-2)k &(8.1)\\ &=(n-2)r+r-k &(8.2)\\ &=-(n-2)\inf(\beta)-\sup(\beta).\end{aligned}$$

对于三辫，由于 $||\delta||=2$ 和 $||A_i'||=1$，我们得到 nb(β)的一个显式公式

$$\mathtt{nb}(\beta)=2(r-k)+k=r-(-r+k)=-\inf(\beta)-\sup(\beta).$$

□

9. Relations Between inf(β) and nb(β) for $\beta\in$SSS(β)

Kang、Ko、Lee [15] 给出了 4股辫最短词问题的解法。该结果是徐对 3 股辫最短词问题的解法 [25] 的推广。

定理 9.1. (Kang、Ko、Lee [15, 定理 5.2]) 设有一个4-辫子 β，令 β'为SSS(β)中的一个元素。那么Red(左规范形(β')) 给出了 β所有共轭中的最短词。

本节探讨超上确界元 $\beta\in$SSS(β) 的 inf(β) 与 nb(β) 之间的关系。

回顾一下，nb$[\beta]=\min\{$nb(β') $\mid\beta'$ 在定义 7.1 中与 $\beta\}$ 共轭，是 β共轭类的负带最小数。在下一个引理中，我们将证明每个最短词都实现 nb$[\beta]$。

引理 9.2。令 $\beta\in B_n$。当且仅当 W 是 β 的所有共轭中的最短词时，W 中负带的数量为 nb$[\beta]$。

证明。引理 8.4 的证明中的类似论证适用。 □

下一个引理断言，对于 3 股辫和 4 股辫，超上确界元素会实现 nb$[\beta]$ 。

引理 9.3. 设 β 是一个 n-辫子，其中 $n = 3$ 或 4。对于每个超上确界元 $\beta' \in \mathtt{SSS}(\beta)$，都有 $\mathtt{nb}[\beta] = \mathtt{nb}(\beta')$。此外，约化词 $\mathtt{Red}$(左规范形$(\beta'))$ 包含$\mathtt{nb}(\beta')$ 个负带。

证明。 设 β' 是 SSS(β) 中的一个超上确界元。由定理 9.1 和引理 9.2，约化词 Red(LCF(β')) 含有 nb$[\beta]$ 个负带。

由于 Red(LCF(β')) $= \beta'$ 作为辫子，推论 8.5 表明，Red(LCF(β')) 含有 nb(β') 个负带。

因此，nb$[\beta]$ =nb(β')。 □

下一个定理表明，在严格几乎强拟正的情形下，只要添加一个附加条件，推论 6.6 的逆向结论也成立。

定理 9.4。 辫子 $\beta \in B_n$ 具有 $n \leq 4$ （见下文注*9.5*）当且仅当每个元素 $\beta' \in \mathtt{SSS}$（β） 都满足 inf（β'） $= -1$ ，且左规范形（β'） 包含一个词长为 $n-2$ 的典范因子。

注9.5。 在下面的证明中，我们指出，对辫指标 $n = 3,\ 4$ 的限制仅在“仅当”（$\Rightarrow$）方向中是必要的，因为在该方向中我们使用了引理 9.3，而截至目前该引理仅对 $n = 3,\ 4$ 得到了证明。“如果”（$\Leftarrow$）方向的表述对一般的 n 都成立。

证明。 （$\Rightarrow$）设 β 共轭于一个严格几乎强拟正辫。根据推论6.6，每个超上确界元 $\beta' \in$SSS(β) 都满足 inf(β') $= -1$。记 LCF(β') $= \delta^{-1}A_1 \cdots A_k$。设 A_i 在 $A_1,\ \cdots,\ A_k$ 中达到最大的词长。令 $B_i \in$CnFct(B_4) $\setminus \{e, \delta\}$ 为满足 $A_i \diamond B_i = A_i B_i = \delta$ 的典范因子，其存在性由推论 3.19 保证。我们相对于 A_i 应用约化操作（定义 8.1）。得到

$$\begin{aligned} \mathtt{Red}(\mathtt{LCF}(\beta')) &= \delta^{-1+1}\tau(A_1)\cdots\tau(A_{i-1})(B_i)^{-1}A_{i+1}\cdots A_k \qquad (9.1)\\ &= \tau(A_1)\cdots\tau(A_{i-1})(B_i)^{-1}A_{i+1}\cdots A_k. \end{aligned}$$

根据引理 8.3，Red(LCF(β')) 给出了表示 β' 的最短词。根据引理 9.3，词 Red(LCF(β')) 实现了数值 nb(β') $=$ nb$[\beta]$。由于 β 与一个严格 ASQP 辫共轭，nb$[\beta] = 1$。约化词 Red(LCF(β')) 中的负指数项 $(B_i)^{-1}$ 的词长为$||(B_i)^{-1}|| = ||B_i|| = 1$ ，并构成该 ASQP 辫中唯一的负带。

带生成元 $\mathcal{B}_i$ 的图是连接D_n顶点的边 B_i 。如果 $\mathcal{B}_i$ 连接相邻顶点，则图 $\mathcal{A}_i$ 只有一个连通分支，且 $\mathcal{A}_i$ 是一个 $n-1$ 边形。否则， $\mathcal{A}_i$ 有两个分支，即一个k边形和一个 $n-k$边形，其中某个 k 通过边 $\mathcal{B}_i$连接。对于这两种情况， A_i 的词长均为 $||A_i|| = n-2$ （见图14）。

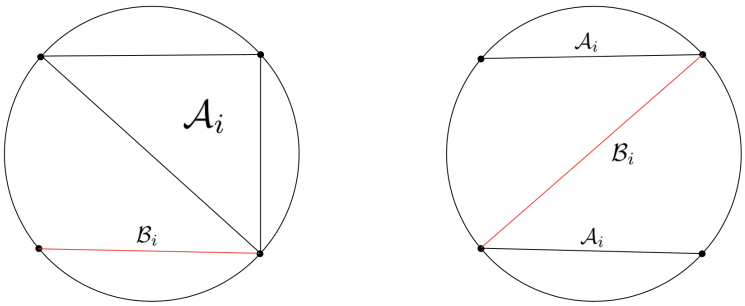


FIGURE 14. 左图中， $A_i = a_3a_2$ 有一个连通分支。右图中， $A_i = a_1a_3$ 有两个分支。两种情况下， A_i 的词长都是$||A_i|| = n - 2 = 2$。

（⇐）设 $\beta \in B_n$ ，并且每个元素 $\beta' \in$ SSS(β)都满足 inf(β') $= -1$，而 LCF(β') $= \delta^{-1}A_1 \cdots A_k$包含某个因子 $A_i \in$ CnFct(B_n)，其词长为 $||A_i|| = n-2$ ，其中 i。根据推论 3.19，存在一个典范因子 $B_i \in$ CnFct(B_n) $\setminus \{e, \delta\}$ ，使得 $A_i \diamond B_i = A_iB_i = \delta$。

断言 9.6。 我们断言 $||B_i|| = 1$.

断言的证明。（情形 1）如果图 $\mathcal{A}_i$ 由单个连通分支组成，那么它是一个（$n-1$）边形。由于 $A_i \diamond B_i = \delta$，因子 B_i 是一个单个带生成元。因此 $||B_i|| = 1$。

（情形 2）如果 $\mathcal{A}_i$ 有两个连通分支，分别为一个 x-边形 $\mathcal{X}$和一个 y-边形$\mathcal{Y}$（即， $A_i = X \sqcup Y$），那么

$$n - 2 = ||A_i|| = ||X|| + ||Y|| = (x - 1) + (y - 1).$$

我们得到 $x+y = n$。由命题 3.14 可知， $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$是一个（$x+y$）-边形。另一方面， δ 是一个 n-边形。唯一的可能性是，图$\mathcal{B}_i$ 是 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$ 的相对边，因此 $\delta = A_i \diamond B_i = X \diamond (Y \diamond B_i)$ 。于是$||B_i|| = 1$。

（情形 3）假设图 $\mathcal{A}_i$ 由三个不相交多边形$\mathcal{X}$， $\mathcal{Y}$， $\mathcal{Z}$组成。设 $\mathcal{X}$有 x 条边， $\mathcal{Y}$有 y 条边， $\mathcal{Z}$有 z 条边。由于$||A_i|| = n-2$，根据 $\mathcal{X}$， $\mathcal{Y}$， $\mathcal{Z}$的不相交性，我们有 $n-2 =$ （$x-1$） + （y–1） + （$z-1$）。我们得到 $x+y+z = n+1$. 我们可以假设 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$彼此相对（参见定义 3.6），从而可以定义 $X*Y$。

对 $A = X \sqcup Y \sqcup Z$ 和 δ 应用推论 3.16。于是我们有$A \prec (X*Y)*Z \prec \delta$。由命题 3.14 可知，图 $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$是一个 ($x+y$) 边形，而 $(\mathcal{X}*\mathcal{Y})*\mathcal{Z}$是一个 ($x+y+z$) 边形。由于 $x+y+z = n+1$和δ 是一个 n 边形，因此 cvh($(\mathcal{X}*\mathcal{Y})*\mathcal{Z}$) $\subset$ cvh(δ) 不可能成立。因此， $\mathcal{A}_i$ 的分支不能超过两个。□

我们继续证明该定理。我们有

$$\texttt{Red}(\texttt{LCF}(\beta')) = \tau(A_1)\cdots\tau(A_{i-1})(B_i)^{-1}A_{i+1}\cdots A_k.$$

由于 $||B_i|| = 1$ 这表明 $\mathbf{nb}[\beta] \leq 1$。如果 $\mathbf{nb}[\beta] = 0$，那么 β 与一个 SQP 辫共轭。根据推论 6.4，我们得到 $\mathbf{inf}(\beta') = \mathbf{inf}[\beta] \geq 0$。这与我们的假设 $\mathbf{inf}(\beta') = -1$矛盾。因此，$\mathbf{nb}[\beta] = 1$。所以，$\beta$ 与一个严格几乎强拟正辫共轭。□

回顾定义 5.7 中 $\mathbf{inf}[\beta]$ 和 $\mathbf{sup}[\beta]$ 的定义，以及它们可由一个超上确界元同时达到。接下来的两个定理由命题5.9、定理 8.7 和引理 9.3 推出。

定理 9.7。设 β 是一个三辫，且 $\inf[\beta] < 0$。则

$$\mathbf{nb}[\beta] = |\inf[\beta]| - \min\{0, \sup[\beta]\}.$$

定理 9.8。设 K 是 S^3 中一个辫指数为 n 的纽结或链环。设 $\beta \in B_n$ 是 K 的一个辫表示。则有：

- 若 $\inf[\beta] \geq 0$，则 $\mathcal{D}(K) = \mathbf{nb}(K) = 0$。
- 若 $\inf[\beta] < 0$，则

$$|\inf[\beta]| \leq \mathbf{nb}[\beta] \leq (n-2)|\inf[\beta]| - \min\{0, \sup[\beta]\}.$$

10. Fractional Dehn Twist Coefficient

在本章节中，我们应用对偶 Garside 结构来计算辫子的分数 Dehn 扭转系数（记为 FDTC）。

FDTC 是一个取 $\mathbb{Q}$ 值的映射 $c\colon \mathrm{MCG}(S) \to \mathbb{Q}$，它来自曲面 S 的映射类群。定义见 Honda、Kazez 和 Mati´c 的论文 [14]。直观地说，这个不变量刻画了微分同胚 $\phi\colon S \to S$ 在边界分支附近具有多大程度的扭转。

我们将回顾 FDTC 的一些重要性质。

命题 10.1. [14], [12] 设 C 是 S 的一个边界分支，且$\phi \in \texttt{Aut}(S, \partial S)$。我们有：

- $c(\phi^n, C) = n \cdot c(\phi, C)$。
- $c(T_C, C) = 1$和 $c(\phi \circ T_C, C) = c(T_C \circ \phi, C) = 1 + c(\phi, C)$。
- $c(\phi, C) = c(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}, C)$ 对于任意 $\psi \in \texttt{Aut}(S, \partial S)$。

为了形式化相对于边界分支的扭转概念，有必要比较从边界分支上的同一点 $p \in C \subset \partial S$ 出发的两条弧 γ 和 η。非正式地说，当所选代表实现几何交数时，我们希望在弧上定义一种序，使得 $\gamma \leq \delta$ 如果 δ 偏向 γ 的右侧。

定义 10.2。 [14] 设 γ，$\eta \subset S$ 为两条不同的定向弧，它们从同一点 $p \in C \subset \partial S$出发。对 γ 和 η 进行同伦，使它们横截相交且交点数最少。考虑弧 $\dot{\gamma}$(0) 和$\dot{\eta}$(0)处的切向量。那么，如果定向基$< \dot{\eta}(0)\ \dot{\gamma}(0) >$ 与 S上的定向一致，则 η 位于 γ的右侧，记作 $\gamma \leq \eta$。等价地，我们转到˜普遍覆盖 S。由于我们已对 γ，η 进行同伦，使其在普遍覆盖中以最少交点相交，因此它们只会在 $\tilde{p}$处相交。如果 $\tilde{\eta}$ 的内部位于 $\tilde{\gamma}$右侧的区域内，则 η 位于γ 的右侧。

以下命题对于计算 FDTC 至关重要。

引理 10.3. [12] 令 $C \subset \partial S$ 为 S 的一个边界分支，且 $\phi \in \mathtt{Aut}(S, \partial S)$。若存在一条本质弧 $\gamma \subset S$，其起点位于 C，使得

$$T^m(\gamma) \leq \phi^N(\gamma) \leq T^M(\gamma)$$

对于某些 m、N、$M \in \mathbb{Z}$，则 $m/N \leq c(\phi, C) \leq M/N$.

定理 10.4. [12], [14] $\phi \in \mathtt{Aut}(S, \partial S)$ 的 *FDTC* 定义了一个缺陷为1的齐次拟同态。也就是说，对所有的 ϕ、$\eta \in \mathtt{Aut}(S, \partial S)$

$$|c(\phi \circ \eta, C) - c(\phi, C) - c(\eta, C)| \leq 1$$

and

$$c(\phi^n, C) = n \cdot c(\phi, C).$$

由于 MCG(D_n)$\cong B_n$，我们可以将辫子视为 n孔带孔圆盘 D_n上的映射类。我们的目标是利用左规范形（LCF）β，为辫子 $\beta \in B_n$ 的分数德恩扭转找到界。我们的曲面是 n孔带孔圆盘D_n，因此只有一个边界分支。因此，我们将辫子 β 的分数德恩扭转记为 $c(\beta)$。

引理 10.5. *FDTC* 满足以下性质：

(1) 设 $\beta \in B_n$。若存在本质弧 γ，使得 $\beta(\gamma)$与 γ同位，则 $c(\beta) = 0$。
(2) 对所有 $A \in$， $c(A) = 0$ *CnFct*(B_n) $\setminus \{\delta = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1\}$。*(3)* 对所有 β_1、$\beta_2 \in B_n$.， $c(\beta_1\beta_2) = c(\beta_2\beta_1)$。*(4)* $c(\delta) = 1/n$。*(5)* $c((\ )(\ )) = 1/3$。

证明。 (1) 注意，如果 $\phi(\alpha) \cong \alpha$，那么 $\alpha = T_C^0(\alpha) \leq \phi(\alpha) \leq T_C^0(\alpha) = \alpha$。由引理 10.3 可得

$$0 \leq c(\phi) \leq 0$$

从而得到该结果。

(2) 这是第 (1) 部分的直接应用；对于所有 $A \in$ CnFct(B_n)$\setminus\{\delta\}$，都存在一条从边界到边界的本质弧，

它在同胚 $\beta \in$CnFct(B_n) 下保持不变。事实上， A 属于 Thurston 分类中的可约类型。

（3）根据共轭不变量性质（命题 10.1），我们看到，对于任意 β_1, $\beta_2 \in B_n$

$$c(\beta_1\beta_2) = c(\beta_1^{-1}(\beta_1\beta_2)\beta_1) = c(\beta_2\beta_1).$$

（4）注意到 $\delta^n = (\sigma_{n-1}\sigma_n...\sigma_1)^n = \Delta^2 = T_C$。由此可得

$$c(\delta) = \frac{1}{n}c(T_C) = \frac{1}{n}.$$

（5）利用以下性质： $A(\ ) = (\ )\tau(A)$, 其中 $\tau(A)$ 是如例 4.8 中所述，将 $A \in$CnFct(B_4) 旋转 $\pi/2$ 所得的结果，我们有

$$c(((\ )(\ ))^3) = c((\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )) \tag{10.1}$$

$$= c((\ )^3(\ )(\ )(\ )) \tag{10.2}$$

$$= c((\ )^4) = 1.$$

因此， $c((\ )(\ )) = 1/3$. □

利用引理 10.5（结合用于计算 FDTC 的轨道图思想），我们可以计算辫子 β 的 FDTC。作为一个教学示例，我们将计算两个典范因子 A, $B \in$ CnFct(B_4) 的乘积的 FDTC。

命题 10.6。 $c((\ )(\ )) = 1/2$

证明。 见图 15。考虑四孔圆盘中的弧 $\alpha \subset D_4$，它从边界出发并返回边界，同时包围其中一个孔（左下方的孔）。类似于轨道图的概念，我们将进行一次拉链移动，使弧的端点通过同伦变形移至同一点$p \in \partial D^2$，如图 16 右侧所示。

将辫子 $\beta = (\ )(\ )$ 应用两次后，可以看到 $\beta^2(\alpha)$ 围绕左下方的孔 P_1 缠绕了三次，而围绕右下方的孔 P_2 缠绕了四次。在由这些孔构成的正方形的底面上进行一次拉链移动，可得到 $\beta^2(\alpha)$ 的轨道图，其标记分别为 3 和 4。此外，注意到 $\beta^2(\alpha) \leq T_C(\alpha)$；由此根据引理 10.3， $c(\beta) \leq 1/2$。

应用（ ）后，得到的轨道将如图 16 所示。注意，得到的弧位于 $T_C(\alpha)$ 的右侧，即对 α 进行边界 Dehn 扭转。

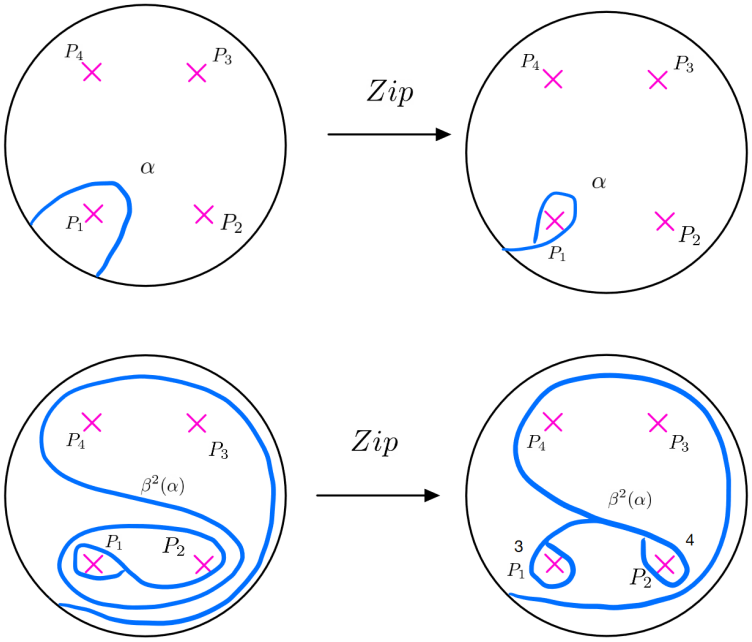


FIGURE 15. 这是将弧 α 和 $\beta^2(\alpha)$通过拉链过程合并成列车轨道

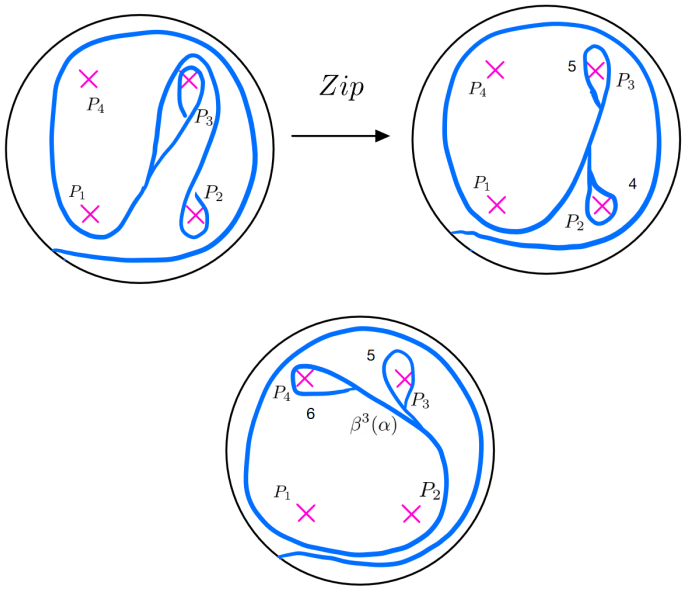


FIGURE 16. 上方是对 $\beta^2(\alpha)$应用典范因子 b_1 后的列车轨道；下方是 $\beta^3(\alpha)$的列车轨道。

同样，在第一次 Dehn 扭转后越过第二个孔时，应用 ( ) 会增加权重。由此可得 $T_C(\alpha) \leq \beta^3(\alpha)$，因此 $1/3 \leq c(\beta)$。利用这些轨道图，容易看出，对于 $n \in \mathbb{N}$

$$T_C^{n+1}(\alpha) \leq \beta^{2n+3}(\alpha)$$

$$\Rightarrow c((\,)(\,)) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = 1/2.$$

结合这两个不等式，得到 $c((\,)(\,)) = 1/2$. □

下表列出了由典范因子 A, $B \in \mathsf{CnFct}(B_4)$ 组成的乘积 AB 的 FDTC。

乘积	FDTC	乘积	FDTC	乘积	FDTC
$(\,)(\,)$	0	$(\,)(\,)$	0	$(\,)(\,)$	0
$(\,)(\,)$	0	$(\,)(\,)$	0	$(\,)(\,)$	0
$(\,)(\,)$	0	$(\,)(\,)$	1/4	$(\,)(\,)$	1/4
$(\,)(\,)$	1/4	$(\,)(\,)$	1/4	$(\,)(\,)$	1/3
$(\,)(\,)$	1/3	$(\,)(\,)$	1/3	$(\,)(\,)$	1/3
$(\,)(\,)$	3/8	$(\,)(\,)$	3/8	$(\,)(\,)$	1/2
$(\,)(\,)$	1/2	$(\,)(\,)$	1/2	$(\,)(\,)$	1/2

TABLE 3. 对于 AB，其中 A, $B \in \mathsf{CnFct}(B_4)$。

假设 $\mathsf{LCF}(\beta) = \delta^r A_1 \cdots A_k$。回顾不变量 $\inf(\beta) = r$ 和 $\sup(\beta) = r + k$。

命题 10.7。对于一个辫子 β 我们有

$$\frac{\inf[\beta]}{n} \leq c(\beta) \leq \frac{\sup[\beta]}{n}.$$

证明。注意到 $c(\delta) = 1/n$ 由引理 10.5 得出；继而由引理 10.3 可知

$$\frac{\inf(\beta)}{n} = \frac{r}{n} = c(\delta^r) \leq c(\delta^r A_1 \cdots A_k) \leq c(\delta^{r+k}) = \frac{r+k}{n} = \frac{\sup(\beta)}{n}.$$

由于 $c(\beta)$, $\inf[\beta]$, 以及 $\sup[\beta]$ 都是共轭不变量（见定义 5.7），结论得证。□

Malyutin [19] 已证明，对于辫子，Dehornoy 阶 $\lfloor\beta\rfloor_D$ 与 FDTC 的数值相近；$\lfloor\beta\rfloor_D \leq c(\beta) \leq \lfloor\beta\rfloor_D + 1$。由于 $\sup(\beta) \leq ||\beta||$，我们关于带生成元最小字长的界改进了文献中的现有界，例如 Ito 给出的以下界。

命题 10.8. [11]。如果一个 n-辫子 β 与一个由 m 带生成元的乘积表示的辫子 β' 共轭，那么

$$\lfloor\beta\rfloor_D < \frac{m+1}{n}.$$

References

1. E. Artin, *Theorie der zopfe*, Hamburg Abh. **4** （1925年）, 47–72。2. D. Bennequin, *Entrelacements et equations de Pfaff*, Asterisque **107/108** （1983年）, 3. J. Birman, K. H. Ko 和 S. J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups* **139** 1998 322 353 , Adv. Math（）, –。4. M. Calvez 和 B. Wiest, *A fast solution to the conjugacy problem in the four-strand braid group* **17** 2014 5, 757 780 , J. Group Theory（）, 第–期。5. P. Dehornoy、I. Dynnikov、D. Rolfsen 和 B. Wiest, *Ordering braids*, 第148卷，美国数学会，普罗维登斯，2008年。6. I. A. Dynnikov 和 M. V. Prasolov, *Bypasses for rectangular diagrams. A proof of the jones conjecture and related questions* **74** 2013 97 144 , Trans. Moscow Math. Soc.（）, –。7. E. A. Elrifai 和 H. R. Morton, *Algorithms for positive braids*, Quart. J. Math. Oxford **45** （1994年）, 第2期, 479–497。8. J. Franks 和 R.F. Williams, *Braids and the jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** （1987年）, 97–108。9. F. A. Garside, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford **20** （1969年）, 第78期, 235–254。10. J. Hammer、T. Ito 和 K. Kawamuro, *Positivities of knots and links and the defect of bennequin inequality* 2022 1, 199 255 , Exp. Math.（）, 第–期。11. T. Ito, *Braid ordering and the geometry of closed braids*, Geometry and Topology **15** （2011年）, 473–498。12. T. Ito 和 K. Kawamuro, *Essential open book foliations and fractional dehn twist coefficient* **187** 2017 17 67 , Geom. Dedicata（）, –。13. , *The defect of the bennequin-eliashberg inequality and bennequin surfaces*, 印第安纳大学数学杂志 **68** （2019年）, 第3期, 799–833。14. W. Kazez、K. Honda 和 G. Matic, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary* **169** 2007 427 449 , Inventiones Mathematicae（）, –。15. E. S. Kang、K. H. Ko 和 S. J. Lee, *Band-generator presentation for the 4-braid group* **78** 1997 39 60 , Topology Appl（）, –。16. K. Kawamuro, *The algebraic crossing number and the braid index of knots and links*, Algebr. Geom. Topol. **6** （2006年）, 2313–2350。17. K. H. Ko 和 S. J. Lee, *Genera of some closed 4-braids*, Topology Appl **78** （1997年）, 61–77。18. D. LaFountain 和 W. Menasco, *Embedded annuli and jones' conjecture*, Algebr. Geom. Topol. **14** （2014年）, 3589–3601。19. A.V. Malyutin, *Writhe of (closed) braids (russian, with russian summary)*, Algebra i Analiz **16** 5, 791 2004 5, 59 91, **16**2005 813（）, 第–期；译文发表于 St. Petersburg Math. J.（）, 第-期。20. H. R. Morton, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** （1986年）, 107–109。

21. P. Osv´ath 和 Z. Szab´o, *Knot floer homology and the four-ball genus*, 几何与拓扑 **7** （2003年）, 615–639。22. J.A. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, 数学发明 **182(2)** （2010年）, 419–447。23. D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea出版社, 普罗维登斯, 2003年。24. D. B. A. Epstein（与 Cannon、Holt、Levey、Patterson 和 Thurston 合著）, *Word processing in groups* 1992 , Jones and Barlett, 波士顿, 马萨诸塞州, 。25. P. J. Xu, *The genus of closed 3-braids* **1** 1992 3, , 纽结理论及其分支期刊 303 326 （）, 第–期。

Department of Mathematics, University of Iowa, Iowa City, IA 52242
Email address: michele-capovilla-searle@uiowa.edu*Email address*: keiko-kawamuro@uiowa.edu*Email address*: rebecca-sorsen@uiowa.edu