arXiv:2304.00082v1 [math.RA] 31 Mar 2023

巴黎第十三大学博士论文

专业方向

数学

伽利略博士生院

提交人

Nicolas GARREL

获得……学位**巴黎第十三大学博士**

论文题目：**代数群与带对合代数的上同调不变量**

于2018年10月17日答辩

答辩委员会成员：

Anne Quéguiner 女士 论文导师 巴黎第十三大学 Philippe Gille 先生 评审人 法国国家科学研究中心、里昂第一大学 Michel Brion 先生 考核委员 法国国家科学研究中心、格勒诺布尔-阿尔卑斯大学 Charles De Clercq 先生 考核委员 巴黎第十三大学 Bruno Kahn 先生 考核委员 法国国家科学研究中心、巴黎第七大学 Jean-Pierre Tignol 先生 考核委员 鲁汶天主教大学

目录

致谢 5

引言 **9**

1 Witt 类的不变量 19

1.1 希腊环与 Pfister 元素.20 1.1.1 希腊环.20 1.1.2 λ-环.26 1.1.3 Pfister 元素.28

1.2 I^n 的不变量.32

1.2.1 背景.32 1.2.2 f_n^d 的不变量.34 1.2.3 移位算子.35 1.2.4 不变量分类.39 1.2.5 代数结构.45 1.2.6 对 I^n 到 I^{n+1} 的限制.46 1.2.7 相似变换.48

1.2.8 不变量的分歧.51 1.2.9 固定维数中的不变量.51 1.2.10 上同调运算.57 1.2.11 半分解形式不变量.58 1.3 上同调不变量塔.61

2 混合 Witt 环 65

2.1 厄米 Morita 理论.66 2.1.1 Brauer 2-群.66 2.1.2 Hermite Brauer 2-群.67 2.2 混合 Witt 环.69 2.2.1 混合 Grothendieck-Witt 环.69 2.2.2 混合 Witt 环.75 2.2.3 Morita 等价.76 2.2.4 分裂代数.79 2.2.5 四元数代数.80

2.3 运算 λ .82 2.3.1 模的交替幂.82 2.3.2 ε-厄米形式的交替幂 85 2.3.3 ε-厄米模的外幂.87 2.4 基本理想与滤子.90 2.4.1 维数与理想.90 2.4.2 分裂情形.91 2.4.3 非分裂情形.92 2.4.4 指标的泛约化.93 2.4.5 四元数代数.94

3 带对合代数的不变量 99

3.1 厄米形式的不变量.99 3.1.1 运算 π_1^d .99 3.1.2 上同调不变量.101 3.1.3 指标 2 的不变量.103 3.2 关于 A_3 与 D_3 之间的等价性.108 3.2.1 带对合交叉积.108 3.2.2 指标为 2 的克利福德代数.116 3.2.3 四次判别代数.121 3.3 一些低次不变量.127 3.3.1 次数 6 中的 a_3 与 a_4 不变量.127 3.3.2 次数 12 中的 a_5 不变量.132

符号索引 **133**

致谢

从前，有一个喜欢数字和谜题的小男孩。从前，有一个怀抱着成为研究者这一愿望的少年，也许吧，谁知道呢。从前，有一个年轻人，在深夜里，借着一盏宜家摇曳的灯光，双手抱头，绝望地思索：是否应该把命题 2.3.9 拆成两个独立的引理，还是保留一个更长的证明、换来更清晰的陈述；又或者干脆去睡觉，第二天再作决定——那时距离神圣不可侵犯的截止日期只剩三天。

这一切真是一场奇妙的冒险。和所有美好的史诗一样，它有自己的起源，也有曲折迂回。有考验，有爱情，有欢笑，也有悲剧。翻到最后一页时，心中涌起这样的感受：啊，终于结束了。一本书就此落幕，多少有些令人伤感；我们总希望故事还能继续。它会继续的。但在这本书里，你看不到考验、爱情、欢笑或悲剧。这些内容都没有写在这里，你只能读到几条定理、几则注记和几个例子。说实话，你甚至很可能不会读它们。没人会希望记住圣杯探求的，只是一段关于金色器皿的冗长描写——也许那是块灼灼发光的石头，又或许是个凤尾鱼罐头。人们梦想的是骑士精神，而不是精工细作，无论工艺多么精湛。正因如此，在你会读到的这些寥寥数页中，我至少想介绍几位人物、几位同伴，他们陪我一同踏上了这场探求。我要向这则传说中的梅林、兰斯洛特、桂妮薇儿和珀西瓦尔道谢；否则，他们本不会出现在这里。

首先，我必须感谢我的答辩委员会成员 Charles De Clercq、Bruno Kahn、Michel Brion 和 Jean-Pierre Tignol，感谢他们抽出时间和精力来听我陈述并阅读我的论文；尤其要感谢我的评审 Philipe Gille 和 Alexander Merkurjev，他们不得不花上数日仔细研读我的手稿，而这些日子通常更适合用来度假。当然，还少不了一个名字，也是最显而易见的那个名字：我的导师 Anne。这篇论文欠她太多，而这里没有足够的篇幅一一述说。它当然得益于她在数学上的指导，但更重要的是她给予的倾听、支持和鼓励；没有这些，就无法设想用一篇手稿作为三年生活的方向。

接下来，我要感谢我的家庭，首先是我的父亲，他把我

抚养长大，一直支持我，即使他对我所投身的事情几乎一无所知，还为我奉献了人生中的一大段时光。还有 Mina，她在我心中占有特别的位置。我无法一一列出所有人的名字：祖父母、叔伯姑姨、表亲堂亲，以及各种血亲和心灵上的亲人。这些人不一定都在我写论文期间陪伴在我身边，但他们都见证了我的成长，也助我成长；而人在踏上冒险之旅前，总得先长大。

我在尼斯的朋友们，Damien、Jonjon、Baobab Rousseau、Foued-Barnabé，以及许多其他人；我曾和你们一起经历了年少又愚蠢的时光，后来年纪渐长，却依然同样愚蠢。我仍然觉得，UNSSSloubi原本大有成功的机会。

预科班的伙伴们，让那两年——姑且谦称为勤奋求学的两年——成为我人生中最美好的时光之一。无论是HX1的寄宿生（Paul/Pierre、Fiona、Anthony、Pauline、Miguel、Benoît等人），还是后来暖气片家族的成员（照亮我每一天的Charlotte、熊猫Ric……）。我走进预科班时，仿佛初入霍格沃茨，睁大双眼，心中忐忑；离开时，收获的回忆和朋友多得让我不知如何是好。

在高等师范学院那段时光里，我有无数难以忘怀的朋友，多得实在无法逐一列举。无论是在学校里、DG、排球场上（历史上第一支“二队”，也是历史上最好的“一队”）、K-Fêt、BOcal、COF、BDS、Mega、AG、Courô、蒙鲁日、26号酒窖，有时甚至是在Rataud阶梯教室——在这成百上千个我常去的地方，我曾大喊大笑、喝酒哭泣、恶作剧，尤其是在那里感到宾至如归；还有其他学校，因为一所学校对我来说还不够，尤其是巴黎综合理工学院（Morgane、Hugo、Bastien……），我在那里常常受到热情接待。

最后，按时间顺序来说，还有我的论文同伴们：这群勇敢的人常常相聚在12号，Pierre、Tom、Mattia、Carlos、Anna、Marta、Jean-Michel、我们怀念的负责人Anna-Laura、Delphin、Daniel、Didier以及其他人，无论是过去的还是现在的；还有陪伴我迈出最初步伐的研究人员，以及支持团队的成员，尤其是Isabelle和Yolande，她们尽力弥补了我在行政事务上的笨拙。

由于时间有限、篇幅不足，也由于记忆力不济，我未能充分呈现本应提及的所有人物；若有人读到这些文字，却发现其中没有自己的身影，我谨此致歉。但有一个群体比其他所有人都更应出现在这里：我的圆桌，我的第二个家庭——grotas。

Louis，夜之主、深渊的主宰，也是机器的修理师。Paul Odieux 和 Puant Simon，这只最勇敢的熊，是一对鲑鱼梦寐以求的伙伴。Grogrodile，我得承认，说真的，格勒诺布尔还挺不错。Machin，整理这篇论文的页面并按颜色分类时，想必快要疯了。Pandarion，他的半枚纪念章并非由钢铸造，而是由我的心铸成。Amiel，以及他那形形色色的另一个自我，他们都是兄弟姐妹。Béné，半水獭，

半兔子，接着又变回半水獭；我们永远拥有费城。Grotillon，在男人中有着最温柔内心的野猪。Surée，她让我更加了解自己，也让我多少懂了点咖啡。Hélène，她把我带上舞台，从此我便属于那里。Jonas，他让我发现的游戏和关于如何善用住房储蓄计划的小窍门一样多。Léa，愿你在我的呼唤响起时，乘着鸟儿的翅膀飞翔。Maud，为了她，我几乎愿意考虑去布列塔尼落脚。Marc，不可思议的无摩托车摩托骑士，待客之道始终如一，尽管有点胡子拉碴。Marine la Bio，早已只是Marine。P4bl0，毕竟他是我的房东，也是我共享鸭胸肉的伙伴，所以我不得不说他好话。Picomango，California Girl，还有美丽、高挑又强壮的联合导演。Snoopy，我那无可挑剔的互补搭档，还需要多说什么吗？Ted，我承认他的存在。Laetitia，绝非恶意——这是非常、非常强烈意义上的说法。

比任何人都更加重要，你们是这篇论文所依靠的人，同时也是我那把传奇之剑，以及我将其拔出的岩石。

引言

带对合代数

正如标题所示，本论文的核心研究对象是带对合代数。所谓带对合代数，是指域上的中心单代数，并配备一个对合反自同构（通常记作 σ 或 τ，有时记作 θ 或 ρ）；最简单的例子是配备转置运算的矩阵代数。我们始终假设基域 k 的特征不等于 *2*。除了最后一章会简要涉及的情形外，我们所考虑的对合均为第一类，也就是说，它们在中心上的作用是平凡的。带对合代数未必属于每位代数学家标准数学知识的一部分，但它们自然地出现在许多背景中，而通向它们的途径也各不相同。

历史上，Albert 于20世纪30年代在黎曼几何背景下引入了带对合代数（例如参见 [1]）。Albert 开创了对带对合代数的系统研究，旨在刻画 $\mathbb{Q}$ 上的除代数；这些除代数可作为黎曼曲面的乘法代数出现。不过，这一历史动机与本论文中将要探讨的问题相去甚远。

对我们而言，更为重要的一条通向带对合代数的途径，见于Weil关于代数群的研究（[34]）。基于Killing的工作，Élie Cartan 于 20e 世纪末对 $\mathbb{C}$ 上的单李群进行了分类（[36]）；他通过分类相应的李代数来完成这项工作，而后者的分类更容易建立。该分类以著名的*Dynkin* 图为依据，这些图与根系相关联。其中尤其包括所谓的经典群，即 PSL_{n+1}（对应图 A_n）、SO_{2n+1}（对应 B_n）、PSp_{2n}（对应 C_n）和 PSO_{2n}（对应 D_n），对于 $n \neq 4$ 而言（由于三重性这一特殊现象，D_4 型群通常不被视为经典群）。

关于代数群，Chevalley 在20世纪50年代证明，代数闭域上的半单群分类与域无关，尤其与特征无关，因此我们得到

基本相同的 Dynkin 图分类（还需考虑同源，例如， A_n 型群的形式为 SL_{n+1}/μ_d，其中 d整除 $n+1$，与 $d=n+1$对应的群为 PSL_{n+1}）。实际上很快就会发现，只要假设群是分裂的 （也就是说，它包含一个分裂极大环面），分类就相同，而不必假设域是代数闭域。

若要考虑非分裂群，很容易发现，双线性型在预期的描述中起着至关重要的作用。这一点对于 B_n 和 D_n 型群尤为明显，因为群 $SO(q)$（其中 q 是一个二次型）显然是相应分裂群的一种非平凡形式。 C_n 型群按构造与交错型相关；但另一方面，即使在任意域上，交错型也完全由其维数决定。至于 A_n 型群，它们与厄米形式相关这一点则不那么显而易见：事实上，若 K'/K 是一个二次扩张，对于 $(K',)$ 上的任意厄米形式 h （其中 是 K'/K的非平凡自同构），都有相应的酉群 $SU(h)$；而 SL_{n+1}对应于 $K'=K\times K$的情形，因此这些群确实是相应分裂群的形式。

韦伊的观察是，如果我们将注意力从双线性型转向它们在矩阵代数上诱导的对合，就能得到所有经典群。事实上，任意 b 对称、交错或厄米形式都在一个 K向量空间 V的 $\mathrm{End}_K(V)$ 上诱导出一个称为伴随映射的对合，该对合满足：对任意 $u\in\mathrm{End}_K(V)$以及任意 $x,\ y\in V$

$$b(u(x),y)=b(x,\sigma_b(u)(y)),$$

并且可以将该形式的等距群定义为

$$G=\{u\in\mathrm{End}_K(V)\,|\,u\sigma_b(u)=\mathrm{Id}\}. \tag{0.0.1}$$

此外，$\mathrm{End}_K(V)$ 上的任意对合都对应于某种 b形式，该形式在相差一个因子的意义下唯一。若该对合属于第一类（即它固定 K），则它对应于对称型（称该对合为正交）或交错型（称该对合为辛）。否则，该对合称为酉。

有了这种描述之后，我们便可以用任意带对合代数 (A,σ) 替换 $(\mathrm{End}_K(V)\ \sigma_b)$，并通过直接类比公式 (0.0.1) 来定义一个代数群。经过可分闭包扩张后，代数 A 是分裂的，因此 σ 对应于某个 σ_b，该群也就成为经典分裂群之一的一个形式。 σ 的类型定义为分裂后得到的 σ_b 的类型。关键在于，按照 Weil 的观点，这样便涵盖了所有经典群（关于这一问题的完整讨论，参见 [17] 第六章）。

正如前文关于代数群的讨论所强调的，带对合代数与双线性型或厄米形式密切相关，这为进入该理论提供了另一条途径。具体而言，我们已经看到，可以自然地将带对合代数与对称型、交错型或厄米型对应起来；这三类可以归纳为同一个定义：若 K 带有一个二阶自同构 τ，且 $\varepsilon = \pm 1$，则可以定义 (K, τ) 上的一个 ε-厄米形式，使其满足$h(ax, by) = \tau(a)h(x, y)b$且 $h(y, x) = \varepsilon\tau(h(x, y))$。正交情形由$\tau = \mathrm{Id}$和 $\varepsilon = 1$给出，辛情形由 $\tau = \mathrm{Id}$和 $\varepsilon = -1$给出，酉情形则由 $\tau =$和 $\varepsilon = 1$给出。因此，给定一对 (K, τ)，便可以定义厄米形式 (V, h)，它们诱导出带对合代数 $(\mathrm{End}_K(V)\ \sigma_h)$。将讨论置于带对合代数的框架中，可以使整个情形完全对称：在带对合代数 (A, σ) 上，可以定义 ε-厄米形式 (V, h)，此时 $(\mathrm{End}_A(V)\ \sigma_h)$ 仍是带对合代数。关于这些内容的更多细节，参见 [16] 以及第 2.1 部分；不过我们已经可以看出，带对合代数为研究厄米形式及其自同态代数提供了一个稳定的框架。

另一方面，围绕二次型的许多其他经典构造，也自然地归入带对合代数的理论之中。一个自然的例子是 Clifford代数：对于任意二次型 q，都可以关联一个特定的代数 $C(q)$，它被规范地赋予了一个对合。由于这类构造中普遍存在一个障碍，无法将这一定义直接推广到正交对合代数：与二次型关联的对合只能在相似意义下刻画该二次型，因此只能将那些在相似变换下不变量的构造推广到对合上。在 Clifford代数的情形下，可以定义带正交对合代数的偶 Clifford代数，并由此将另一个带对合代数关联给一个带对合代数（[17, §8]）。还可以举出与双四元数代数关联的 Albert型这一例子；它可以推广为带单位对合代数的判别代数（[17, §10]）。维数 6 且判别式1的二次型与双四元数代数之间的经典对应关系，也因此自然地推广为 D_3 型代数与 A_3之间的对应关系（见 [17, §15.D], ，以及本论文第3.2部分中的显式计算）。

最后，在带对合代数可能发挥决定性作用的其他情形中，尤其可以举出群表示理论，因为有限群的群代数 $K[G]$ 在 K 为零特征时，是一个自然带有由 $g \mapsto g^{-1}$诱导的对合的半单代数。

不变量

我们已经描述了论文标题中两个术语之间的密切联系，即代数群（不再赘述）和带对合代数（已作介绍）。因此，还需要说明何谓上同调不变量，并描述这篇论文所处的背景。

这些不变量研究的起源无疑在于二次型理论。一个非常基本的事实是：如果某个基下对称双线性型的矩阵行列式并非定义良好的不变量，那么它模平方却是定义良好的；这就是所谓的二次型的行列式，也是所定义的第一个非平凡不变量；因此它的取值属于 $K^*/(K^*)^2$。可以通过两种不同的方式定义第二个不变量，其取值属于 Brauer 群 Br(K)。第一种方法是考虑 q 的 Clifford 代数的 Brauer 类 $[C(q)]$：当 q 的维数为偶数时取此类，而当 q 的维数为奇数时取类 $[C_0(q)]$；这称为 Clifford 不变量 $c(q) \in \mathrm{Br}(K)$。第二种方法是从对角化 $q = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ 出发，并考虑$w_2(q) = \sum_{i<j}(a_i, a_j)$，其中 $(a_i, a_j) \in \mathrm{Br}(K)$ 是相应四元数代数的 Brauer 类；这称为 q 的 Hasse-Witt 不变量。这两个取值于 Brauer 群的不变量并不相等，但可以通过涉及维数和行列式的简单公式将它们联系起来（例如参见 [19,命题 3.20]）。

这两个不变量代表了可以继续进行构造的两个经典方向。首先可以看到，行列式取值于第一上同调群 $H^1(K, \mu_2)$（关于伽罗瓦上同调的预备知识，可参见例如 [30], [12], 或 [17]第七章），而克利福德不变量和哈斯-维特不变量取值于 $H^2(K, \mu_2)$（它自然同构于 Br(K) 的 2-扭元）。因此，自然可以尝试构造取值于 $H^d(K, \mu_2)$的不变量，其中 d越来越大；按此逻辑，这些不变量称为上同调的。注意，在次数 0 时，可以将 $\dim_0(q) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^0(K, \mu_2)$定义为 q的模 2 维数。

若沿着 Hasse-Witt 不变量的方向继续下去，就会得到 Stiefel-Whitney 不变量的构造（它们与 K-理论中的 Stiefel-Whitney 类类似）：对于任意 $d \in \mathbb{N}$，若 $q = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$，可以定义

$$w_d(q) = \sum_{i_1 < \cdots < i_d} (a_{i_1}, \ldots, a_{i_d}) \in H^d(K, \mu_2) \tag{0.0.2}$$

其中 $(a_{i_1}, \ldots\ldots, a_{i_d}) \in H^d(K, \mu_2)$ 是自然的伽罗瓦符号。我们将在第 1.2.9 节再次讨论这些不变量。

若沿着 Clifford 不变量的方向继续研究：首先注意到，$_0(q)$ 的维数只取决于 q 的 Witt 类（例如参见

[7] 或 [19]，了解 Witt 环的所有标准定义和结果），因此定义了一个映射 e_0: $W(K) \to H^0(K, \mu_2)$，显然它是加法群同态。接下来可以注意到，若 q 是偶数维 $2r$，并将 $\det(q)$ 的定义修改为 $\mathrm{disc}(q) = (-1)^r \det(q)$（这称为 q 的判别式，在文献中有时也称为带符号行列式），那么 $\mathrm{disc}(q)$ 只取决于 q 的 Witt 类，因此定义了一个映射 e_1: $I(K) \to H^1(K, \mu_2)$，其中 $I(K) \subset W(K)$ 是 Witt 环 $W(K)$ 中由偶维形式构成的基本理想。此外，很容易看出，这个映射实际上是加法群同态，其核恰好是 $I^2(K)$（[7, 定理 13.7]）。由此可知，在 $I^2(K)$ 上，$c(q)$ 仍只取决于 q 的 Witt 类，并定义了一个加法同态 e_2: $I^2(K) \to H^2(K, \mu_2)$（[7, 定理 14.3]）。由此可以看出，一般化的方向逐渐明朗：我们希望对任意 $n \in \mathbb{N}$ 构造一个加法同态

$$e_n : I^n(K) \longrightarrow H^n(K, \mu_2) \tag{0.0.3}$$

使得当 $e_n(q) = 0$ 时，$e_{n+1}(q)$ 有定义。这是***Milnor*** 猜想 的一部分（见 [23]）；该猜想特别指出，e_n 是满射，其核为$I^{n+1}(K)$，因此它诱导出从 $I^n(K)/I^{n+1}(K)$ 到 $H^n(K, \mu_2)$ 的同构。不变量 e_n 的构造要困难得多，远甚于不变量 w_n 的构造；不变量 e_3 由 Arason 于 1975 年构造（[2]），不变量 e_4 则由 Jacob 和 Rost 于 1989 年构造（[13]）。Milnor 猜想于 2002 年由 Voevodsky 完全解决（[33]），这主要得益于动机上同调的构造，他也因此获得菲尔兹奖。

以二次型的情形作为动机之后，我们可以建立一般的不变量概念，特别是上同调不变量的概念；这一概念源自 Serre 的文献 [10]。因此，固定一个基域 k，并考虑域 k的域扩张范畴**域**$/k$。那么，若 F 是从**域**$/k$ 到集合范畴的函子，且 H 是从**域**$/k$ 到阿贝尔群范畴的函子，我们定义

$$\mathrm{Inv}(F, H)$$

即为从 F 到 H 的自然变换所构成的阿贝尔群（通过与遗忘函子复合，将其视为一个取值于集合的函子）。换言之，只需对每个扩张 K/k 给出一个函数 $F(K) \to H(K)$，唯一的条件是满足标量扩张的相容性。常不变量总是存在：$H(k) \subset \mathrm{Inv}(F, H)$。若 F 是一个取值于带指定点集合的函子，则将归一化不变量群$\mathrm{Inv}_{norm}(F, H)$定义为由那些将指定点映为 0 的不变量构成的子群。在这种情况下，总有一个分解

$$\mathrm{Inv}(F, H) = \mathrm{Inv}_{norm}(F, H) \oplus H(k).$$

F 的上同调不变量对应于这样的情形：对某个定义在 k 上的伽罗瓦模 C ，有 $H(K)=H^*(K,\ C)$（称这些不变量“取值于 C”）。我们将这个群简记为$\mathrm{Inv}(F,\ C)$，而$\mathrm{Inv}^d(F,\ C)$表示次数为 d的部分（即对应于$H(K)\ =H^d(K,\ C)$的部分）。我们最感兴趣的例子是 $C=\mu_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

当 $G(K)\ =H^1(K,G)$是G上的 K-挠子的（带基点）同构类集合时，我们称代数群 G的不变量（例如上同调不变量）；此时记作 $\mathrm{Inv}(G,H)$（对于取值于 C 的上同调不变量，则记作 $\mathrm{Inv}(G,C)$）。当$F(K)$是 K 上的带对合代数的子集时，我们称之为带对合代数的不变量（例如，可以将范围限制为某种对合类型、固定次数或有界指标等）。上文提及的经典群与带对合代数之间的联系表明，这两个概念实际上极为接近。特别地，若(A,σ)是一个带对合代数，则存在代数群 $G=\mathrm{Aut}(A,\sigma)$（伴随型的绝对几乎单群），其点由与 σ可交换的 A 的代数自同构给出；并且文献 [17, 19.14] 中证明， $H^1(K,G)$自然地对应于 K 上与 σ 同类型且与 A 同次数的带对合代数的同构类（该集合当然以(A,σ)为基点）。

带对合代数或代数群的非平凡上同调不变量的定义总体而言是一项困难的工作，迄今构造出的不变量也相对较少。得到令人满意处理的仅有次数不超过 3 的不变量。文献 [17, 31.15] 中证明，若 G 是定义在 k 上的代数群，则 $\mathrm{Inv}^1_{norm}(G,\ C)$ 与 $\mathrm{Hom}_\Gamma(\pi_0(G_{sep})\ C)$ 有典范同构，其中 Γ 是 k 的绝对伽罗瓦群，而 $\pi_0(G_{sep})$ 是 G_{sep} 的连通分支群；特别地，连通群没有非恒定的 1 次不变量。文献（[17, 31.19]）还证明，若 n 与 k 的特征互素，且 G 连通，则 $\mathrm{Inv}^2_{norm}(G,\ \mu_n)$ 与皮卡群 $Pic(G)$ 的 n-挠子群自然同构；特别地，单连通群没有非恒定的模 n 1 次或 2 次不变量。

对于三次不变量，直到最近，我们所能做到的最好程度还只是处理单连通群的情形：$\mathrm{Inv}^3_{norm}(G,\ \mu_n)$ 此时是一个带有指定生成元的循环群，该生成元称为罗斯不变量 （构造的详细说明见 [10] 第二部分）。但就在最近，Merkurjev 在一系列文章中确定了任意半单群的 $\mathrm{Inv}^3_{norm}(G,\ \mu_n)$（见 [21] 和 [22]）。

关于已知带对合代数的上同调不变量，参见 [31] 中相对较新的综述。可以看出，次数至少为四的不变量几乎不存在，除非是在非常受限的背景下，尤其是指标至多为二时（见 [4], ，我们将在第 3.1.3 节回到这一点）。

论文内容

既然已经阐述了相关的数学背景，现在可以描述本论文的目标：构造更高次数的带对合代数（因而也是代数群）的上同调不变量。本论文按逻辑递进分为三章：第一章回顾二次型的情形，并对 I^n的不变量进行相对完整的研究；第二章构建将这些方法推广至带对合代数情形的工具；第三章则应用这些工具。下面将更详细地介绍各章内容。

出发点是希望按照 Berhuy 方法（[4]），将定义在 I^n 上的不变量推广到指标为 2 的带对合代数。由此发现，若要充分发挥这一方法的效用，就必须尽可能多地了解 I^n的不变量；然而，除 e_n之外，当时只有少数几种构造，尤其是一个取值于 H^{2n}的K， μ_2不变量，它是通过一种“除平方”运算 $I^n \to I^{2n}$ 构造的（见 $[9, §19]$）。此外，要推广这些不变量，就必须对它们在相似变换（这是从二次型过渡到正交对合时反复遇到的问题）以及秩 1 离散赋值下分歧方面的性质有所掌握（这是对代数进行一般性分裂时的标准考量）。因此，我们着手扩展 $[9, §19]$ 中所述的方法，以便完整分类 Inv(I^n， μ_2) 中的不变量并描述其性质，同时对任意 $d \in \mathbb{N}$使用 $I^n \to I^{nd}$ 运算。

构造这些运算的基本观察是，Pfister 形式对于 Grothendieck-Witt环上的 λ运算表现出规律性（见命题 1.1.37），这使得我们能够将 λ-环结构“变形”为另一种结构，使运算将 I^n 映射到I^{nd}。由于所有这些构造本质上都是形式上的，我们将建立一种一般形式体系，描述如何自然地变形预-λ-环结构，尤其是如何获得一种相对于抽象的 Pfister 形式概念表现自然的结构（见定理 1.1.41）。

接下来证明（见定理 1.2.40），这些运算 $I^n \to I^{nd}$构成不变量 Inv(I^n, W) 的一个 “ 基 ”，而由与 e_{nd} 复合得到的上同调不变量 $I^n(K) \to H^{nd}(K, \mu_2)$ 同样构成 Inv(I^n, μ_2) 的一个“基”（这里使用引号，是因为需要无穷多个组合）。为了避免重复所有证明，我们为两类不变量（Witt 不变量和上同调不变量）建立了共同形式体系。本节余下部分将研究这些不变量的基本性质，尤其是它们在乘积、相似和限制下从 I^n 到 I^{n+1}的表现。我们还将用一部分篇幅研究 I^n 中带有一个 r-Pfister 形式因子的型的不变量，

以推广在 [9, 20.8]中给出的构造。

最后，有一节简要介绍了一个有待今后进一步发展的思想，即描述当先前定义的不变量消失时所定义的不变量，从而构造出类似于不变量 e_n的“不变量塔”。

第二章独立于第一章，介绍了将前述方法推广到带对合代数所需的工具。从二次型过渡到正交对合时，除了所研究对象的复杂性显著增加之外，一个反复出现的问题是我们所拥有的结构不足。二次型可以进行加法和乘法，同时我们还拥有运算 λ；正如前一章所见，这些运算可能是定义不变量的关键。相反，带对合代数可以通过张量积相乘，而 [17, §10] 描述了如何定义 λ运算；但是，我们无法将这些运算结合起来，因为事先并没有加法。人们已经注意到（特别是在 [18] 和[6]中），如果反过来两个带对合代数之间存在 Morita 等价，那么就可以定义它们的和，例如将它们表示为同一个带对合代数上的 ε-厄米形式；如果没有明确给出的 Morita 等价，厄米形式只能在相差一个因子的意义下定义，因此其和并未被良好定义。

本章将建立一种形式体系，使我们能够执行所需的所有运算，而无需持续追踪 Morita 等价的具体形式。具体而言，对于任意第一类带对合代数$\widetilde{\ }$$(A, \sigma)$，我们定义一个分次交换环 $GW(A, \sigma)$，其中包含 (A, σ) 上所有 ε-厄米形式的等距类，以及二次型 Witt 环的对应物 $W(A, \sigma)$。为此，我们使用由对合迹型$\widetilde{\ }$给出的典范 Morita 等价 T_σ。此外，我们还在 $GW(A, \sigma)$ 上定义一种预-λ-环结构，该结构对应于 [17, §10] 中描述的对合运算。

最后，为了为将这些工具应用于构造上同调不变量做好准备，我们定义 Witt 环基本滤子的一个类比，并给出其关联分次的描述；在这一背景下，它取代模 2 上同调（类比于 Milnor 猜想）。

最后一章将前两章的内容结合起来，最终构造带对合代数的上同调不变量。这正是第一部分的研究主题，其中，第一章中构造的运算$\widetilde{\ }$被应用于 $GW(A, \sigma)$的滤子（见命题 3.1.1）。随后，命题讨论如何利用这些构造来构造高阶不变量，尤其是相对不变量，并提出对指标为 2 的代数情形进行更深入的研究。

本章其余部分致力于研究低维现象。L a

第二部分专门用于对类型为 A_3 和 D_3 的代数之间的等价关系进行显式计算，这些计算应用于第三部分；在第三部分中，我们将构造与 [28], 中定义的一个 4 次不变量联系起来，并利用第一章的工具，将 I^3 中定义在 12 次二次型上的某个不变量推广到指标 2 的情形（见 [9, 20.8]）。

第1章

Witt类不变量

本章将详细讨论 I^n的Witt不变量和上同调不变量。我们约定基域为 k ，其特征不等于2，并且 K/k 表示一个域扩张。“二次型”一词将始终 指非退化二次型。记 $GW(K)$为Grothendieck-Witt环，记 $W(K)$为Witt环^。在 $GW(K)$中，记 $I(K)$为虚维数为零的形式所构成的基本理想，其在 $W(K)$中的投影为基本理想 $I(K)$。需要特别指出的是，自然投影实际上是同构^ ^$I(K) \simeq I(K)$，因此我们将系统地认同 $I^n(K)$与 $I^n(K)$。特别地，除非另有明确说明， n-Pfister形式 $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ 将表示 $I^n(K)$中的一个元素；准确地说，是 $\langle\langle a\rangle\rangle = \langle 1\rangle - \langle a\rangle$ （而不是通常所用的 $\langle 1, -a\rangle$），这对于Witt类并无影响。

我们的目标是构造自然映射 π_n^d ： $I^n(K) \to I^{nd}(K)$，使其满足

$$\pi_n^d\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_i\right) = \sum_{i_1<\cdots<i_d}\varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_d}$$

对于所有 n-Pfister 形式 φ_i （见命题 1.2.11）均成立，并由此通过与 e_{nd} 复合，导出不变量 $u_{nd}^{(n)}$ ： $I^n(K) \to H^{nd}(K, \mu_2)$。 π_n^d 的构造本质上是形式化的，只依赖于 λ-环 $GW(K)$中 Pfister 形式之间的关系。因此，我们给出一个适用于任意 λ-环的定义（见定理 1.1.41）。

本章的核心结果是定理 1.2.40，它特别说明（见推论1.2.42），每个 Witt 不变量（分别地，每个上同调不变量）都可以唯一地写成 π_n^d （分别地， $u_{nd}^{(n)}$ ）的无限线性组合。为避免重复证明，我们对这两类不变量采用共同形式体系（见第1.2.1节），在该体系中， π_n^d 和 $u_{nd}^{(n)}$ 都记作f_n^d。定理中给出的精确描述是用记作g_n^d的不变量来表述的；这些不变量有明确的描述（命题1.2.36），并且具有如下

pr显著性质：任意组合，即使是无限组合，也给出一个不变量 .

建立这个定理后，可以利用 f_n^d的特殊性质证明若干关于不变量的性质，特别是如何表示两个不变量的乘积（命题 1.2.46）、将 I^n 的一个不变量限制到 I^{n+1} （命题1.2.54）、不变量在相似变换下的行为（命题1.2.65），以及在离散赋值下取留数时的行为（命题1.2.69）。我们还研究了对 I 和 I^2 不变量的描述与 Serre 对固定维数二次型不变量的描述之间的联系，并联系到 Vial 对模2上同调运算的描述。

在本章最后一部分，我们探讨“ 不变量塔 ”这一概念，即一系列不变量，其中每个不变量都在前面的不变量为零时才有定义（以 e_n不变量为范例）。

1.1 希腊环与 Pfister 元素

这里介绍关于 λ-环的经典定义和结果（见 [35]），以及一些对我们有用的构造。不过，我们稍微改变了视角，不再优先考虑满足 $\lambda^d(1) = 0$ 对 $d \geqslant 2$ 这一条件的 λ-运算；我们将符号 λ 专用于这类运算，而更倾向于用符号 α 表示对 1 有任意作用的运算。

因此，我们选择采用一种更中性的术语，将现代文献中称为预λ环（而在 Grothendieck 的著作中最初称为 λ环）的对象称为希腊环 。每个希腊环都关联着一个运算族，该运算族满足 [35], 意义下的预-λ-环公理；其中每个运算都由其对 1 的作用来刻画。

其目的是在一族固定的元素（就我们而言，即*Pfister* 元素）上构造具有良好性质的运算。

1.1.1 希腊环

希腊运算

定义 1.1.1。 设 R 为交换环。在 R 上的一个希腊运算是一列映射

$$\alpha^d : R \longrightarrow R$$

对于所有满足以下性质的 $d \in \mathbb{N}$：

(i) $\forall x \in R, \quad \alpha^0(x) = 1$; (ii) $\forall x \in R, \quad \alpha^1(x) = x$;
(iii) $\forall x, \quad y \in R, \quad \forall d \in \mathbb{N}, \quad \alpha^d(x+y) = \sum_{k=0}^{d} \alpha^k(x)$
$\alpha^{d-k}(y)$。我们将 $\Gamma(R)$ 记为 R 的希腊运算集合

.

预-λ-环的通常定义是用这种语言来说，它是一个带有希腊运算的环；而我们的定义则是给出这类运算的一个等价类。

例 1.1.2. </style序列 (λ^d)，其中 $\lambda^d(n) = \binom{n}{d}$ 是 $\mathbb{Z}$上的希腊运算

.

例 1.1.3. 首先令我们感兴趣的例子是：二次型上的通常 λ-运算定义了 $GW(K)$ 上的希腊运算。值得注意的是，尽管这些运算可以扩展到 $GW(K)$，但它们不能传递到 $W(K)$ 的商空间上，这也解释了为什么我们不直接在 $W(K)$ 上进行研究。

我们对前述定义给出一个更具代数性的刻画：对于任意交换环 R，定义

$$G(R) = 1 + tR[[t]] \subset R[[t]]. \tag{1.1.4}$$

那么 $G(R)$ 在 $R[[t]]$ 中的乘法下构成一个阿贝尔群，由此得到一个函子 G: **环范畴** $\to$ **阿贝尔群范畴**。我们有一个群的自然态射

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_R: & G(R) & \longrightarrow & R \\ & 1+\sum a_k t^k & \longmapsto & a_1. \end{array} \tag{1.1.5}$$

命题 1.1.6。 设 $\alpha_t: \ R \longrightarrow G(R)$ 是一个映射。记作

$$\alpha_t(x) = \sum_d \alpha^d(x) t^d.$$

那么，映射序列(α^d) 是一个希腊运算，当且仅当 α_t是一个群同态，且是 ε_R的截面。

证明。 这只是对前一个定义的简单改述。 □

因此，我们可以将一个希腊运算等价地表示为从 R 到 R的一列映射，或表示为一个以 $G(R)$ 为值域的唯一映射。

希腊字母

以下定义的思路如下：如果给定了一个希腊运算（α^d），能否将它“变形”为（β^d），并且

$$\beta^d = \sum_{k=0}^{d} a_{k,d} \alpha^k$$

其中 $a_{k,\ d}$ 是 R 中的系数，因此 β^d 仍构成一种希腊运算?

结果证明这是可能的，而且 $a_{k,\,d}$ 完全由 $\beta^d(1) \in R$ 对于 $d \geqslant 2$ 确定。此外，所有序列 $(\beta^d(1))_d$ 都可以通过这种方式得到，特别是可以通过同类变形逆转这一过程，从 β^d 找回 α^d。

于是，我们决定将所有这些运算视为定义了同一种希腊环结构，而选择某个特定运算（α^d）就对应于选择一列元素（此时即为（$\alpha^d(1)$））， 我们称之为该运算的希腊字母。因此，对于同一个希腊环，我们可以在不同的希腊字母之间切换，从而根据所需性质改变所使用的运算。

更确切地说：对于任意交换环 R，令

$$L(R) = tG(R) = t + t^2R[[t]] \subset R[[t]]. \tag{1.1.7}$$

那么， $L(R)$ 在 $R[[t]]$ 中关于复合构成一个（非阿贝尔）群，这定义了一个函子 L：**环范畴** $\to \mathbf{Gpe}$。

定义 1.1.8. 设 R 是一个交换环，且 $\alpha_t : R \to G(R)$ 是一个希腊运算。我们称元素 $\alpha_t(1) - 1 \in L(R)$ 为该运算的希腊字母，这定义了一个自然映射 $\Lambda_R : \Gamma(R) \to L(R)$（回顾一下， $\Gamma(R)$ 表示 R 上的希腊运算集合）。

我们还定义

$$A(R) = \{\Phi \in \mathrm{Aut}(G(R)) \,|\, \varepsilon_R \circ \Phi = \varepsilon_R\}. \tag{1.1.9}$$

换言之， $A(R)$ 中的元素必须保持一次项。

命题 1.1.10. 映射

$$\begin{array}{ccc} L(R)^{op} & \longrightarrow & A(R) \\ \tau & \longmapsto & (f \mapsto f \circ \tau) \end{array}$$

定义了一个单射群同态。

证明。 无论 $\tau \in tR[[t]]$ 如何，映射 $f \mapsto f \circ \tau$ 都是从 $G(R)$ 出发的群同态。

显然，题述映射是一个幺半群同态，其目标为 $G(R)$ 的自同态；又由于 $L(R)$ 是一个群，因此它确实是到 $G(R)$ 的自同构群的群同态。它是单射，因为 τ 在 $1 + t$ 上的作用是 $1 + \tau$。

此外，由于 $\tau \in L(R)$ 的一次项是 t，在右侧复合 τ 会保留一次项，因此该态射的取值属于 $A(R)$。 □

推论 1.1.11. 群 $L(R)$ 通过 $\alpha_t \cdot \tau = \alpha_{\tau(t)}$ 在 $\Gamma(R)$ 上作用于右侧，而 $\Lambda_R : \Gamma(R) \longrightarrow L(R)$ 是一个 $L(R)$-右集之间的态射。

特别地， $L(R)$ 在 $\Gamma(R)$ 上的作用是自由的。

证明。 群 $A(R)$ 通过 $\Phi \cdot \alpha_t = (x \mapsto \Phi(\alpha_t(x)))$ 在左侧作用于 $\Gamma(R)$；由于 Φ 是群自同构，因此 $\Phi \cdot \alpha_t$ 确实是群同态 $R \to G(R)$；由于 Φ 保持次数为 1 的系数，因此 $\Phi \cdot \alpha_t$ 确实是 ε_R 的截面。由于 $L(R)^{op}$ 嵌入 $A(R)$，因此 $L(R)$ 在右侧作用于 $\Gamma(R)$。

此外，$\alpha_t \cdot \tau$ 的希腊字母按构造为 $\alpha_{\tau(t)}(1) - 1 = (\alpha_t(1) - 1) \circ \tau$，因此 $L(R)$ 对 $\Gamma(R)$ 的作用与 Λ_R 兼容。

一般而言，对于任意群 G，若一个 G-集合存在到一个自由 G-集合的态射，则它本身也是自由的。而 $L(R)$ 显然是一个自由的 $L(R)$-集合，因此 $\Gamma(R)$ 也是。□

希腊环

最后，我们来到了所关注的定义：

定义 1.1.12. 希腊环是一个交换环 R，并配备了一个在 $L(R)$作用下的希腊运算轨道。

命题-定义 1.1.13. 设 R 是一个希腊环，并设 $\alpha \in L(R)$ 是一个希腊字母。那么，在定义给出的轨道中，存在唯一一个以 α 为希腊字母的希腊运算。称其为 R 的 α- 运算，并记相应的映射为 $\alpha_t : R \longrightarrow G(R)$ 和 $\alpha^d : R \longrightarrow R$ 。

证明。 轨道是一个 $L(R)$-传递集，因此，由于作用是自由的， Λ_R 对该轨道的限制必定是到 $L(R)$ 的双射。 □

符号 α 通常用于表示任意一个希腊字母。

例 1.1.14. 用 λ 表示 $L(\mathbb{Z})$ 的单位元，即 $t \in \mathbb{Z}[[t]]$。因此，希腊环的λ-运算就是满足 $\lambda^d(1) = 0$ 当且仅当 $d \geqslant 2$的运算。

例 1.1.2 和 1.1.3 是 λ-运算，正如所采用的记号所示。

例 1.1.15. 在研究 K-理论时，Grothendieck 在每个 λ-环上引入了一些运算，称为 γ-运算，这些运算后来成为该理论中的经典内容。若记 γ 为希腊字母 $\sum_{d \geqslant 1} t^d$ （也就是说，这是由 $\gamma^d(1) = 1$ 对任意 d所刻画的运算），那么它们与我们所说的希腊环上的 γ-运算相对应。

从运算轨道出发来定义希腊环结构是有道理的，因为许多构造并不依赖于某个特定希腊字母的选择。

命题-定义 1.1.16。 设 R 和 S 为两个希腊环，且设 $f : R \longrightarrow S$ 为一个环同态。设 $\alpha \in L(R)$ ；记 $f(\alpha) \in L(S)$ 为通过函子性得到的希腊字母

。那么，对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \in R$，等式 $f(\alpha^d(x)) = f(\alpha)^d(f(x))$ 成立这一事实不依赖于 α 的选择。

当满足该条件时，我们称 f 为希腊环同态。

证明。 设 $\beta \in L(R)$ 是另一个希腊字母，并设 $\tau \in L(R)$ 满足$\beta = \alpha \cdot \tau$。考虑如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\alpha_t} & G(R) & \xrightarrow{\cdot\tau} & G(R) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ S & \xrightarrow{f(\alpha)_t} & G(S) & \xrightarrow{\cdot f(\tau)} & G(S) \end{array}$$

于是，左侧平方交换这一事实体现了 α所需的条件，右侧平方由于函子性总是交换的，而大矩形交换这一事实体现了 β的条件。 □

命题-定义 1.1.17. 设 R 是一个希腊环，设 I 是一个理想。设$\alpha \in L(R)$。则对于任意 $d \in \mathbb{N}^*$ 都有 $\alpha^d(I) \subset I$ 这一事实不依赖于 α的选择。

当满足该条件时，我们称 I 为希腊理想。

证明。 若 β 是另一个希腊字母，那么 β^d 是 $1 \leqslant k \leqslant d$对应的$\alpha^k$ 的一个组合，因此，若每个 α^k 都保持 I，则 β^d 也保持 I。 □

维数

在本文中，我们将利用更换希腊字母这一事实来控制元素的维数。

定义 1.1.18. 设 R 是一个希腊环，且 $\alpha \in L(R)$。元素 $x \in R$ 的 α-维数是 $\alpha_t(x)$的次数（可能为无穷大）。

例 1.1.19. 在 $GW(K)$中，二次型 q 的 λ-维数是其通常意义下的维数（也称为其秩）。

例 1.1.20. 在任意希腊环中，1的 λ-维数为1。一般而言，1的 α-维数是 α的次数。

显然，元素的 α维数在很大程度上取决于α的选择。我们特别关注维数为 1 的元素：

命题1.1.21。 设 R 为一个希腊环， $X \subset R$ 为一个子集，且 $\alpha \in L(R)$。那么，存在 $\beta \in L(R)$，使得每个 $x \in X$ 都是 β维数为 *1*，当且仅当存在 $\tau \in L(R)$，使得对任意 $x \in X$

$$\alpha_t(x) = 1 + x\tau(t),$$

也就是说，存在 $a_d \in R$，使得对于任意 $d \geqslant 1$ 和任意 $x \in X$，都有$\alpha^d(x) = a_d x$。

证明。 若 β 存在，则令 $\tau = \beta^{-1} \circ \alpha$，显然对于任意 $x \in X$，都有 $\alpha_t(x) = 1 + x\tau(t)$；若 τ存在，则令 $\beta = \alpha \circ \tau^{-1}$。 □

注记 1.1.22. 证明表明，可以取 $\beta = \alpha \circ \tau^{-1}$。 β 的任何其他选择都可写成 $\beta + \delta$，其中 $\delta \in t^2 Ann_R(X)[[t]]$ （这里， $Ann_R(X)$ 是 X 在 R 中的湮灭理想）。

命题 1.1.23. 设 R 是一个希腊环，且 x_1、…、$x_r \in R$ 的 α-维数为 *1*。那么，对任意 $d \in \mathbb{N}$，有

$$\alpha^d(x_1 + \cdots + x_r) = \sum_{i_1 < \cdots < i_d} x_{i_1} \cdots x_{i_d}.$$

特别地，若 $r < d$，则 $\alpha^d(x_1 + \cdots + x_r) = 0$。

证明。 一般而言，可以通过递归看出，无论 $x_1, \ldots, x_r$ 取何值，都有

$$\alpha^d(x_1 + \cdots + x_r) = \sum_{k_1 + \cdots + k_r = d} \alpha^{k_1}(x_1) \cdots \alpha^{k_r}(x_r).$$

于是将情况限定为这些 x_i 的 α-维数为 1，此时只剩下 $k_i = 0$ 或 1。

□

半环与分次

下一章中我们需要使用半环，尤其是分次半环。因此，我们用这一小节将前面的定义推广到这一框架中；本章后续内容不会用到它。

设 S 是一个交换半环， Γ 是一个加法记号的交换群。 Γ 上的分次是指将 S 分解为加法幺半群，并满足 $S_g S_h \subset S_{g+h}$。特别地，任何交换半环都可以重言式地视为由平凡群分次。

引理 1.1.24。 设 R 是 S 的 *Grothendieck* 群，并赋予其自然的交换环结构。那么， Γ 上的任何分次都可以唯一地延拓到 R。

证明。 若 R_g 是 S_g的 Grothendieck 群，则由泛性质可知 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$，并且 $R_g R_h \subset R_{g+h}$也成立。 □

若 S 是 Γ-分次的，则称 S 上的齐次希腊运算为一个幺半群同态 $\alpha_t : S \longrightarrow G(S)$，满足 $\alpha^d(S_g) \subset S_{dg}$。

引理 1.1.25. 设 S 是一个 Γ分次交换半环，且 R 是它的 *Grothendieck* 环。那么， S 上的任意齐次希腊运算都能唯一地扩张为 R上的齐次希腊运算。

证明. 存在一个幺半群自然态射 $G(S) \to G(R)$，由复合可得 $\alpha_t : S \to G(R)$；根据泛性质，存在唯一的扩张 $R \to G(R)$，使其成为群同态。由于 R_g 由 S_g 生成，很容易看出 $\alpha^d(R_g) \subset R_{dg}$。 □

若分次环 R 配备了齐次希腊运算，那么它的希腊字母属于 $L(R_0)$。此外，若 R 是一个希腊环，且若 α，$\beta \in L(R_0)$，那么 α_t 是齐次的，当且仅当 β_t 是齐次的。因此，可以将前述构造推广到分次情形：将分次希腊环定义为配备希腊环结构的分次环，且其希腊字母属于 $L(R_0)$ 的运算均为齐次运算。取平凡分次即可直接得到非分次情形。

将 Γ-分次希腊环同态定义为既是希腊环同态又是齐次态射的态射，由此显然定义了一个 Γ-分次希腊环范畴。

例 1.1.26. 若令 $GW^{\pm}(K) = GW(K) \oplus GW^{-}(K)$，则这是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次希腊环。

例 1.1.27. 若 R 是一个希腊环，且 A 是一个交换群，则群环 $R[A]$ 自然是一个 A-分次希腊环，对任意 $\alpha \in L(R)$ $\alpha^d(xa) = \alpha^d(x)(da)$，若 $x \in R$ 且 $a \in A$，令其为上述定义。

例 1.1.28. 更准确地说，若 R 是一个 B-分次希腊环，则$R[A]$是一个 $A \times B$-分次希腊环。特别地， $GW^{\pm}(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 在 Klein 群上自然构成一个分次希腊环。

1.1.2 λ-环

我们在“自然界”中遇到的大多数希腊环（尤其是 $GW(K)$）都满足一些附加性质，而这些性质这次专门通过运算 λ来表述。

命题 1.1.29。阿贝尔群$(G(R) +_G)$（其中 $+_G$ 是形式幂级数的乘积）上赋予了唯一的、在 R 中自然的乘积 $\times_G$，使得$(G(R) +_G, \times_G)$成为一个交换环，并且对于任意 $f(t) \in G(R)$ 以及任意 $a \in R$，有

$$f(t) \times_G (1 + at) = f(at).$$

证明。为证明唯一性，由自然性可知，只需证明对于$R = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \dots]$；$s_1$，$s_2$，$\dots$]（其中 σ_i，s_i 是不定元），乘积 $f(t) \times_G g(t)$在 $f(t) = 1 + \sum_i \sigma_i t^i$ 且 $g(t) = 1 + \sum_i s_i t^i$的条件下被唯一确定。

为此，只需证明对于任意 n， $p_n(f(t) \times_G g(t))$ 唯一确定，其中 p_n：$R \to R_n = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n; s_1、\dots\dots、 s_n]$ 是自然投影。由自然性可得， $p_n(f(t) \times_G g(t))$ 是

$$(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i) \times_G (1 + \sum_{i=1}^{n} s_i t^i) \in R_n.$$

然而我们知道有一个包含关系 $R_n \subset \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n; y_1、\ldots\ldots、y_n]$，使得 σ_i 是关于 x_i 的第 i 个对称函数，而 s_i 是关于 y_i 的对称函数。因此

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t)$$

s_i也同理。因此，记住多项式的乘积是 $G(R_n)$ 中的和 $+_G$，且因此 $\times_G$ 对这一运算具有分配性:

$$(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i) \times_G (1 + \sum_{i=1}^{n} s_i t^i) = \prod_{i,j} (1 + x_i t) \times_G (1 + y_j t) = \prod_{i,j} (1 + x_i y_j t).$$

要证明其存在性，必须验证这确实在 $G(R)$ 上定义了一个自然的结合积，参见 [35, 定理 2.5]。 □

命题 1.1.30. 环 $G(R)$ 在 R 上具有唯一的自然希腊环结构，使得对任意 $a \in R$，元素 $1 + at$ 的 λ维数为 *1*。

证明. 与前一个命题一样，只需证明 $\lambda^d(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i)$ 是唯一确定的；又因为 $1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i = (1 + x_1 t) +_G \cdots +_G (1 + x_n t)$，所以有

$$\lambda^d(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i t^i) = \prod_{i_1 < \cdots < i_d} (1 + x_{i_1} \cdots x_{i_d} t).$$

这确实定义了一个希腊环结构，这一点也在 [35, thm2.6] 中得到了证明。 □

定义 1.1.31. 设 R 是一个希腊环。若 R 满足λ_t： $R \longrightarrow G(R)$ 是希腊环同态，则称 R 为一个 λ-环。

注记 1.1.32. 这与通常的定义一致：要求$\lambda_t(xy) = \lambda_t(x) \times_G \lambda_t(y)$ 且 $\lambda_t(\lambda^d(x)) = \lambda^d(\lambda_t(x))$，由此可得关于 $\lambda^d(xy)$ 和 $\lambda^n(\lambda^m(x))$ 的通常公式，其中已知希腊环结构 $G(R)$。

例 1.1.33. 环 $\mathbb{Z}$ 和 $GW(K)$ 是 λ-环。更一般地，对于一大类对称幺半阿贝尔范畴 C，Grothendieck 环 $K(C)$ 是一个 λ-环（例如，$\mathbb{Z}$ 对应于向量空间范畴，而 $GW(K)$ 对应于域 K 上非退化对称双线性空间的范畴）。

例 1.1.34. 环 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ 具有唯一的 λ-环结构，使得 $\lambda^d(x_1) = x_d$。此结构使该环成为由一个元素生成的自由 λ-环（见 [35, 定理 2.25]）。

同样，可以通过取 n组相互独立的变量，构造由 n 个元素生成的自由 λ环。

1.1.3 Pfister 元素

我们的目标是证明，对于某个希腊字母 π_n （与 K无关）， n阶 Pfister 形式在 $GW(K)$中具有 π_n维。我们将通过把 Pfister 形式的概念抽象到任意希腊环上来得到这一结果，这一过程以 1-Pfister 形式的概念为基础。

定义 1.1.35. 设 R 为希腊环， $\alpha \in L(R)$ 以及 $x \in R$。若 x是一个 α-Pfister 元素，即 $x^2 = 2x$ ，且对于任意 $d \in \mathbb{N}^*$，均有 $\alpha^d(x) = x$，则称之为 α-Pfister 元素。

若 $\alpha = \lambda$，则简称为 Pfister 元素。

一个 n-Pfister 元素是 n 个 Pfister 元素的乘积（特别地，1 是唯一的 0-Pfister 元素，而 1-Pfister 元素就是 Pfister 元素）。记 $\mathrm{Pf}_n(R)$ 为 R 中所有 n-Pfister 元素组成的集合；Pf_n 是从希腊环范畴到集合范畴的一个函子。

注记 1.1.36. 利用命题 1.1.21 可知，对于某个 α ， R 中恰好是 α-Pfister 元的那些元素满足 $x^2 = 2x$ ，且其 β-维数为 1。

在 $\alpha = \lambda$ 的情形下，可以进一步具体说明:

命题 1.1.37. 设 R 是一个希腊环。 R 的 *Pfister* 元恰好是满足 $x^2 = 2x$ 且 π-维数至多为 *1* 的 $x \in R$ ，其中 $\pi = \sum(-1)^{d+1}t^d$。

此外，它们恰好是形如 $1 - a$ 的元素，其中 a 的 λ-维数为 *1* 且满足 $a^2 = 1$。

证明。 Pfister 元是满足 $x^2 = 2x$ 且 $\lambda_t(x) = 1 + x\tau(t)$ 的元素，其中 $\tau(t) = \sum_{d \geqslant 1} t^d$。后一条件等价于：若 $\pi = \tau^{-1}$，则 $\pi_t(x) = 1 + xt$。又由于 $\tau = \frac{t}{1-t}$，容易看出其逆命题为 $\overline{\pi} = \frac{t}{1+t}$，正如所述。

设 $x \in R$，且 $a = 1 - x$。那么 $x^2 = 2x$ 等价于 $a^2 = 1$。由于 λ_t 是群同态， $\lambda_t(a) = {}^{\lambda_t(1)\,\lambda_t(x)} = {}^{1+t}_{\lambda_t\, x\, ()}$，因此 ~~$a$~~是 λ-维的这一事实等价于 $\lambda_t(x) = \frac{1+t}{1+at}$；又由于 $a^2 = 1$，这就得到 $\lambda_t(x) = 1 + \sum_{d \geqslant 1}(1-a)t^d$，因而对于任意 $d \geqslant 1$，都有 $\lambda^d(x) = x$。 □

例 1.1.38. 设 $\varphi \in I(K)$ 是一个 n-重 Pfister 形式的 Witt 类，并设 $\hat{x} \in I(K)$ 是它唯一的提升。那么 x 是 $GW(K)$ 中的一个 n-重 Pfister 元素（事实上，这些就是全部）。这也解释了为何本论文约定将这种形式的元素称为“Pfister 形式”，而不是像通常那样，将 $GW(K)$ 中一个 Pfister 形式的类称为“Pfister 形式”。

例 1.1.39. 若将 Pf 函子限制在 λ-环上，它就是可表的：若考虑 $U = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ 由一个元素生成的自由 λ环（见例 1.1.34），则可以将 P 构造为 U 对由以下元素生成的希腊理想取商空间

得到的商空间： $x_1^2 - 2x_1$ 和 $x_d - x_1$ （对于 $d \geqslant 2$）。于是， x_1 在 P中的像就是 Pfister 泛元素。

可以进一步明确 P 的结构：若将 P' U 除以由 $x_1^2 - 2x_1$ 和 $x_d - x_1$ 生成的理想，所得商空间记为 P，则作为环， P 是 P' 的一个商空间。然而 $P' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x_1$, 因此若 P 与 P' 不同构，就必有 a， $b \in \mathbb{Z}$, 使得对于某个 λ-环中的任意 Pfister 元素 x ，都有 $ax = b$；但 GW（K）中 Pfister 形式的例子表明这不成立。因此 $P = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x_1$。

例 1.1.40。 同样，函子 Pf^n 在 λ-环上可表，而表示它的环 P_n 同构于 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x)^{\otimes n}$。

这意味着，在一个 λ环中，每个 nPfister 元素都是该环中某个元素在某个态射下的像，但这个态射并不唯一，因此不能据此得出 Pf_n 可表示。我们可以称 nPfister 元素为泛型的。

为了将命题 1.1.37 推广到 nPfister 元素，我们将把讨论限制在 λ环上。

定理 1.1.41. 设 $n \in \mathbb{N}^*$。存在唯一的希腊字母 $\pi_n \in L(\mathbb{Z})$ ，使得对于每个 λ环 R， R 的每个 n*Pfister* 元素的维数都是 π_n*1*。

具体而言：

$$\pi_n = 1 - \frac{2}{1 + (1 + 2^n t)^{\frac{1}{2^{n-1}}}},$$

即：

$$\pi_{n+1} = \pi_n \circ (tC(-2^{n-1}t)), \quad \pi_n = \pi_{n+1} \circ (t + 2^{n-1}t^2)$$

其中 $C(t)$ 是卡塔兰数的生成函数，即 $C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$.

证明。 可以验证，若 π_n 由上面的公式给出，则

$$\pi_n^{-1} = \frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2^{n-1}} - 1\right].$$

因此，我们必须证明：若 φ 是一个 n-Pfister 元素，则 $\lambda_t(\varphi) = 1 + \varphi\pi_n^{-1}(t)$, 其中 π_n^{-1} 由上文给出。

对 n 进行递归。对于 $n = 1$, 这正是命题 1.1.37。假设该性质对所有不超过 $n \geqslant 1$ 的情形都成立。根据例 1.1.40，可以将问题归结为在环P_n中的一个 n 阶 Pfister 元素的 versel 情形，该元素具有无挠这一特殊性质。特别地， P_n 嵌入到$R = P_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$中；根据 [35, 命题 3.50], ，可以将 λ-环结构从 P_n 扩展到 R；因此，问题归结为在 2 可逆的环中的一个 n 阶 Pfister 元素的情形。

于是，根据 Pfister 元素的定义，很容易看出，对于任意 n 阶 Pfister 元素 x，$(\frac{x}{2^n})^i = \frac{x}{2^n}$，因此对于任意 $f \in tR[[t]]$，

$$\frac{x}{2^n} f(t) = f(\frac{x}{2^n} t). \tag{1.1.42}$$

特别地，若 x 是一个 1-Pfister 元素，则有

$$\lambda_t(x) = 1 + x\pi_1^{-1}(t) = 1 + 2\pi_1^{-1}(\frac{xt}{2}) = \frac{1 + \frac{xt}{2}}{1 - \frac{xt}{2}}.$$

由此，设 $\varphi \in \mathrm{Pf}_{n+1}(R)$，其中 $\varphi = xy$，且 $x \in \mathrm{Pf}_1(R)$和 $y \in \mathrm{Pf}_n(R)$。那么：

$$\begin{aligned}
\lambda_t(\varphi) &= \lambda_t(xy) \\
&= \lambda_t(x) \times_G \lambda_t(y) \\
&= \left[(1 + \frac{x}{2}t) -_G (1 - \frac{x}{2}t)\right] \times_G (1 + y\pi_n^{-1}(t)) \\
&= (1 + y\pi_n^{-1}(\frac{xt}{2})) -_G (1 + y\pi_n^{-1}(-\frac{xt}{2})) \\
&= \frac{1 + 2^n\pi_n^{-1}(\frac{\varphi t}{2^{n+1}})}{1 + 2^n\pi_n^{-1}(-\frac{\varphi t}{2^{n+1}})} \\
&= 1 + \frac{\varphi}{2^{n+1}} \left(\frac{1 + 2^n\pi_n^{-1}(t)}{1 + 2^n\pi_n^{-1}(-t)} - 1 \right)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由将 (1.1.42) 应用于 $f = \frac{1+2^n\pi_n^{-1}(t)}{1+2^n\pi_n^{-1}(-t)} - 1$得到。而

$$\begin{aligned}
\frac{1 + 2^n\pi_n^{-1}(t)}{1 + 2^n\pi_n^{-1}(-t)} &= \frac{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2^{n-1}}}{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2^{n-1}}} \\
&= \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2^n}
\end{aligned}$$

因此可得 $\lambda_t(\varphi) = 1 + \varphi\pi_{n+1}^{-1}(t)$。

接下来需要验证递推公式是否确实给出了适用于 π_n 的正确公式。首先，很容易证明 $tC(-2^{n-1}t)$ 和 $t + 2^{n-1}t^2$ 互为互逆函数，然后：

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1} \circ (t + 2^{n-1}t^2) &= 1 - \frac{2}{1 + (1 + 2^{n+1}(t + 2^{n-1}t^2))^{\frac{1}{2^n}}} \\
&= 1 - \frac{2}{1 + ((1 + 2^n t)^2)^{\frac{1}{2^n}}} \\
&= \pi_n.
\end{aligned}$$

□

推论 1.1.43. 我们有如下显式关系：

$$\pi_1^d = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d-1}{k-1} \lambda^k$$

$$\pi_{n+1}^d = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} 2^{(d-k)(n-1)} \frac{k}{d} \binom{2d-k-1}{d-1} \pi_n^k$$

$$\pi_n^d = \sum_{\frac{d}{2} \leqslant k \leqslant d} \binom{k}{d-k} 2^{(d-k)(n-1)} \pi_{n+1}^k.$$

证明。 根据构造，若 $\alpha = \beta \circ \tau$，则若 $\tau^k = \sum_d a_{k,\ d} t^d$，有 $\alpha^d = \sum_k a_{k,\ d} \beta^k$。

因此，上述方程可改写为

$$\left(\frac{t}{1+t}\right)^k = \sum_{d \geqslant k} (-1)^{d-k} \binom{d-1}{k-1} t^d,$$

$$\big(tC(-2^{n-1}t)\big)^k = \sum_{d \geqslant k} (-1)^{d-k} 2^{(d-k)(n-1)} \frac{k}{d} \binom{2d-k-1}{d-1} t^d,$$

et

$$(t + 2^{n-1}t^2)^k = \sum_{k \leqslant d \leqslant 2k} \binom{k}{d-k} 2^{(d-k)(n-1)} t^d.$$

第一个直接来自 $(1+t)^{-n}$ 的级数展开，第三个则来自牛顿二项式。我们可以专注于第二个，它可改写为

$$C(t)^k = \sum_{d \geqslant 0} \frac{k}{d+k} \binom{2d+k-1}{d+k-1} t^d.$$

利用函数方程$C(t) = 1 + tC(t)^2$, 可轻松通过递归证明该式，该方程给出 $C(t)^{k+1} = {}^{C}{}_{(t)^k - C(\ \ t^{\,k-1})}$。 □

推论 1.1.44。 设 R 是一个 λ-环。设 $x \in \mathrm{Pf}_n(R)$ 以及 $a \in R$ 的维数为 *1*，且满足 $a^2 = 1$。那么若 $d \geqslant 2$：

$$\pi_n^d(ax) = (-1)^d 2^{n(d-1)-1}(1-a)x.$$

证明。 由 $\lambda_t(ax) = (1+at) \times_G \lambda_t(x) = 1 + x\pi_n^{-1}(at)$，因此令 π_n 在左侧作用 $(\pi_n)_t(ax) = 1 + x\pi_n^{-1}(a\pi_n(t))$。因此我们必须证明

$$\pi_n^{-1}(a\pi_n(t)) = at + \sum_{d \geqslant 2} (-1)^d 2^{n(d-1)-1}(1-a)t^d.$$

利用 $(1-a)^m = 2^{m-1}(1-a)$ 和 $a(1-a)^n = -(1-a)^n$，可以证明右侧给出 $\frac{at}{1+2^{n-1}(1-a)t}$。

对于左边：有

$$\begin{aligned}\frac{1+a\pi_n(t)}{1-a\pi_n(t)} &= \frac{1+a\frac{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1}{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1}}{1-a\frac{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}-1}{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}+1}} \\ &= \frac{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}(1+a)+(1-a)}{(1+2^nt)^{\frac{1}{2^{n-1}}}(1-a)+(1+a)}.\end{aligned}$$

然而，由于 $(1+a)(1-a) = 0$，对于所有 $y \in R$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$，都有 $(y(1+a)+(1-a))^m = 2^{m-1}(y^m(1+a)+(1-a))$；交换 $1+a$ 和 $1-a$ 后，同样成立。因此：

$$\begin{aligned}\pi_n^{-1}(a\pi_n(t)) &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{(1+2^nt)(1+a)+(1-a)}{(1+2^nt)(1-a)+(1+a)}-1\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{2+2^n(1+a)t}{2+2^n(1-a)t}-1\right) \\ &= \frac{at}{1+2^{n-1}(1-a)t}\end{aligned}$$

如所需。 □

1.2 I^n的不变量

本部分研究取值于 Witt 环$W(K)$ 中的 I^n 不变量（Witt 不变量），以及取值于 $H^*(K, \mu_2)$ 中的上同调不变量。

结果表明，这两种情形下的结论极为相近，但直接从一种情形过渡到另一种情形并不容易。因此，我们选择采用一种混合方法，将两类不变量纳入其中，并研究取值于环 $A(K)$的不变量；该环满足若干形式性质，而这些性质恰好是相关结论得以成立的关键。这种推广略显人为，因为除了 Witt环和上同调环之外，是否还有有趣的例子能符合这些定义并不明显；但这种处理方式胜在简单明了，而且至少避免了针对我们关心的两种情形重复几乎相同的论证。

1.2.1 背景

因此，在整个这一部分中，我们固定一个函子 A :域$_{/k} \longrightarrow$ **FRing**，其中 **FRing** 是滤过环范畴。因此，我们有一个滤子 $A(K) =$

$A^0(K) \supset A^1(K) \supset \ldots$，它关于 K 是自然的；此外，我们假设它是分离的，即$\bigcap_n A^n(K) = 0$。

我们还假设存在一个自然映射 $f_1 : I^1(K) \longrightarrow A^1(K)$，满足以下条件：

(i) 对应关系

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \mapsto \{a_1, \ldots, a_n\} := f_1(\langle\langle a_1\rangle\rangle) \cdots f_1(\langle\langle a_n\rangle\rangle)$$

定义了一个单射函数 $\mathrm{Pf}_n(K) \longrightarrow A^n(K)$;

(ii) 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$，该函数可扩张为群同态$f_n : I^n(K) \longrightarrow A^n(K)$;

(iii) 若对任意 $a \in L^*$，$x \in A(K)$ 都满足 $\{a\} \cdot x \in A^{d+1}(L)$，且对任意扩张$L/K$ 都成立，则 $x \in A^d(K)$;

(iv) $\mathrm{Inv}(\mathrm{Pf}_n, A) = A(K) \oplus A(K) \cdot f_n$ 其中考虑定义在 K 上的不变量。

注意到，条件（iii）等价于：

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\forall L/K, \forall \varphi \in \mathrm{Pf}_n(K), f_n(\varphi) \cdot x \in A^{d+n}(L)\right) \Longrightarrow x \in A^d(K) \tag{1.2.1}$$

并且特别地，由分离性可得

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall L/K, \forall \varphi \in \mathrm{Pf}_n(K), f_n(\varphi) \cdot x = 0) \Longrightarrow x = 0. \tag{1.2.2}$$

还可以注意到，由构造可知，对于所有 $x \in I^n(K)$、$y \in I^m(K)$，都有：

$$f_n(x) \cdot f_m(y) = f_{n+m}(xy) \tag{1.2.3}$$

例 1.2.4. 第一个重言式的例子是 $A(K) = W(K)$（记作$A = W$），配备基本滤子 $A^n(K) = I^n(K)$，以及基本理想 Id（因此f_n =Id）。前两条性质显然，第三条可通过取 a 的一般元素来证明，第四条则是 Serre 结果（[10,例 27.17]）。在这个例子中，$\{a_1, \ldots, a_n\} = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$。

例 1.2.5. 第二个例子是 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$（记作 $A = H$），赋予滤子 $A^n(K) = \bigoplus_{d \geqslant n} H^n(K, \mu_2)$，以及 $f_1 = e_1$ （因此 $f_n = e_n$）。前两条性质由 Milnor 猜想推出，第三条仍可通过取一个一般元素来证明，第四条则仍是 Serre 的结果（[10, 定理 18.1]）。在这个例子中，$\{a_1, \ldots, a_n\} = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$。

注记 1.2.6. 然而，$A(K) = GW(K)$ 并不适用：条件（iii）不满足。事实上，若 $x \in GW(K)$ 满足 $x\langle\langle a\rangle\rangle = 0$ 对任意 $a \in L^*$，我们只能得出 x 是双曲的，而不能得出 $x = 0$，这与 (1.2.2) 矛盾。

1.2.2 不变量 f_n^d

我们在 λ-环 $GW(K)$ 的情形下应用定理 1.1.41。因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $d \in \mathbb{N}$，都有映射 $\pi_n^d \colon GW(K) \longrightarrow GW(K)$，且关于 K 是自然的。

定义 1.2.7. 对于任意 $n, d \in \mathbb{N}^*$，定义 $f_n^d \in \mathrm{Inv}^{nd}(I^n, A)$ 为 $f_n^d = f_{nd} \circ \pi_n^d$。此外，令 $f_n^0 = 1$。

例 1.2.8. 若 $A(K) = W(K)$，则 $f_n^d = \pi_n^d$（限制到 $I^n(K)$）。若 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$，则记作 $u_{nd}^{(n)} = f_n^d = e_{nd} \circ \pi_n^d$。

关于记号，为了与其他记号更加一致，本可以使用 u_n^d，但我们选择遵循将上同调不变量的次数记在下标中的传统。此时，上标用于区分次数相同的不变量，例如 $u_6^{(2)}$ 和 $u_6^{(3)}$，它们分别定义在 I^2 和 I^3 上（此外，其中一个绝不是另一个的限制）。

这些不变量的基本性质如下：

命题 1.2.9. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$，有：

(i) $f_n^0 = 1$ 和 $f_n^1 = f_n$；

(ii) 对于所有 $q, q' \in I^n(K)$：

$$f_n^d(q + q') = \sum_{k=0}^{d} f_n^k(q) \cdot f_n^{d-k}(q');$$

(iii) 对于所有 $\varphi \in Pf_n(K)$ 和 $d \geqslant 2$, $f_n^d(\varphi) = 0$。

特别地，$f_n^d(I^n(K)) \subset A^{nd}(K)$。

证明。 这三个性质是如下事实的改述：π_n 是一个希腊运算，且 n-Pfister 形式的维数为 1（见 1.1.41）；这里用到了公式 (1.2.3)。

对于最后一个断言，根据公式 (ii)，只需证明：若 x 是 Pfister 形式或其相反形式，则 $f_n^d(x) \in A^{nd}(K)$。对于 Pfister 形式，这可由上述公式直接推出；对于 Pfister 形式的相反形式，则可利用推论 1.1.44 和 $a = -1$。 □

命题 1.2.10. 若 $\varphi \in Pf_n(K), \quad a \in K^*, \quad d \geqslant 2$，则

$$f_n^d(\langle a \rangle \varphi) = (-1)^d \{-1\}^{n(d-1)-1} \{a\} f_n(\varphi).$$

证明。 这是推论 1.1.44 的直接应用。 □

命题 1.2.11。 若 $q = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \in I^n(K)$ 其中 φ_i 是一个 n-*Pfister* 形式，则对任意 $d \geqslant 1$：

$$f_n^d(q) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant r} f_n(\varphi_{i_1}) \cdots f_n(\varphi_{i_d}),$$

$et\ e$特别地 $f_n^d(q) = 0$ 若 q 是由满足 $k < d$ 的 k n-重 *Pfister* 形式之和，则。

证明。 这是命题 1.1.23 的直接推论。 □

推论 1.2.12。 若 -1 在 K 中是一个平方，则对任意 $q \in I^n(K)$， $f_n^d(q) = 0$ 当 d 足够大时。

证明。 当 -1 是一个平方时，任意 $q \in I^n$ 都是 n-重 Pfister 形式之和，因此这由该命题得出。 □

注记 1.2.13。 可以证明，对固定的 K/k ，(f_n^d) 是唯一满足命题 1.2.9 条件的映射族 $I^n(K) \longrightarrow A(K)$。事实上，任何满足 (i) 和 (ii) 的族 (a_n^d) 都必须满足命题 1.2.11 的结论，因此其在 Pfister 形式之和上的取值是确定的。对这样的 q 利用 (ii) 展开 $a_n^d(q - q)$，再由递归可得 $a_n^d(-q)$ 也已确定，因此通过求和，其在任意一个元素上的取值也就确定了。

下面给出命题 1.2.11 的一个应用，它用到了 $A(K) = W(K)$ 的情形：

命题 1.2.14. 若 $I^n(K)$ 中的每个形式都可以写成至多 r n 个 *Pfister* 形式之和，其中 $r \in \mathbb{N}^*$，则 $I^d(K) = 0$ 对任意$d \geqslant n(r+1)$都成立。

证明. 首先，只需证明 $I^{n(r+1)}(K) = 0$，因为一般而言，若 $I^d(K) = 0$ ，则 $I^{d+1}(K) = 0$。

因此只需证明每个 $n(r+1)$-Pfister 形式都为零。而这样的形式可写成 $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_{r+1}$，其中 φ_i 是 n-Pfister 形式。

由此， $\varphi = \pi_n^{r+1}(q)$，且 $q = \varphi_1 + \cdots + \varphi_{r+1}$。然而，根据假设， q 可以写成至多 r n 个 Pfister 形式之和，因此由命题 1.2.11 $\pi_n^{r+1}(q) = 0$。 □

注记 1.2.15. 这个命题也可以通过使用 Pfister 主定理独立证明。

1.2.3 移位算子

为简化记号，固定一个 $n \in \mathbb{N}^*$，并令 $M = \mathrm{Inv}(I^n, A)$，以及 $M^d = \mathrm{Inv}(I^n, A^d)$。

命题-定义 1.2.16. 设 $\varepsilon = \pm 1$。存在唯一一个次数为 $-n$的滤过$A(k)$-模态射，

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{\varepsilon}: & M & \longrightarrow & M \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha^{\varepsilon}, \end{array}$$

使得

$$\alpha(q+\varepsilon\varphi) = \alpha(q) + \varepsilon f_n(\varphi)\cdot\alpha^{\varepsilon}(q) \tag{1.2.17}$$

对所有 $\alpha \in M$, $q \in I^n(K)$ 以及 $\varphi \in \mathrm{Pf}_n(K)$。

证明。 设 $\alpha \in M$ 和 $q \in I^n(K)$。对于任意扩张 L/K 以及任意$\varphi \in \mathrm{Pf}_n(L)$，定义

$$\beta_q(\varphi) = \alpha(q+\varepsilon\varphi).$$

于是 $\beta_q \in \mathrm{Inv}(\mathrm{Pf}_n, A)$，定义在 K 上。根据关于 A 的条件（iv），存在唯一的 x_q, $y_q \in A(K)$，使得 $\beta_q = x_q + y_q \cdot f_n$。

取 $\varphi = 0$，可见 $x_q = \alpha(q)$，于是定义 $\alpha^{\varepsilon}(q) = \varepsilon y_q$，这便得到了所需公式以及唯一性。

如此定义的 Φ^{ε} 显然是 $A(k)$-模之间的态射，并且其次数确为 $-n$，因为若 $\alpha \in M^d$，那么对任意 $q \in I^n(K)$，$f_n(\varphi)\cdot\alpha^{\varepsilon}(q) \in A^d(L)$ 对任意 $\varphi \in Pf_n(L)$ 以及任意扩张 L/K 均成立，因此由关于 A 的条件（iii），$\alpha^{\varepsilon}(q) \in A^{d-n}(K)$。□

注记 1.2.18. 算子 Φ^{ε} 依赖于 n，但记号中省略了这一点，因为不会因此产生任何歧义。

Φ^+ 与 Φ^-之间存在自然联系，体现了加法与减法可交换且互为逆运算：

命题 1.2.19. 算子 Φ^+ 与 Φ^- 可交换，并且对任意$\alpha \in M$，有

$$\alpha^+ - \alpha^- = \{-1\}^n\alpha^{+-} = \{-1\}^n\alpha^{-+}.$$

证明。 设 $q \in I^n(K)$，以及 φ, $\psi \in \mathrm{Pf}_n(L)$。我们有

$$\begin{aligned} \alpha(q+\varphi-\psi) &= \alpha(q+\varphi) - f_n(\psi)\alpha^-(q+\varphi) \\ &= \alpha(q) + f_n(\varphi)\alpha^+(q) - f_n(\psi)\alpha^-(q) - f_n(\varphi)f_n(\psi)\alpha^{-+}(q) \end{aligned}$$

但也有

$$\begin{aligned} \alpha(q+\varphi-\psi) &= \alpha(q-\psi) + f_n(\varphi)\alpha^+(q-\psi) \\ &= \alpha(q) - f_n(\psi)\alpha^-(q) + f_n(\varphi)\alpha^+(q) - f_n(\varphi)f_n(\psi)\alpha^{+-}(q) \end{aligned}$$

因此 $f_n(\varphi)f_n(\psi)\alpha^{-+}(q) = f_n(\varphi)f_n(\psi)\alpha^{+-}(q)$，又由于这对所有 φ, ψ 在任意扩张上都成立，根据条件 (1.2.2)，可得 $\alpha^{+-} = \alpha^{-+}$。

现在若取 $\varphi = \psi$，上面的公式给出

$$f_n(\varphi)\alpha^+(q) - f_n(\varphi)\alpha^-(q) = f_n(\varphi)f_n(\varphi)\alpha^{+-}(q)$$

因此可以利用 $f_n(\varphi)f_n(\varphi) = \{-1\}^n f_n(\varphi)$，并再次使用条件 (1.2.2) 得出结论。
□

由于这些算子彼此可交换，对于所有 s， $t \in \mathbb{N}$ 以及任意 $\alpha \in M$，定义

$$\alpha^{s+,t-} = (\Phi^+)^s \circ (\Phi^-)^t(\alpha), \tag{1.2.20}$$

它实际上与算子的应用顺序无关。

我们称 $\Phi = \Phi^+$ 为移位算子，理由如下这个初等结果：

命题 1.2.21。对任意 $d \in \mathbb{N}$， $\Phi(f_n^{d+1}) = f_n^d$(且 $\Phi(f_n^0) = 0$)。

证明。 需要证明 $f_n^{d+1}(q+\varphi) = f_n^{d+1}(q) + f_n(\varphi) \cdot f_n^d(q)$，这直接由命题 1.2.9 得出。
□

Φ^- 在 f_n^d 上的作用更为复杂，这反映出f_n^d 在 Pfister 形式的和方面表现得远好于在此类形式的减法方面。

命题 1.2.22。设 $d \in \mathbb{N}^*$。那么

$$(f_n^d)^- = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{d-k-1}\{-1\}^{n(d-k-1)} f_n^k.$$

证明。 设 $q \in I^n(K)$ 且 $\varphi \in \mathrm{Pf}_n(K)$。那么

$$\begin{aligned} f_n^d(q-\varphi) &= \sum_{k=0}^{d} f_n^k(q) f_n^{d-k}(-\varphi) \\ &= f_n^d(q) + \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{d-k}\{-1\}^{n(d-k-1)} f_n(\varphi) f_n^k(q) \end{aligned}$$

使用命题 1.2.10 和 $a = -1$。 □

除了在不变量 f_n^d方面的表现外，Φ 的主要性质如下：

命题 1.2.23。 态射 Φ^ε对任意 $d \in \mathbb{N}$诱导出一个态射 $M/M^{d+n} \to M/M^d$，从而得到如下正合列：

$$0 \longrightarrow A(k)/A^{d+n}(k) \longrightarrow M/M^{d+n} \longrightarrow M/M^d.$$

特别地， Φ^ε 的核是不变量常数子模。

证明。若 α，$\beta \in M$ 模 M^{d+n} 同余，则由于

$$\Phi^{\varepsilon}(M^{d+n}) \subset M^{d},$$

$\Phi^{\varepsilon}(\alpha)$ 和 $\Phi^{\varepsilon}(\beta)$ 模 M^{d} 同余，这证明了第一个断言 .

设 $\alpha \in M$ 满足 $\alpha^{\varepsilon} \in M^{d}$。那么对任意 $q \in I^{n}(K)$ 以及任意 $\varphi \in \mathrm{Pf}_{n}(K)$，有 $\alpha(q+\varepsilon\varphi) \equiv \alpha(q)$ 模 $A^{n+d}(K)$。因此，写成 $q = q_1 - q_2$，其中 q_i 是由 n 个 Pfister 形式组成的和，只需对每个和中的项数作简单递归，就可看出 $\alpha \equiv \alpha(0)$ 模 M^{d+n}（其中 $\alpha(0)$ 被视为常值不变量）。

对于最后一个断言，取足够大的 d。由于 $A(K)$ 上的滤子是分离的，可知若 $\alpha^{\varepsilon} = 0$，则 $\alpha = \alpha(0)$。 □

注记 1.2.24. 用同样的证明思路，可以直接证明 $\mathrm{Ker}(\Phi) = A(k)$，但较为精细的滤过版本将在后文派上用场。

推论 1.2.25. 设 M' 为由 f_n^d（$d \in \mathbb{N}$）生成的 M 的子模。那么 Φ^{ε} 诱导出一个正合列

$$0 \to A(k) \longrightarrow M' \longrightarrow M'[-n] \longrightarrow 0.$$

证明. 只需证明满射性，而这可由关于 Φ^{+} 的命题 1.2.21 和关于 Φ^{-} 的命题 1.2.22 轻易推出。 □

注记 1.2.26. 这一切意味着，Φ 可以看作某种微分算子：若已知某个不变量 α 的 α^{+}，就可以通过“积分”求出 α，其中带有某个积分常数。具体而言，我们将在下一部分证明，总可以写成 $\alpha^{+} = \sum a_d f_n^d$；那么 $\alpha = \alpha(0) + \sum a_d f_n^{d+1}$。

我们将经常使用这种方法，通过 α^{+} 按递归计算 α，这称为“按位移递推”。

由前面的内容可以得出一个初等结论：

推论 1.2.27. 设 $\alpha \in M$ 是加法的（也就是说，对于所有 q、q'，都有 $\alpha(q+q') = \alpha(q) + \alpha(q')$）。那么 $\alpha = a f_n$ 对于唯一的一个 $a \in A(k)$ 成立。

证明。对于所有 $q \in I^{n}(K)$，$\varphi \in \mathrm{Pf}_{n}(K)$，有 $\alpha(q+\varphi) = \alpha(q) + \alpha(\varphi)$，因此 $\alpha(\varphi) = f_n(\varphi)\alpha^{+}(q)$。特别地，对于任意 q'，$f_n(\varphi)\alpha^{+}(q) = f_n(\varphi)\alpha^{+}(q')$；又因为这对任意扩张上的所有 φ 都成立，所以 α^{+} 是一个常值不变量，记作 $a \in A(k)$。于是 $\alpha^{+} = (a f_n)^{+}$，并且由于可加性，$\alpha(0) = 0$，因此确有 $\alpha = a f_n$。由于 $a = \alpha^{+}(0)$，它由此唯一确定。 □

1.2.4 不变量的分类

回顾一下，我们给定了 $n \in \mathbb{N}^*$，并定义了 $M = \mathrm{Inv}(I^n, A)$ 和$M^d = \mathrm{Inv}(I^n, A^d)$。

我们希望证明， M 中的任意元素都可以唯一地写成一个 $\sum a_d f_n^d$组合，这一点可由下述命题看出：

命题 1.2.28. $A(k)/A^d(k)$-模 M/M^d由满足$nk < d$的 f_n^k生成。

证明。 我们对 d进行递归证明。对于 $d = 0$，这显然成立，因为$M^0 = M$。假设该性质对直到 $d-1$的情形均成立，并取 $\alpha \in M$；记$\bar{\alpha} \in M/M^d$。根据归纳假设， $\Phi(\bar{\alpha}) = \sum a_k f_n^k$，其中 $nk < d-n$，因此若令 $\beta = \alpha - \sum a_k f_n^{k+1}$，则有 $\Phi(\bar{\beta}) = 0$。由此，根据命题 1.2.23，β模 M^d同余于一个常值不变量 a_{-1}，从而 $\bar{\alpha} = \sum a_{k-1} f_n^k$，其中 $nk < d$。 □

注记 1.2.29. 这也表明，命题 1.2.23 的正合列可以在右侧补上一个 0，因为所有 f_n^d 都属于 Φ^ε 的像（论证与推论 1.2.25 相同）。

问题在于，要用 f_n^d 表示一个不变量，通常需要使用无限线性组合，正如下例所示。

例 1.2.30. 我们考虑 $A = W$ 的情形。设 $\alpha(q) = \langle \mathrm{disc}(q) \rangle$；这是集合 I 的 Witt 不变量。那么 $\alpha^+ = -\alpha$；事实上：

$$\langle \mathrm{disc}(q + \langle\langle a \rangle\rangle) \rangle = \langle \mathrm{disc}(q) a \rangle = \langle \mathrm{disc}(q) \rangle - \langle\langle a \rangle\rangle \langle \mathrm{disc}(q) \rangle.$$

因此， α 不能写成 f_1^d 的有限线性组合，因为应用 Φ^+ 时，这种组合的长度会严格缩短。另一方面，至少目前可以设想将其形式地写成（不过，本部分的结果可以证明这确实是有效的）

$$\alpha = \sum_{d \in \mathbb{N}} (-1)^d f_1^d.$$

然而，这样的无限线性组合未必总是有良好定义。由于 f_n^d 取值于 A滤子中严格递增的秩，任何和 $\sum_{d \in \mathbb{N}} a_d f_n^d$ 都能定义一个取值于 A完备化中的不变量，但初步看来并不一定属于 A 本身。

例 1.2.31. 若 k 是形式实的，那么 $\sum_d f_1^d$将 $-\langle\langle -1 \rangle\rangle$ 映射到 $\sum_{d \in \mathbb{N}} (-1)^d \{-1\}^d$，而它对于 $A = W$或 $A = H$都不是 $A(k)$的一个元素。

正如这个例子所强调的，问题在于f_n^d对 Pfister 形式的相反数表现不佳（事实上，任何和 $\sum_{d\in\mathbb{N}} a_d f_n^d$若限制在*Pfister* 形式的和 上，取值都在 A 中）。为了对 M作出令人满意的描述，我们将引入一个新的家庭，其定义平衡了 Pfister 形式的和与差，并将证明，这个家庭的元素的任何组合，即使是无限组合，其取值也都在 A中。

定义 1.2.32. 对任意 $d \in \mathbb{N}$，定义 $g_n^d \in \mathrm{Inv}(I^n, A^{nd})$ 如下：

- $g_n^0 = 1$;
- 若 $d \in \mathbb{N}$ 为偶数，$(g_n^{d+1})^- = g_n^d$ 且 $g_n^{d+1}(0) = 0$;
- 若 $d \in \mathbb{N}$ 为奇数，$(g_n^{d+1})^+ = g_n^d$ 且 $g_n^{d+1}(0) = 0$。

推论 1.2.25 表明，这些条件唯一地定义了 g_n^d。此外，注意到 $g_n^1 = f_n$。

注记 1.2.33. 我们注意到，若 -1 是 k中的一个平方，则 $g_n^d = f_n^d$。这与以下事实相符：若 -1 是一个平方，则 $I^n(K)$中的每个元素都是 Pfister 形式之和，因此前面提出的问题不会出现。

例 1.2.34. 在 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$ 的情形下，我们将记作 $g_n^d = v_{nd}^{(n)}$，以便与我们表示上同调不变量的方式保持一致。

这个定义平衡了 Φ 和 Φ^-，使两个算子同时具有合理的性质：

命题 1.2.35. 设 $d \in \mathbb{N}$。则：

$$(g_n^{d+2})^{+-} = (g_n^{d+2})^{-+} = g_n^d;$$

$$(g_n^{d+1})^+ = \begin{cases} g_n^d & si\ d\ impair \\ g_n^d + \{-1\}^n g_n^{d-1} & si\ d\ pair; \end{cases}$$

$$(g_n^{d+1})^- = \begin{cases} g_n^d & si\ d\ pair \\ g_n^d - \{-1\}^n g_n^{d-1} & si\ d\ impair. \end{cases}$$

证明。根据定义 1.2.32，若 d 为奇数，则 $(g_n^{d+2})^- = g_n^{d+1}$且 $(g_n^{d+1})^+ = g_n^d$；若 d 为偶数，则 $(g_n^{d+2})^+ = g_n^{d+1}$且 $(g_n^{d+1})^- = g_n^d$。在所有情况下，都可以验证第一个公式成立，因为这两个算子可交换。

对于接下来的两个情形，我们使用 $(g_n^{d+1})^+ - (g_n^{d+1})^- = \{-1\}^n g_n^{d-1}$，它来自命题 1.2.19。最后，根据 d 的奇偶性进行区分即可得出结论。 □

f_n^d 与 g_n^d 之间的关系为：

命题 1.2.36. 对于任意 $d \in \mathbb{N}^*$，有：

$$g_n^d = \sum_{k=\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1}^{d} \binom{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}{k - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1} \{-1\}^{n(d-k)} f_n^k$$

$$f_n^d = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 1}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} \{-1\}^{n(d-k)} g_n^k.$$

证明。 记 α_d 为由第一个公式右侧定义的不变量。若 $d = 2m$，则公式可写为

$$\alpha_d = \sum_{k=m+1}^{2m} \binom{m-1}{k-m-1} \{-1\}^{n(2m-k)} f_n^k$$

由此得到

$$\alpha_d^+ = \sum_{k=m+1}^{2m} \binom{m-1}{k-m-1} \{-1\}^{n(2m-k)} f_n^{k-1},$$

若 $d = 2m+1$，则公式变为

$$\alpha_d = \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{m}{k-m-1} \{-1\}^{n(2m+1-k)} f_n^k$$

d'où

$$\alpha_d^+ = \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{m}{k-m-1} \{-1\}^{2m+1-k} f_n^{k-1}.$$

因此需要验证，在这两种情况下，对 α_{d+1}^+ 都得到定义 g_n^d的递归。若 $d = 2m+1$，这显而易见；若 $d = 2m$，则需比较

$$\sum_{k=m}^{2m} \binom{m}{k-m} \{-1\}^{n(2m-1)} f_n^k$$

et

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \binom{m-1}{k-m-1} \{-1\}^{n(2m-k)} f_n^k + \sum_{k=m}^{2m-1} \binom{m-1}{k-m-2} \{-1\}^{n(2m-k)} f_n^k$$

很容易看出它们相等。

为证明第二个公式，可以对第一个公式取逆，或者采用同样的方法。设 β_d 由第二个公式的右侧定义

。于是有:

$$\begin{aligned}
\beta_d^+ &= (-1)^d \sum_m \binom{d-m-1}{m-1} \{-1\}^{n(d-2m)} (g_n^{2m})^+ \\
&+ (-1)^{d+1} \sum_m \binom{d-m-2}{m-1} \{-1\}^{n(d-2m-1)} (g_n^{2m+1})^+ \\
&= (-1)^d \sum_m \binom{d-m-1}{m-1} \{-1\}^{n(d-2m)} g_n^{2m-1} \\
&+ (-1)^{d+1} \sum_m \binom{d-m-2}{m-1} \{-1\}^{n(d-2m-1)} (g_n^{2m} + \{-1\}^n g_n^{2m-1}) \\
&= (-1)^{d+1} \sum_m \binom{d-m-2}{m-1} \{-1\}^{n(d-2m-1)} g_n^{2m} \\
&+ (-1)^d \sum_m \left(\binom{d-m-1}{m-1} - \binom{d-m-2}{m-1} \right) \{-1\}^{n(d-2m)} g_n^{2m-1} \\
&= (-1)^{d-1} \sum_m \binom{d-1-m-1}{m-1} \{-1\}^{n(d-1-2m)} g_n^{2m} \\
&+ (-1)^{d-1+1} \sum_m \binom{d-m-1}{m-2} \{-1\}^{n(d-2m)} g_n^{2m-1}
\end{aligned}$$

由此可得 β_{d-1}。 □

推论 1.2.37. 特别地，$(f_n^i)_{i\leqslant d}$ 和$(g_n^i)_{i\leqslant d}$ 生成 M的同一个子模。

证明. 可以看出，过渡矩阵是三角形的，且对角线上全为 1。

□

定义 g_n^d 时符号平衡的关键结果如下:

命题 1.2.38. 设 $q \in I^n(K)$，可写为 $q = \sum_{i=1}^s \varphi_i - \sum_{i=1}^t \psi_i$，其中 $\varphi_i, \psi_i \in \mathrm{Pf}_n(K)$。那么对任意 $d > 2\max(s,t)$，$g_n^d(q) = 0$。

证明. 我们可以在其中一个和中添加双曲形式，使得 $s = t$。于是我们通过对 s 进行递归来证明该命题：若 $s = 0$ 则$q = 0$，因此对于 $d > 0$，实际上有 $g_n^d(q) = 0$，根据构造可得。

若对于某个 $s \in \mathbb{N}^*$，结论在直至 $s-1$ 时均成立，则可写成 $q' = q - \varphi_s$和 $q'' = q' + \psi_s$。我们有

$$\begin{aligned}
g_n^d(q) &= g_n^d(q') + f_n(\varphi_s)(g_n^d)^+(q') \\
&= g_n^d(q'') - f_n(\psi_s)(g_n^d)^-(q'') + f_n(\varphi_s)(g_n^d)^+(q'') \\
&- f_n(\varphi_s) f_n(\psi_s)(g_n^d)^{+-}(q'').
\end{aligned}$$

而根据命题 1.2.35，$(g_n^d)^-$、$(g_n^d)^+$ 和 $(g_n^d)^{+-}$ 均可表示为满足 $k \geqslant d-2$ 的 g_n^k 的组合，因此可对 q'' 应用归纳假设。

□

推论 1.2.39. 若 $q \in I(K)$ 是维数为 $2m$ 的一个形式的 *Witt* 类，则对任意 $d > 2m$，$g_1^d(q) = 0$。

证明。若 $q = \langle a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\rangle$，则 $q = \sum_{i=1}^m \langle\langle -a_i\rangle\rangle - \langle\langle b_i\rangle\rangle$，由该命题即可得证。 □

现在可以证明中心定理：

定理 1.2.40. 设 $N = A(k)^{\mathbb{N}}$，它是一个关于滤子 $N^m = \{(a_d)_{d\in\mathbb{N}} \mid a_d \in A^{m-nd}\}$ 的 $A(k)$-滤子模。

下面的映射是互逆的$A(k)$-滤模：

$$\begin{array}{rccc} F: & N & \xrightarrow{\sim} & M \\ & (a_d) & \longmapsto & \sum_d a_d g_n^d, \\ G: & M & \xrightarrow{\sim} & N \\ & \alpha & \longmapsto & (\alpha^{[d]}(0))_d. \end{array}$$

其中，若 $d = 2s$，记作 $\alpha^{[d]} = \alpha^{s+,s-}$；若 $d = 2s+1$，记作 $\alpha^{[d]} = \alpha^{(s+1)+,s-}$。

证明。首先，映射 F 定义良好，因为根据命题 1.2.38，对于任意固定的 $q \in I^n(K)$，当 d 足够大时，均有 $g_n^d(q) = 0$。于是 F 和 G显然是模态射，而它们保持滤子的性质，正是对 g_n^d 取值于 A^{nd}以及Φ^ε 的次数为 $-n$这一事实的重新表述。

利用命题 1.2.35，很容易看出，若 $\alpha = \sum_d a_d g_n^d$，则$a_{2s} = \alpha^{s+,s-}(0)$ 且 $a_{2s+1} = \alpha^{(s+1)+,s-}(0)$。因此 $G \circ F = \mathrm{Id}$。

现在证明 G 是单射，从而完成定理的证明。设 $\alpha \in \mathrm{Ker}(G)$且 $d \in \mathbb{N}$。根据命题 1.2.28 和推论 1.2.37，可知 α 模 M^d同余于某个组合 $\sum_{nk<d} a_k g_n^k$。由此，命题 1.2.23 的正合列表明 $a_k \equiv \alpha^{[k]}$模 $A^{d-nk}(k)$等于(0)，因此，由于 $\alpha^{[k]}(0) = 0$，$a_k \in A^{d-nk}(k)$。这意味着$\sum_{nk\leqslant d} a_k g_n^k \in M^d$，从而 $\alpha \in M^d$。由于这对任意 $d \in \mathbb{N}$都成立，我们可以得出 $\alpha = 0$。

□

由此可以轻易推出以下结果，这对上同调不变量十分重要：

推论 1.2.41. 取值于 $H^d(K, \mu_2)$ 的任意 I^n 不变量，都可提升为取值于 $I^d(K)$的不变量。

证明。这仅仅是因为，在 $A = H$ 情形下作为 f_n^d 的 $u_{nd}^{(n)}$ 可以提升为 π_n^d。

□

推论1.2.42。 任意 $\alpha \in M$ 都可以唯一地写成 $\sum a_d f_n^d$，其中 $a_d \in A(k)$，取 $a_d = \alpha^{d+}(0)$。特别地， α 由其在 *Pfister*形式的和上的取值确定。

证明。 利用命题 1.2.36 的公式，可以看出，对 g_n^d 的任意 $A(k)$系数组合，仍然得到 f_n^d的同类组合。关于 a_d 的公式显然；又由于 $\Phi^d(\alpha)(0)$完全由 α 在 Pfister 形式之和上的取值所确定，因此可得所述结果。

□

注记 1.2.43。 如前所述，若对 f_n^d取无限线性组合，通常会得到一个取值于$\hat{}A$的不变量，其中$\hat{}A$是 A 关于其滤子的完备化。可以调整上述证明来说明，$\mathrm{Inv}(I^n, \hat{}A)$恰好是满足 $a_d \in \hat{}A(k)$的 $\sum a_d f_n^d$组合；或者等价地，是 $\sum a_d g_n^d$组合，两者已无区别。

一种理解方式：若观察命题 1.2.36 的公式，可以发现，若将 $\sum a_d g_n^d$用 $a_d \in A(k)$ 表示为关于 f_n^d的函数，就得到$\sum b_d f_n^d$用 $b_d \in A(k)$ 表示；而若从 $\sum a_d f_n^d$用 $a_d \in A(k)$ 表示出发，一般会得到 $\sum b_d g_n^d$用 $b_d \in \hat{}A(k)$ 表示（因为将 f_n^d表示为关于g_n^k 的函数时，会涉及任意小的 k ，而反向表示时则不会）。

注记 1.2.44. 若 k 不是形式实的，则当 $\{-1\}^d = 0$ 足够大时， d 成立，因此根据命题 1.2.10 $f_n^d(-\varphi)$，对于任意 $\varphi \in \mathrm{Pf}_n(K)$， $= 0$ 成立。因此，在这种情况下，对于任意 $q \in I^n(K)$，当 d 足够大时， $f_n^d(q) = 0$ 成立（理由与命题 1.2.11 中相同），于是定理中可以用 f_n^d 代替 g_n^d （其中 $G(\alpha) = (\alpha^{d+}(0))_d$）。在极端情况下，若 -1 是 k中的一个平方，则甚至有 $f_n^d = g_n^d$，如命题 1.2.36 所示。一般而言，当 k 不是形式实的时，该命题表明，一个和 $\sum a_d f_n^d$这次可以写成 $\sum b_d g_n^d$用 $b_d \in A(k)$ 表示，这与我们在前一条注记中的记述相反。

另一方面，例 1.2.31 表明，当 k 形式实时，不能使用 f_n^d；因此可以得到一个精确的刻画： f_n^d 的任何组合都取值于 A ，当且仅当 k 不是形式实的。

注记 1.2.45. 我们看到，可以构造上同调不变量α （例如 $\alpha = \sum_d v_{nd}^{(n)}$ ），使得尽管对于任意固定的 q， $\alpha(q)$ 的上同调次数有界，但当 q 变化时，它并非一致有界（因此 α确实取值于 $H^*(K, \mu_2)$，但不取值于任何 $H^d(K, \mu_2)$）。从某种意义上说，这反映了 I^n的“无限”性质；这种现象在代数群不变量中从未出现。

次数一致有界的上同调不变量子模，恰好是由 f_n^d （或 g_n^d）有限生成的子模 M'。

1.2.5 代数结构

由于 Inv(I^n, A) 不仅是一个 $A(k)$-模，而且还是一个代数，我们希望了解乘积如何用基元素 f_n^d 表示。

回顾一下，多项式系数 $\binom{n}{a_1 \dots, a_r}$（其中 $a_1 + \cdots + a_r = n$）定义为 $\frac{n!}{a_1! \cdots a_r!}$（特别地，通常的二项式系数 $\binom{n}{m}$ 为 $\binom{n}{m, n-m}$）。当 $m < 0$ 或 $m > n$时，我们仍允许写作 $\binom{n}{m}$，此时其值为 0。

命题 1.2.46。设 s, $t \in \mathbb{N}$。有

$$f_n^s \cdot f_n^t = \sum_{d=\max(s,t)}^{s+t} \binom{d}{s+t-d, d-s, d-t} \{-1\}^{n(s+t-d)} f_n^d.$$

证明。设 $q \in I^n(K)$ 且 $\varphi \in \mathrm{Pf}_n(K)$。那么有

$$(f_n^s \cdot f_n^t)(q+\varphi) = (f_n^s(q) + f_n(\varphi) f_n^{s-1}(q)) \cdot (f_n^t(q) + f_n(\varphi) f_n^{t-1}(q))$$

d'où

$$\Phi\left(f_n^s \cdot f_n^t\right) = f_n^s \cdot f_n^{t-1} + f_n^{s-1} \cdot f_n^t + \{-1\}^n f_n^{s-1} \cdot f_n^{t-1}. \tag{1.2.47}$$

我们用递归法，具体来说，对 (s, t) 按字典序进行递归。若 $s = 0$ 或 $t = 0$，结论显然。由对称性，不妨设 $s > t$（此时还剩下 $s = t$ 的情形，可用类似方法处理）。

于是，利用递归，可以将 (1.2.47) 中的每一项替换，并重新排列各项，得到

$$\begin{aligned}\Phi\left(f_n^s \cdot f_n^t\right) = &\binom{s}{t} \cdot \{-1\}^{nt} f_n^{s-1} + \binom{s+t}{t} f_n^{s+t-1} \\ &+ \sum_{d=s}^{s+t-2} \binom{d+1}{s+t-d-1, d-s+1, d-t+1} \{-1\}^{n(s+t-d-1)} f_n^d\end{aligned}$$

其中，f_n^{s-1}前的系数使用 $\binom{s-1}{t} + \binom{s-1}{t-1} = \binom{s}{t}$，$f_n^{s+t-1}$前的系数使用 $\binom{s+t-1}{t} + \binom{s+t-1}{t-1} = \binom{s+t}{t}$，其余各项则使用 $\binom{d}{s+t-1-d, d-s+1, d-t} + \binom{d}{s+t-1-d, d-s, d-t+1} + \binom{d+1}{s+t-d-2, d-s+1, d-t+1} = \binom{d+1}{s+t-d-1, d-s+1, d-t+1}$。

于是，我们利用注记 1.2.26 中的思路，找出预期的公式 $f_n^s \cdot f_n^t$。 □

可以列举几个简单的特殊情形，它们尤其适用于上同调。引入一些记号：若 s, $t \in \mathbb{N}$，则将分别对 s 和 t 的二进制表示进行逻辑或 运算和逻辑与 运算所得的整数记为 $s \vee t$ 和 $s \wedge t$。特别地，$s \vee t + s \wedge t = s + t$。若$s \wedge t = 0$，则称 s 和 t 的二进制表示不相交。

推论 1.2.48. 若 $A(k)$ 的特征为 2，则：

$$f_n^s \cdot f_n^t = \{-1\}^{s\wedge t} f_n^{s\vee t}.$$

若 -1 是 k 中的平方，则当 s 和 t 具有不相交的二进制表示时，$f_n^s \cdot f_n^t$ 等于 f_n^{s+t}，否则等于 0 。

证明。 对于第一点，需要应用组合引理 1.2.49。对于第二点，稍后将证明（见 1.2.53），若 -1 是平方，则 $A(k)$ 具有特征 2。 □

引理 1.2.49。 多项式系数 $\binom{m}{s+t-m,m-s,m-t}$ 为奇数，当且仅当 $m = s \vee t$。

证明。 众所周知，对于任意 $a \in \mathbb{Z}$，$a!$ 的 2 进赋值为 $a - \nu(a)$，其中 $\nu(a)$ 表示 a 的二进制表示中 1 的个数。因此：

$$\begin{aligned} v_2\binom{m}{s+t-m,m-s,m-t} &= (m-\nu(m)) - (s+t-m-\nu(s+t-m)) \\ &\quad - (m-s-\nu(m-s)) - (m-t-\nu(m-t)) \\ &= \nu(s+t-m) + \nu(m-s) + \nu(m-t) - \nu(m). \end{aligned}$$

但很容易看出，对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}$，$\nu(a+b) \leqslant \nu(a) + \nu(b)$，等号成立当且仅当 $a \wedge b = 0$。因此，$\binom{m}{s+t-m,m-s,m-t}$ 是奇数，当且仅当 $s+t-m$、$m-s$ 和 $m-t$ 的二进制表示两两不相交。

我们断言这等价于 $m = s \vee t$。事实上，若 $m = s \vee t$，这是显然的；若 $m \neq s \vee t$，则考虑 m 和 $s \vee t$ 不同的最低位；在该位置，s、t 和 m 的比特有几种可能：s 为 1 而 m 为 0，t 为 1 而 m 为 0，或者 s 和 t 为 0 而 m 为 1。在所有这些情况下，$m-s$、$m-t$ 和 $s+t-m$ 中至少有两个数在该位置为 1，因此它们的二进制表示不相交。 □

注记 1.2.50. 当 $A(k)$ 的特征为 2 时，可为 M'（由 f_n^d 的有限组合构成的不变量子模）得到一个非常简单的代数表示有限 （要为 $\mathrm{Inv}(I^n, A)$ 给出表示则更为棘手，因为必须使用无限和，才能将任意元素表示为 f_n^d 的组合）。

事实上，$A(k)$-代数 M'a 的生成元为 $x_i = f_n^{2^i}$，这些生成元之间的关系由 $x_i^2 = \{-1\}^{n2^i} x_i$ 给出。

1.2.6 从 I^n 到 I^{n+1} 的限制

显然存在一个从 $\mathrm{Inv}(I^n, A)$ 到 $\mathrm{Inv}(I^{n+1}, A)$ 的限制态射，并将 $\alpha_{|I^{n+1}}$ 记为 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, A)$ 的限制。

限制的行为在一定程度上取决于 A 的性质：

命题 1.2.51. 存在唯一的 $\delta(A) \in A(k)$，使得 $(f_1)_{I^2} = \delta(A)f_2$，并满足 $\{-1\}\delta(A) = 2$。

此外，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $d \in \mathbb{N}$，都有 $(f_n)_{I^{n+d}} = \delta(A)^d f_{n+d}$

证明。回顾一下，$f_1 = f_1^1$ 是一个群同态。记$\alpha = (f_1)_{I^2}$；这是 I^2 的一个不变量，根据推论 1.2.27，$\delta(A)$的存在性和唯一性得以保证。

有 $f_1(2q) = 2f_1(q)$ 且 $f_1(2q) = f_1(\langle\langle -1\rangle\rangle q) = \delta\{-1\}f_1(q)$，因此 $2f_1 = \{-1\}\delta f_1$，从而得到 $\{-1\}\delta = 2$。

根据推论1.2.42，要证明 $(f_n)_{I^{n+d}} = \delta(A)^d f_{n+d}$，只需证明它们在这些 $(n+d)$-Pfister 形式上的取值相同，也就是$f_n(\langle\langle a_1, \dots, a_{n+d}\rangle\rangle) = \delta(A)^d\{a_1, \dots, a_{n+d}\}$。而：

$$\begin{aligned} f_n(\langle\langle a_1, \dots, a_{n+d}\rangle\rangle) &= f_{n-1}(\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle) f_1(\langle\langle a_n, \dots a_{n+d}\rangle\rangle) \\ &= \{a_1, \dots, a_{n-1}\} f_1(\langle\langle a_n, \dots, a_{n+d}\rangle\rangle) \end{aligned}$$

并且容易通过递归证明

$$f_1(\langle\langle a_n, \dots a_{n+d}\rangle\rangle) = \delta(A)^d\{a_n, \dots, a_{n+d}\}.$$

□

例 1.2.52. 若 $A(K) = W(K)$，则 f_1 和 f_2 是恒等映射，因此 $\delta(A) = 1$。然而，若 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$，则 $f_1^n = e_1$ 在 $I^2(K)$ 上为零，因此 $\delta(A) = 0$。

注记 1.2.53. 若 $\delta(A) = 0$，或者 -1 在 K中是一个平方，则 $A(K)$的特征为 2。

在没有歧义时，我们将写作 $\delta = \delta(A)$。记号确定后，可以写成：

命题1.2.54。对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 和任意 $d \in \mathbb{N}^*$：

$$(f_n^d)_{I^{n+1}} = \sum_{\frac{d}{2} \leqslant k \leqslant d} \binom{k}{d-k} \delta(A)^{2k-d}\{-1\}^{(d-k)(n-1)} f_{n+1}^k$$

证明。只需将 f_{nd} 应用于推论 1.1.43 的公式，该公式用 π_{n+1}^k表示 π_n^d。

□

Cor推论 1.2.55. 若 $\delta = 0$（特别是当 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$）时，有：

$$(f_n^d)_{|I^{n+1}} = \begin{cases} \{-1\}^{m(n-1)} f_{n+1}^m & si\ d = 2m \\ 0 & si\ d\ impair \end{cases}$$

推论 1.2.56. 若 -1 是 k 中的一个平方，则对任意 $n \geqslant 2$，有 $(f_n^d)_{|I^{n+1}} = \delta^d f_{n+1}^d$，因此 $(f_2^d)_{|I^n} = \delta^{(n-2)d} f_n^d$。

若另外 $\delta = 0$，则 $(f_n^d)_{|I^{n+1}} = 0$ 若 $d \geqslant 1$，除非 $n = 1$ 和 $d = 2m$，在这种情况下 $(f_1^{2m})_{|I^2} = f_2^m$。

在上同调不变量的情形下，可以得到一些推论 s.

注释1.2.57。 特别地，我们得到公式 $(u_{2d}^{(1)})_{|I^2} = u_{2d}^{(2)}$ （无论 k 如何），这表明 I^2 的任意不变量都可扩展到 I （但扩展不唯一）。相反，若 $n \geqslant 3$，则对于 $d \geqslant 1$ $u_{nd}^{(n)}$，它绝不会扩展到 I^{n-1}。

特别可以得到一个众所周知的特例： e_2 延拓到整个 I，而 e_3 不能延拓到 I^2。

注释1.2.58。 可以观察到，若 $(-1) \in H^1(k, \mu_2)$ 在 $H^*(k, \mu_2)$ 中不是零因子，那么从 I^n 到 I^{n+1}的不变量限制映射的核恰好是由 e_n生成的理想；但一般而言，这个理想更大（当 -1是平方时，它甚至由所有归一化不变量构成）。值得注意的是，人们原本可能会以为，在满足 $\alpha(q) = 0$ 的形式上取值为零的不变量，恰好就是 α的倍数。

1.2.7 相似变换

本节研究不变量在相似变换下的行为。

命题-定义1.2.59。 存在唯一的 $A(k)$-滤模态射，其次数为 -1,

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M & \longrightarrow & M \\ & \alpha & \longmapsto & \widetilde{\alpha} \end{array}$$

使得

$$\alpha(\langle\lambda\rangle q) = \alpha(q) + \{\lambda\}\widetilde{\alpha}(q) \tag{1.2.60}$$

对所有 $\alpha \in M$、 $q \in I^n(K)$ 以及 $\lambda \in K^*$,

证明。 设 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, A)$且 $q \in I^n(K)$。对任意 $\lambda \in L^*$，若 L/K是域扩张，则定义 $\beta_q(\lambda) = \alpha(\langle\lambda\rangle q)$。

于是， β_q 是一个从 K 平方类到 A的复数域上的不变量。然而，平方类函子与 Pf_1, 同构，因此可以在 A 上应用条件（iv）： 存在唯一的 $x_q, y_q \in A(K)$, 使得 $\beta_q(\lambda) = x_q + \{\lambda\}\cdot y_q$。 取 $\lambda = 1$，可见 $x_q = \alpha(q)$，并定义 $\tilde{\alpha}(q) = y_q$。

y_q 的唯一性表明 $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Inv}(I^n, A)$。 □

注记 1.2.61. 可以注意到， $\tilde{\alpha}$ 始终是一个归一化不变量。

相似变换的复合给出如下有趣结果:

命题 1.2.62. 有 $\Psi^2 = -\delta(A)\Psi$。

证明。注意到

$$\{\lambda\mu\} = \{\lambda\} + \{\mu\} - \delta(A)\{\lambda, \mu\}. \tag{1.2.63}$$

由此，

$$\begin{aligned}\alpha(\langle\lambda\mu\rangle q) &= \alpha(\langle\lambda\rangle q) + \{\mu\}\widetilde{\alpha}(\langle\lambda\rangle q)\\ &= \alpha(q) + \{\lambda\}\widetilde{\alpha}(q) + \{\mu\}\widetilde{\alpha}(q) + \{\lambda,\mu\}\widetilde{\widetilde{\alpha}}(q)\\ &= \alpha(q) + \{\lambda\mu\}\widetilde{\alpha}(q) + \delta(A)\{\lambda,\mu\}\widetilde{\alpha}(q) + \{\lambda,\mu\}\widetilde{\widetilde{\alpha}}(q)\end{aligned}$$

以及

$$\alpha(\langle\lambda\mu\rangle q) = \alpha(q) + \{\lambda\mu\}\widetilde{\alpha}(q)$$

因此 $\{\lambda,\mu\}(\delta(A)\widetilde{\alpha}(q) + \widetilde{\alpha}(q)) = 0$。由于这对所有 λ、μ 以及任意~扩张都成立，因此可以得出结论：$\widetilde{\alpha} = -\delta(A)\widetilde{\alpha}$。 □

注记 1.2.64. 根据定义，当且仅当 $\widetilde{\alpha} = 0$ 成立时，$\alpha(\langle\lambda\rangle q) = \alpha(q)$，这称为相似变换不变性。但前一个命题表明，研究性质 $\widetilde{\alpha} = -\delta(A)\alpha$也很有意义，尤其是~所有形如 β的元素都满足该性质。对于上同调不变量，我们得到同样的性质，因为 $\delta = 0$；而对于 Witt 不变量，该性质等价于 $\alpha(\langle\lambda\rangle q) = \langle\lambda\rangle\alpha(q)$；此时称 α 与相似变换相容。

当 $\delta \neq 0$（因此尤其对于 Witt 不变量），该命题表明，任意 α 都可以唯一地分解为 $\alpha = \beta + \gamma$，其中 β 与相似变换相容，而 γ 在相似变换下保持不变；具体而言，$\beta = -\widetilde{\alpha}$ 和 $\gamma = \alpha + \widetilde{\alpha}$。

从不那么内蕴的角度看，任意 Witt 不变量 α 都是λ^d 的组合（因为 π_n^d也是如此），于是 β 对应于 d 为奇数的项，而 γ 对应于 d 为偶数的项（因此有时会把 α称为偶部分 和奇部分 ）。

现在我们要研究 Ψ 在 g_n^d上的作用；相较于 f_n^d，它们在相似变换下的表现要好得多（考虑乘以 $\langle -1\rangle$的情形，这并不令人意外）。

命题1.2.65。设 $n \in \mathbb{N}^*$，$d \in \mathbb{N}$。那么

$$\widetilde{g_n^d} = \begin{cases} -\delta(A)g_n^d & si\ d\ est\ impair \\ \{-1\}^{n-1}g_n^{d-1} & si\ d\ est\ pair. \end{cases}$$

证明。我们对 d 进行递归，$d = 0, 1$ 的情形显然。若 $q \in I^n(K)$、$\varphi \in \mathrm{Pf}_n(K)$ 且 $\lambda \in K^*$，则

$$\begin{aligned}g_n^d(\langle\lambda\rangle(q+\varphi)) &= g_n^d(q+\varphi) + \{\lambda\}\widetilde{g_n^d}(q+\varphi)\\ &= g_n^d(q) + f_n(\varphi)(g_n^d)^+(q) + \{\lambda\}\widetilde{g_n^d}(q) + \{\lambda\}f_n(\varphi)\widetilde{g_n^d}^+(q).\end{aligned}$$

另一方面，若写作 $\varphi = \langle\langle a\rangle\rangle\psi$：

$$\begin{aligned}
g_n^d(\langle\lambda\rangle(q+\varphi)) &= g_n^d(\langle\lambda\rangle q + \langle\langle\lambda a\rangle\rangle\psi - \langle\langle\lambda\rangle\rangle\psi)\\
&= g_n^d(\langle\lambda\rangle q - \langle\langle\lambda\rangle\rangle\psi) + \{\lambda a\}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^+(\langle\lambda\rangle q - \langle\langle\lambda\rangle\rangle\psi)\\
&= g_n^d(\langle\lambda\rangle q) - \{\lambda\}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^-(\langle\lambda\rangle q)\\
&+ \{\lambda a\}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^+(\langle\lambda\rangle q) - \{\lambda,\lambda a\}\{-1\}^{n-1}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^{+-}(\langle\lambda\rangle q)\\
&= g_n^d(q) + \{\lambda\}\widetilde{g_n^d}(q) - \{\lambda\}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^-(q) - \{\lambda,\lambda\}f_{n-1}(\psi)\widetilde{(g_n^d)^-}(q)\\
&+ \{\lambda a\}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^+(q) - \{\lambda,\lambda a\}\{-1\}^{n-1}f_{n-1}(\psi)(g_n^d)^{+-}(q)\\
&+ \{\lambda,\lambda a\}f_{n-1}(\psi)\widetilde{(g_n^d)^+}(q) - \{\lambda,\lambda,\lambda a\}\{-1\}^{n-1}f_{n-1}(\psi)\widetilde{(g_n^d)^{+-}}(q).
\end{aligned}$$

取 λ、a 和 ψ 为一般元，并考虑留数，可得：

$$\widetilde{g_n^d}^+ = -\delta(g_n^d)^+ - \widetilde{(g_n^d)^+} + \{-1\}^{n-1}(g_n^d)^{+-} + \{-1\}^n\widetilde{(g_n^d)^{+-}}$$

多次利用方程 (1.2.63) 以及 $\delta\{-1\} = 2$这一事实。

若 d 为偶数，则 $(g_n^d)^+ = g_n^{d-1}$，因此 $\widetilde{(g_n^d)^+} = -\delta g_n^{d-1}$，且 $(g_n^d)^{+-} = g_n^{d-2}$，因此 $\widetilde{(g_n^d)^{+-}} = \{-1\}^{n-1}g_n^{d-3}$。于是得到：

$$\begin{aligned}
\widetilde{g_n^d}^+ &= -\delta g_n^{d-1} + \delta g_n^{d-1} + \{-1\}^{n-1}(g_n^{d-2} + \{-1\}^n g_n^{d-3})\\
&= \{-1\}^{n-1}(g_n^{d-1})^+
\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$，由此即可得出结论，因为 g_n^d 是归一化的（见注记 (1.2.61)）。

同样，若 d 为奇数，则 $(g_n^d)^+ = g_n^{d-1} + \{-1\}^n g_n^{d-2}$，因此 $\widetilde{(g_n^d)^+} = \{-1\}^{n-1}g_n^{d-2} - \delta\{-1\}^n g_n^{d-2} = -\{-1\}^{n-1}g_n^{d-2}$，且 $(g_n^d)^{+-} = g_n^{d-2}$所以 $(g_n^d)^{+-} = -\delta g_n^{d-2}$。于是

$$\begin{aligned}
\widetilde{g_n^d}^+ &= -\delta(g_n^d)^+ + \{-1\}^{n-1}g_n^{d-2} + \{-1\}^{n-1}g_n^{d-2} - \delta\{-1\}^n g_n^{d-2}\\
&= -\delta(g_n^d)^+
\end{aligned}$$

这使我们仍可得出结论。 □

这种非常简单的行为带来了一些观察：

注记 1.2.66。 利用g_n^d 很容易重新得到这样一个事实：任何$\widetilde{\ }$形式的 α 不变量 β 都与相似变换相容（注记 1.2.64 中所述的意义下）。还可以回答一个合理的问题：这两个条件是否等价。若$\alpha = \sum a_d g_n^d$，则 α 是相似不变量，当且仅当对任意 d 偶数，$\delta(A)a_d = 0$ 且 $\{-1\}^{n-1}a_d = 0$（若 $d \geqslant 2$）；另一方面，α 是某个 β 的 β 形式，当且仅当 $a_d = 0$ 对 d 偶数成立，且当 d 为奇数时，存在某些 x_d，y_d 使得 $a_d = \{-1\}^{n-1}x_d - \delta(A)y_d$。特别地，若 $\delta(A) = 1$（因此对于 Witt 不变量），这两个条件等价，

此时它们对应于由奇数 g_n^d 组合而成这一事实；但若 $\delta(A) = 0$ （因此对于上同调不变量）且 $n > 1$，则它们绝不等价。

注记 1.2.67. 我们定义了两个算子， Φ 和 Ψ，分别控制不变量在和与相似变换下的行为。人们很容易想尝试建立 $\Phi \circ \Psi$ 与 $\Psi \circ \Phi$之间的联系，但实际上，利用 g_n^d 的基，很容易验证，当 $\delta(A) = 0$时，这两个复合完全彼此独立，具体来说：若 β 是 $\Phi \circ \Psi$像中的任意一个不变量，而 γ 是 $\Psi \circ \Phi$像中的任意一个不变量，那么存在 α ，使得 $\beta = (\widetilde{\alpha})^+$ 且 $\gamma = (\alpha^+)$。

注记 1.2.68. 也可以建立 Ψ 作用于 f_n^d的公式，方法可以是直接采用类似的方法，也可以使用命题 1.2.36中的换基公式。这里不详细说明计算过程，但可以列出这些公式供参考：

$$\widetilde{f}_n^d = (-1)^d \sum_{k=1}^{d-1} \binom{d-1}{k-1} \{-1\}^{n(d-k)-1} f_n^k + \begin{cases} 0 & \text{si } d \text{ pair} \\ -\delta(A) f_n^d & \text{si } d \text{ impair.} \end{cases}$$

1.2.8 不变量的分歧

在这一简短部分中，我们研究不变量相对于离散赋值的留数的行为。设 (K, v) 为一个赋值域，其中 v 是一个k秩1离散赋值。

为避免对满足我们条件的 A一般情形引入抽象的分歧概念，这里我们明确将讨论范围限制为 $A(K) = W(K)$ 或 $A(K) = H^*(K, \mu_2)$。

命题 1.2.69. 设 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $q \in I^n(K)$。若 q 是非分歧的，则对任意 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, A)$，$\alpha(q)$ 也是非分歧的。

证明. 由于 v 是一个 k赋值，只需对$\alpha = f_n^d$证明该结论。设 $q \in I^n(K)$ 非分歧。由于可以将 $q = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ 写成其中 $a_i \in \mathcal{O}_K$，对任意 $k \in \mathbb{N}$， $\lambda^k(q)$ 也非分歧，因此 $\pi_n^d(q)$ 也非分歧。由于 e_{nd} 将非分歧形式映射为非分歧上同调类，$u_{nd}^{(n)}(q)$ 也非分歧。 □

1.2.9 固定维数中的不变量

本部分将描述在固定维数下， I^n 针对 $n = 1$ 和 2 的不变量的限制。

不变量 I

在 [10, thm 17.3, thm 28.5], 中，Serre 描述了 Quad_{2r}（固定维数下的二次型 $2r$）的上同调不变量以及 Witt 不变量。两种情况下，我们都得到一个秩为 $n+1$的 $A(k)$-自由模，分别定义在 Stiefel-Whitney 类 w_k 和 λ^k上；对于 $0 \leqslant k \leqslant n$ （回顾一下， $w_k(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle) = \sum_{i_1<\cdots<i_k}(a_{i_1}, \ldots\ldots, a_{i_k})$ ）。由于可以将 I的不变量限制到 Quad_{2r}，因此可以探究它们如何根据 Stiefel-Whitney 类和 λ-运算分解。

这里必须注意所采用的定义：当我们写（例如） $\pi_1^2(q) = \lambda^2(q) - \lambda^1(q)$时，我们是在 Witt 类层面上进行运算，$\hat{}$再通过典范同构 $I(K) \simeq I(K)$将其映入 $GW(K)$。若 q 的维数为 $n = 2r$，那么实际上我们是将 λ^k 作用于 $q - r\langle\langle 1\rangle\rangle \in \hat{}I(K)$。为消除符号上的歧义，本节将用$\hat{}\lambda^k$ 表示这一运算，以区别于直接作用于 $GW(K)$的运算 λ^k （特别是， λ^k 在 Witt 类上没有良好定义，而$\hat{}\lambda^k$则不同）。两者之间可以按如下方式转换：

引理 1.2.70. 设 q 是定义在 K 上、维数为 $2r$ 的二次型。那么对任意 $d \in \mathbb{N}$，在 $W(K)$ 中有：

$$\lambda^d(q) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\equiv d \bmod 2}}^{d} \binom{r}{\frac{d-i}{2}} (-1)^{\frac{d-i}{2}} \hat{\lambda}^i(q)$$

et

$$\hat{\lambda}^d(q) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\equiv d \bmod 2}}^{d} \binom{r + \frac{d-i}{2} - 1}{\frac{d-i}{2}} \lambda^i(q).$$

证明。 类似于熟悉的记号 $\lambda_t(q) \in W(K)[[t]]$，我们记 $\hat{}\lambda_t(q) = \sum_{d\in\mathbb{N}} \hat{}\lambda^d(q)t^d$。于是，在 $W(K)$ 中有：

$$\begin{aligned}\lambda_t(\langle\langle 1\rangle\rangle) &= \lambda_t(\langle 1\rangle)\lambda_t(\langle -1\rangle) \\ &= (1+t)(1-t) \\ &= 1 - t^2\end{aligned}$$

因此 $\hat{} \lambda_t(q) = \lambda_t(q - r\langle\langle 1\rangle\rangle) = (1-t^2)^{-r}\lambda_t(q)$，反过来 $\lambda_t(q) = (1-t^2)^r\hat{}\lambda_t(q)$，展开 $(1-t^2)^r$ 和 $(1-t^2)^{-r}$ 即得所需公式。 □

可以通过运算 λ 表示 g_1^d：

命题 1.2.71. 设 q 是定义在 K 上、维数为 $2r$ 的二次型。那么对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$，都有

$$g_1^{2m}(q) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{r - \lceil \frac{i}{2} \rceil}{m - \lceil \frac{i}{2} \rceil} \lambda^i(q)$$

且对任意 $m \in \mathbb{N}$：

$$g_1^{2m+1}(q) = \sum_{i=0}^{m} \binom{r-1-i}{m-i} \lambda^{2i+1}(q).$$

证明。设 $\alpha_d(q)$ 由陈述中方程右端的项定义。乍看之下，它并不是 Witt 类的不变量，而只是一个在任意偶数维 $2r$ 上定义的等距类不变量。我们将证明 $\alpha_{2m+2}(q + \langle\langle a\rangle\rangle) = \alpha_{2m}(q) + \langle\langle a\rangle\rangle\alpha_{2m+1}(q)$ 且 $\alpha_{2m+1}(q + \langle\langle a\rangle\rangle) = \alpha_{2m+1}(q) + \langle\langle a\rangle\rangle(\alpha_{2m}(q) + \langle\langle -1\rangle\rangle\alpha_{2m-1}(q)$，这既表明取 $a = 1$ 时，α_d 在 Witt 类上定义良好，也表明它们满足与 g_1^d 相同的递归关系。

很容易看出，

$$\lambda^i(q + \langle\langle a\rangle\rangle) = \lambda^i(q) - \lambda^{i-2}(q) + \langle\langle a\rangle\rangle(\lambda^{i-1}(q) + \lambda^{i-2}(q).$$

由此可得：

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2m+2}(q + \langle\langle a\rangle\rangle) \\
&= \sum_j \binom{r+1-j}{m+1-j} \lambda^{2j}(q + \langle\langle a\rangle\rangle) - \sum_j \binom{r-j}{m-j} \lambda^{2j+1}(q + \langle\langle a\rangle\rangle) \\
&= \sum_j \binom{r+1-j}{m+1-j} (\lambda^{2j}(q) - \lambda^{2j-2}(q)) - \sum_j \binom{r-j}{m-j} (\lambda^{2j+1}(q) - \lambda^{2j-1}(q)) \\
&+ \langle\langle a\rangle\rangle \left(\sum_j \binom{r+1-j}{m+1-j} (\lambda^{2j-1}(q) + \lambda^{2j-2}(q)) - \sum_j \binom{r-j}{m-j} (\lambda^{2j}(q) + \lambda^{2j-1}(q)) \right) \\
&= \sum_j \left(\binom{r+1-j}{m+1-j} - \binom{r-j}{m-j} \right) \lambda^{2j}(q) - \sum_j \left(\binom{r-j}{m-j} - \binom{r-j-1}{m-j-1} \right) \lambda^{2j+1}(q) \\
&+ \langle\langle a\rangle\rangle \sum_j \left(\binom{r+1-j}{m+1-j} - \binom{r-j}{m-j} \right) \lambda^{2j-1}(q) \\
&= \sum_j \binom{r-1}{m+1-j} \lambda^{2j}(q) - \sum_j \binom{r-j-1}{m-j} \lambda^{2j+1}(q) + \langle\langle a\rangle\rangle \sum_j \binom{r-j}{m+1-j} \lambda^{2j-1}(q) \\
&= \alpha_{2m+2}(q) + \langle\langle a\rangle\rangle \alpha_{2m+1}(q).
\end{aligned}$$

同理:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{2m+1}(q+\langle\langle a\rangle\rangle)\\
&=\sum_i \binom{r-i}{m-i}\lambda^{2i+1}(q+\langle\langle a\rangle\rangle)\\
&=\sum_i \binom{r-i}{m-i}(\lambda^{2i+1}(q)-\lambda^{2i-1}(q))+\langle\langle a\rangle\rangle\sum_i \binom{r-i}{m-i}(\lambda^{2i}(q)+\lambda^{2i-1}(q))\\
&=\sum_i \left(\binom{r-i}{m-i}-\binom{r-1-i}{m-1-i}\right)\lambda^{2i+1}(q)\\
&+\langle\langle a\rangle\rangle\left(\sum_i \binom{r-i}{m-i}\lambda^{2i}(q)-\sum_i \binom{r-1-i}{m-1-i}\lambda^{2i+1}(q)+2\sum_i \binom{r-1-i}{m-1-i}\lambda^{2i+1}(q)\right)\\
&=\alpha_{2m+1}(q)+\langle\langle a\rangle\rangle(\alpha_{2m}(q)+2\alpha_{2m-1}(q)).
\end{aligned}
$$

□

注记 1.2.72. 特别地，我们重新得到如下事实：固定 r 后，g_1^d 对于 $d>2r$ 为零。

注记 1.2.73. 我们回顾一下（参见推论 1.1.43）：

$$\pi_1^d=\sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k}\binom{d-1}{k-1}\hat{\lambda}^k.$$

然而，用 λ^k 表示 π_n^d 相当繁琐，这与 π_n^d 在固定维数下表现得不那么理想这一事实相符。

我们还希望用 Stiefel-Whitney 不变量表示 $u_d^{(1)}$ 和 $v_d^{(1)}$，为此，我们提出一种形式体系，它同样适用于 Witt 不变量，从而给出在所有情况下都成立的公式。

定义 1.2.74. 对于任意 $d\in\mathbb{N}$，定义映射 $P^d:\mathrm{Quad}_n\longrightarrow W$：

$$P^d(q)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{n-i}{d-i}\lambda^i(q).$$

由于从 (λ^d) 到 (P^d) 的过渡矩阵是对角线上全为 1 的三角形矩阵，$(P^d)_{0\leqslant d\leqslant n}$ 也是 $\mathrm{Inv}(\mathrm{Quad}_n,\ W)$ 的一个 $W(k)$-基。其定义由以下公式引出：

命题 1.2.75。 对于所有 $a_i\in K^*,\ 1\leqslant i\leqslant n$，有

$$P^d(\langle a_1,\dots,a_n\rangle)=\sum_{i_1<\cdots<i_d}\langle\langle a_{i_1},\dots,a_{i_d}\rangle\rangle$$

在 $W(K)$中。特别地，$P^d\in\mathrm{Inv}(\mathrm{Quad}_n,I^d)$，且 $w_d=e_d\circ P^d$。

证明。 若展开 $\langle\langle a_{i_1},\dots,a_{i_d}\rangle\rangle$，可得

$$\sum_{I\subset\{i_1,\dots,i_d\}}(-1)^{|I|}\prod_{i\in I}\langle a_i\rangle$$

且对于固定的 I，项 $\prod_{i\in I}\langle a_i\rangle$ 在 $\sum_{i_1<\cdots<i_d}\langle\langle a_{i_1},\dots,a_{i_d}\rangle\rangle$中出现 $\binom{n-i}{d-i}$ 次。

□

因此，在第一种情形下令$h^d=P^d$，在第二种情形下令 $h^d=w_d$，即可得到关于 $A=W$ 和 $A=H$的统一表述。于是，可以用 h^d 来表示我们的不变量:

命题 1.2.76。 设 $d\in\mathbb{N}$ 和 $q\in \mathrm{Quad}_n(K)$。则（若 $A=W$ 或$A=H$）：

$$f_1^d(q)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{r-i}{d-i}\{-1\}^{d-i}h^i(q);$$

$$g_1^d(q)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{r-i-1+\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}{d-i}\{-1\}^{d-i}h^i(q).$$

证明。 我们证明关于 f_1^d的结论；关于 g_n^d 的情形可利用命题 1.2.36 推得，也可直接用相同的方法证明。

记 α_d 为由方程右端定义的不变量。乍看之下，这些并不是 Witt 类不变量，而只是任意偶数维中的等距类不变量。

根据定义，显然有 $\alpha_0=1=f_1^0$。于是需要证明，对于任意 $d\in\mathbb{N}^*$，$\alpha_d(q)=0$，若 q 是双曲的，并且

$$\alpha_d(q+\langle\langle a\rangle\rangle)=\alpha_d(q)+\{a\}\alpha_{d-1}(q) \tag{1.2.77}$$

对于任意 $a\in K^*$，这同时表明 α_d 是 Witt 类不变量（取 $a=1$），并且 $\alpha_d^+=\alpha_{d-1}$，从而可以按移位递推得出结论。

得到

$$h^i(r\langle\langle 1\rangle\rangle)=\binom{r}{i}\{-1\}^i \tag{1.2.78}$$

et

$$\begin{aligned}h^i(q+\langle\langle a\rangle\rangle)&=h^i(q)+\{-a\}h^{i-1}(q)\\&=\big(h^i(q)+\{-1\}h^{i-1}(q)\big)-\{a\}h^{i-1}(q).\end{aligned} \tag{1.2.79}$$

设 q 是 $n=2r$ 维双曲的。根据方程 (1.2.78)，

$$\alpha_d(q)=\left(\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{d-r}{d-i}\binom{r}{i}\right)\{-1\}^d=0$$

利用一个简单的组合公式。

那么，对于 (1.2.77)，令 q 为维数 $2r$，并利用方程 (1.2.79) 得到：

$$\begin{aligned}
\alpha_d(q+\langle\langle a\rangle\rangle) &= \sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{r+1-i}{d-i}\{-1\}^{d-i}\left(h^i(q)+\{-1\}h^{i-1}(q)\right)\\
&\quad-\{a\}\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{r+1-i}{d-i}\{-1\}^{d-i}h^{i-\cdot 1}(q)\\
&=\sum_{i=0}^{d-1}\left((-1)^i\binom{r-i+1}{d-i}+(-1)^{i+1}\binom{r-i}{d-i-1}\right)\{-1\}^{d-i}h^i(q)\\
&\quad+(-1)^d h^d(q)-\{a\}\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{i+1}\binom{r-i}{d-i-1}\{-1\}^{d-i-1}h^i(q)\\
&=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{r-i}{d-i}\{-1\}^{d-i}h^i(q)\\
&\quad+\{a\}\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i\binom{r-i}{d-1-i}\{-1\}^{d-1-i}h^i(q)
\end{aligned}$$

由此得到所需的公式。 □

注记 1.2.80. 若 -1 是 k中的一个平方，则 $f_1^d=g_1^d=h^d$。

推论 1.2.81. 对于任意 $m\in\mathbb{N}$，$\mathrm{Inv}(\mathrm{Quad}_{2m},\mu_2)$ 是一个 $H^*(k,\mu_2)$-自由模，其基为 $u_d^{(1)}$，其中 $0\leqslant d\leqslant 2m$。

特别地，任意Quad_{2m} 的不变量都可以扩展为I的不变量。

证明。可以看出，$u_d^{(1)}$ 与 w_d 之间的过渡矩阵是对角线上为 1 的三角形矩阵。 □

I^2的不变量

在 [10,定理 20 中，6], Serre 还描述了 Quad'_{2r}的上同调不变量，即维数为 $2r$ 且具有平凡判别式的形式函子。具体而言，$\mathrm{Inv}(\mathrm{Quad}'_{2r},\mu_2)$ 是 $\mathrm{Inv}(\mathrm{Quad}_{2r},\mu_2)$ 在限制到 Quad'_{2r}下的像与 $I_{(-1)^r}$的直和，其中 $I_\delta=\{x\in H^*(k,\mu_2)\mid(\delta)\cup x=0\}$。与 $x\in I_{(-1)^r}$对应的不变量是 b_x，它将 $\langle a_1,\dots,a_{2r}\rangle$映射为 $(a_1,\dots,a_{2r-1})\cup x$。

特别是，除非在极其特殊的情形下（当 $I_{(-1)^r}=0$），存在一些 Quad'_{2r} 的不变量，它们不是 Quad_{2r}中某个不变量的限制。然而，根据注释1.2.57，I^2 的每个不变量都可延拓到 I，因此存在一些 $\mathrm{Quad}'_{2r}=\mathrm{Quad}_{2r}\cap I^2$ 的不变量无法延拓到 I^2（障碍恰好是 $I_{(-1)^r}$）。

1.2.10 上同调运算

本部分将专门关注上同调不变量的情形。Serre 曾指出，可以在模2上同调上定义某种除方：

$$\begin{array}{ccc} H^n(K,\mu_2) & \longrightarrow & H^{2n}(K,\mu_2)/(-1)^{n-1}\cup H^{n+1}(K,\mu_2) \\ \sum_i \alpha_i & \longmapsto & \sum_{i<j}\alpha_i\cup\alpha_j. \end{array}$$

右侧的商空间是保证映射定义良好所必需的。同样，也可以定义更高次数的除幂：

$$\begin{array}{ccc} H^n(K,\mu_2) & \longrightarrow & H^{dn}(K,\mu_2)/(-1)^{n-1}\cup H^{(d-1)n+1}(K,\mu_2) \\ \sum_i \alpha_i & \longmapsto & \sum_{i_1<\cdots<i_d}\alpha_{i_1}\cup\cdots\cup\alpha_{i_d}. \end{array}$$

另一方面，Vial（[32]）刻画了这些运算

$$K_n^M(K)/2 \longrightarrow K_*^M(K)/2$$

与某些除幂之间的关系。利用 Milnor 猜想，这可转化为对运算的分类

$$H^n(K,\mu_2)\longrightarrow H^*(K,\mu_2).$$

与 Serre 的运算类似，这里也需要考虑右侧的商空间；此外，预计定义域集合还受到一定限制。事实上，Vial 的陈述如下：

命题 1.2.82 ([32], 定理 2。 若 $n\in\mathbb{N}^*$，运算模 $H^n(K,\mu_2)\to H^*(K,\mu_2)$ 是 $H^*(k,\mu_2)$-模

$$H^*(k,\mu_2)\cdot 1\oplus H^*(k,\mu_2)\cdot\mathrm{Id}\oplus\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\mathrm{Ker}(\tau_n)\cdot\gamma_d$$

其中 τ_n： $H^*(k,\mu_2)\longrightarrow H^*(k,\mu_2)$ 由 $\tau_n(x)=(-1)^{n-1}\cup x$ 定义，且若 $a\in\mathrm{Ker}(\tau_n)$，则

$$a\cdot\gamma_d\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant r}x_i\right)=a\cdot\sum_{i_1<\cdots<i_d}x_{i_1}\cup\cdots\cup x_{i_d}$$

其中 x_i 为符号。

在这两种情况下，为了使运算定义良好，必须消去 (-1) 的某些幂，无论是通过左核还是右余核。

不变量 $u_{nd}^{(n)}$ 可以视为这些在 I^n 层面上的除幂运算的提升。由此产生的显著现象是，这些运算在此处的定义没有任何限制。

此外，利用我们对 I^n 不变量的分析，可以轻松地重新得到 Vial分类： $H^n(K, \mu_2)$ 上的运算不过是 $\mathrm{Inv}(I^n, \mu_2)$ 中满足该条件的不变量

$$\alpha(q+\varphi) = \alpha(q) \quad \forall q \in I^n(K), \varphi \in \mathrm{Pf}_{n+1}(K). \tag{1.2.83}$$

现在可以利用推论 1.2.55 得出的事实： $u^{(n)}_{nk}(\varphi)$在 $k=0$时等于1，在 $k=2$ 时等于$(-1)^{n-1} \cup e_{n+1}(\varphi)$，其他情况下等于0；结合加法公式，可得

$$u^{(n)}_{nd}(q+\varphi) = u^{(n)}_{nd}(q) + (-1)^{n-1} \cup e_{n+1}(\varphi) \cup u^{(n)}_{n(d-2)}(q).$$

将 α 写成 $u^{(n)}_{nd}$ 的组合，可得

$$\alpha(q+\varphi) = \alpha(q) + (-1)^{n-1} \cup e_{n+1}(\varphi) \cup \alpha^{++}(q).$$

由此， α 满足条件 (1.2.83) 当且仅当 $(-1)^{n-1} \cup \alpha^{++} = 0$，这恰好等价于说，对于 $d \geqslant 2$， $u^{(n)}_{nd}$ 前面的系数属于 τ_n的核，由此我们得到与 Vial陈述完全相同的结论。

1.2.11 半分解形式的不变量

在 [9, 中，定义20.8], Garibaldi为复数域 I^3 上的秩12形式定义了一个上同调不变量，具体如下：任意这样的形式都可以写成 $q = \langle\langle c\rangle\rangle q'$，其中 $q' \in I^2(K)$，并定义 $a_5(q) = e_5(\langle\langle c\rangle\rangle \pi_2^2(q))$（使用我们的记号）。显然，关键之处在于 $\langle\langle c\rangle\rangle \pi_2^2(q)$与 q的分解方式无关。

我们希望，尤其是为了应用于带对合的代数，涵盖这类构造。特别是，不变量 a_5 可以定义在 I^3 的任意一个元素上，只要它能写成一个1阶Pfister形式与 I^2的一个元素的乘积；因此，自然应在Witt 类层面上进行研究。

更一般地，定义如下：

定义1.2.84. 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $0 \leqslant r < n$，定义 $I^{n,r}(K) = \{\varphi \cdot q \,|\, \varphi \in \mathrm{Pf}_r(K) \ q \in I^{n-r}(K)\}$。

特别地， $I^{n,0} = I^n$。

命题-定义1.2.85. 存在唯一的 $A(k)$-模之间的滤过态射

$$\begin{array}{rccc} \Delta^{n,r}: & \mathrm{Inv}_{norm}(I^{n,r}, A) & \longrightarrow & \mathrm{Inv}_{norm}(I^{n-r}, A) \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha^{(r)}, \end{array}$$

它是单射，次数为 $-r$，并满足

$$\alpha(\varphi \cdot q) = f_r(\varphi) \cdot \alpha^{(r)}(q)$$

对于所有 $\alpha \in \mathrm{Inv}_{norm}(I^{n,r}, A)$、 $\varphi \in \mathrm{Pf}_r(K)$ 以及 $q \in I^{n-r}(K)$。

证明。设 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^{n,r}, A)$ 和 $q \in I^{n-r}(K)$。于是可以在 K 个 r-Pfister 形式上定义一个不变量 $\varphi \mapsto \alpha(\varphi \cdot q)$。根据关于 A 的条件（iv），存在唯一的 $x(q)\ y(q) \in A(K)$，使得

$$\alpha(\varphi \cdot q) = x(q) + f_n(\varphi) \cdot y(q)$$

由唯一性可知，它们是 I^{n-r} 的 Witt 不变量，且 $x = \alpha(0)$ 为常数。令 $\alpha^{(r)} := y$。 □

由于 $I^{n,\ r} \subset I^n$，我们可以考虑将 I^n 的不变量限制到 $I^{n,\ r}$ 上的问题。下面有一个初等结果:

命题 1.2.86. 设 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $0 \leqslant r < n$。那么对任意 $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta^{n,r}(f_n^d) = \{-1\}^{r(d-1)} f_{n-r}^d.$$

这个命题可由下面的命题立即推出，只需按位移递推；下面的命题本身也很有意义。

命题 1.2.87. 设 $\alpha \in \mathrm{Inv}_{norm}(I^n,\ A)$。那么

$$(\alpha^{(r)})^+ = \{-1\}^r (\alpha^+)^{(r)}.$$

证明。设 $\alpha \in \mathrm{Inv}_{norm}(I^n,\ A)$。若 $\varphi \in \mathrm{Pf}_r(K)$, $q \in I^{n-r}(K)$ 且 $\psi \in \mathrm{Pf}_{n-r}(K)$, 则有

$$\alpha(\varphi(q+\psi)) = \alpha(\varphi q) + f_n(\varphi\psi)\alpha^+(\varphi q) = f_r(\varphi)\alpha^{(r)}(q) + \{-1\}^r f_n(\varphi\psi)(\alpha^+)^{(r)}(q)$$

以及

$$\alpha(\varphi(q+\psi)) = f_r(\varphi)\alpha^{(r)}(q+\psi) = f_r(\varphi)\alpha^{(r)}(q) + f_r(\varphi)f_{n-r}(\psi)(\alpha^{(r)})^+(q)$$

由此得到该公式。 □

那么，我们可以提出这样一个问题：映射 $\Delta^{n,\ r}$ 是满射吗？换句话说， I^{n-r} 的每个不变量能否定义出 $I^{n,\ r}$的一个不变量，正如我们用 a_5 所展示的那样?

我们目前没有一般性的答案，但仍可以处理一个特殊情形:

命题 1.2.88。对于任意 $n \geqslant 2$, $\Delta^{n,\ 1}$ 都是一个同构。

证明。只需证明对于任意 $d \geqslant 1$, f_{n-1}^d 都属于该像。因此，我们需要证明 $\langle\langle a\rangle\rangle q \mapsto \{a\} f_{n-1}^d(q)$ 是定义良好的不变量。换言之，若 $q, q' \in I^{n-1}(K)$ 且 $a, b \in K^*$，那么 $\langle\langle a\rangle\rangle q = \langle\langle b\rangle\rangle q'$ 蕴含 $\{a\} f_{n-1}^d(q) = \{b\} f_{n-1}^d(q')$。

首先假设 $a = b$。那么根据 [7, 定理 41.3],

$$q - q' = \sum_{i \in J} \langle\langle c_i \rangle\rangle \varphi_i$$

其中 c_i 由 $\langle\langle a \rangle\rangle$表示。于是可以对 $|J|$进行递归，因此只需考虑 $q' = q + \langle\langle c \rangle\rangle \varphi$ 且 c 由 $\langle\langle a \rangle\rangle$ 表示的情形。

然而，对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$， $f_{n-1}^k(\langle\langle c \rangle\rangle \varphi)$ 都是 $\{c\}$ 的倍数，因此 $\{a\} f_{n-1}^k(\langle\langle c \rangle\rangle \varphi) = 0$。由此:

$$\{a\} f_{n-1}^d(q') = \{a\} \sum_{k=0}^{d} f_{n-1}^k(q) f_{n-1}^{d-k}(\langle\langle c \rangle\rangle \varphi) = \{a\} f_{n-1}^d(q).$$

现在假设 $a \neq b$。那么根据 [9], 的附录B，有

$$\langle\langle a \rangle\rangle q = \langle\langle a \rangle\rangle \varphi = \langle\langle b \rangle\rangle \varphi = \langle\langle b \rangle\rangle q'$$

其中 $\varphi = \sum_{i \in J} \langle \lambda_i \rangle \langle\langle c_i \rangle\rangle$， 且 c_i 由 $\langle\langle ab \rangle\rangle$表示。

前面的讨论表明，$\{a\} f_{n-1}^d(q) = \{a\} f_{n-1}^d(\varphi)$，且$\{b\} f_{n-1}^d(q) = \{b\} f_{n-1}^d(\varphi)$，因此只需证明，对于任意具有上述分解的 φ ，都有 $\{a\} f_{n-1}^d(\varphi) = \{b\} f_{n-1}^d(\varphi)$，这恰好就是下面引理的陈述。 □

引理1.2.89。 设 $a, b \in K^*$， 并设 $q \in I^n(K)$ 具有如下形式

$$q = \sum_{i=1}^{r} \langle \lambda_i \rangle \langle\langle c_i \rangle\rangle$$

其中 c_i 由 $\langle\langle ab \rangle\rangle$表示。那么对于任意 $d \geqslant 1$,

$$\{a\} f_n^d(q) = \{b\} f_n^d(q).$$

证明。 我们将问题归结为 $A = W$ 的情形，因为若

$$\langle\langle a \rangle\rangle \pi_n^d(q) = \langle\langle b \rangle\rangle \pi_n^d(q)$$

那么就可以应用 f_{d+1} 得到所需结果。在 $A = W$ 的情形下，我们证明一个更强的性质: 只假设 $q \in I(K)$（这是有意义的，因为可以对 $GW(K)$ 中的任意元素应用 π_n^d ）。

我们对 r 进行递归推理。若 $r = 0$，由于 $q = 0$，结论显然成立。对于 $r = 1$ 的情形：我们写作 $\pi_n^d = \sum_{k=1}^{d} x_k \pi_1^k$，其中 $x_k \in \mathbb{Z}$，且 $q = \langle \lambda \rangle \langle\langle c \rangle\rangle$; 那么根据假设， $\langle\langle a, c \rangle\rangle = \langle\langle b, c \rangle\rangle$ ，因此结论显然适用于 $k = 1$; 若 $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \langle\langle a \rangle\rangle \pi_1^k(\langle \lambda \rangle \langle\langle c \rangle\rangle) &= (-1)^k \langle\langle a \rangle\rangle \langle\langle -1 \rangle\rangle^{k-2} \langle\langle \lambda, c \rangle\rangle \\ &= (-1)^k \langle\langle b \rangle\rangle \langle\langle -1 \rangle\rangle^{k-2} \langle\langle \lambda, c \rangle\rangle \\ &= \langle\langle b \rangle\rangle \pi_1^k(\langle \lambda \rangle \langle\langle c \rangle\rangle) \end{aligned}$$

因此，我们通过线性组合得出结论。

若结论对所有不超过 $r \geqslant 1$ 的情形都成立，则写作 $q = q_0 + \langle\lambda\rangle\langle\langle c\rangle\rangle$，其中 q_0 对应长度为 r 的一个表示，而 c 由 $\langle\langle ab\rangle\rangle$ 表示。于是根据归纳假设，有

$$\langle\langle a\rangle\rangle\pi_n^k(q_0) = \langle\langle b\rangle\rangle\pi_n^k(q_0), \quad \langle\langle a\rangle\rangle\pi_n^k(\langle\lambda\rangle\langle\langle c\rangle\rangle) = \langle\langle b\rangle\rangle\pi_n^k(\langle\lambda\rangle\langle\langle c\rangle\rangle)$$

donc

$$\begin{aligned}\langle\langle a\rangle\rangle\pi_n^d(q) &= \sum_{k=0}^{d}\langle\langle a\rangle\rangle\pi_n^k(q_0)\pi_n^{d-k}(\langle\lambda\rangle\langle\langle c\rangle\rangle)\\ &= \sum_{k=0}^{d}\langle\langle b\rangle\rangle\pi_n^k(q_0)\pi_n^{d-k}(\langle\lambda\rangle\langle\langle c\rangle\rangle)\\ &= \langle\langle b\rangle\rangle\pi_n^d(q).\end{aligned}$$

□

1.3 上同调不变量塔

可以在以下框架中重新诠释我们构造的上同调不变量：从 I出发，我们有若干个不变量，其中包括 e_1 （它也可以通过以下性质来刻画：它是次数最低的非零归一化不变量）。接着，我们考虑该不变量为零的形式集合，即 I^2。我们还对 I^2上的不变量进行了分类，其中包括 e_2 （它也可以通过其在归一化不变量中的极小性来刻画）；然后再考察它为零的形式，即 I^3。如此继续。

因此，我们可以将这些构造视为定义了不变量塔：

定义 1.3.1. 设 F 和 H 是定义在一个范畴 $\mathbf{C}$ 上的两个函子，分别取值于**集合**和 **集合**$_*$ （记 0 为带基点集合的基点）。定义在 F 上、取值于 H 的不变量塔是一个有限序列 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，满足$\alpha_i$ 是 F_i 上取值于 H 的一个不变量，其中 $F_1 = F$，且 $F_{i+1}(X) = \{x \in F_i(X) \mid \alpha_i(x) = 0\}$。

在我们的情形中， I^n 的一个上同调不变量可以看作嵌入在定义于 I 上的不变量塔 $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \alpha)$ 中。

于是可以提出这样一个问题： I上的一般上同调不变量塔。特别是，若 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, \mu_2)$，定义在$I_\alpha(K) = \{q \in I^n(K) \mid \alpha(q) = 0\}$上的不变量有哪些? 我们已经有了定义在 I^n上的不变量的限制，但一般而言（正如例 $\alpha = e_n$所提示的），还有许多其他不变量。

我们采用如下思路：假设 α 是次数为 d的齐次对象。可以选取一个不变量 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, I^d)$，使得 $\alpha = e_n \circ \hat{}\alpha$ （它在模 $\mathrm{Inv}(I^n, I^{d+1})$ 的意义下定义良好）。于是对于 $q \in I^n(K)$， $\alpha(q)$ 当且仅当 $\hat{}\alpha(q) \in I^{d+1}(K)$。由此，对于任意 $\beta \in \mathrm{Inv}(I^{d+1}, \mu_2)$，可以定义 $\beta(\hat{}\alpha(q))$，从而得到 I_α的一个不变量。显然，这个不变量取决于 $\hat{}\alpha$的选择。另一方面，可以证明，让 β 变化时由此得到的不变量集合并不依赖于这一选择。

若要迭代这一构造，我们会遇到一个困难：若 α_2 是 I_α的不变量，我们无法保证 α_2 能提升为 Witt 不变量。因此，我们将把研究范围限于以下类型的不变量：

定义 1.3.2. 设 F 是一个从 $\mathbf{Field}_k$ 出发的函子。若存在 $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Inv}(F, I^d)$ 使得 $\alpha = e_d \circ \widetilde{\alpha}$，则称不变量 $\alpha \in \mathrm{Inv}^d(F, \mu_2)$ 是特殊的 。

不变量 $\alpha \in \mathrm{Inv}(F, \mu_2)$ 是特殊的，当且仅当它的所有齐次分量都是特殊的。我们用 $\mathrm{Inv}_s(F, \mu_2)$ 表示特殊不变量模。

若一座不变量塔中的所有不变量都是特殊的，则称该不变量塔是特殊的。

注记 1.3.3. 根据推论 1.2.41，I^n 的每个上同调不变量都是特殊的。

于是我们可以明确说明我们的构造：

命题 1.3.4. 设 F 是从 $\mathbf{Field}_k$ 到 **集合** 的一个函子，并设 $\alpha \in \mathrm{Inv}^d_s(F, \mu_2)$ 是一个特殊不变量。令 $F_\alpha(K) = \{x \in F(K) \mid \alpha(x) = 0\}$。选取$\hat{}\alpha \in \mathrm{Inv}(F, I^d)$，使得 $\alpha = e_d \circ \hat{}\alpha$，并令

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\hat{\alpha}}: & \mathrm{Inv}(I^{d+1}, \mu_2) & \longrightarrow & \mathrm{Inv}_s(F_\alpha, \mu_2) \\ & \beta & \longmapsto & \beta \circ \hat{\alpha}. \end{array}$$

于是，由 $\mathrm{Inv}_s(F_\alpha, \mu_2)$ 与 $\mathrm{Inv}_s(F, \mu_2)$ 生成的子代数，以及 $\Phi_{\hat{\alpha}}$ 的像，与 $\hat{}\alpha$ 的选择无关。

证明。 设 $\hat{}\alpha'$ 是 α 的另一个提升。于是只需证明 $\Phi_{\hat{\alpha}'}(u^{(d+1)}_{m\ d+1}())$ 属于由 $\mathrm{Inv}(F, \mu_2)$ 和 $\Phi_{\hat{\alpha}}$ 的像生成的代数。

设 $\gamma \in \mathrm{Inv}(F, I^{d+1})$，使得 $\hat{}\alpha' = \hat{}\alpha + \gamma$。对于任意 $q \in F_\alpha(K)$，有：

$$\begin{aligned} \Phi_{\hat{\alpha}'}(u^{(d+1)}_{m(d+1)}) &= u^{(d+1)}_{m(d+1)} \circ (\hat{\alpha} + \gamma) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(u^{(d+1)}_{(m-k)(d+1)} \circ \gamma \right) \cup \left(u^{(d+1)}_{k(d+1)} \circ \hat{\alpha} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \gamma_{m-k} \cup \Phi_{\hat{\alpha}}(u^{(d+1)}_{k(d+1)}) \end{aligned}$$

其中 $\gamma_k = u^{(d+1)}_{k\ d+1}() \circ \gamma$ 是 F 的特殊不变量。 □

由于这种构造得到的不变量根据定义本身就是特殊不变量，因此可以迭代这一构造来定义（特殊）不变量塔。

在我们所关注的情形中，我们从 $F = I$ 出发。我们取 I 的任意齐次不变量 α，它必然是特殊的。上述过程于是给出 I_α 的一整个特殊不变量代数（它由 α 唯一确定）。若选取其中一个，不妨设为 β，我们还可以再次利用这一过程来构造 $I_{\alpha,\,\beta}$ 的（特殊）不变量，依此类推。

于是自然会产生一些问题：这样是否能够得到 I 的所有不变量塔？所有特殊不变量塔？

第2章

混合 Witt 环

本章旨在为任意第一类带对合代数 (A,σ) 定义交换环 $\widetilde{GW}(A,\sigma)$ 和 $\widetilde{W}(A,\sigma)$，使其包含 (A,σ) 上的 ε-厄米形式的等距类。具体而言，记 $GW^{\varepsilon}(A,\sigma)$ 为 (A,σ) 上的 ε- 厄米形式的 Grothendieck-Witt 群，并令 $GW^{\pm}(A,\sigma) = GW(A,\sigma) \oplus GW^{-}(A,\sigma)$，于是

$$\widetilde{GW}(A,\sigma) = GW^{\pm}(K) \oplus GW^{\pm}(A,\sigma).$$

其思路是通过典范 Morita 等价（我们在第一部分先建立厄米 Morita 理论的形式体系）定义两个 ε-厄米形式的乘积，但所得元素是 K 上的双线性形式；因此，可以将这两类元素汇集到同一个集合中，从而定义一种对乘积封闭的结构。定理 2.2.9 证明，按此方法确实可以得到交换环结构。我们还通过对双曲形式取商，定义了 Witt 环 $\widetilde{W}(A,\sigma)$ 的一个类似物。

在 $\widetilde{GW}(A,\sigma)$ 上也定义了一种预-λ-环结构（按照第一章的术语，也称为希腊环），见命题 2.3.22。一个重要之处在于，我们所有的构造都自然地与 Hermite Morita 等价相容（见命题 2.3.23）。我们特别研究了赋有典范对合的四元数代数，以及分裂代数的情形。值得注意的是，Lewis 实际上早已处理过四元数代数这一情形，见 [20]，尽管他没有证明该环的结合律（这并非显而易见），也没有构造 λ-运算。不过，Lewis 的论证基于四元数代数的范数形式的存在；与对合迹形式不同，这种范数形式无法推广到任意带对合代数的情形。

最后一部分借鉴二次型的情形（参见定义），为 $\widetilde{W}(A,\sigma)$ 建立了一个“基本”滤子 $\widetilde{I^n(A,\sigma)}$

2.4.3），并借鉴 Minor 猜想，将关联分次定义为“混合上同调”$\sim H^n(A,\sigma)$。随后对该滤子及关联分次进行研究，并着重区分分裂与非分裂情形。

2.1 厄米 Morita 理论

经典 Morita 理论有一个众所周知的厄米类比（例如参见 [16, §9]）。可以将这一理论编码在一种相当紧凑的结构中，我们称之为 K的*Hermite Brauer 2-*群。它是一个对称幺半范畴，并且具有良好的可逆性。后文不会使用 2-群这一概念，因此也不会详细介绍其定义；不过，我们会自由运用幺半范畴形式体系，因为它能够统一并简化记号。

2.1.1 Brauer 2-群

作为动机和引言，我们先描述非厄米版本，它对应于中心单代数和 Brauer 群的通常理论。因此，我们定义一个特定的范畴$\mathbf{Br}(K)$，称为 K 的 Brauer 2-群：

— 对象是定义在 K 上的中心单代数。$\mathbf{Br}(K)$ 的幺半群积就是定义在 K 上的代数的张量积，单位对象为平凡代数 K。— 若 A 和 B 是定义在 K 上的两个中心单代数，则在 $\mathbf{Br}(K)$ 中，从 B 到 A 的态射是 K 上的一个 B-A-双模 U 的同构类（因此也是一个 $B\otimes_K A^{op}$-模的同构类），满足 $B\simeq \mathrm{End}_A(U)$，这等价于 $A\simeq \mathrm{End}_B(U)$（按照惯例，若 U 是一个左 B-模，$\mathrm{End}_B(U)$ 表示自同态代数的对立代数，以便 $\mathrm{End}_B(U)$ 能自然地从右侧作用于 U）。复合由模的张量积给出：$C \xrightarrow{U} B$ 和 $B \xrightarrow{V} A$ 的复合为 $C \xrightarrow{U\otimes_B V} A$。$A$ 的恒等态射是 A 本身，将其自然地视为一个 A-A-双模。幺半群积在态射上的作用符合预期：若给定 $B \xrightarrow{U} A$ 和 $B' \xrightarrow{V} A'$，则得到 $B\otimes_K B' \xrightarrow{U\otimes_K V} A\otimes_K A'$。

很容易看出，这与通常的 Morita 理论有关：当且仅当 A 和 B Brauer 等价时，A 与 B 之间存在一个态射，这记作 $A\sim B$；而一个特定态射的数据对应于一组 Morita数据。所要求的结合律和对称性性质对应于

张量积的通常性质。

注记 2.1.1. 显然，可以将定义推广到任意交换环 R ，得到范畴 $\mathbf{Mor}(R)$，其对象是任意 R-代数，态射则是任意双模。

像我们这样限制定义，相当于考虑“可逆”元素，这也说明了为何称之为“群”。幺半群范畴中对象的可逆性问题相当微妙（例如参见 [3]）；因此我们将避免陷入一般性的讨论，仅给出后文所需的记号。

若 U 是一个 B-A-双模，则 $\mathrm{Hom}_A(U,\ A)$ 和 $\mathrm{Hom}_B(U,\ B)$ 自然地带有 A-B-双模结构，其定义分别为 $(a\varphi b)(x) = a\varphi(bx)$ 和 $(a\varphi b)(x) = \varphi(xa)b$。于是有一个自然同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(U,B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_A(U,A) \\ \varphi & \longmapsto & (u \mapsto (v \mapsto \varphi(v)u)) \end{array} \tag{2.1.2}$$

这里使用了识别 $A \simeq \mathrm{End}_B(U)$。我们将这个同构视为一种识别，并用 U^* 表示这两个双模中的任意一个。因此，我们有一个 B-B-双模 $U \otimes_A U^*$，以及一个 A-A-双模 $U^* \otimes_B U$。Morita 理论中的一个经典结果指出，若 U 是一个单双模，那么 U^* 也是，并且存在自然的双模同构 $U \otimes_A U^* \simeq B$ 和 $U^* \otimes_B U \simeq A$。因此，可以说 U^* 是 U 在 $\mathbf{Br}(K)$ 中的逆元，因为从任一方向看，U 与 U^* 的复合（视为态射）都同构于（因而等于）恒等映射。

若 A 是 $\mathbf{Br}(K)$ 的一个对象，那么对立代数 A^{op} 是A 关于幺半结构的一个弱逆元，也就是说，存在一个自然同构$A \otimes_K A^{op} \simeq K$，位于 $\mathbf{Br}(K)$ 中；该同构由双模 A 给出，其左侧赋予 $A \otimes_K A^{op}$的「夹心」作用，右侧赋予 K的自然作用。

2.1.2 厄米特 Brauer 2-群

现在介绍前述构造的厄米版本，记作 $\mathbf{Br}_h(K)$。

— 对象是定义在 K上的第一类带对合代数（A,σ）。$\mathbf{Br}_h(K)$的幺半群积仍是关于 K的张量积，即（A,σ）$\otimes$（B,τ）$=$（$A \otimes_K B, \sigma \otimes \tau$），单位对象为（$K$，基本理想）。— 从（$B,\tau$）到（$A,\sigma$）的态射是 B-A-单双模 ε-厄米形式的等距类，也就是一对（U,h），其中 U 是一个 B-A-单双模，而 $h: U \times U \longrightarrow A$ 是一个 ε-厄米形式（其中 $\varepsilon = \pm 1$），相对于 σ，使得通过识别 $B = \mathrm{End}_A(U)$，h 的伴随对合为 τ。

$(C,\ \theta)\ \xrightarrow{(U,\ h)}\ (B,\ \tau)$ 与 $(B,\ \tau)\ \xrightarrow{(V,\ g)}\ (A,\ \sigma)$ 的复合为

$$(C,\theta)\xrightarrow{(U\otimes_B V,f)}(A,\sigma)$$

où

$$f(u\otimes v,u'\otimes v')=g(v,h(u,u')v'). \tag{2.1.3}$$

若 h 是 ε-厄米的，且是 g ε'-厄米的，则 f 是 $\varepsilon\varepsilon'$-厄米的。(A,σ) 的恒等态射是 A-A 双模 A，赋予

$$\begin{array}{rccc} h_A: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & \sigma(x)y \end{array}. \tag{2.1.4}$$

幺半群积对态射的作用自然由张量积给出。

显然存在一个从 $\mathbf{Br}_h(K)$ 到$\mathbf{Br}(K)$ 的典范（“遗忘”）函子，它是幺半群函子。

$\mathbf{Br}_h(K)$ 中态射的复合定义良好且满足结合律，这只是对 Morita 厄米理论的简单重述；该理论见 [16]。

注记 2.1.5. (A,σ) 与 (B,τ) 之间存在一个（同构）态射，当且仅当 $A\sim B$（例如参见 [17, 4.2]）；若 σ 与 τ 类型相同，则给出该态射的双模是厄米的；若 σ 与 τ 类型不同，则是反厄米的。此外，在 $\mathbf{Br}(K)$ 中，两个对象之间至多存在一个态射；而在这里，若 $A\sim B$ 个从 A 到 B 的态射对应于两个相似的厄米模，则它们通常并不同构。

$\mathbf{Br}_h(K)$ 中的可逆性在某种意义上比$\mathbf{Br}(K)$ 中的更强，反映了厄米理论和对合所特有的自对偶性现象。

事实上，(A,σ) 的弱逆元可以选为其自身 (A,σ)：存在等价 $(A\otimes_K A,\sigma\otimes\sigma)\simeq(K,\text{基本理想})$，由双模 A 给出，其中 K 的右作用是重言式的，而 $A\otimes_K A$ 的左作用则是由 σ 扭曲的夹心作用：

$$(a\otimes b)\cdot x=axb\sigma(b). \tag{2.1.6}$$

厄米结构，在此处对应于对称双线性形式，由对合迹形式给出（见 [17, 11.1]）

$$\begin{array}{rccc} T_\sigma: & A\times A & \longrightarrow & K \\ & (x,y) & \longmapsto & \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)y) \end{array}. \tag{2.1.7}$$

至于态射的逆运算，若 $(B,\tau)\xrightarrow{(U,h)}(A,\sigma)$ 是 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中的一个态射，则其逆为 $({}^\sigma U^\tau,h^*)$，其中 ${}^\sigma U^\tau$是由 U 配备扭曲作用所给出的 A-B-双模

$$a\cdot u\cdot b=\tau(b)\cdot u\cdot\sigma(a), \tag{2.1.8}$$

et

$$h^* : {}^{\sigma}U^{\tau} \times {}^{\sigma}U^{\tau} \longrightarrow B$$

定义为

$$h^*(x,y)u = xh(y,u). \tag{2.1.9}$$

注记 2.1.10. 沿着注记 2.1.1 的思路，可以将这个定义推广到范畴 $\mathbf{Mor}_h(R,\ \iota)$，其中 $(R,\ \iota)$ 是带有对合的交换环。在这种情况下，对象是带有对合的 R-代数 A，并满足 σ，使得 $\sigma_{|R} = \iota$。此时会失去可逆性，但仍然得到一个幺半群范畴。值得注意的是，在此背景下，对于任意满足 $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$ 的 $\varepsilon \in Z(A)^*$，形式都可以是 $(A,\ \sigma)$ 上的 ε-厄米形式。

若有两个态射 f 和 f' 指向 $(A,\ \sigma)$，分别对应于 ε-厄米模，则可以构造正交直和 $f \oplus f'$，它仍是一个指向 $(A,\ \sigma)$、对应于 ε-厄米模的态射。

引理2.1.11. 设 f, f' 是 $\mathbf{Br}_h(K)$ 到 (B,τ) 的同号态射，并设 $g : (B,\tau) \longrightarrow (A,\sigma)$。那么

$$(f \oplus f') \circ g = (f \circ g) \oplus (f' \circ g).$$

证明. 这直接由张量积的定义得出。

□

2.2 混合Witt环

2.2.1 混合Grothendieck-Witt环

定义

我们首先定义 Grothendieck-Witt 环的类似物，它在某种意义上比 Witt 环更基础，并将在稍后在其上定义运算 λ^d。与通常的 Grothendieck-Witt 环情形一样，我们从某个半环出发来定义它；在本例中，该半环带有分次结构。这个半环本身并非最重要，但在证明中使用它很方便，因为所有元素都由厄米模表示，之后再将结果转移到该环上。

定义 2.2.1. 设 (A,σ) 是 K 上的第一类带对合代数。定义以下交换加法幺半群，它们都赋有正交和：$SGW(K)$ 由 K 上非退化对称双线性模的等距类构成，$SGW^-(K)$ 由交错双线性模的等距类构成，$SGW^+(A,\sigma)$ 由 (A,σ) 上（右）厄米模的等距类构成，而 $SGW^-(A,\sigma)$ 由反厄米模的等距类构成。

于是定义

$$\widetilde{SGW}(A,\sigma) = SGW(K) \oplus SGW^{-}(K) \oplus SGW^{+}(A,\sigma) \oplus SGW^{-}(A,\sigma)$$

以及其 Grothendieck 群，称为 (A混合 σ) 的 Grothendieck-Witt 群：

$$\widetilde{GW}(A,\sigma) = GW(K) \oplus GW^{-}(K) \oplus GW^{+}(A,\sigma) \oplus GW^{-}(A,\sigma).$$

目前，$SGW(A,\ \sigma)$ 只是一个加法幺半群，而 $GW(A,\ \sigma)$ 是一个$GW(K)$-模。注意，由于带对合的代数上的 ε- 厄米模满足 Witt 分解定理，$SGW(A,\ \sigma)$ 是一个可消去幺半群，因此自然态射 $SGW(A,\ \sigma) \longrightarrow GW(A,\ \sigma)$ 是单射。

分次

定义群

$$\Gamma = \{+, -, o, s\}, \tag{2.2.2}$$

同构于 Klein 群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$，使得 $+$ 成为单位元。这些符号应分别理解为对称、交错、正交 和辛，对应于不同类型的双线性型和对合。

于是赋予 $SGW(A,\sigma)$一个Γ分次：分量 $SGW(A,\sigma)_+$ 是 $SGW(K)$，分量 $SGW(A,\sigma)_-$ 是 $SGW^{-}(K)$。分量 $SGW(A,\sigma)_o$在 σ 正交时是 $SGW^{+}(A,\sigma)$，在 σ为辛时则是 $SGW^{-}(A,\sigma)$；因此，若 $SGW(A,\sigma)_o$ 中的一个元素表示某个 A- ε厄米模(U,h)，那么伴随对合 σ_h 是正交的。反过来，$SGW(A,\sigma)_s$ 中一个元素的伴随对合是辛的。

此分次唯一地扩展到 $\widetilde{GW}(A,\sigma)$（见引理 1.1.24）。

乘积

现在我们要为$SGW(A,\ \sigma)$赋予分次半环结构。只需定义乘积，并逐分量验证分配律和结合律相对于 Γ-分次：我们需要映射 $SGW(A,\ \sigma)_{\gamma_1} \times SGW(A,\ \sigma)_{\gamma_2} \longrightarrow SGW(A,\ \sigma)_{\gamma_1+\gamma_2}$对所有 $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma$成立。

由于 $\widetilde{SGW}(A,\ \sigma)_{\gamma_i}$的元素对应于某个带对合代数 $(A_i,\ \sigma_i)$ 上的 ε_i-厄米模（若 γ_i 是 o 或 s，则该代数为 $(A,\ \sigma)$；若 γ_i 是 $+$ 或 $-$，则为 $(K,\ \mathrm{Id})$），因此对应于 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中到 $(A_i,\ \sigma_i)$ 的态射。于是，我们可以利用 $\mathbf{Br}_h(K)$ 的幺半结构来定义一个态射

到 $(A_1 \otimes_K A_2,\ \sigma_1 \otimes \sigma_2)$。如果某个 A_i 等于 K，那么就得到了 $SGW(A,\ \sigma)$ 的一个元素$\widetilde{\ }$。

因此，仍需处理 $\gamma_1, \gamma_2 \in \{o, s\}$ 的情形。在这种情况下，我们得到一个到 $(A \otimes_K A, \sigma \otimes \sigma)$ 的态射；而在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中，存在从该对象到 (K, Id) 的典范同构，即对称双线性空间 (A, T_σ)（见 (2.1.7)）。借助它，我们可以通过复合，将到 $(A \otimes_K A, \sigma \otimes \widetilde{\ } \sigma)$ 的态射转换为到 (K, Id) 的态射，从而得到 $SGW(A, \sigma)$ 的元素。下面明确给出这一定义：

定义 2.2.3. 设 (U, h) 和 (V, g) 分别是 (A, σ) 上的右 ε-厄米模和右 ε'-厄米模。那么 $(U, h) \cdot (V, g)$ 是一个 K-双线性空间，通常记作 $h \cdot g$，其定义如下

$$\begin{array}{rccc} h \cdot g : & W \times W & \longrightarrow & K \\ & ((u \otimes v) \otimes a, (u' \otimes v') \otimes a') & \longmapsto & \mathrm{Trd}_A\left(\sigma(a) h(u, u') a' \sigma(g(v, v'))\right) \end{array} \tag{2.2.4}$$

其中 $W = (U \otimes_K V) \otimes_{A \otimes_K A} A$。

定义来自公式 (2.1.3)，注意到

$$h(u, u') \otimes g(v, v') \cdot a' = h(u, u') a' \sigma(g(v, v')).$$

引理 2.2.5. 如此定义的乘积具有交换性和双加性，并且可以唯一地扩张为定义在 $SGW(A, \sigma)$ 和 $GW(A, \sigma)$上的交换且可分配的乘积。

证明。 设 (V_i, h_i) 是 (A, σ) 上的 ε_i-厄米模，其中 $i = 1,2,3$。于是定义一个从 $(W, f) = (V_1, h_1) \cdot (V_2, h_2)$ 到 $(W', f') = (V_2, h_2) \cdot (V_1, h_1)$ 的 K-等距同构：

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W' \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes a & \longmapsto & (v_2 \otimes v_1) \otimes \sigma(a) \end{array}$$

这表明了交换性（我们略去证明这确实定义了一个等距同构，因为直接展开定义即可得到）。

我们也有

$$((V_1, h_1) \oplus (V_2, h_2)) \otimes_K (V_3, h_3) \simeq (V_1 \otimes_K V_3, h_1 \otimes h_3) \oplus (V_2 \otimes_K V_3, h_1 \otimes h_3)$$

因此，应用引理2.1.11即可得到双可加性。最终，我们确实在 $SGW(A, \sigma)$的所有分量上构造了一个乘积，并且交换律和分配律都逐分量成立。关于 $GW(A, \sigma)$ 的断言可由 Grothendieck 群的泛性质推出。

□

注记 2.2.6. 通过在$\mathbf{Br}_h(K)$中与 T_A 预复合，上述交换性表明我们可以直接得到一个等距同构

$$(V_1 \otimes_K V_2, h_1 \otimes h_2) \simeq (V_2 \otimes_K V_1, h_2 \otimes h_1)$$

作为$(A \otimes_K A, \sigma \otimes \sigma)$-厄米模，但证明要麻烦得多；要显式给出一个等距同构，需要借助 A的Goldman 元素。需要指出的是，一般而言，若 A 没有配备对合，且 V 和 W 是 A-模，我们没有理由认为 $V \otimes_K W$与 $W \otimes V$之间存在 $A \otimes_K A$-模的自然同构（但我们已经证明，只要有对合，不仅存在这一同构，还可以直接添加厄米形式并得到一个等距同构）。

结合律

通过连续使用 $(A \otimes_K A, \sigma \otimes \sigma)$ 与 $(K$,基本理想$)$ 之间的典范同构，对于任意 $d \in \mathbb{N}$，可在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中得到从 $(A, \sigma)^{\otimes d}$ 到 (A, σ) 的同构（当 d 为奇数时），以及到 $(K,$ 基本理想$)$ 的同构（当 d 为偶数时）。乍看之下，这个同构取决于项的分组方式，因此需要验证某个结合条件。

接下来我们将需要研究 Goldman 元素（见 [17,3.5]）在我们这一背景中的作用。

引理 *2.2.7.* 考虑 $A \otimes_K A$ 在 K-向量空间 A 上给出的左扭曲作用 $(a \otimes b) \cdot x = ax\sigma(b)$。那么 *Goldman* 元素 $g \in A \otimes_K A$ 对任意 $x \in A$ 均满足 $(\text{基本理想} \otimes \sigma)(g) \cdot x = \mathrm{Trd}_A(x)$，并且 $g \cdot x = \varepsilon\sigma(x)$，其中当 σ 为正交的时 $\varepsilon = 1$，当其为辛的时 -1。此外，$(\sigma \otimes \sigma)(g) = g$，因此 $(\sigma \otimes \text{基本理想})(g) \cdot x = \mathrm{Trd}_A(x)$ 且 $(\sigma \otimes \sigma)(g) \cdot x = \varepsilon\sigma(x)$。

证明。第一个公式本质上就是 g 的定义，因为它被定义为在未扭曲的夹心作用下充当迹。对于第二个公式，我们可归结为 A 可分裂的情形。于是，对于某个向量空间 V，有 $A = \mathrm{End}_K(V)$，并且 $\sigma = \sigma_b$，其中 b 是 ε-对称的。此时我们有典范同构 $A \simeq V \otimes V$，使得 $(v \otimes w)(v' \otimes w') = b(w, v')v \otimes w'$ 且$\sigma(v \otimes w) = \varepsilon w \otimes v$。设 (e_i) 是 V 的一组基，(e_i^*) 是其关于 b 的对偶基（若 σ 是正交的，则可取 (e_i) 为一组正交基，此时 $e_i = e_i^*$）。于是 $g = \sum_{i,\ j} e_i \otimes e_j^* \otimes e_j \otimes e_i^*$（见 [17, 3.6] 的证明），因此

$$\begin{aligned} g \cdot (v \otimes w) &= \sum_{i,j} (e_i \otimes e_j^*) \cdot (v \otimes w) \cdot \varepsilon(e_i^* \otimes e_j) \\ &= \varepsilon \sum_{i,j} b(e_j^*, v) b(w, e_i^*) e_j \otimes e_j \\ &= \left(\sum_i b(e_i^*, w) e_i \right) \otimes \left(\sum_j b(e_j^*, v) e_j \right) \\ &= w \otimes v. \end{aligned}$$

关于最后一个断言，请参见 [17, 10.19]。 □

命题 2.2.8. 从 $(A,\sigma)^{\otimes d}$ 到 (A,σ) 或 (K,Id) 中的同构 $\varphi^{(d)}{}_{(A,\sigma)}$ 在$\mathbf{Br}_h(K)$中是规范的，且不依赖于各项的分组顺序。

证明。 显然，与任何结合律形式的情形一样，只需对三个项进行验证。因此，我们需要证明在$\mathbf{Br}_h(K)$中有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} (A\otimes_K A\otimes_K A,\sigma\otimes\sigma\otimes\sigma) & \longrightarrow & (K\otimes A,\mathrm{Id}\otimes\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A\otimes K,\sigma\otimes\mathrm{Id}) & \longrightarrow & (A,\sigma) \end{array}$$

这相当于在厄米双模 $(A\otimes_K A,h_1)$ 和 $(A\otimes_K A,h_2)$ 之间构造一个等距同构，其中 $A\otimes_K A\otimes_K A$ 的左作用和 A 的右作用在第一种情形下为

$$(a\otimes b\otimes c)\cdot_1(x\otimes y)\cdot_1 d=(ax\sigma(b))\otimes(cyd)$$

在第二种情形下为

$$(a\otimes b\otimes c)\cdot_2(x\otimes y)\cdot_2 d=(axd)\otimes(by\sigma(c))$$

厄米形式为

$$h_1(x\otimes y,x'\otimes y')=\mathrm{Trd}_A(\sigma(x)x')\sigma(y)y'$$

et

$$h_2(x\otimes y,x'\otimes y')=\mathrm{Trd}_A(\sigma(y)y')\sigma(x)x'.$$

设 $g\in A\otimes_K A$ 为 Goldman 元素；若 $g=\sum_i a_i\otimes b_i$，则定义从 h_1 到 h_2 的等距同构为

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A\otimes_K A & \longrightarrow & A\otimes_K A \\ & x\otimes y & \longmapsto & \sum_i (xa_iy)\otimes\sigma(b_i). \end{array}$$

注意到 $1\otimes 1$ 被映射到 $g'=$(基本理想$\otimes\sigma$)(g)。由于双模 $A\otimes_K A$ 由元素 $1\otimes 1$ 在上述定义的两种作用下生成，这足以刻画 φ，但还需验证 g' 是 $1\otimes 1$像的一个可接受元素，这等价于验证我们确实定义了一个双模态射。我们有

$$\begin{aligned}\varphi\left((a\otimes b\otimes c)\cdot_1(x\otimes y)\cdot_1 d\right)&=\varphi\left((ax\sigma(b))\otimes(cyd)\right)\\&=\sum_i(ax\sigma(b)a_icyd)\otimes\sigma(b_i)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(a\otimes b\otimes c)\cdot_2\varphi(x\otimes y)\cdot_2 d&=\sum_i(a\otimes b\otimes c)\cdot_2(xa_iy)\otimes\sigma(b_i)\cdot_2 d\\&=\sum_i(axa_iyd)\otimes(b\sigma(b_i)\sigma(c)).\end{aligned}$$

因此，我们需要证明

$$\sum_i \sigma(b)a_i c \otimes \sigma(b_i) = \sum_i a_i \otimes b\sigma(b_i)\sigma(c),$$

这等价于

$$(\mathrm{Id}\otimes\sigma)((\sigma(b)\otimes 1)g(c\otimes 1)) = (\mathrm{Id}\otimes\sigma)((1\otimes c)g(1\otimes\sigma(b)))$$

由 Goldman 元素的性质可得（见 [17, 3.6], 或引理2.3.2）。因此， φ确实定义了一个双模态射；又因为 g' 可逆，所以它确实是一个同构。

还需验证 φ 实现了从 h_1 到 h_2的等距同构。我们有

$$\begin{aligned}
h_2(\varphi(x\otimes y),\varphi(x'\otimes y')) &= \sum_{i,j} h_2((xa_iy)\otimes\sigma(b_i),(x'a_jy')\otimes\sigma(b_j)) \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{Trd}_A(b_i\sigma(b_j))\sigma(y)\sigma(a_i)\sigma(x)x'a_jy' \\
&= \sum_{i,j,k} \sigma(y)\sigma(a_i)\sigma(x)x'a_jy'a_kb_i\sigma(b_j)b_k \\
&= \varepsilon\sum_{i,k} \sigma(y)\sigma(a_i)\sigma(x)x'\sigma(b_i)\sigma(a_k)\sigma(y')b_k \\
&= \varepsilon\sigma(y)\,\mathrm{Trd}_A(\sigma(x)x')\varepsilon y' \\
&= h_1(x\otimes y, x'\otimes y')
\end{aligned}$$

利用引理 2.2.7 中的关系。

□

因此：

定理 2.2.9。上一部分中定义的映射 $SGW(A,\sigma)\times SGW(A,\sigma)\longrightarrow SGW(A,\sigma)$ 赋予 $SGW(A,\sigma)$ 一个交换分次半环结构，并在 $GW(A,\sigma)$ 上诱导出一个交换分次 $GW(K)$-代数结构。

证明。根据格罗滕迪克群的泛性质（特别参见引理 1.1.24），只需证明关于 $SGW(A,\sigma)$的断言。为此剩下需要证明的只有结合律，而结合律可对 Γ-分次逐分量验证。

因此，在 (A_i,σ_i) 上定义 $1\leqslant i\leqslant 3$ (U_i,h_i) 为右 ε_i-厄米模，其中 (A_i,σ_i) 要么是 (A,σ)，要么是 (K,Id)。根据乘积的构造，$(h_1\cdot h_2)\cdot h_3$和 $h_1\cdot(h_2\cdot h_3)$ 均由一个 $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$-厄米模通过

$(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3, \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3)$ 得到，并经由 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中的某些同构进行复合传递。此外，这两个厄米模根据张量积的结合律是等距同构的。因此，需要证明在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} (A_1 \otimes A_2 \otimes A_3, \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) & \longrightarrow & (B_1 \otimes A_3, \tau_1 \otimes \sigma_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A_1 \otimes B_2, \sigma_1 \otimes \tau_2) & \longrightarrow & (C, \theta) \end{array}$$

其中，(B_i, τ_i)和(C, θ)根据(A_i, σ_i)的性质，或者是(A, σ)，或者是(K, Id)；而态射则是形如$(A, \sigma) \otimes (K, \mathrm{Id}) \simeq (A, \sigma)$、$(K, \mathrm{Id}) \otimes (K, \mathrm{Id}) \simeq (K, \mathrm{Id})$或$(A, \sigma) \otimes (A, \sigma) \simeq (K, \mathrm{Id})$的典范同一化。

其中一个 A_i 等于 K 的情形，只是因为(K, Id)是$\mathbf{Br}_h(K)$的幺半结构的恒等映射；而所有 A_i均为 A 的情形，则恰好归结为命题 2.2.8。 □

根据构造，对于任意扩张 L/K，都有一个从 $GW(K)$-$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$分次代数到 $GW(A, \sigma) \longrightarrow GW(A_L, \sigma_L)$的态射。

$\widetilde{\quad}$**例2.2.10**。在 $GW(A, \sigma)$ 中，有一些特殊元素，即对角形式 $\langle a \rangle$，其中 $a \in A$ 是一个对称或反对称的可逆元素。有时记作 $\langle a \rangle_\sigma$ 或 $\langle a \rangle_A$，以避免混淆。若 A 是除环，这些形式在加法下生成 $GW^{\pm}(A, \sigma)$。因此，根据乘积的构造：

$$\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = ((x, y) \mapsto \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)ay\sigma(b)))\,.$$

特别地，我们有 $\langle 1 \rangle_\sigma \in GW^+(A, \sigma)$，它是 A 在$\mathbf{Br}_h(K)$ 中的恒等映射。于是

$$\langle a \rangle \cdot \langle 1 \rangle = T_{\sigma,a}$$

其中 $T_{\sigma,\ a}$ 是在 [17, §11] 中定义的双线性形式，其定义为

$$T_{\sigma,a}(x, y) = \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)ay). \tag{2.2.11}$$

尤其是，$\langle 1 \rangle_\sigma^2 = T_\sigma$，即对合迹形式。

2.2.2 混合 Witt环

我们也可以构造 Witt环的等价形式，它通常更容易处理，尽管结构较少。

定义 2.2.12. 设 (A, σ) 是K上的第一类带对合代数。定义 $W(K)$-模

$$\widetilde{W}(A, \sigma) = W(K) \oplus W^+(A, \sigma) \oplus W^-(A, \sigma).$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$赋予 $W(A,\sigma)$ 一种类似于 $GW(A,\sigma)$ 的 Γ-分次，其中元素 $-\in\Gamma$ 对应的分量为零（因为 $W^{-}(K)=0$）。

显然，存在一个典范满同态 $GW(K)$-$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$分次模 $GW(A,\sigma)\to W(A,\sigma)$，它由对每个分量作自然投影给出。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$**命题 2.2.13.** 典范映射 $GW(A,\sigma)\to W(A,\sigma)$的核是理想 双曲型$(A,\sigma)$，它由各分量中的双曲形式生成。特别地，$W(A,\sigma)$ 具有唯一的环结构，使得前述映射成为环同态。

证明。 根据相关 Witt 群的定义，核由所有分量均为双曲形式的元素构成。因此，只需证明这个子模是一个理想，也就是说，只需证明双曲形式与任意形式的乘积仍是双曲形式。除形如 $GW^{-}(K)$ 的分量外，结论显然成立，因为任意双曲形式都形如 $h\perp\langle-1\rangle h$，所以它与任意元素 x 的乘积都形如 $(xh)\perp\langle-1\rangle(xh)$，因而是双曲形式。对于交错双线性形式的情形（它们全都是双曲形式），可归结为平面的情形，其矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，因此它与一个形式$h$ 的乘积形如 $\begin{pmatrix}0&h\\\langle-1\rangle h&0\end{pmatrix}$，这给出一个双曲形式。

□

标量扩张态射显然与投影相容，因此对于任意扩张 L/K，都有一个分次 $W(K)$-$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$代数之间的态射 $W(A,\ \sigma)\longrightarrow W(A_L,\ \sigma_L)$。

2.2.3 Morita 等价

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$环结构是借助张量积及同构 $GW(A,\ \sigma)$ 和 $W(A,\ \sigma)$ 定义的，这些同构 $\varphi^{(d)}{}_{(A,\ \sigma)}$ 由命题 2.2.8 描述。我们将证明这些同构与厄米 Morita 等价的相容性。

命题 2.2.14. 设 $f:(B,\tau)\longrightarrow(A,\sigma)$ 是 $\mathbf{Br}_h(K)$中的一个态射（对应于一个厄米 *Morita* 等价）。对于任意 $d\in\mathbb{N}$，在 $\mathbf{Br}_h(K)$中有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}(B^{\otimes d},\tau^{\otimes d})&\xrightarrow{\varphi^{(d)}_{(B,\tau)}}&(B,\tau)\\ \downarrow{\scriptstyle f^{\otimes d}}&&\downarrow{\scriptstyle f}\\(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})&\xrightarrow{\varphi^{(d)}_{(A,\sigma)}}&(A,\sigma)\end{array}$$

若 d是奇数，且

$$\begin{array}{ccc}(B^{\otimes d},\tau^{\otimes d}) & \xrightarrow{\varphi^{(d)}_{(B,\tau)}} & (K,\mathrm{Id}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f^{\otimes d}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ (A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d}) & \xrightarrow{\varphi^{(d)}_{(A,\sigma)}} & (K,\mathrm{Id})\end{array}$$

若 d是偶数。

证明。若 $d=0$，平方完全由等式构成；若 $d=1$，垂直箭头相同，水平箭头为等式。利用命题 2.2.8，可通过递归归结到 $d=2$ 的情形，因此需要在对应于 ${\varphi^{(2)}}_{(A,\sigma)}\circ f^{\otimes 2}$ 和 ${\varphi^{(2)}}_{(A,\sigma)}$ 的模之间构造一个等距同构。

于是定义如下的 $(B\otimes_K B)$-K-双模态射，其中 f 对应于双模 ε-厄米结构 (V,h)：

$$\begin{array}{rccc}\psi: & (V\otimes_K V)\otimes_{A\otimes_K A} A & \longrightarrow & B=\mathrm{End}_A(V) \\ & (v\otimes w)\otimes a & \longmapsto & \varphi_h(va\otimes w).\end{array}$$

其中 $\varphi_h: V\otimes_K V\to B$ 对应于典范同一 $V\otimes_A {}^{\tau}V\to B$ （见 [17, 5.1]），并由下式给出

$$\varphi_h(v\otimes w)(x)=vh(w,x).$$

为了证明这是一个等距同构，我们必须证明一方面

$$\begin{aligned}&\mathrm{Trd}_B\left(\tau\left(\psi((v\otimes w)\otimes a)\right)\cdot\psi(((v'\otimes w')\otimes b))\right)\\&=\mathrm{Trd}_B\left(\tau(\varphi_h(va\otimes w))\cdot\varphi_h(v'b\otimes w')\right)\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\mathrm{Trd}_A\left(\sigma(a)(h\otimes h)(v\otimes w,v'\otimes w')\cdot b\right)\\&=\varepsilon\,\mathrm{Trd}_A(\sigma(a)h(v,v')bh(w',w)).\end{aligned}$$

然而，依次应用定理 [17, 5.1]，的公式，可得：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Trd}_B\left(\tau(\varphi_h(va\otimes w))\cdot\varphi_h(v'b\otimes w')\right)\\&=\varepsilon\,\mathrm{Trd}_B\left(\varphi_h(w\otimes va)\cdot\varphi_h(v'b\otimes w')\right)\\&=\varepsilon\,\mathrm{Trd}_B\left(\varphi_h(wh(va,v'b)\otimes w')\right)\\&=\varepsilon\,\mathrm{Trd}_A\left(h(w',wh(va,v'b))\right)\\&=\varepsilon\,\mathrm{Trd}_A\left(h(w',w)\sigma(a)h(v,v')b\right).\end{aligned}$$

□

这种相容性使代数$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}GW$和 W呈现出显著的性质：设 $(A,\ \sigma)$ 和 $(B,\ \tau)$ 配备了一个态射 $f\colon (B,\ \tau)\ \to (A,\ \sigma)$，其取值于 $\mathbf{Br}_h(K)$；于是可以定义一个映射

$$f_* : \widetilde{SGW}(B,\tau) \longrightarrow \widetilde{SGW}(A,\sigma)$$

如同在分量 $SGW^{\pm}(K)$ 上的恒等映射，以及在分量 $SGW^{\pm}(B,\tau)$ 上与 f 的复合，并将 ε-厄米模解释为指向 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中 (B,τ) 的态射。

$\widetilde{\quad}$**定理2.2.15**。对应关系 $(A,\sigma)\ \mapsto\ SGW(A,\sigma)$ 以及 $f\ \mapsto\ f_*$ 定义了一个从 $\mathbf{Br}_h(K)$ 到 Γ-分次半环范畴的函子。特别地，由于 $\mathbf{Br}_h(K)$ 是一个群胚，f_* 是一个半环同构。

$\widetilde{\quad}$此外，该函子自然地诱导出函子 $(A,\sigma)\ \mapsto GW(A,\sigma)$ 和$\widetilde{\quad}$ $(A,\sigma)\ \mapsto\ W(A,\sigma)$，它们分别从 $\mathbf{Br}_h(K)$ 映到 $GW(K)$-分次代数和 $W(K)$-分次代数。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$证明。关于 GW 和 W 的结论可直接由关于 SGW的结论推出，因为容易验证 f_* 保持正交和（见 2.1.11）和双曲形式。

从集合论的角度看，根据定义，$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$显然成立。对于分量 $+$ 和 $-$，f_* 保持分次显而易见；对于分量 o 和 s，这源于我们对分次的选择：若 f 对应一个厄米模，则 σ 和 τ 属于同一类型，且与 f复合会保持模的符号；若 f 对应一个反厄米模，则 σ 和 τ 属于不同类型，且与 f 复合会反转模的符号。无论哪种情况，分次都得以保持。

因此需要证明 f_* 保持乘积。我们可以将问题归结为 (B_i,τ_i) 上的 ε_i-厄米模，其中该结构要么是 (B,τ)，要么是 $(K,$基本理想$)$，并且需要证明以下自然交换图可交换：

$$\begin{array}{ccc}
GW^{\varepsilon_1}(B_1,\tau_1)\times GW^{\varepsilon_2}(B_2,\tau_2) & \longrightarrow & GW^{\varepsilon\varepsilon_1}(A_1,\sigma_1)\times GW^{\varepsilon\varepsilon_2}(A_2,\sigma_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(B_1\otimes_K B_2,\tau_1\otimes\tau_2) & \longrightarrow & GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(A_1\otimes_K A_2,\sigma_1\otimes\sigma_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(B_3,\tau_3) & \longrightarrow & GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(A_3,\sigma_3).
\end{array}$$

上方的平方由于张量积的性质总是可交换的；若其中一个 B_i 等于 K，下方的平方也没有问题。因此，我们只需证明

在下列配置中，下方的平方可交换：

$$\begin{array}{ccc} GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(B\otimes_K B,\tau\otimes\tau) & \longrightarrow & GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(A\otimes_K A,\sigma\otimes\sigma) & \longrightarrow & GW^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(K) \end{array}$$

这是命题 2.2.14 的直接推论。 □

该定理特别意味着，在同构意义下，$GW(A,\ \sigma)$ 和 $W(A,\ \sigma)$ 只取决于 A 的 Brauer 类。另一方面，由于我们考虑厄米形式和反厄米形式，它们并不取决于对合的类型。特别地，我们总可以归结到这样一种情形：代数是除代数，并且赋有任意指定类型的对合。

例 2.2.16. 在该定理的情形下，若 $f\colon (B,\tau)\longrightarrow(A,\sigma)$ 由 (V,h) 表示，则 $f_*(\langle 1\rangle_\tau)=h$（其中 $\langle 1\rangle_\tau$是对角形式，见例2.2.10）。因此，若 $h\in GW^\varepsilon(A,\sigma)$ 表示一个非零的 ε-厄米模，则存在一个同构 $GW(B,\tau)\xrightarrow{\sim} GW(A,\sigma)$，将 $\langle 1\rangle_\tau$映到h。对于任意非零的 $h\in W^\varepsilon(A,\sigma)$，也有同样的结论（ $W^\varepsilon(A,\sigma)$ 的所有元素都由 ε-厄米模表示）。因此，在一定程度上，我们总可以归结为研究 $\langle 1\rangle_\tau$ 这类形式。

例 2.2.17。 设 h 和 h' 分别是定义在（$A,\ \sigma$）上的 ε-厄米形式和 ε'-厄米形式，且维数相同。根据前面的例子，通过厄米 Morita 等价，可将问题化归为（$B,\ \tau$）上的 $h=\langle 1\rangle_\tau$。于是，根据维数假设， h' 具有 $\langle b\rangle_\tau$ 的形式，其中 $b\in B$，因而$h\cdot h'=T_{\tau,\ b}$（见例 2.2.10）。因此， [17, §11]中研究的这些“扭曲”对合迹形式，是两个维数相同的形式之乘积的普适例子。

2.2.4 分裂代数

当 A 是分裂的时，定理2.2.15允许我们将问题化归为（但这种化归并非典范的）（$A,\ \sigma$）=（K，基本理想）。在这种情况下，根据定义有

$$\widetilde{GW}(K):=\widetilde{GW}(K,\mathrm{Id})=GW(K)\oplus GW^-(K)\oplus GW(K)\oplus GW^-(K) \quad (2.2.18)$$

因此，不同的分量不再都能彼此区分。实际上，我们有

$$\widetilde{GW}(K)=GW^{\pm}(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$$

其中 $GW^{\pm}(K)=GW(K)\oplus GW^-(K)$ 是通常的双线性型环，而 $R[G]$ 在 R 是交换环时表示 G的群环。同样，

$$\widetilde{W}(K):=\widetilde{W}(K,\mathrm{Id})=W(K)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]. \quad (2.2.19)$$

对于 $R = GW^{\pm}(K)$ 或 $W(K)$（或一般而言，对于交换环），存在一个自然同构

$$\Phi : R \oplus R \xrightarrow{\sim} R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \tag{2.2.20}$$

逆元 $\Phi^{-1} = (\pi_0, \pi_1)$，其中 π_0，π_1 是对齐次分量的投影。然而，我们将采用另一种同构，它与我们希望利用的运算具有更自然的相容性。记$\Phi(x, 0) = x_{(0)}$ 和 $\Phi(0, x) = x_{(1)}$。定义

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & R & \longrightarrow & R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \\ & x & \longmapsto & x_{(0)} - x_{(1)} \end{array} \tag{2.2.21}$$

称为从 R 到 $R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$的对角嵌入。于是定义

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & R \oplus R & \xrightarrow{\sim} & R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \\ & (x, y) & \longmapsto & x_{(0)} + \Delta(y), \end{array} \tag{2.2.22}$$

它满足 $\Psi^{-1} = (\pi_0 + \pi_1, -\pi_1)$。注意，$\Phi(x, 0) = \Psi(x, 0) = x_{(0)}$。

于是立即得到：

$$\Phi(x_1, y_1) \cdot \Phi(x_2, y_2) = \Phi(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \tag{2.2.23}$$

以及（利用 $\Delta(x) \cdot \Delta(y) = 2\Delta(xy)$）

$$\Psi(x_1, y_1) \cdot \Psi(x_2, y_2) = \Psi(x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2). \tag{2.2.24}$$

2.2.5 四元数代数

也可以具体描述四元数代数的 Witt 环。因此，设 $(Q,)$ 是定义在 K，$\widetilde{\ }$ 上并带有典范对合的四元数代数。要描述 $\overline{GW}(Q,)$，只需给出基本对角形式 $\langle z \rangle_Q$ 的乘积，其中 z 要么是一个标量，要么是一个纯四元数（$\overline{\ }$见例2.2.10）。

我们先定义一种 Pfister 形式，它将在后文中发挥重要作用：

命题-定义 2.2.25。设 $z_1, \ldots, z_r$ 是 Q^* 中的纯四元数，且 $r \geqslant 2$。那么存在唯一的 r-*Pfister* 形式 $\varphi_{z_1, \ldots, z_r}$，使得在$W(K)$ 中：

$$\varphi_{z_1,\ldots,z_r} = \langle\langle z_1^2, \ldots, z_r^2 \rangle\rangle - \langle\langle -1 \rangle\rangle^{r-2} n_Q.$$

若两个 z_i 反对易，$\varphi_{z_1,\ldots,z_r}$ 是双曲的。此外，若 $z_{r+1}, \ldots, z_{r+s}$是纯四元数，则

$$\varphi_{z_1,\ldots,z_r} \langle\langle z_{r+1}^2, \ldots, z_{r+s}^2 \rangle\rangle = \varphi_{z_1,\ldots,z_{r+s}}.$$

证明。 我们有 $\langle\langle z_{r+1}^2,\dots,z_{r+s}^2\rangle\rangle\cdot\langle\langle -1\rangle\rangle^{r-2}n_Q = \langle\langle -1\rangle\rangle^{r+s-2}n_Q$，由此得到最后一个断言。

由此，要证明 $\varphi_{z_1,\dots,z_r}$ 是一个 r-重 Pfister 形式，只需证明 $\langle\langle z_1^2,z_2^2\rangle\rangle - n_Q$ 是一个 2 重 Pfister 形式。若 z_0 是一个与 z_1 反对易的纯四元数，那么在 $W(K)$ 中有：

$$\begin{aligned}\langle\langle z_1^2,z_2^2\rangle\rangle - n_Q &= \langle\langle z_1^2,z_2^2\rangle\rangle + n_Q - \langle\langle z_2^2\rangle\rangle n_Q\\ &= \langle\langle z_1^2,z_2^2\rangle\rangle + \langle\langle z_1^2,z_0^2\rangle\rangle - \langle\langle z_1^2,z_0^2,z_2^2\rangle\rangle\\ &= \langle\langle z_1^2,z_2^2z_0^2\rangle\rangle.\end{aligned}$$

若 z_i 与 z_j 反对易，则 $\langle\langle z_i^2,z_j^2\rangle\rangle = n_Q$，因此 $\langle\langle z_1^2,\dots,z_r^2\rangle\rangle = \langle\langle -1,\dots,-1\rangle\rangle n_Q$。 □

注记 2.2.26. 在这一陈述中，Pfister 形式采用通常意义，即 $\varphi_{z_1,\dots,z_r}$ 确实是一个维数为 2^r 的二次形式，而不是 $I^r(K)$ 的一个元素。

命题 2.2.27. 设 $z_1,z_2\in Q$ 为纯四元数。那么在 $\widetilde{GW}(Q,-)$ 中有：

$$\langle z_1\rangle\cdot\langle z_2\rangle = \langle -\operatorname{Trd}_Q(z_1z_2)\rangle\varphi_{z_1,z_2}$$

其中，若 z_1 和 z_2 反对易，则意味着该形式是双曲的。

若 $a,b\in K^*$，则：

$$\langle a\rangle_Q\cdot\langle b\rangle_Q = \langle 2ab\rangle n_Q.$$

证明。 根据例2.2.10，$\langle z_1\rangle\cdot\langle z_2\rangle = b$其中 b是定义在 K向量空间 Q 上的对称双线性型，使得 $b(x,y) = \operatorname{Trd}_Q(xz_1yz_2)$。

设 z_0 是一个与 z_1 和 z_2 反交换的纯四元数（这样的纯四元数总是存在；若 z_1 和 z_2 不交换，则可以取 z_1z_2 的纯部分）。容易看出 $\varphi_{z_1,z_2} = \langle\langle z_2^2z_0^2,z_1^2\rangle\rangle$，因为它们是具有相同不变量 e_2 的两重 Pfister 形式（或参见前一个命题的证明）。在基 $(1,z_0,z_1,z_1z_0)$ 下，b 的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} -Tr_Q(z_1z_2) & Tr_Q(z_1z_2z_0) & 0 & 0\\ Tr_Q(z_1z_2z_0) & -z_0^2Tr_Q(z_1z_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & z_1^2Tr_Q(z_1z_2) & -z_1^2Tr_Q(z_1z_2z_0)\\ 0 & 0 & -z_1^2Tr_Q(z_1z_2z_0) & z_1^2z_0^2Tr_Q(z_1z_2)\end{pmatrix}.$$

设 Δ 为左上块的行列式。那么 b 等价于

$$\langle -Tr_Q(z_1z_2)\rangle\langle 1,\Delta,-z_1^2,-z_1^2\Delta\rangle = \langle -Tr_Q(z_1z_2)\rangle\langle\langle -\Delta,z_1^2\rangle\rangle$$

其含义是：若 b 是双曲的，则 $Tr_Q(z_1z_2) = 0$；否则，b 与上述形式等距。因此，我们将证明 $\langle\langle -\Delta,z_1^2\rangle\rangle = \varphi_{z_1,z_2}$。

On a

$$\Delta = z_0^2Tr_Q(z_1z_2)^2 - Tr_Q(z_1z_2z_0)^2$$

因此可以区分两种情况：若 z_1 与 z_2 可交换（即它们共线），则 $Tr_Q(z_1z_2z_0) = 0$ 且 $\Delta = z_0^2 Tr_Q(z_1z_2) = 4z_0^2z_1^2z_2^2$；若 z_1 与 z_2 不可交换，则可以选取 $z_0 = (z_1z_2)_0$，，因此$z_1z_2 = \lambda + z_0$，其中 $\lambda \in k^*$。于是：

$$\begin{aligned}\Delta &= z_0^2 \operatorname{Trd}_Q(\lambda + z_0)^2 - \operatorname{Trd}_Q((\lambda + z_0)z_0)^2 \\ &= 4z_0^2\lambda^2 - \operatorname{Trd}_Q(z_0^2)^2 \\ &= 4z_0^2(\lambda^2 - z_0^2) \\ &= 4z_0^2 \operatorname{Nrd}_Q(z_1z_2) \\ &= 4z_0^2z_1^2z_2^2\end{aligned}$$

因此，在所有情况下都得到 $\langle\langle -\Delta, z_1^2\rangle\rangle = \langle\langle -z_1^2z_2^2z_0^2, z_1^2\rangle\rangle$，这确实给出$\varphi_{z_1,\ z_2}$。

对于 $\langle a\rangle_Q \cdot \langle b\rangle_Q$ 与 $a,\ b \in K^*$ 的计算，可立即归结为情形$a = b = 1$；根据例2.2.10，可得对合迹形式，其对角化为 $\langle 2, -2u, -2v, 2uv\rangle = \langle 2\rangle\langle\langle u, v\rangle\rangle$，若 $Q = (u,\ v)$，因此它与 $\langle 2\rangle n_Q$等距。 □

2.3 运算 λ

上一章中构造 Witt 类不变量的关键要素是 λ 的 $GW(K)$ 环结构。我们希望在 $GW(A,\ \sigma)$ 上定义一种$\widetilde{\quad}$类似的结构。

2.3.1 模的交错幂

对称群与混洗

首先简要回顾一下混洗。设 $d \in \mathbb{N}$，并设 $p,\ q \in \mathbb{N}$ 满足 $p + q = d$。于是有子群 $\mathfrak{S}_{p,\ q} \subset \mathfrak{S}_d$，由保持前 p 个元素（因而也保持后 q 个元素）的置换构成。自然有 $\mathfrak{S}_{p,\ q} \simeq \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$，左侧的特征对应于右侧特征的乘积。

还定义 $(p,\ q)$-混洗的集合 $Sh(p,\ q) \subset \mathfrak{S}_d$，其元素是在前 p 个元素和后 q 个元素上严格递增的置换。

引理2.3.1. $\mathfrak{S}_d$ 中的每个元素都可以唯一地写成 $\pi\sigma$，其中 $\pi \in Sh(p, q)$ 且 $\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}$。

证明。设 $\tau \in \mathfrak{S}_d$ $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_p$ $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_q$ $\tau\ \sigma_1^{-1}\ 1\ <$。
$\cdots < \tau\ \sigma_1^{-1}\ p$ $\tau\ \sigma_2^{-1}\ p+1\ < \cdots < \tau\ \sigma_2^{-1}\ p+q$ σ_1
设 和 由 (( )) (( )) 以及 (( )) (( )) 定义；换言之，将 $\tau(1)\ldots,\tau(p)$ 按递增顺序排列即可得到，对于 σ_2和 $\tau(p+1)\ldots,\tau(p+q)$ 也同样如此。令 $\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}$ 对应于 (σ_1, σ_2)，并令 $\pi = \tau\sigma^{-1}$。

于是根据构造， $\pi(1) < \cdots < \pi(p)$ 且 $\pi(p+1) < \cdots < \pi(p+q)$，因此$\pi \in Sh(p,q)$。若有另一种分解 $\tau = \sigma'\pi'$，那么由于$\pi' \in Sh\ p\ q$ $\tau\ \sigma_1'^{-1}\ 1 < \cdots < \tau\ \sigma_1'^{-1}\ p$ $\tau\ \sigma_2'^{-1}\ p+1 <$(,), $\cdots < \tau\ \sigma'^{-1}_2\ p+q$ $\sigma' = \sigma$ $\pi' = \pi$
必有 (( ) ( )) (( ) ( )) 以及 (( ) ( )) (( ) ( )), 从而 (以及)。

□

交错幂

若 V 是一个 K向量空间，由于 K 的特征不等于 2，我们可以从两种方式看外幂 $\Lambda^d V$：既可以将其视为商空间（这就是典范构造），也可以将其视为 $V^{\otimes d}$的一个子空间。具体而言，对任意 $\pi \in \mathfrak{S}_d$，定义

$$\begin{aligned} g_\pi : \quad V^{\otimes d} &\longrightarrow V^{\otimes d} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_d &\longmapsto v_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(d)}, \end{aligned}$$

并定义反对称化映射

$$s_d = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_d} (-1)^\pi g_\pi$$

其中 $(-1)^\pi$ 表示置换 π的符号。于是，映射 s_d 是交错的，因此根据泛性质可得到诱导映射 $\Lambda^d V \longrightarrow \mathrm{Alt}^d(V)$，其中 $\mathrm{Alt}^d(V) \subset V^{\otimes d}$ 是 s_d的像。线性代数中的一个经典结果指出，这是一个同构，可以将其明确写为 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \mapsto s_d($ $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)$。

我们将把这一构造推广到中心单代数上的模的情形。设 A K上的一个中心单代数。根据 [17,10.1], ，对任意 $d \in \mathbb{N}$，定义群同态 $\mathfrak{S}_d \longrightarrow (A^{\otimes d})^*$，记作 $\pi \mapsto g_A(\pi)$（若不会引起混淆，也写作 $g(\pi)$），其特征为$g_A((i\ i+1))$ $= 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes g_A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$，其中 $g_A \in A^{\otimes 2}$是 Goldman 元素。对于 $d = 0$, 1，这是平凡态射。下面陈述这些元素的一些基本性质：

引理2.3.2。 设 V是一个 B-A-单双模。那么，若 v_1、.....、 $v_d \in V$且 $\pi \in \mathfrak{S}_d$，则有

$$g_B(\pi) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = (v_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(d)}) \cdot g_A(\pi).$$

证明。 容易将问题化归为 A 和 B 均为分裂的情形，且 $d = 2$，其中 $g_B(\pi) = g_B$和 $g_A(\pi)$ $= g_A$。于是有 $A \simeq \mathrm{End}_K(U)$、 $B \simeq \mathrm{End}_K(W)$，以及$V \simeq \mathrm{Hom}_K(U,\ W)$，其作用显然，并且：

$$\begin{aligned} (g_B \cdot f \otimes g)(u \otimes u') &= g_B(f(u) \otimes g(u')) \\ &= g(u') \otimes f(u) \\ &= (g \otimes f)(g_A(u \otimes u')) \\ &= (g \otimes f \cdot g_A)(u \otimes u'). \end{aligned}$$

□

引理 2.3.3。设 V_1 和 V_2 是两个 A-右模，并设 $B_i = \mathrm{End}_A(V_i)$和 $B = \mathrm{End}_A(V_1 \oplus V_2)$。设 $\pi \in \mathfrak{S}_{p,\,q}$，对应于 $\pi_1 \in \mathfrak{S}_p$ 和$\pi_2 \in \mathfrak{S}_q$的乘积。设 $x \in V_1^{\otimes p}$ 和 $y \in V_2^{\otimes q}$。则：

$$g_B(\pi) \cdot (x \otimes y) = (g_{B_1}(\pi_1) \cdot x) \otimes (g_{B_2}(\pi_2) \cdot y).$$

证明。归结为 A 分裂的情形，此时由构造可知结论显然成立。

□

于是，如 [17, §10.A] $s_{d,A} = s_d \in A^{\otimes d}$ 中那样定义：

$$s_d = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_d} (-1)^\pi g(\pi). \tag{2.3.4}$$

定义 2.3.5. 设 V 是一个 A右模，且 $B = \mathbf{End}_A(V)$。我们可 se

$$\mathrm{Alt}^d(V) = s_{B,d} V^{\otimes d} \subset V^{\otimes d}$$

$A^{\otimes d}$右模，特别地，$\mathbf{Alt}^0(V) = K$ 且 $\mathbf{Alt}^1(V) = V$

注意，若 $A = K$，则可得到上述针对向量空间的构造。

注记 2.3.6. 在 $V = A$ 赋予自然作用的情形下，可以通过 $\mathbf{Alt}^d(A)$ 是 $\mathbf{Br}(K)$ 中从 $\lambda^d(A)$ 到 $A^{\otimes d}$ 的一个同构，来刻画在 [17, 10.4] 中定义的代数 $\lambda^d(A)$。

混合积

若 $p + q = d$，定义一个 $A^{\otimes d}$-模态射 $V^{\otimes p} \otimes_K V^{\otimes q} \to V^{\otimes d}$，称为混合积，记作 $x \# y$，其定义如下：

$$x \# y = sh_{p,q}(x \otimes y) \tag{2.3.7}$$

其中定义混合映射

$$\begin{array}{rccc} sh_{p,q}: & V^{\otimes d} & \longrightarrow & V^{\otimes d} \\ & x & \longmapsto & \sum_{\pi \in Sh(p,q)} (-1)^\pi g_B(\pi) \cdot x. \end{array} \tag{2.3.8}$$

根据定义很容易看出，混合积是结合且交错的，特别地，它是反对称的。

命题 2.3.9. 混合积导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes p} \otimes_K V^{\otimes q} & \xrightarrow{\otimes} & V^{\otimes d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Alt}^p(V) \otimes_K \mathrm{Alt}^q(V) & \xrightarrow{\#} & \mathrm{Alt}^d(V). \end{array}$$

证明. 我们必须验证，对于任意 $x \in V^{\otimes p}$ 和任意 $y \in V^{\otimes q}$，都有 $(s_p x)\#(s_q y) = s_d(x \otimes y)$。然而：

$$\begin{aligned}(s_p x)\#(s_q y) &= sh_{p,q}(s_p x \otimes s_q y)\\ &= \sum_{\pi \in Sh(p,q)} (-1)^{\pi} g_B(\pi)(s_p x \otimes s_q y)\\ &= \sum_{\pi \in Sh(p,q)} (-1)^{\pi} g_B(\pi) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} (-1)^{\sigma} g_B(\sigma)(x \otimes y) \right)\\ &= \sum_{\pi \in Sh(p,q), \sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}} (-1)^{\pi\sigma} g_B(\pi\sigma)(x \otimes y)\\ &= s_d(x \otimes y)\end{aligned}$$

利用引理 2.3.3 和 2.3.1。 □

现在证明向量空间外幂的加法公式的熟知类似结论：

命题 2.3.10. 设 U 和 V 是两个 A-右模。那么对任意$d \in \mathbb{N}$，混合积诱导出一个 $A^{\otimes d}$-模同构：

$$\bigoplus_{k=0}^{d} \mathrm{Alt}^k(U) \otimes_K \mathrm{Alt}^{d-k}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^d(U \oplus V).$$

证明。 利用前一个命题，容易证明 $\mathrm{Alt}^d(U \oplus V)$ 由形如 $x_1\# \cdots \# x_d$ 的元素线性生成。由混合积的双线性，显然可以取 $x_i \in U$ 或V。由于混合积是反对称的，可以对x_i进行置换，从而归结为 $x_1, \ldots, x_k \in U$和 $x_{k+1}, \ldots, x_d \in V$。显然，所有这种形式的元素都属于命题中映射的像，因此该映射是满射。然后通过比较 K上的维数，可以得出该映射是双射。

□

2.3.2 ε-厄米形式的交错幂

现在假设 A 配备了第一类对合σ，并且 V 配备了相对于 σ的 ε-厄米形式 h 。记 B上的伴随映射对合为 τ。

引理2.3.11。 元素 $s_d \in B^{\otimes d}$ 关于对合 $\tau^{\otimes d}$是对称的，并且对任意 x、 $y \in V$，都有

$$h^{\otimes d}(x, s_d y) = h^{\otimes d}(s_d x, y).$$

证明。 根据构造，第一个断言归结为 Goldman 元素关于 $\tau \otimes \tau$对称这一事实，这一点我们已在引理 2.2.7 中观察到（也可直接参见 [17, 10.19]）；第二个断言则直接由此得出，因为 $\tau^{\otimes d}$ 是 $h^{\otimes d}$的伴随对合。 □

定义 2.3.12. 由此可利用前一个引理来定义：

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Alt}^d(h): & \mathrm{Alt}^d(V) \times \mathrm{Alt}^d(V) & \longrightarrow & A^{\otimes d} \\ & (s_d x, s_d y) & \longmapsto & h^{\otimes d}(x, s_d y) = h^{\otimes d}(s_d x, y). \end{array}$$

命题 2.3.13. 映射 $\mathrm{Alt}^d(h)$ 是 $(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d})$ 上的一个 ε^d-厄米形式。

证明. 有

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}^d(h)(s_d x \cdot a, s_d y \cdot b) &= h^{\otimes d}(xa, s_d yb) \\ &= \sigma^{\otimes d}(a) h^{\otimes d}(x, s_d y) b \\ &= \sigma^{\otimes d}(a)\, \mathrm{Alt}^d(h)(s_d x, s_d y) b \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}^d(h)(s_d y, s_d x) &= h^{\otimes d}(y, s_d x) \\ &= \varepsilon^d \sigma^{\otimes d}(h^{\otimes d}(s_d x, y)) \\ &= \varepsilon^d \sigma^{\otimes d}(\mathrm{Alt}^d(h)(s_d x, s_d y)). \end{aligned}$$

□

注记 2.3.14. 延续注记 2.3.6，我们可以观察到，若 $V = A$ 且 $h = \langle 1 \rangle_\sigma$，则 $\mathrm{Alt}^d(h)$ 的伴随对合是 [17, 10 中定义的对合$\sigma^{\wedge d}$ 。20], 因此，$(\mathrm{Alt}^d(A), \mathrm{Alt}^d(h))$ 在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中实现了从 $(\lambda^d(A),\ \sigma^{\wedge d})$ 到 $(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d})$ 的同构。

注记 2.3.15. 我们将 $\mathrm{Alt}^d(V)$ 构造为 $V^{\otimes d}$ 的一个子模，因此它带有厄米形式 $h^{\otimes d}$ 的限制。容易看出

$$h^{\otimes d}_{|\,\mathrm{Alt}^d(V)} = \langle d! \rangle\, \mathrm{Alt}^d(h)$$

因为 $h^{\otimes d}(s_d x,\ s_d y) = h^{\otimes d}(x,\ s_d^2 y)$ 且 $s_d^2 = d! s_d$。特别地，在非零特征下，不能简单地从 $h^{\otimes d}$ 定义 $\mathrm{Alt}^d(h)$。

接下来证明它与加法公式相容：

命题 2.3.16. 设 (U, h) 和 (V, h') 是 (A, σ)上的两个 ε-厄米模。命题 *2.3.10* 中的模同构诱导出一个等距同构

$$\bigoplus_{k=0}^{d} (\mathrm{Alt}^k(U), \mathrm{Alt}^k(h)) \otimes_K (\mathrm{Alt}^{d-k}(V), \mathrm{Alt}^{d-k}(h'))$$

vers

$$(\mathrm{Alt}^d(U \oplus V), \mathrm{Alt}^d(h \perp h')).$$

证明. 设 $u, u' \in U^{\otimes k}$ 和 $v, v' \in V^{\otimes d-k}$。那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}^d(h \perp h')(s_k u \# s_{d-k} v, s_k u \# s_{d-k} v) \\
&= \mathrm{Alt}^d(h \perp h')(s_d(u \otimes v), s_d(u' \otimes v')) \\
&= (h \perp h')^{\otimes d}(s_d(u \otimes v), u' \otimes v') \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_d} (-1)^\pi (h \perp h')^{\otimes d}(g(\pi)(u \otimes v), u' \otimes v').
\end{aligned}$$

我们要证明 $(h \perp h')^{\otimes d}(g(\pi)(u \otimes v)\ u' \otimes v')$ 在 $\pi \notin \mathfrak{S}_{k,d-k}$ 时为零。然而，若 $u = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$, $u' = y_1 \otimes \cdots \otimes y_k$，且 $v = x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_d$, $v' = y_{k+1} \otimes \cdots \otimes y_d$，则

$$\begin{aligned}
&(h \perp h')^{\otimes d}(g(\pi)(u \otimes v), u' \otimes v') \\
&= (h \perp h')^{\otimes d}((x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(d)}) \cdot g_A(\pi), (y_1 \otimes \cdots \otimes y_d)) \\
&= \sigma^{\otimes d}(g_A(\pi)) \cdot (h \perp h')(x_{\pi^{-1}(1)}, y_1) \otimes \cdots \otimes (h \perp h')(x_{\pi^{-1}(d)}, y_d)
\end{aligned}$$

当 $\pi \notin \mathfrak{S}_{k,d-k}$ 时，这确实为零。因此：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}^d(h \perp h')(s_k u \# s_{d-k} v, s_k u \# s_{d-k} v) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{k,d-k}} (-1)^\pi (h \perp h')^{\otimes d}(g(\pi)(u \otimes v), u' \otimes v') \\
&= \sum_{\pi_1 \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi_2 \in \mathfrak{S}_{d-k}} (-1)^{\pi_1 \pi_2} (h \perp h')^{\otimes d}(g(\pi_1) u \otimes g(\pi_2) v), u' \otimes v') \\
&= h(s_k u, u') \otimes h'(s_{d-k} v, v').
\end{aligned}$$

□

2.3.3 ε-厄米模的外幂

对于向量空间，$(\mathrm{Alt}^d(V), \mathrm{Alt}^d(h))$ 为运算 $\lambda^d : GW(K) \longrightarrow GW(K)$ 提供了适当的定义；但是，如果 A 未分裂，我们只能在 $(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d})$ 上得到一个 ε-厄米模。因此，我们将使用同构 $\varphi^{(d)}{}_{(A,\sigma)}$ 在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中。

定义2.3.17。设 (V, h) 是 (A, σ) 上的 ε-厄米模。对于任意 $d \in \mathbb{N}$，定义 $(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ 为 $(\mathrm{Alt}^d(V), \mathrm{Alt}^d(h))$ 与 $\varphi^{(d)}{}_{(A,\sigma)}$ 的复合（作为$\mathbf{Br}_h(K)$ 中的态射）。因此，当 d 为偶数时，它是 K 上的对称双线性空间；当 d 为奇数时，它是 (A, σ) 上的 ε-厄米模。

注记2.3.18. 请注意，$\Lambda^d(V)$ 取决于 σ，尽管模 V 的定义与之无关。相反，$\Lambda^d(V)$ 不依赖于 h。见下例。

例 2.3.19. 考虑厄米形式 $h = \langle 1\rangle_\sigma$ （见例2.2.10），其底层模为 $V = A$。那么，若 σ 是正交的， $\Lambda^2(A)$ 自然可识别为向量空间 $Skew(A,\sigma)$，即 A 中反对称元素构成的空间；若 σ 是辛的，则 $\Lambda^2(A)$ 自然就是 $Sym(A,\sigma)$，即对称元素构成的空间。事实上，按照构造， $\Lambda^2(A)$ 是由右 $A\otimes_K A$-模 $(1-g)(A\otimes_K A)$（其中 g 是 Goldman 元素）通过 $A\otimes_K A$ 与 K 之间的 Morita 等价得到的。因此， $\Lambda^2(A)$ 是向量子空间 $(1-g)\cdot A\subset A$，其中 $A\otimes_K A$ 的左作用是由 σ 扭曲而得。根据引理 2.2.7，有 $g\cdot a=\varepsilon\sigma(a)$，其中若 σ 是正交的，则 $\varepsilon=1$；若 σ 是辛的，则 $\varepsilon=-1$。因此， $\Lambda^2(A)$ 是根据 σ 的类型而由对称化或反对称化元素构成的空间（由于特征不等于 2，这确实等价于对称或反对称元素）。

此外，若 σ是正交的，则 $\lambda^2(h)$ 与 $\langle\frac{1}{2}\rangle T_\sigma^-$等距；若 σ是辛的，则 $\lambda^2(h)$ 与 $\langle\frac{1}{2}\rangle T_\sigma^+$等距，其中 $T_\sigma^\pm$是对合迹形式在对称元素或反对称元素上的限制。事实上，根据上述 Morita 等价， T_σ 对应于 $h\otimes h$，而 $\lambda^2(h)$ 对应于 $\mathrm{Alt}^2(h)$；我们知道，将 $h\otimes h$限制在 $\mathrm{Alt}^2(A)$ 上所得为 $\langle 2\rangle\,\mathrm{Alt}^2(h)$（参见注记 2.3.15）。

例 2.3.20。 为简化起见，我们仍取 $h=\langle 1\rangle_\sigma$ 的情形，并假设 σ 正交；于是若 $d=\deg(A)$，则有 $\lambda^d(h)=\langle\det(\sigma)\rangle$ （非符号判别式）。事实上，在一般分裂后很容易验证这一点，这是二次型相应性质的结果；但态射 $K^*/(K^*)^2\to F^*/(F^*)^2$，（其中 F是 A的一般分裂域）是单射。

注记 2.3.21. 利用注记 2.3.14 可知，再取 $V=A$ 和 $h=\langle 1\rangle_\sigma$时，$(\lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ 是从 $(\lambda^d(A)\ \sigma^{\wedge d})$ 到 $(A,\ \sigma)$ 或 $(K,$ 基本理想$)$ 的 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中的一个同构，具体取决于 d 的奇偶性。

我们将证明这些运算确实满足预期的性质。必要的定义请参阅第一章。

命题 2.3.22. 对于 (V,h) 上的 ε-厄米模，映射 $(V,h)\mapsto(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ （其中，(A,σ) 或 $(K,$ 基本理想$)$ ）在 $SGW(A,\sigma)$，上定义了一个齐次希腊运算，该运算在 $GW(A,\sigma)$ 上诱导出分次希腊环结构。

证明。 对于任意 $\gamma\in\Gamma$ 和任意 $d\in\mathbb{N}$，我们定义了 $\lambda^d\colon SGW(A,\ \sigma)_\gamma\to SGW(A,\ \sigma)_{d\gamma}$，命题 2.3.16 表明，诱导的映射 $\lambda_t\colon SGW(A,\ \sigma)_\gamma\to G(SGW(A,\ \sigma))$ 是一个幺半群同态，因此根据直和的定义，我们自然得到一个态射 $\lambda_t\colon SGW(A,\ \sigma)\to G(SGW(A,\ \sigma))$，它定义了一个分次伽罗瓦运算。

关于.....的断言 $GW(A,\ \sigma)$ 是引理 1.1.25 的直接应用。

□

定理2.2.15 同样适用于希腊环结构:

命题 2.3.23。 函子 $(A,\sigma) \mapsto GW(A,\sigma)$ 定义了从$\mathbf{Br}_h(K)$到分次希腊 代数范畴的一个函子。

证明。 因此，需要验证这些运算 λ 在 Morita 等价诱导的同构下保持不变。设 (B,τ) 和 (A,σ)，以及 (U,g)，它们定义了一个态射 $f\colon (B,\tau) \longrightarrow (A,\sigma)$，属于 $\mathbf{Br}_h(K)$；再设 (V,h) 是 (B,τ) 上的一个 ε-厄米模。

由于 $(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ 是由 $(\mathrm{Alt}^d(V),\mathrm{Alt}^d(h))$ 与 $\varphi^{(d)}{}_{(B,\tau)}$ 复合得到的，并且命题 2.2.14 表明 $\varphi^{(d)}{}_{(B,\tau)}$与 Morita 等价相容，因此只需验证 $f^{\otimes d}$ 在 $\mathrm{Alt}^d(h)$ 和 $\mathrm{Alt}^d(h')$ 之间诱导一个同构，其中 $h' = f_*(h)$。

记作 $W = V \otimes_B U$，其上定义了 h'。于是有典范同构 $\mathrm{End}_A(W) \simeq \mathrm{End}_B(V)$（记作 C），因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^d(V) \otimes_{B^{\otimes d}} U^{\otimes d} &= s_{d,C} \cdot V^{\otimes d} \otimes_{B^{\otimes d}} U^{\otimes d} \\ &= s_{d,C} \cdot (V \otimes_B U)^{\otimes d} \\ &= s_{d,C} \cdot W^{\otimes d} \\ &= \mathrm{Alt}^d(W).\end{aligned}$$

若 $x,\ y \in V^{\otimes d}$ 且 $u,\ u' \in U^{\otimes d}$，其中 $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$，其他情况也类似:

$$\begin{aligned}&f_*^{\otimes d}(\mathrm{Alt}^d(h))(s_{d,C}x \otimes u, s_{d,C}y \otimes u') \\ &= g^{\otimes d}(u, \mathrm{Alt}^d(h)(s_{d,C}x, s_{d,C}y) \cdot u') \\ &= g^{\otimes d}(u, h^{\otimes d}(x, s_{d,C}y) \cdot u') \\ &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_d} (-1)^\pi g(u_1, h(x_1, y_{\pi^{-1}(1)})u'_{\pi^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes g(u_d, h(x_d, y_{\pi^{-1}(d)})u'_{\pi^{-1}(d)}) g_A(\pi) \\ &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_d} (-1)^\pi h'(x_1 \otimes u_1, y_{\pi^{-1}(1)} \otimes u'_{\pi^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes h'(x_d \otimes u_d, y_{\pi^{-1}(d)} \otimes u'_{\pi^{-1}(d)}) g_A(\pi) \\ &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_d} (-1)^\pi (h')^{\otimes d}(x \otimes u, g_C(\pi)y \otimes u') \\ &= h'(x \otimes u, s_{d,C}y \otimes u') \\ &= \mathrm{Alt}^d(h')(s_{d,C}x \otimes u, s_{d,C}y \otimes u').\end{aligned}$$

□

例 2.3.24. 若 h 是定义在 (A,σ) 上的 ε-厄米形式，那么结合例 2.2.16 和 2.3.19，该命题表明，当 σ_h 是辛形式时，$\lambda^2(h) = T^+_{\sigma_h}$；当 σ_h 是正交形式时，$\lambda^2(h) = T^-_{\sigma_h}$。

2.4 基本理想与滤子

除了希腊环结构之外，将上一章的方法推广到带对合代数的关键在于 Grothendieck-Witt 环的基本滤过的存在及其与伽罗瓦上同调之间的联系。

2.4.1 维数与理想

$\widetilde{\ }$与 $GW(K)$ 的基本理想一样， $GW(A,\ \sigma)$ 的基本理想也是相对于一个“维数”映射定义的。

定义 2.4.1。 设 V 是中心单代数 A 上的右模。称 V 的 约化维数 为代数 $\mathrm{End}_A(V)$ 的次数，并记为 $\dim(V)$（参见 [17,定义 1.9]）。

若 $(V,\ h)$ 是 $(A,\ \sigma)$ 上的 ε-厄米模，则也记 $\dim(h)\ =\dim(V)$。

命题 2.4.2. 映射 $(V,h)\ \mapsto \dim(V)$ 定义了一个分次半希腊环同态 $SGW(A,\sigma)\ \longrightarrow \mathbb{N}[\Gamma]$，它可以唯一延拓为一个分次希腊环同态$\widetilde{\ }$ $GW(A,\sigma)\ \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma]$。有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} GW^{\pm}(K) & \longrightarrow & \widetilde{GW}(A,\sigma) & \xrightarrow{\dim} & \mathbb{Z}[\Gamma] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W(K) & \longrightarrow & \widetilde{W}(A,\sigma) & \xrightarrow{\overline{\dim}} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\Gamma] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

其中 ε 是增广映射。该交换图关于(A,σ) 是自然的（相对于范畴$\mathbf{Br}_h(K)$），且关于 K是自然的。

证明。第一个断言只是在说 $\dim(h\ \cdot\ g)\ =\dim(h)\dim(g)$ 且 $\dim(\lambda^d(h))=\binom{\dim(h)}{d}$，这由构造可得。交换图显然成立，关于 K的自然性也显然成立；而关于 (A,σ) 的自然性基本上就是说维数在 Morita 等价下保持不变，这源于我们选择了约化维数。 □

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$将 $GI(A,\sigma)$ 定义为态射 $GW(A,\sigma)\ \to \mathbb{Z}$ 的核，并将 $I(A,\sigma)\widetilde{\ }$定义为 $W(A,\sigma)\ \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的核（或者等价地，定义为从 $GI(A,\sigma)$ 到 $W(A,\sigma)$ 的投影$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$）。这里可以观察到一个重要的二分情形，取决于 A是否分裂：若 A 不分裂，则 $GW^{\pm}(A,\sigma)$ 的所有元素维数均为偶数（而在所有$\widetilde{\ }$情形下， $GW^{-}(K)$ 的元素维数也都是偶数），因此 $I(A,\sigma)\ = I(K)\ \oplus W^{\pm}(A,\sigma)$ 是一个齐次理想。

若 $\gamma = o$，$s \in \Gamma$，记 $GI(A, \sigma)_\gamma$（分别记 $I(A, \sigma)_\gamma$）为 $GI(A, \sigma)$（分别为 $I(A, \sigma)$）与 $GW(A, \sigma)_\gamma \subset GW(A, \sigma)$（分别与 $W(A, \sigma)_\gamma \subset W(A, \sigma)$）的交集。

定义 2.4.3. $GW(A,\sigma)$（分别地，$W(A,\sigma)$）上的基本滤子为（$\widetilde{GI}^n(A,\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$（分别地，（$\widetilde{I}^n(A,\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$）。记

$$\widetilde{H}^n(A,\sigma) = \widetilde{I}^n(A,\sigma)/\widetilde{I}^{n+1}(A,\sigma)$$

其关联分次，称为（A,σ）上的混合上同调。

根据定义，$H^0(A,\sigma) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。注意，由交换图(2.4.2)的自然性，$H^n(A,\sigma)$在同构（非典范同构）的意义下仅取决于 A的 Brauer 类。

2.4.2 分裂情形

正如我们刚才观察到的，A 分裂的情形与一般情形有显著差异。因此我们单独处理这一情形，通过 Morita 等价（因此先验上并非典范的）将问题归约到情形（A,σ）$=(K, \mathrm{Id})$，并使用第 2.2.4 节中的记号。我们稍微滥用记号，写作 $GI(K)$ 和 $I(K)$，而不写 $GI(K,\mathrm{Id})$ 和 $I(K,\mathrm{Id})$。为描述这些理想，令$GI(K) = \mathrm{Ker}(GW^{\pm}(K) \to \mathbb{Z})$，以及 $GJ(K) = \mathrm{Ker}(GW^{\pm}(K) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。另令 $GJ^{(n)}(K) = GI^{n-1}(K)GJ(K)$，若 $n \geqslant 1$（且 $GJ^{(0)}(K) = GW^{\pm}(K)$）。

注记 2.4.4 $n \geqslant 2$ $GJ^n(K) = GJ^n(K) \cap \ldots$可以证明，若 $GI(K)$，则 $GI^n(K) \subset GJ^{(n)}(K)$，并且包含关系 $(\ )(\ )$ 一般是严格的。

我们所关注的理想不是齐次的，这意味着它们不能通过映射Φ分解为形式 $I_1 \oplus I_2 \subset R \oplus R$。另一方面，我们有：

命题 2.4.5. 设 $n \geqslant 1$。那么（仍采用第 *2.2.4* 节中的记号）：

$$\widetilde{GI}^n(K) = \Psi(GI^n(K) \oplus GJ^{(n-1)}(K)),$$
$$\widetilde{I}^n(K) = \Psi(I^n(K) \oplus I^{n-1}(K)).$$

证明. 自然地，我们对 n 进行递归。由定义 Ψ 可知，$\dim(\Psi(x,y)) = \dim(x)$，因此 $GI(K) = \Psi(GI(K) \oplus GW^{\pm}(K))$，于是 $I(K) = \Psi(I(K) \oplus W(K))$。

假设该性质一直成立到 $n \in \mathbb{N}^*$。那么设 $x \in GI(K)$ 和 $y \in \widetilde{GI}^n(K)$，我们将其写作 $x = \Psi(x_1, x_2)$ 和 $y = \Psi(y_1, y_2)$，其中 $x_1 \in GI(K)$、$y_1 \in GI^n(K)$ 和 $y_2 \in GJ^{(n-1)}(K)$。根据公式 (2.2.24)，有 $xy = \Psi(z_1, z_2)$，其中 $z_1 = x_1y_1 \in GI^{n+1}(K)$ 和 $z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \in GJ^{(n)}(K)$（注意，

在 $n=1$ 情形下，正是 $2x_2y_2$ 项迫使我们取 $GJ^{(n)}$ 而不是 GI^n），因此 $\widetilde{GI}^{n+1}(K) \subset \Psi(GI^{n+1}(K) \oplus GJ^{(n)}(K))$.

反过来，若 $x \in GI^{n+1}(K)$ 具有 $x = x_1x_2$ 的形式，其中 $x_1 \in GI(K)$ 且 $x_2 \in GI^n(K)$，那么 $\Psi(x,0) = \Psi(x_1,0)\Psi(x_2,0)$，因此 $\Psi(x,0) \in \widetilde{GI}^{n+1}(K)$；若 $y \in GJ^{(n)}(K)$ 具有 $y = y_1y_2$ 的形式，其中 $y_1 \in GI(K)$ 且 $y_2 \in GJ^{(n-1)}(K)$，那么 $\Psi(0,y) = \Psi(y_1,0)\Psi(0,y_2)$，因此 $\Psi(0,y) \in \widetilde{GI}^{n+1}(K)$。最后，我们确实有 $\widetilde{GI}^{n+1}(K) \supset \Psi(GI^{n+1}(K) \oplus GJ^{(n)}(K))$。

中的等价断言 $\widetilde{W}(K)$可由此轻易推出。 □

推论 2.4.6. 特别地，$H^n(K) \simeq H^n(K,\mu_2) \oplus H^{n-1}(K,\mu_2)$ 通过Ψ。

注记 2.4.7. 若 A 是分裂的，那么在同构 $H^n(A,\sigma) \simeq H^n(K,\mu_2) \oplus H^{n-1}(K,\mu_2)$下，若将$(x_1,x_2)$记作 $x \in H^n(A,\sigma)$的像，则 x_2 不依赖于(A,σ)与(K,Id)之间Morita等价的选取，但 x_1 仅在 $x_2 \cup H^1(K,\mu_2)$意义下有定义。

2.4.3 非分裂情形

在 A 未分裂的情况下，我们已经有一个良好的齐次分解 $I(A,\sigma) = I(K) \oplus W^{\pm}(A,\sigma)$。

命题 2.4.8。 对于任意 $n \geqslant 1$，$I^n(A,\sigma)$ 的齐次分解为

$$\widetilde{I}^n(A,\sigma) = I^n(K) \oplus I^n(A,\sigma)_o \oplus I^n(A,\sigma)_s$$

其中 $I^n(A,\sigma)_\gamma = I^{n-1}(K)\,W(A,\sigma)_\gamma$对于 $\gamma = o,\ s \in \Gamma$。

证明。 从右向左的包含关系是显然的。对于另一个方向，我们对 n 作递归，$n=1$ 的情形是平凡的。假设等式一直成立到 $n \geqslant 1$。

设 $x \in I(A,\sigma)$ 和 $y \in I^n(A,\sigma)$。我们可以归结为 x 和 y 齐次的情形，并且可以看出，为了证明 $xy \in I^n(K)$，$I^n(A,\sigma)_o$或 $I^n(A,\sigma)_s$，只需证明 $W^\varepsilon(A,\sigma)\cdot W^{\varepsilon'}(A,\sigma) \subset I^2(K)$。而在一般分裂之后这是真的，因为 $W^\varepsilon(A,\sigma)$ 中的每个元素都是偶数维；但属于$I^2(K)$ 是由判别式检测的，而判别式在一般分裂下保持不变。

□

对于 $\gamma = o,\ s \in \Gamma$，设:

$$H^n(A,\sigma)_\gamma = I^n(A,\sigma)_\gamma / I^{n+1}(A,\sigma)_\gamma. \tag{2.4.9}$$

推论 2.4.10. 对于任意 $n \geqslant 1$

$$\widetilde{H}^n(A,\sigma) = H^n(K,\mu_2) \oplus H^n(A,\sigma)_o \oplus H^n(A,\sigma)_s,$$

注意，根据命题 2.4.8，可以定义一个自然的双加性满射

$$H^{n-1}(K,\mu_2)\times W(A,\sigma)_\gamma \longrightarrow H^n(A,\sigma)\gamma,$$

理解其核将会很有意思。记

$$(a_1,\ldots,a_{n-1};a)_\sigma$$

称该映射作用于 $((a_1,\ldots\ldots,a_{n-1})\ \langle a\rangle_\sigma)$ 所得的像为 ($a_i\in K^*$, $a\in A^*$ 对称或反对称)。

注记 2.4.11. 原则上，若 $\gamma=o,\ s\in\Gamma$，可以将 $I^n(A,\sigma)\gamma$ 定义为 $I(A,\sigma)\gamma$的第 n 次幂，也可以定义为 $I^n(A,\sigma)$ 与 $W(A,\sigma)\gamma$的交集。由命题 2.4.8 可知，当 A 未展开时，这两种定义等价，因此该记号没有歧义。

相反，若 A 是分裂的，因此其 n次幂为 $I^n(K)$，而 $I(A,\sigma)^n$ 与 $W(A,\sigma)_s=W(K)$的交集为 $I^{n-1}(K)$。因此，我们将采用第一种定义。

2.4.4 指标的泛约化

研究带对合代数时，一种标准工具是对相关代数作一般分裂，或者更一般地说，对代数的指标作泛约化。显然，对于域 L/K 的任意扩张，都有一个限制态射$r_{L/K}$：$H^n(A,\ \sigma)\ \to H^n(A_L,\ \sigma_L)$；而且，只要我们能够很好地描述 H^n 在分裂情形下的情形，这种方法在我们的背景下便是相当自然的选择。

假设 A 未分裂。若 A_L 也未分裂，则态射 $H^n(A,\ \sigma)\ \to H^n(A_L,\ \sigma_L)$ 在每个分量上都可以直接定义：$H^n(K,\ \mu_2)\to H^n(L,\ \mu_2)$，且 $H^n(A,\ \sigma)_\gamma\to H^n(A_L,\ \sigma_L)\gamma$ 对 $\gamma=o,\ s$ 成立。现在若 A_L 已分裂：

命题 2.4.12。 设 $(A,\ \sigma)$ 在 K 上未分裂，并设 L/K 是一个将 A 分裂的扩张。限制态射

$$H^n(K,\mu_2)\oplus H^n(A,\sigma)_o\oplus H^n(A,\sigma)_s\longrightarrow H^n(L,\mu_2)\oplus H^{n-1}(L,\mu_2)$$

它与 $(A_L,\ \sigma_L)$ 和 $(L,$ 基本理想$)$ 之间所选取的厄米 *Morita* 等价无关。它具有如下形式

$$(x,y,z)\mapsto(x_L+y_L,0)$$

其中 $y\mapsto y_L$ 是一个态射 $H^n(A,\sigma)_o\to H^n(L,\mu_2)$，且同样不依赖于 *Morita* 等价的任何选取。

证明。 我们选取 (A_L, σ_L) 与 $(L,$ 基本理想$)$ 之间的一个厄米 Morita 等价。由此得到一个态射 $W(A,\sigma)_o \to I(L)$（因为 $W(A,\sigma)_o$ 的任一元素的维数都是偶数）， 记为 $h \mapsto h_L$； 选取不同的等价则会得到一个相差一个相似变换的态射。设 $(x, y, z) \in \sim H^n(A,\sigma)$ 可提升为 $(q, q'h, q''h') \in I^n(A,\sigma)$。它在限制态射下的像

$$I^n(K) \oplus I^{n-1}(K)W(A,\sigma)_o \oplus I^{n-1}(K)W(A,\sigma)_s \longrightarrow I^n(L) \oplus I^{n-1}(L)$$

由 $(q_L + q'_L h_L,\ -q'_L h_L)$ 给出，因此 $(x,\ y,\ z)$ 在限制下的像为

$$(e_n(q_L) + e_n(q'_L h_L), e_{n-1}(q'_L h_L)) = (x_L + y_L, 0)$$

其中 $y_L = e_n(q'_L h_L)$ 仅依赖于 y。 □

对于任意 $r \in \mathbb{N}$，令 $K_r(A)$ 为中心单代数 A 的指标为 2^r 的一般约化域；特别地， $K_0(A)$ 是 A 的一般分裂域，并且若 $2^r \geqslant \mathrm{ind}(A)$，则 $K_r(A) = K$。

定义 2.4.13. 对于任意 $n,\ r \in \mathbb{N}$，令

$$\widetilde{GI}^n_r(A,\sigma) = r^{-1}_{K_r(A)/K}(\widetilde{GI}^n(A_{K_r(A)}, \sigma_{K_r(A)}))$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 其中 $r_{K_r(A)/K}$：$GW(A,\ \sigma) \longrightarrow GW(A_{K_r(A)}\ \sigma_{K_r(A)})$ 是限制态射。同样定义

$$\widetilde{I}^n_r(A,\sigma) = r^{-1}_{K_r(A)/K}(\widetilde{I}^n(A_{K_r(A)}, \sigma_{K_r(A)})).$$

注意，对于任意 $r \in \mathbb{N}$， $\widetilde{GI}^1_r(A,\ \sigma) = \widetilde{GI}(A,\ \sigma)$，因为关于 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 维数的条件在标量扩张下保持不变；同样， $I^1_r(A,\ \sigma) = I(A,\ \sigma)$。 $\widetilde{\ }$ 还要注意， $GW(A,\ \sigma)$ 的辛分量包含于所有 $\widetilde{GI}^n_0(A,\ \sigma)$ 中，因为经过一般分裂后，辛对合会变成双曲的。

显然，关于 n 和 r 都存在增长：

$$\widetilde{GI}^n_r(A,\sigma) \subset \widetilde{GI}^{n+1}_r(A,\sigma), \quad \widetilde{GI}^n_{r+1}(A,\sigma) \subset \widetilde{GI}^n_r(A,\sigma).$$

这一层级将在下一章中用于给出关于上同调不变量的更精细表述。

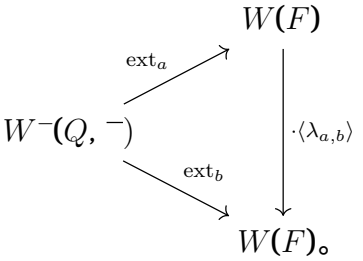
2.4.5 四元数代数

这里我们着重讨论带有其规范对合的四元数代数及其一般分裂的情形。设 $(Q,\ \bar{\ })$ 是 K 上带有规范对合的一种四元数代数。

在 [26], Quéguiner 和 Tignol 描述了 Q 的一般分裂对 $W^{\varepsilon}(Q,)$ 的影响。设 C 是 Q 的 Sev̄eri-Brauer 簇，它是一条圆锥曲线；再设 $F = K(C)$ 是其函数域，因此它是 Q 的一般分裂域。对于 C 的任意闭点 $\mathfrak{p}$，在 F 上都有一个秩1离散赋值 $v_{\mathfrak{p}}$，因此有两个通常的剩余映射 $\partial_{1,\mathfrak{p}}$、$\partial_{2,\mathfrak{p}}$：$W(F) \longrightarrow W(K(\mathfrak{p}))$（其中 $\partial_{2,\mathfrak{p}}$ 取决于在 $\mathfrak{p}$ 处选择的局部一致化元）。特别地，选择 $a \in C$ 的一个次数为2的闭点（通常记作 $a = \infty$），可得到 $(Q_F,)$ 与 (F, Id) 之间的厄米 Morita 等价，从而得到一个同构 $W^{-}(Q_F,) \simeq W(F)$，由此得到一个标量扩张映射

$$\mathrm{ext}_a : W^{-}(Q,^{-}) \longrightarrow W(F). \tag{2.4.14}$$

若选择另一个点 $b \in C$ 作为无穷远点，则存在一个标量 $\lambda_{a,\,b} \in F^*$ 使下图交换：



于是定义：

$$W_{nr,1,\infty}(F) = \{q \in W(F) \,|\, \partial_{1,\infty}(q) = 0,\, \forall \mathfrak{p} \neq \infty, \partial_{2,\mathfrak{p}}(q) = 0\} \tag{2.4.15}$$

et

$$W_{nr,2}(F) = \{q \in W(F) \,|\, \forall \mathfrak{p}, \partial_{2,\mathfrak{p}}(q) = 0\}. \tag{2.4.16}$$

此外，可以证明 $\lambda_{a,\,b}$ 在除 a 和 b 之外的所有 $c \in C$ 上均为非分歧，因此，乘以 $\lambda_{a,\,b}$ 将 $W_{nr,\,1,\,a}(F)$ 映射到 $W_{nr,\,1,\,b}(F)$。在 [26] 中证明了 ext_∞ 诱导出：

$$W^{-}(Q,^{-}) \xrightarrow{\sim} W_{nr,1,\infty}(F) \tag{2.4.17}$$

et

$$0 \longrightarrow n_Q W(K) \longrightarrow W(K) \longrightarrow W_{nr,2}(F) \longrightarrow 0. \tag{2.4.18}$$

$\sim$ $\sim$ 特别地，限制映射的核 $W(Q,\ ) \to W(Q_F,\ )$ 是 $n_Q W(K)$ $^{-}$ $\oplus\, W^{+}(Q,\ )$。

注记 2.4.19. 可以尝试利用这些结果来定义四元数形式的运算 λ^d：若 d 是奇数，很容易看出 λ^d 在 $W(F)$ 上保留 $W_{nr,\,1,\,\infty}(F)$，因此若 $h \in \underline{W}^{-}(Q,\ )$，可以将 $\lambda^d(h)$ 定义为 $\mathrm{ext}_\infty^{-1}(\lambda^d(\mathrm{ext}_\infty(h)))$；这与 ∞ 的选择无关，因为

λ^d 与乘以 $\langle\lambda_{a,b}\rangle$ 的运算可交换，其中 a 和 b 是 ∞的两个不同选择。相反，若 d是偶数，则用这种方法只能将 $\lambda^d(h)$ 定义到模 n_Q 的意义下：事实上，此时 λ^d 保留 $W_{nr,\ 2}(F)$，但限制态射 $W(F)\longrightarrow W_{nr,\ 2}(F)$ 不是单射。

关于上同调，我们也有剩余映射$\partial_{\mathfrak{p}}$： $H^d(F,\ \mu_2)\longrightarrow H^{d-1}(K(\mathfrak{p})\ \mu_2)$，并定义

$$H^d_{nr}(F,\mu_2)=\mathrm{Ker}\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{p}}\right). \tag{2.4.20}$$

于是可以注意到，若 $q\in I^d(F)\cap W_{nr,\ i}(F)$ 对于 $i=1,\ 2$ 成立，则 $e_d(q)\ \in H^d_{nr}(F,\ \mu_2)$。

这使我们能够定义一个态射

$$\widetilde{e}_d:\widetilde{I}^d_0(Q,^-)\longrightarrow H^{d-1}_{nr}(F,\mu_2) \tag{2.4.21}$$

它与 ∞ 的选择无关。事实上，经过一般分裂，并由 ∞ 的选择所定义的 Morita 等价后， $I^d_0(Q,)$ 中的一个元素被映到 $\widetilde{I}^d(F)$ 中的一个元素，该元素的偶部分属于 $W_{nr,2}(F)$，奇部分属于 $W_{nr,1,\infty}(F)$，因此得到一个 $I^{d-1}(F)\cap W_{nr,2}(F)$ 中的元素（与 ∞ 无关），以及一个 $I^{d-1}(F)\cap W_{nr,1,\infty}(F)$ 中的元素（其仅在相似意义下依赖于 ∞），它们的和属于 $I^d(F)$，因此这些元素各自的不变量 e_{d-1} 在 $H^{d-1}_{nr}(F,\mu_2)$ 中给出相同的类（故不依赖于 ∞）。

备注 2.4.22. 可以看出，通过这种一般分裂，可以在 $H^d(F)$ 中定义一个类（另一种理解方式是：可以自然地在 $H^d(F)=H^d(F)\oplus H^{d-1}(F)$ 中定义一个类），但这个类通常在 ∞ 中是分歧的，因此无法将其下降到 K。

在 [15, 命题 A.1] 中，可以找到关于$H^d(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))\longrightarrow H^d(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1)$的核与余核的描述。就我们而言，对于任意中心单代数 A，定义 $M^d_A(K)$ 为以下群的 2- 挠子群：

$$H^d(K,\mu_4^{\otimes d-1})/[A]\cdot H^{d-2}(K,\mu_2)$$

（它仅取决于 A 的 Brauer 类），并且 $N^d_A(K)\subset M^d_A(K)$ 是自然映射 $H^d(K,\mu_2)\longrightarrow M_A(K)$ 的像。于是， [15] 的结果给出了由限制映射诱导的同构：

$$M^d_Q(K)\simeq H^d_{nr}(F,\mu_2). \tag{2.4.23}$$

因此，前面的构造为我们给出了一个态射

$$\widetilde{e}_d:\widetilde{I}^d_0(Q,^-)\longrightarrow M^{d-1}_Q(K).$$

。事实证明，我们可以做得稍微更好一些。

命题 2.4.24. 对于任意 $d \geqslant 1$，上述态射 $\widetilde{e}_d$ 的值都属于 $N_Q^{d-1}(K)$。

为此，我们先证明以下引理：

引理 2.4.25. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $q \in W(K)$ 满足 $q_F \in I^m(F)$。那么存在 $q' \in W(K)$ 满足 $q - n_Q q' \in I^m(K)$。

引理证明。若 $m \leqslant 2$，则结论显然，因为此时可直接得到 $q \in I^m(K)$（因此可以取 $q' = 0$）。对于一般情形，我们用递归法：假设结论对 $m \geqslant 2$ 之前的情形均成立。若 $q_F \in I^{m+1}(F)$，则根据假设，存在 $q_1 \in W(K)$，使得 $q - n_Q q_1 \in I^m(K)$。于是有 $e_m(q - n_Q q_1)_F = e_m(q_F) = 0$，因此 $e_m(q - n_Q q_1) \in [Q]H^{m-2}(K, \mu_2)$。令 $q_2 \in I^{m-2}(K)$ 满足 $e_m(q - n_Q q_1) = [Q]e_{m-2}(q_2)$，并定义 $q' = q_1 + q_2$。确有 $e_m(q - n_Q q') = 0$，因此 $q - n_Q q' \in I^{m+1}(K)$。 □

命题证明。$d = 1$、2 的情形显然，因为 $N_Q^0(K) = M_Q^0(K) = H^0(K, \mu_2)$，且 $N_Q^1(K) = M_Q^1(K) = H^1(K, \mu_2)$。若 $d \geqslant 3$，取 $\sim q \in W(K)$ 作为 $x \in I_0^d(Q,)$ 的二次分量，并按照引理中的方法选择 q'，使得 $q - n_Q q' \in I^{d-1}(K)$。于是 $e_{d-1}(q - n_Q q')_F = e_{d-1}(q_F)$，因此 $e_{d-1}(q - n_Q q')$ 确实是 $\widetilde{e}_d(x)$ 在 $H^{d-1}(K, \mu_2)$ 中的一个下降。 □

注记 2.4.26. 与上述对 $\widetilde{e}_d$ 的定义不同，这个命题具有某种“具体性”：上述定义将 [15] 的结果作为黑箱使用（而该结果本身又用到了米尔诺猜想等困难结果），因此无法得到 $M_Q^d(K)$ 的显式元素。事实上，从理论上说，只需沿着引理的证明思路，在每一步找到 $e_m(q - n_Q q_1) \in H^m(K, \mu_2)$（沿用证明中的记号）关于 $[Q]$ 的一个因式分解即可。这里仅利用 [15] 的结果来保证这样的因式分解存在。

第3章

带对合代数的不变量

本章将运用前文提出的各种技术，构造带对合代数的上同调不变量。

在第一部分中，我们利用这样一个事实：第一章构造的不变量 Inv(I, I^d) 实际上可以应用于任意希腊环，因为它们是运算 λ 的组合。因此，我们可以将它们应用于第二章定义的环 $GW(A, \sigma)$ 中$\widetilde{\ }$。最初希望由此得到从 $GI(A, \sigma)$（见 2.4.3）到 $H^d(A, \sigma)$ 的映射$\widetilde{\ }$，但这一设想落空了。不过，考虑到代数的指标所给出的障碍（见推论 3.1.3 及其后的讨论），我们仍能得到次数任意大的不变量。我们特别研究了指标为 2 的代数，因为针对这类代数有更精确的公式（见命题 3.1.8）以及一般分裂的方法。

第二部分致力于研究 A_3 型和 D_3 型代数之间的例外等价（见定理3.2.28和3.2.37）相关的显式计算。这些计算将在下一部分中得到应用，下一部分将给出一些运用我们方法的例子（尤其是指标 2 的一般分裂方法，见由 [4]改编的命题 3.1.6），以推广此前已知的某些不变量。特别地，我们将 [28] 中构造的4 次不变量的定义（见命题 3.3.4）扩展到D_3型代数，并将 [9] 中为 I^3 里的12 次二次型构造的5次不变量进行推广（见3.3.2）。

3.1 厄米型的不变量

3.1.1 πd1 运算

$\widetilde{\ }$设 (A, σ) 是 K 上的第一类带对合代数。由于 $GW(A, \sigma)$ 是一个希腊环，因此可以对其应用第一章中定义的运算 π_n^d。我们有滤子 $\widetilde{GI}^n(A, \sigma)$，它是$\widetilde{\ }(A)$ 的基本滤子的类似物，

因此可以期望 $\pi_n^d(\widetilde{GI}^n(A,\sigma)) \subset \widetilde{GI}^{nd}(A,\sigma)$。这个结论一般不成立，但仍然可以得到以下结果（其中 $\lceil x \rceil$ 表示实数 $x \in \mathbb{R}$ 的向上取整）：

命题 3.1.1. 设 $m = \max(2, \mathrm{ind}(A))$。那么对于任意 $d \in \mathbb{N}$，运算π_1^d 定义了一个映射 $\widetilde{GI}(A,\sigma) \to \widetilde{I}^{\lceil d/m \rceil}(A,\sigma)$。

此外，取 $p = \mathrm{ind}(A)$ 时，π_1^d 定义了一个映射 $\widetilde{GI}(A,\sigma)_o \to \widetilde{I}^{\lceil d/p \rceil}(A,\sigma)_o$。

证明。先处理 A 未分裂的情形；此时第二个结论由第一个结论推出，并且有 $m = \mathrm{ind}(A)$。只需设法证明 $GI(A,\sigma)$ 在加法意义下由一些元素 x 生成，使得对于任意 $d \in \mathbb{N}$，$\pi_1^d(x)$ 的 Witt 类属于 $\widetilde{I}^{\lceil d/m \rceil}(A,\sigma)$，便可得出结论。事实上，若此性质对 x 成立，则对 $-x$ 也成立：有 $0 = \pi_1^d(x-x)$，因此 $\pi_1^d(-x) = -\sum_{k=0}^{d-1} \pi_1^{d-k}(x)\pi_1^k(-x)$；于是可对 d使用递归，$d = 0$ 的情形显然。接下来只需证明，对任意 $0 \leqslant k \leqslant d-1$，$\lceil (d-k)/m \rceil + \lceil k/m \rceil \geqslant \lceil d/m \rceil$。同样，若 x 和 y 满足该性质，则可证明 $x+y$也满足，因为 $\pi_1^d(x+y) = \sum_{k=0}^{d} \pi_1^k(x)\pi_1^{d-k}(y)$，并使用同一个不等式。于是可根据一个元素的表达式中出现的加法生成元个数进行递归，从而得出结论。

回顾 $\pi_1^d = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \binom{d-1}{k-1} \lambda^k$。而若 $x \in \widetilde{GW}(A, \sigma)$，则在 $\widetilde{W}(A, \sigma)$ 中有 $(-1)^k \lambda^k(x) = \langle -1 \rangle^k \lambda^k(x) = \lambda^k(\langle -1 \rangle x)$，因此：

$$\begin{aligned}
\pi_1^d(x) &= (-1)^d \sum_{k=0}^{d} \lambda^{d-k}(d-1)(-1)^k \lambda^k(x) \\
&= (-1)^d \sum_{k=0}^{d} \lambda^{d-k}(d-1)\lambda^k(\langle -1 \rangle x) \\
&= (-1)^d \lambda^d(\langle -1 \rangle x + (d-1)\langle 1 \rangle) \\
&= \lambda^d(x + (d-1)\langle -1 \rangle).
\end{aligned}$$

由此，我们利用以下事实：$GI(A,\sigma)$由以下元素加法生成：$I(K)$的元素（对于这些元素，所需性质可由第一章的结果推出），以及形如 $x = y - r\langle -1 \rangle$ 的元素，其中 y是 $GW^-(K)$ 中维数最小的元素 r（此时 $r = 2$），或者是 $SGW^\varepsilon(A,\sigma)$（此时 $r = m$）。对于这样的元素 x，有 $\pi_1^d(x) = \lambda^d(y + (d-1-r)\langle -1 \rangle)$，因此若 $d > r$（尤其是若 $d > m$），则有 $\pi_1^d(x) = 0$（事实上，对于 $SGW(A,\sigma)$ 中的元素 x，若 d严格大于 x的维数，则 $\lambda^d(x) = 0$）。

现在假设 A 是分裂的。对于第一个陈述，有 $m = 2$。于是可以沿用非分裂情形中的同一证明，同时注意到交错分量和

辛分量中的最小维数生成元的维数为 $m=2$，尽管指标为 1。对于第二个陈述，有 $p=1$，但这一次最小维数生成元的维数确实为 $p=\mathrm{ind}(A)=1$，因为交替双曲平面的障碍已不复存在。 □

使用定义 2.4.13 中的指标约化记号，可得：

推论 3.1.2. 设 $r\geqslant 1$。那么对任意 $d\in\mathbb{N}$, π_1^d 诱导映射$\widetilde{GI}_r(A,\sigma)\to\widetilde{I}_r^{\lceil d/2^r\rceil}(A,\sigma)$, $\widetilde{GI}_0(A,\sigma<style>)\to\widetilde{I}_0^{\lceil d/2\rceil}(A,\sigma)$，以及 $\widetilde{GI}_0(A,\sigma)_o\to\widetilde{I}_0^d(A,\sigma)_o$。

证明. 只需将标量扩张至 $K_r(A)$，并取指标 2^r 处的一般约化域后，应用前述命题即可。 □

3.1.2 上同调不变量

我们可以利用关于运算的前述结果，将第一章中研究的所有 Witt 不变量从 I 推广出去。

推论 *3.1.3.* 设 $d\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in Inv(I,I^d)$。对于任意 $r\geqslant 1$，运算α 在 $\widetilde{GW}(A,\sigma)$ 上诱导出映射 $\widetilde{GI}_r(A,\sigma)\to\widetilde{I}_r^{\lceil d/2^r\rceil}(A,\sigma)$、$\widetilde{GI}_0(A,\sigma)\to\widetilde{I}_0^{\lceil d/2\rceil}(A,\sigma)$，以及 $\widetilde{GI}_0(A,\sigma)_o\to\widetilde{I}_0^d(A,\sigma)_o$。

证明。我们将 $\alpha=\sum_{n=0}^d a_n\pi_1^n$ 写成 $a_n\in I^{d-n}(k)$。于是，$a_n\pi_1^n(\widetilde{GI}(A,\sigma))$ 的像属于 $I^{d-n}(k)\widetilde{I}_r^{\lceil n/2^r\rceil}(A,\sigma)$，且 $d-n+\lceil n/2^r\rceil\geqslant\lceil d/2^r\rceil$。

对于 $r=0$ 的情形，采用同样的方法。 □

由此可以得到上同调不变量：若 $\alpha\in\mathrm{Inv}(I,I^d)$，则得到一个自然映射

$$\bar{\alpha}:\widetilde{GI}(A,\sigma)\longrightarrow\widetilde{H}^{\lceil d/m\rceil}(A,\sigma)$$

其中 $m=\max(2,\mathrm{ind}(A))$。已知根据命题 2.4.8，$H^n(A,\sigma)$ 有一个分量与 $H^n(K,\mu_2)$ 相对应，因此也得到一个自然映射

$$\alpha':\widetilde{GI}(A,\sigma)\longrightarrow H^{\lceil d/m\rceil}(K,\mu_2)$$

因此是一个真正的上同调不变量。此外，我们还得到取值于 $H^n(A,\sigma)$ 的其他分量中的不变量，即 $H_o^n(A,\sigma)$ 和 $H_s^n(A,\sigma)$，但这些群的确切性质仍有待探索，因此本文仅限于投影到上同调分量。

要获得一个“属于 (A,σ)”的不变量，可以将以下构造之一应用于一个元素 $h\in GI(A,\sigma)$，该元素“表示”(A,σ)：例如 $h=\langle 1\rangle_\sigma-\deg(A)_2\mathcal{H}$（其中 $\mathcal{H}\in GW(K)$ 是双曲平面），或 $h=\langle 1\rangle_\sigma-\deg(A)\langle 1\rangle$；又如，若 A的余指标 s为偶数 $h=\langle 1\rangle_\sigma-\frac{s}{2}\mathcal{H}(A,\sigma)$，其中 $\mathcal{H}(A,\sigma)\in GW(A,\sigma)$ 是厄米双曲空间。这些选择在根本上并无

不同，只是对应于对规范元素$\widetilde{\ }$进行不同的归一化方式，以得到 $GI(A,\sigma)$ 中的一个元素；具体而言，在 α 固定时，这些选择会导出不同的不变量，但改变 α 后，所得不变量的集合并不会改变。

需要注意的是，这样得到的 $H^{\lceil d/m\rceil}(K,\ \mu_2)$中的元素本身并不总是有意义的不变量：事实上，一般而言，它在一般分裂后为零，因为根据构造，它所约化的 $I^{\lceil d/m\rceil}(K)$中的元素在一般分裂后实际上属于 I^d 。所得的类完全可能具有 $x\cup[A]$ 的形式，其中 x 不依赖于 σ（见例3.1.4及注记3.1.11）；特别是，在非分裂情形下，不同的α 未必总能给出彼此不同的不变量（尽管作为整体不变量，它们彼此不同，因为在分裂情形下它们不同）。可以用下面的形象方式来理解：元素$\alpha(h)$（或者说它在 $W(K)$中的分量）确实像在分裂情形下一样，包含 $I^d(K)$层面上的“有趣”信息；但我们无法直接获取这些信息，因为 $I^{\lceil d/m\rceil}(K)$层面存在障碍（分裂后该障碍消失），而且对于 $n<d$而言，也可能还存在其他 I^n 。

在某些有利情形下，补救这一问题的一种可能方法是构造相对不变量：我们不再考虑 $\alpha(h)$ 的上同调类，而是研究元素 $\alpha(h)-\alpha(h')$。如果前文提到的“障碍”相互抵消，它有可能属于 I 的更高次幂。第 3.1.3 节将以指标 2 为例说明这一思路，随后还会给出一个例子。

例 3.1.4. 辛对合的判别式是一个 3 次不变量，可按以下方式定义（见 [5, 定理 4]）：设σ和 σ'是 A上的两个辛对合；那么 $T^+_\sigma-T^+_{\sigma'}\in I^3(K)$，相对判别式 $d_\sigma(\sigma')$是该形式的 e_3不变量。然而，在 $GW(A,\ \sigma)$中，如果 $h\in GW(A,\sigma)$的伴随对合为 σ'，则有 $T^+_\sigma=\langle 2\rangle\lambda^2(\langle 1\rangle_\sigma)$和$T^+_{\sigma'}=\langle 2\rangle\lambda^2(h)$（见例 2.3.19）。因此，这与前文阐述的思路相符，其中$\alpha=\lambda^2$。在 [5], 中，差属于 I^3 这一事实可由如下理由说明：辛群在次数 1 和 2 上没有非平凡的上同调不变量；不过，也可以通过显式计算加以证明，并由此得出一些注记。

令 $q_\sigma=\langle 2\rangle T^+_\sigma+r\langle -1\rangle$，其中 $\deg(A)=2r$；它是一个维数为 $2r^2$ 的二次型。在 [25], 中，Quéguiner 证明了 $w_1(T^+_\sigma)=w_1(T^-_\sigma)=(2^r)$，由此可推出 $e_1(q_\sigma)=0$（关于 Stiefel-Whitney 不变量 w_1 和 w_2 与不变量 e_1 和 e_2之间的联系，参见命题 1.2.76；记住 $e_1=u_1^{(1)}$ 和 e_2 是 $u_2^{(1)}$ 在 I^2 上的限制）。她还证明了

$w_2(T_\sigma^+) = \binom{r}{2}[A] + \binom{r}{2}(-1, -1)$，由此可以推出 $w_2(q_\sigma) = \binom{r}{2}[A]$，进而推出 e

$$\begin{aligned} e_2(q_\sigma) &= w_2(q_\sigma) + (r^2-1)(-1) \cup w_1(q_\sigma) + \binom{r^2-2}{2}(-1,-1) \\ &= \binom{r}{2}[A] + \binom{r^2-2}{2}(-1,-1). \end{aligned}$$

因此可以看出，由于 $T_\sigma^+ - T_{\sigma'}^+$ 与 $q_\sigma - q_{\sigma'}$ 相似，$e_2(T_\sigma^+ - T_{\sigma'}^+) = 0$，这也说明了该不变量定义的合理性（这里可以看到一个例子：绝对不变量先验上只有 2 次，但 2 次部分不依赖于 σ，因此考虑相对版本时它便消失了）。

我们还可以进一步讨论：当 r 能被 4 整除时，$e_2(q_\sigma) = (-1, -1)$，因此可以令 $\varphi_\sigma = q_\sigma - \langle\langle -1, -1\rangle\rangle$，并通过 $e_3(\varphi_\sigma)$ 定义一个绝对不变量。无论 r 如何，当指标至多为 2 时，都可以令 $\varphi_\sigma = q_\sigma - \binom{r}{2} n_Q + \binom{r^2-2}{2}\langle\langle -1, -1\rangle\rangle$，并再次通过 $e_3(\varphi_\sigma)$ 定义一个绝对不变量。这些情形涵盖了辛判别式可以绝对定义的所有情况（参见 [11], ，其中使用了截然不同的证明）。实际上，只剩下 A 的指标恰为 4 且余指标为奇数的情形，因为此时有 $e_2(q_\sigma) = [A] + (-1, -1)$，而我们没有从 $[A]$ 到 $I^2(K)$ 的规范提升，这使我们无法进行构造。

无论如何可以看出，在某些情形下能够处理前面提到的障碍：或通过考虑相对不变量，或在障碍仅取决于维数时将其消除，或在障碍仅取决于维数和 $[Q]$ 时，利用范数形式作为该 Brauer 类的规范提升，在指标 2 的情形下将其消除。

3.1.3 指标 2 的不变量

一般分裂

这里介绍 Berhuy 在 [4], 中提出的一种方法，该方法基于上一章所述的同构（见 (2.4.23)），即对于 K 上的四元数代数 Q，$M_Q^d(K)$ 与 $H_{nr}^d(K(Q)\ \mu_2)$ 之间的同构。这里介绍 Berhuy 命题的一种变体。

设 F 是 I 或 Quad 的一个子函子，其中函子 $\mathbf{Field}/k$ 到 **Set** 由二次型的等距类给出。假设 F 在相似变换下稳定：对任意 K/k，若 $q \in F(K)$，则对任意 $\lambda \in K^*$，有 $\langle\lambda\rangle q \in F(K)$；特别地，若 $F = I^n$，此条件成立。设 Q 是 k 上的一个四元数代数；利用 F 和 Q，定义 $\mathbf{Field}/k$ 上的函子 F_Q，使得 $F_Q(K)$ 是关于 $(Q_K,)$ 的反厄米形式 h 的等距类集合；对于任意使 Q 分裂的扩张 L/K，都存在 $q \in F(L)$，使得 $h_L \simeq q$ 对某个 Morita 等价成立（并且根据关于 F 的假设，若存在这样的一个 q，则所有其他满足 $h_L \simeq q$ 的 q 也属于 $F(L)$）。

现在设 $\alpha \in \mathrm{Inv}^d(F, \mu_2)$。根据条件定义子函子 $F_{\alpha,Q} \subset F_Q$：当且仅当对任意满足 $h_L \simeq q$ 的 $q \in F(L)$，其中 L 分裂 Q，对任意 $\lambda \in L^*$，都有 $\alpha(\langle\lambda\rangle q) = \alpha(q)$，$h \in F_Q(K)$ 才属于 $F_{\alpha,Q}(K)$。特别地，若 α 在相似变换下不变，则 $F_{\alpha,Q} = F_Q$。

注记 3.1.5. 根据构造，若 (A, σ) 是定义在 K 上、指标为 2 的正交带对合代数，且 Q_K 是与 A Brauer 等价的四元数代数，那么说 $\sigma \in F_Q(K)$ 或 $\sigma \in F_{\alpha,Q}(K)$ 是有意义的，因为 F_Q 和 $F_{\alpha,Q}$ 在相似关系下保持不变。

最后，若对任意带有 k 秩1离散赋值的域 K，只要 $q \in F(K)$ 非分歧，$\alpha(q) \in H^d(K, \mu_2)$ 就是一个非分歧类，则称 α 非分歧。由此得到 Berhuy 命题的相应表述：

命题3.1.6. 若 α 非分歧，则存在唯一的 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Inv}(F_{\alpha,Q}, M_Q^d)$，使得对于每个分裂 Q 的 K/k、每个 $h \in F_{\alpha,Q}(K)$ 以及每个 $q \in F(K)$，只要 $\sigma_h \simeq \sigma_q$，就有 $\hat{}\alpha(h) = \alpha(q)$。

我们通常将 $\hat{}\alpha$ 简单记作 α，因为根据构造，在二者都有定义的情况下，它们相同。

我们可以沿用 [4, 9]，中给出的证明，唯一的区别是原始陈述中没有关于 α 与相似变换之间关系的条件。然而，要与 Morita 等价相容，就必须补充这类条件（也可以采用某种变体），因为 Morita 等价只能在相似变换意义下，根据四元数反厄米形式定义二次型。稍后还会给出另一种论证。

注记 3.1.7. 按照注记 3.1.5 的思路，也可以在对合上而非反厄米形式上定义 $\hat{}\alpha$：若 $(A, \sigma) \in F_{\alpha,Q}(K)$，则可以定义 $\hat{}\alpha(A, \sigma) \in M_Q^d(K)$（只需将 $\hat{}\alpha$ 应用于任意一个诱导出 σ 的反厄米形式即可）。

自然的例子是 $F = I^n$，它确实在相似下稳定。因此我们知道（见命题 1.2.69），任意 $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^n, \mu_2)$ 都是非分歧的。若 $\widetilde{\alpha} = 0$，则可以为指标 2 的任意正交对合代数定义 $\alpha(A, \sigma)$，即“在 I^n 中泛型地”定义。

甚至可以得到稍好的结果：若 α 任意，则总可以定义 $\widetilde{\alpha}(A, \sigma)$，因为 $\widetilde{\alpha}$ 是相似不变的（见注记 1.2.64）；而且，若 $\widetilde{\alpha}(A, \sigma) = 0$，则可以定义 $\alpha(A, \sigma)$。因此，可以将 $\widetilde{\alpha}(A, \sigma)$ 解释为 $\alpha(A, \sigma)$ 有定义这一事实的障碍。事实上，若 $\widetilde{\alpha}(A, \sigma) = 0$，这意味着对于任意分裂扩张 L 和任意满足 $\sigma_L \simeq \sigma_q$ 的 $q \in I^n(L)$，都有 $\widetilde{\alpha}(q) = 0$；因此，$\alpha(q)$ 仅取决于 q 的相似类，换言之，$\sigma \in F_{\alpha,Q}(K)$。

我们给出另一种理解这一现象的方式。首先考虑 $\alpha \in \mathrm{Inv}^d(I^n, \mu_2)$，将其提升为 Witt 不变量 $\beta \in \underline{\mathrm{Inv}}(I^n, I^d)$。设 $h \in GW^-(Q,)$ 的维数为 $2r$，且 $\sigma_h = \sigma$。我们扩张标量，使得

可以考虑 $h_{K(Q)} \in GW^{-}(Q_{K(Q)},)$，并在 $(Q_{K(Q)},)$ 与 $(K(Q), \mathrm{Id})$ 之间选取一个 Morita 等价，使得 h 对应于某个 $q \in GW(K(Q))$（因此它仅在相似意义下良定义）；根据假设，其 Witt 类属于 $I^n(K(Q))$。令 $q' = q - r\mathcal{H} \in I^n(K(Q))$，于是$\beta(q') \in \hat{}I^d(K(Q))$。提醒一下（见第 2.4.5 部分），若所选的 Morita 等价对应于一个闭点 $\infty \in C$，且 C 是 Q的 Severi-Brauer 簇，则 $q' \in W_{nr}$, $1,\infty(K(Q))$。此外不难看出，对于任意 $i \in \mathbb{N}^*$，若 i 为奇数，则 $\lambda^i(q')$ 属于 $W_{nr}1,\infty(K(Q))$；若 i 为偶数，则属于$\sim W_{nr}1,\infty(K(Q))$。特别地，由于 $-\beta$ 是$\sim\beta$的奇部分，而 $\beta + \beta$ 是其偶部分（见注记 1.2.64），因此 $\beta(q')$ 是$\sim -\beta(q')$ $\in I^{d-1}(K(Q)) \cap W_{nr}1,\infty(K(Q))$ 与$\widetilde{\ }$de $(\beta+\beta)(q') \in I^{d-1}(K(Q)) \cap W_{nr}2,\infty(K(Q))$ 之和（前者仅在相似意义下良定义，后者则良定义）。一般而言，这两者之和既不属于 $W_{nr}1,\infty(K(Q))$，也不属于$W_{nr}2,\infty(K(Q))$，因此 $\alpha(q) = e_d(\beta(q'))$ 没有理由是非分歧的。相反，当$\sim\beta(q') \in I^d(K(Q))$ 时，这恰好对应于假设 $\tilde{\alpha}(A, \sigma)$ $= 0$；此时$\widetilde{\ }$可以写成 $\alpha(q) = e_d(-\beta(q')) + e_d((\beta+\beta)(q'))$，且这两个上同调类各自都是非分歧的，并且定义不依赖于任何选择。于是可以将 $\alpha(A,$ $\sigma)$ 定义为与之对应的 $M^d_Q(K)$ 中的元素。

有理方法

我们可以不使用一般分裂将问题归约到二次型的情形，而是运用第 3.1 节中发展的方法，并结合上一章针对指标为 2 的代数所采用的特殊处理，直接在反厄米形式的层面开展研究。

如果沿用上一部分的讨论，并假设 $\deg(A)$ 可被 4 整除，也就是说 r 为偶数，那么 q' 是由 $h' = h - h_0 \in GW(Q,)$ 经标量扩张 $\widetilde{\ }$ 得到的，其中 $h_0 \in GW^{-}(Q,)$ 是维数为 $2r$ 的双曲形式。此时应将 q' 视为属于 $GW(K(Q))$ $= GW^{\pm}(K(Q))[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 的奇分量 $\widetilde{\ }$；于是，若写作 $\beta(h') = x + y$，其中 $\sim x \in GW(K)$ 且 $y \in GW^{-}(Q,)$，便得到 $-\beta(q')$ $= x_{K(Q)}$，而 $(\beta + \beta)(q')$ 在所选的 Morita 等价下对应于 $y_{K(Q)}$。一般而言，根据推论 3.1.3，我们知道 $\beta(h')$ 的 Witt 类属于 $I^d_0(Q,)$，因此由命题 2.4.24 可得一个取值于 $N^{d-1}_Q(K)$ $= H^{d-1}(K, \mu_2)/[Q]H^{d-3}(K, \mu_2)$ 的不变量，它恰好是 $\tilde{\alpha}(A, \sigma)$；不过，通过保留在基域层面进行研究，我们获得了足够的控制，从而确保该类属于 $N^{d-1}_Q(K)$，而不只是属于 $M^{d-1}_Q(K)$。此外，若该类为零，则同样可以定义 $\alpha(A, \sigma)$，其取值于 $N^d_Q(K)$，而不只是 $M^d_Q(K)$。

若 r n 不一定为偶数，就无法以这种方式对 h 进行归一化，而应取 $h' = h - r\mathcal{H} \in GI(Q,)$，其中 $\mathcal{H}$ 表示双曲平面中的

$\sim GW(K)$。此时仍有 $\beta(h') \in I_0^d(Q,)$, 因此可从中得到 $N_Q^{d-1}(K)$ 中取值的不变量（若该不变量为零，则可由此推出 $N_Q^d(K)$ 中的一个不变量）。然而，由于所采用的归一化方式不同，这些不变量与通过 Berhuy 方法得到的不变量并不完全一致。

我们详细介绍一个例子，即 $\beta = g_1^d \in \mathrm{Inv}(I, I^d)$ 的情形。因此，我们从 $h = \langle z_1, \dots, z_r \rangle \in GW^-(Q,)$ 出发，想要计算 $g_1^d(h')$ 在$GW(K)$ 中的分量，其中 $h' = h - r\mathcal{H}$，或者说，计算它在 $W(K)$ 中的像。首先，我们可以只考虑 d偶数，因为若 d 为奇数，则 $g_1^d(h') \in GW^-(Q,)$。于是我们使用命题 1.2.71 中的公式，从而需要计算

$$q = \sum_{i=0}^{d} \binom{r-i}{d-i} \lambda^{2i}(h),$$

我们先验地知道它属于 $I^d(K)$，并且经过到$K(Q)$的标量扩张后，它给出 $I^{2d-1}(K(Q))$ 的一个元素。

命题3.1.8。 $g_1^{2d}(h - r\mathcal{H}) \in I^d(Q,)$ 的对称分量为

$$\sum_{s=0}^{d} \sum_{i_1 < \cdots < i_{2s}} \langle z_{i_1} \rangle \cdots \langle z_{i_{2s}} \rangle \left(\sum_{t=d-2s}^{d-s} \binom{s}{d-s-t} \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_t \\ j_i, \dots, j_t \neq i_1, \dots i_{2s}}} \langle\langle z_{j_1}^2, \dots, z_{j_t}^2 \rangle\rangle \right)$$

（括号中的和在 $\binom{s}{d-s}$ 若 $t = 0$ 时取值为 $\binom{s}{d-s}$，若 $t < 0$ 则为零。）

证明。在 $W(K)$ 中有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{d} \binom{r-i}{d-i} \lambda^i(h) \\
&= \sum_{i=0}^{d} \binom{r-i}{d-i} \sum_{s=0}^{i} \sum_{i_1 < \cdots < i_{2s}} \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_{i-s} \\ j_i, \dots, j_{i-s} \neq i_1, \dots i_{2s}}} \langle (-z_{j_1}^2) \cdots (-z_{j_{i-s}}^2) \rangle \langle z_{i_1} \rangle \cdots \langle z_{i_{2s}} \rangle \\
&= \sum_{s=0}^{d} \sum_{i_1 < \cdots < i_{2s}} \langle z_{i_1} \rangle \cdots \langle z_{i_{2s}} \rangle \left(\sum_{t=0}^{d-s} (-1)^t \binom{r-s-t}{d-s-t} \lambda^t(\psi_{i_1, \dots, i_{2s}}) \right)
\end{aligned}$$

其中 $\psi_{i_1,\dots,i_{2s}} = \langle z_1^2, \dots, z_r^2 \rangle$ 不包含 $z_{i_1}^2, \dots, z_{i_{2s}}^2$（因此 $\psi_{i_1,\dots,i_{2s}}$的维数为 $r - 2s$）。因此需要证明，对于一个维数为$r - 2s$ 的形式，有

$$\sum_{t=0}^{d-s} (-1)^t \binom{r-s-t}{d-s-t} \lambda^t = \sum_{t=d-2s}^{d-s} \binom{s}{d-s-t} P^t.$$

然而（见 1.2.74），在维数为 $r-2s$ 时

$$P^t=\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{r-2s-i}{t-i}\lambda^i,$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{t=d-2s}^{d-s}\binom{s}{d-s-t}P^t&=\sum_{t=d-2s}^{d-s}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{r-2s-i}{t-i}\binom{s}{d-s-t}\lambda^i\\&=\sum_{i=0}^{d-s}(-1)^i\left(\sum_{t=i}^{d-s}\binom{r-2s-i}{t-i}\binom{s}{d-s-t}\right)\lambda^i.\end{aligned}$$

或者，由 $\sum_t\binom{r-2s-i}{t-i}\binom{s}{d-s-t}=\binom{r-s-i}{d-s-i}$ 范德蒙德公式，得证。

□

注记 3.1.9. 从这个公式也可以看出，该元素属于$I^d(K)$，并且在 $r<2d$上为零。

也可以写成（定义见 2.2.25）：$\varphi_{z_{a_1},\dots,z_{a_p}}$

推论 3.1.10. 若 $d\geqslant 2$，上述形式也等于

$$\binom{r}{d}\langle\langle-1\rangle\rangle^{d-2}n_Q+\sum_{p=d}^{2d}\sum_{a_1<\cdots<a_p}\varphi_{z_{a_1},\dots,z_{a_p}}\left(\sum_{s=0}^{\lfloor p/2\rfloor}\binom{s}{d+s-p}\omega_s(z_{a_1},\dots,z_{a_p})\right)$$

其中 $\omega_s(z_1,\dots,z_p)=\sum_{i_1<\cdots<i_{2s}}\langle(-1)^s\operatorname{Trd}_Q(z_{i_1}z_{i_2})\cdots\operatorname{Trd}_Q(z_{i_{2s-1}}z_{i_{2s}})\rangle$.

证明。从命题的公式出发，写作

$$\langle z_{i_1}\rangle\cdots\langle z_{i_{2s}}\rangle=\langle(-1)^s\operatorname{Trd}_Q(z_{i_1}z_{i_2})\cdots\operatorname{Trd}_Q(z_{i_{2s-1}}z_{i_{2s}})\rangle\varphi_{z_{i_1},\dots,z_{i_{2s}}}.$$

设 $p=2s+t$，且 $\{a_1,\dots,a_p\}=\{i_1,\dots,i_{2s}\}\cup\{j_1,\dots,j_t\}$。那么若 $s>0$，有

$$\langle\langle z_{j_1}^2,\dots,z_{j_t}^2\rangle\rangle\varphi_{z_{i_1},\dots,z_{i_{2s}}}=\varphi_{z_{a_1},\dots,z_{a_p}},$$

而若 $s=0$（此时 $t=p=d$），

$$\langle\langle z_{j_1}^2,\dots,z_{j_d}^2\rangle\rangle=\langle\langle-1\rangle\rangle^{d-2}n_Q+\varphi_{z_{j_1},\dots,z_{j_d}}.$$

情形 $s=0$ 对应于 $\binom{r}{d}$ 项（由每种 $j_1,\dots,j_d$选择给出），这就得到 $\binom{r}{d}\langle\langle-1\rangle\rangle^{d-2}n_Q$。其余项只对应于先对 p 求和、再对 s 求和所给出的分组。

□

注记 3.1.11. 可以看出，该形式的 e_d 不变量是

$$\binom{r}{d}(-1,\dots,-1)\cup[Q].$$

事实上，它对应于项 $\binom{r}{d}\langle\langle -1\rangle\rangle^{d-2}n_Q$，因为 $p>d$ 对应的项属于 I^p，因此不作贡献；而在每个 $\varphi_{z_{a_1},\dots,z_{a_d}}\in I^d$ 前面都有$\sum_{s=0}^{\lfloor d/2\rfloor}\omega_s(z_{a_1},\dots,z_{a_d})$，其维数为 $\sum_{s=0}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{d}{2s}=2^{d-1}$，因此至少属于 I。

由此可得，该不变量的相对版本至少取值于I^{d+1}，因此可以得到一个次数至少为 $d+1$ 的相对不变量；此外，可以从这一形式中减去 $\binom{r}{d}\langle\langle -1\rangle\rangle^{d-2}n_Q$，从而直接得到一个取值于 I^{d+1} 的绝对不变量。

3.2 围绕 A_3 与 D_3 之间的等价

本节旨在显式计算 A_3 型代数与 D_3 之间的等价。为此，我们首先说明如何在交叉积上定义对合。

3.2.1 带对合的交叉积

因此，我们希望借助交叉积描述一个带对合代数。为涵盖我们所关注的情形，必须包括酉对合，因此当中心二次扩张是分裂的情况下，所涉及的代数可能不是简单代数。此外，我们希望允许给出交叉积的伽罗瓦子代数仅为 étale 代数，而非一个域。

在本节中，我们将用 k 表示基域，而 K 将只是 k 上的一个 étale 代数（通常为二次代数），不再像论文其余部分那样表示域扩张。回顾一下，若 K 是一个 k-étale 代数，则有 $K=\prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(K)}K_{\mathfrak{p}}$，其中 $K_{\mathfrak{p}}$ 是 k 的有限可分扩张。

伽罗瓦代数

首先回顾一些关于伽罗瓦代数的内容，其中基环是域上的 étale 代数。

定义 3.2.1. 设 K 是一个 k-étale 代数。设 L 是一个 K-étale 代数，且 G是 $\mathrm{Aut}_K(L)$ 的一个子群。若对任意$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(K)$，$L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ 都是次数为 $|G|$ 的 étale 代数，且 G 在 $L_{\mathfrak{p}}$ 上的作用是忠实的，则称 L 是 G上的伽罗瓦代数。

下面的命题总结了这一背景下伽罗瓦代数的基本性质（证明见 [8] pourdes preuves）。

命题 3.2.2. L 是关于 K 的 G-伽罗瓦代数，当且仅当存在 $K'_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$群为 $H_{\mathfrak{p}} \subset G$ 的伽罗瓦域扩张，使得 $L_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ind}_{H_{\mathfrak{p}}}^{G}(K'_{\mathfrak{p}})$，即作为 $K_{\mathfrak{p}}$-代数有 $L_{\mathfrak{p}} = (K'_{\mathfrak{p}})^{[G:H_{\mathfrak{p}}]}$，且 G 通过按照 $G/H_{\mathfrak{p}}$ 上的正则作用置换 $K'_{\mathfrak{p}}$ 的副本，并在这些副本上如 $H_{\mathfrak{p}}$ 那样作用于 $K'_{\mathfrak{p}}$，从而作用于 $L_{\mathfrak{p}}$。

映射 $H \mapsto L^H$ 在 G 的子群与 L 的子代数 M 之间给出一个双射，其中 $M_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ 是可分的，并且 G 的每个元素要么平凡地作用于 M，要么非平凡地作用于每个 $M_{\mathfrak{p}}$（不一定使其保持不变）。

此外，若 $H \subset G$，则 L 是 H在 L^H上的伽罗瓦扩张。

若对每个 $\mathfrak{p} \in \in \mathrm{Spec}(K)$， $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ 都是域扩张，则 L 是 G在 K 上的伽罗瓦扩张，当且仅当对每个 $\mathfrak{p} \in \in \mathrm{Spec}(K)$， $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ 都是通常意义下的伽罗瓦域扩张，其伽罗瓦群为 G，且 G 在 L上按对角线作用。特别地，此时 G 完全由 L/K确定；伽罗瓦性只是代数的一个性质。

但在一般情形下， L/K 可以是相对于不同的、彼此不同构的 G 的伽罗瓦扩张，即使 K 是一个域也是如此。事实上，若 K'/K 是一个伽罗瓦域扩张，那么该定理表明，对于任意满足 H 是 r指标子群的 G ，代数 $L = (K')^r$ 是 G-伽罗瓦的，其作用是 G 在 G/H 上的置换作用（其思路是，$\mathrm{Aut}_K(L)$很大：它至少包含对称群 S_r）。

Skolem-Noether 的一个版本

交叉积构造的关键要素是 Skolem-Noether 定理。该定理允许从单代数中的一个伽罗瓦子域出发，得到一些元素，使它们通过共轭以伽罗瓦群的方式作用。然而我们知道，一般来说，对于 Azumaya 代数的半单子代数（即使是在域上），并不存在 Skolem-Noether 定理的对应版本。

例 3.2.3. 这两个嵌入 $(a,b) \mapsto diag(a,a,b)$ 和 $(a,b) \mapsto diag(a,b,b)$ 从 k^2 到 $M_3(k)$ 并不共轭。

因此，我们将给出一个更精细的陈述，以便处理 étale 子代数（此外，这比严格所需的还要精细一些）。

定义 3.2.4. 设 K 是一个 k-étale 代数，且 E 是定义在 K 上的 Azumaya 代数。设 M 是 E 的一个可分 K-子代数，满足 $L = Z(M)$。若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(L)$，则记 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(K)$ 为 $\mathfrak{p}$ 下的理想，并令 $C_{\mathfrak{p}} = C_{E_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{p}})$（为澄清可能显得繁琐的记号， $E_{\mathfrak{q}}$ 是域 $K_{\mathfrak{q}}$ 上的中心单代数，而 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 $L_{\mathfrak{p}}$ 上的中心单代数，是 $M_{\mathfrak{q}}$ 的一个直和分量；$M_{\mathfrak{q}}$ 是定义在 $L_{\mathfrak{q}}$ 上的 Azumaya 代数）。

于是将嵌入 $M \to E$ 的特征 定义为函数 $\mathrm{Spec}(L) \to \mathbb{N}$，其定义为 $\mathfrak{p} \mapsto \deg(C_{\mathfrak{p}})$。

特征通常取决于 M 到 E的具体嵌入，但很容易看出，两个共轭嵌入具有相同的特征，这也说明例 3.2.3 是成立的（这两个嵌入的特征分别为 (2，1) 和 (1， 2)）。反过来：

命题 3.2.5. 设 K 是一个 k-*étale* 代数，且设 E 是 K上的 *Azumaya* 代数。设 M 是一个 K-可分代数，且设 j_1、j_2： $M \longrightarrow E$ 是两个 K-嵌入。若它们具有相同的特征，则 j_1 和 j_2 在 E中共轭。

证明。我们将仿照经典版本的证明（例如参见[14, 定理 4.9]）。令 $A = M \otimes_K E^{op}$，它是 $Z(M)$上的 Azumaya 代数。于是定义 A在 E上的两个作用：$(a \otimes b) \cdot_i x = j_i(a)xb$对 $i = 1$，2；我们用 E_i 表示赋予相应 A-模结构的 E 。于是 $\mathrm{End}_A(E_i) = C_E(j_i(M))$，这是自然的；根据关于特征的假设，这两个代数同构。对于域上的可分代数（此处为 k），若两个模的自同态代数同构，则这两个模也同构。因此存在一个 K-线性同构 $\varphi : E \to E$，使得$\varphi(j_1(a)xb) = j_2(a)\varphi(x)b$对所有 $a \in M$、x、$b \in E$均成立。取 $a = 1$，可得 $\varphi(xb) = \varphi(x)b$，因此 $\varphi(x) = ex$ 对 $e = \varphi(1) \in E^*$成立；取 $x = b = 1$则得到 $ej_1(a) = j_2(a)e$，所以 j_1 和 j_2 由 e共轭。

□

在该命题的情形下，如果 $M = L$ 是交换的（因此是K上的étale 代数），那么若对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$，都有 $\dim^{K_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{p}) = \deg(E_\mathfrak{p})$（换言之，给定 E的局部次数时，它的维数达到可能的最大值），就称它为严格极大。

推论 3.2.6. 设 K 是一个 k-*étale* 代数， E 是 K上的一个 *Azumaya* 代数。设 $L \subset E$ 是K的一个严格极大*étale* 子代数。那么，K的任意自同构都可延拓为 E的一个内自同构，并且实现共轭的元素在相差一个 L^* 乘法因子的意义下唯一。

证明。 L 的一个自同构通过与自然包含复合，定义了 L到 E 中的第二个嵌入。由于 L 严格极大，无论取哪个嵌入，都必须有 $C_E(L) = L$，因此特征必然相同。所以这两个嵌入在 E中共轭，这恰好意味着 L 的自同构可延拓为一个内自同构。实现共轭的元素在相差 $C_E(L)$中的一个因子的意义下确定，但 $C_E(L) = L$。

□

交叉积

给定 K 一个定义在 k 上的 étale 代数， E 一个定义在 K 上的 Azumaya 代数，以及$L \subset E$ 一个严格极大的 K-Galois 子代数 G。此时称E 为 L 关于 G 的交叉积。

于是可以应用推论 3.2.6，仿照经典情形，为每个 $g \in G$ 选取一个元素 $u_g \in E^*$，使其通过共轭在 L 上诱导自同构 g。通过考察维数可验证 $E = \bigoplus_{g\in G} L \cdot u_g$。

我们将 u_g 定义到相差一个 L^* 中元素的程度，因此特别地，由于 $u_g u_h$ 的共轭诱导出自同构 gh，存在 $\alpha(g, h) \in L^*$，使得

$$u_g u_h = \alpha(g,h) u_{gh} \tag{3.2.7}$$

并且如同通常情形一样，可以验证，E 的结合律等价于 α 是一个取值于 L^* 的 G 上的 2- 上循环；而对 u_g 的不同选择会以自然的方式给出一个上同调等价的余循环。因此，借助完全相同的证明，可以得到通常的双射：$H^2(G, L^*)$ 与 L 被 G 交叉积的同构类之间的双射（唯一额外的要素是前文陈述的 Skolem-Noether 定理的版本）。

注意，我们总是取 $u_1 = 1$，这对应于余循环是归一化的这一事实。

下降

沿用相同的记号，设 V 是一个 E 右模，并设 $A = \mathrm{End}_E(V)$。那么 V_L 是一个简单的 A_L-E_L 双模；此外，$E \otimes_K L$ 通过 $(a \otimes \lambda) \cdot x = ax\lambda$ 在 E 上有左作用，而 $A \otimes_K L$ 通过 $(a \otimes \lambda) \cdot v = av\lambda$ 在 V 上有左作用。这在 $\mathbf{Mor}(K)$ 中给出了一个交换三角形（见注记 2.1.1）：

$$\begin{array}{ccc} & E_L & \\ {\scriptstyle V_L}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle E} \\ A_L & \xrightarrow{\quad V \quad} & L. \end{array}$$

因此有一个典范同一 $A_L = \mathrm{End}_L(V)$，由此应当可以推出 G 在 $\mathrm{End}_L(V)$ 上的一个自然作用。对任意 $g \in G$，定义

$$\begin{array}{rccc} T_g : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & vu_g^{-1} \end{array} \tag{3.2.8}$$

et

$$\begin{array}{rccc} S_g : & \mathrm{End}_L(V) & \longrightarrow & \mathrm{End}_L(V) \\ & f & \longmapsto & T_g \circ f \circ T_g^{-1} \ . \end{array} \tag{3.2.9}$$

命题 3.2.10. 函数 $g \mapsto S_g$ 定义了 G 在$\mathrm{End}_L(V)$ 上的一个半线性作用，该作用与 A_L 上的自然伽罗瓦作用一致。特别地，不变元素子代数为 $A = \mathrm{End}_E(V) \subset \mathrm{End}_L(V)$。

证明。复合 $S_g S_h$ 是由 $T_g T_h$诱导的共轭作用，而 $T_g T_h$是右乘 $u_h^{-1} u_g^{-1}$，除去 L^* 中的一个元素后等于 u_{gh}^{-1}，因此由 $\mathrm{End}_L(V)$ 中元素的 L-线性性可得 $S_g S_h = S_{gh}$。此外，$S_g(f\lambda)(v) = (f(vu_g)\lambda)u_g^{-1} = f(vu_g)u_g^{-1}g(\lambda)$，所以 S_g 确实是半线性的，其在 L上的作用为 g。

要证明这是 A_L上的自然伽罗瓦作用，只需证明 A确实是不动点集。事实上，对于任意 $v \in V$， $S_g(f) = f$等价于 $f(vu_g) = f(v)u_g$，因此在 S_g作用下的不动点恰好是与 u_g的作用可交换的 f；这等价于与 E 的作用可交换，因为 E 由 u_g 和 L生成。 □

对合

现在说明如何在交叉积上定义对合，同时保留前面的记号。

定义 3.2.11. 称对合 θ 在 E 上是 G-中心的，若 $\theta(L) = L$ 且 $\theta_{|L} G \theta_{|L} = G$。

注 3.2.12. 最后一个假设会自动满足，只要 L 是一个域，因为此时 $G = \mathrm{Aut}_K(L)$，且 θ 对 K 的限制是一个阶至多为 2 的自同构。

后文中，我们取一个定义在 L上的 θ G-中心对合。对任意 $g \in G$，记

$$\overline{g} = \theta_{|L} g^{-1} \theta_{|L}, \tag{3.2.13}$$

et

$$\theta_g = g\theta_{|L}, \quad \theta'_g = g^{-1}\theta_{|L}. \tag{3.2.14}$$

注 3.2.15. 自同构 θ_g 和 θ'_g 各自为对合，当且仅当 $g = g$；例如 $g = 1$就是这种情形，此时 $\overline{\theta}_g = \theta'_g = \theta$。若 $\theta_{|L} \in G$ （尤其当 L 是一个域且 θ 属于第一类时），则可以取 $g = \theta_{|L}$，此时 $\theta_g = \theta'_g =$ 基本理想。

命题 3.2.16. 对于任意 $g \in G$，存在唯一的 $\mu_g \in L^*$ 使得

$$\theta(u_g) = \mu_g u_{\overline{g}}, \tag{3.2.17}$$

满足

$$\mu_{\overline{g}} \theta_g(\mu_g) = 1 \tag{3.2.18}$$

et

$$\mu_h \overline{g}(\mu_g) \alpha(\overline{h}, \overline{g}) = \mu_{gh} \theta_{\overline{gh}}(\alpha(g, h)). \tag{3.2.19}$$

此外，若将 u_g 替换为满足 $c_g \in L^*$的 $c_g u_g$，则得到 $\mu'_g = \mu_g {}^{\theta_g(c_g)\, c_g}$。

反过来，若 $\theta \in \mathrm{Aut}_k(L)$ 是一个阶至多为 *2* 的自同构，使得$\theta G \theta = G$，并且给定满足方程 *(3.2.18)* 和 *(3.2.19)* 的$(\mu_g)_{g \in G}$，那么 θ 可唯一地延拓为 E 的一个对合，使其满足 *(3.2.17)*。

证明。 设 $\lambda \in L$。于是 $\theta(\theta(\lambda)u_g) = \theta(u_g)\lambda$，但也

$$\begin{aligned}\theta(\theta(\lambda)u_g) &= \theta(u_g(g^{-1}\theta)(\lambda)) \\ &= (\theta g^{-1}\theta)(\lambda)\theta(u_g)\end{aligned}$$

因此， $\theta(u_g)$ 在 L上如同 $\overline{g}$ 作用，所以存在唯一的 $\mu_g \in L^*$，使得$\theta(u_g) = \mu_g u_g$。

On a

$$\begin{aligned}\theta(\theta(u_g)) &= \theta(\mu_g u_{\overline{g}}) \\ &= \mu_{\overline{g}} u_g \theta(\mu_g) \\ &= \mu_{\overline{g}}(g\theta)(\mu_g)u_g\end{aligned}$$

由此得到公式 (3.2.18)。此外，

$$\begin{aligned}\theta(u_g u_h) &= \theta(\alpha(g,h)u_{gh}) \\ \mu_h u_{\overline{h}}\mu_g u_{\overline{g}} &= \mu_{gh}u_{\overline{gh}}\theta(\alpha(g,h)) \\ \mu_h \overline{g}(\mu_g)\alpha(\overline{h},\overline{g})u_{\overline{gh}} &= \mu_{gh}\theta_{\overline{gh}}(\alpha(g,h))u_{\overline{gh}}\end{aligned}$$

由此得到公式 (3.2.19)。若将 u_g 替换为 $u'_g = c_g u_g$，则

$$\begin{aligned}\theta(u'_g) &= \theta(u_g)\theta(c_g) \\ &= \mu_g(\overline{g}\theta)(c_g)u_{\overline{g}} \\ &= \mu_g \frac{\theta_{\overline{g}}(c_g)}{c_{\overline{g}}} u'_{\overline{g}}\end{aligned}$$

由此得到命题中的公式。

反过来，我们可以依次逆推上述所有等式，证明若将满足这些方程的 μ_g 定义为 θ，则确有 $\theta(\theta(u_g)) = u_g$且 $\theta(u_g u_h) = \theta(u_h)\theta(u_g)$，并且 θ 确实定义了一个对合。 □

厄米模与分裂

设 (V,h) 是右 ε-厄米模，其定义在 (E,θ) 上，并设 $A = \mathrm{End}_E(V)$ 带有 $\sigma = \sigma_h$。我们关注以下问题：由于 θ 是 L 上的一个对合，可以考虑 A_L 上的对合 $\sigma \otimes \theta$；已知 A_L 是分裂的，能否在 (L,θ) 上找到一种自然的厄米形式，使其伴随对合正是该对合?

实际上，我们将考虑一个稍微更广泛的框架。我们写作

$$h(x,y) = \sum_{g\in G} u_g h_g(x,y) \tag{3.2.20}$$

其中 h_g： $V \times V \longrightarrow L$，仅由 $h_g = \pi_h \circ h$ 定义，其中

$$\pi_g\left(\sum_t u_t c_t\right) = c_g \tag{3.2.21}$$

（注意，这里采用右作用约定）。另定义 $f_g : E \times E \longrightarrow L$ 为

$$f_g(x,y) = \pi_g(\theta(x)y). \tag{3.2.22}$$

下面描述这些映射的一般行为：

引理 3.2.23. 设 $g, t \in G$, $x \in E$ 和 $a, b \in L$. 则：

$$\begin{aligned}
\pi_g(axb) &= g^{-1}(a)\pi_g(x)b,\\
\pi_g(\theta(x)) &= g^{-1}(\mu_{\overline{g}})\theta'_g(\pi_{\overline{g}}(x)),\\
\pi_g(u_t x) &= g^{-1}(\alpha(t,t^{-1}g))\pi_{t^{-1}g}(x),\\
\pi_g(xu_t) &= g^{-1}(\alpha(gt^{-1},t))t^{-1}(\pi_{gt^{-1}}(x)).
\end{aligned}$$

证明. 写作 $x = \sum_g u_g x_g$. 则 $axb = \sum_g a u_g x_g b = \sum_g u_g g^{-1}(a) x_g b$，由此得到第一个公式。对于第二个公式：

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \sum_g \theta(x_g)\theta(u_g)\\
&= \sum_g u_{\overline{g}}\overline{g}^{-1}(\mu_g\theta(x_g))\\
&= \sum_g u_g g^{-1}(\mu_{\overline{g}}\theta(x_{\overline{g}})).
\end{aligned}$$

对于第三个公式：

$$\begin{aligned}
u_t x &= \sum_g u_t u_g x_g\\
&= \sum_g \alpha(t,g) u_{tg} x_g\\
&= \sum_g \alpha(t,t^{-1}g) u_g x_{t^{-1}g}
\end{aligned}$$

第四个同样可以通过计算 xu_t 得到证明。 □

引理 3.2.24。 设 $g \in G$, $x, y \in E$ 和 $a, b \in L$。则：

$$\begin{aligned}
f_g(xa, yb) &= \theta'_g(a) f_g(x,y) b,\\
f_g(y,x) &= g^{-1}(\mu_{\overline{g}})\theta'_g(f_{\overline{g}}(x,y))
\end{aligned}$$

证明。 利用前一个引理的第一个公式： $f_g(xa,\ yb) = \pi_g(\theta(a)\theta(x)yb) = (g^{-1}\theta)(a) f_g(x,\ y)b$。然后将同一引理的第二个公式应用于 $f_g(y,\ x) = \pi_g(\theta(\theta(x)y))$。 □

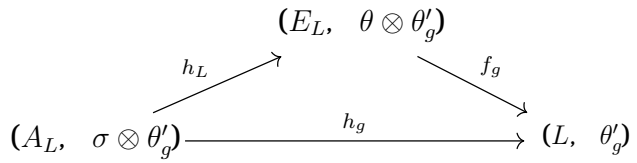
引理 3.2.25. 设 $g, t \in G$, $x, y \in V$, $a, b \in L$。则：

$$\begin{aligned} h_g(xa, yb) &= \theta'_g(a) h_g(x, y) b, \\ h_g(y, x) &= \varepsilon g^{-1}(\mu_{\overline{g}}) \theta'_g(h_{\overline{g}}(x, y)), \\ h_g(xu_t, y) &= g^{-1}\left(\mu_t \alpha(\overline{t}, \overline{t}^{-1} g)\right) h_{\overline{t}^{-1} g}(x, y), \\ h_g(x, yu_t) &= g^{-1}\left(\alpha(gt^{-1}, t)\right) t^{-1}\left(h_{gt^{-1}}(x, y)\right). \end{aligned}$$

证明。由 $h_g(x,y) = \pi_g(h(x,y))$，依次将引理 3.2.23 中的四个公式应用于关系 $h(xa,yb) = \theta(a) h(x,y)b$, $h(y,x) = \varepsilon\theta(h(x,y))$, $h(xu_t,y) = \theta(u_t)h(x,y) = \mu_t u_t h(x,y)$ 和 $h(x,yu_t) = h(x,y)u_t$，即可得到结论。 □

由此可得：

命题 3.2.26. 若 $g = g$，则 h_g 和 f_g 分别在 (L, θ'_g)上是 $\varepsilon\varepsilon_g$-厄米和 ε_g-厄米的，其中 $\varepsilon_g = g^{-1}(\mu_g)$。此外，在 $\mathbf{Mor}_h(L, \theta'_g)$ 中有一个交换三角形（见注记 *2.1.10*）：



注 3.2.27. 到目前为止，我们一直默认认为这些形式是 ε-厄米形式，且满足 $\varepsilon = \pm 1$，因为我们讨论的是第一类对合。这里，若 $g \neq \theta$，那么一般来说， θ'_g 在 L 上是非平凡的，因此对于所有满足 $\varepsilon\theta'_g(\varepsilon) = 1$ 的 ε，一个形式都可以是 ε-厄米的。

证明。 若 $g = g$，那么首先 θ'_g 是一个对合（见注 3.2.15），而引理 3.2.25 的第二个公式变为

$$h_g(y, x) = \varepsilon g^{-1}(\mu_g) \theta'_g(h_g(x, y))$$

结合本引理的第一个公式，这表明 h_g 相对于 θ'_g 确实是 $\varepsilon\varepsilon_g$-厄米的。

同样，引理 3.2.24 中的两个公式表明，当 $g = g$, f_g 相对于 θ'_g 是 ε_g-厄米时。

因此，需要证明这三个厄米形式之间的关系。若通过 $\Phi : (v \otimes \lambda) \otimes x \mapsto vx\lambda$ 自然地将 V 与 $V_L \otimes_{E_L} E$ 等同起来，则需要验证

$$h_g(\Phi((v \otimes \lambda) \otimes x), \Phi((v' \otimes \lambda') \otimes x')) = f_g(x, h_L(v \otimes \lambda, v' \otimes \lambda')x').$$

Or

$$\begin{aligned} f_g(x, h_L(v \otimes \lambda, v' \otimes \lambda')x') &= \pi_g(\theta(x)h_L(v \otimes \lambda, v' \otimes \lambda')x') \\ &= \pi_g(\theta(x)h(v, v')x'(\theta'_g)(\lambda)\lambda') \end{aligned}$$

而另一方面

$$\begin{aligned} h_g(\Phi((v \otimes \lambda) \otimes x), \Phi((v' \otimes \lambda') \otimes x')) &= \pi_g(h(vx\lambda, v'x'\lambda')) \\ &= \pi_g(\theta(\lambda)\theta(x)h(v, v')x'\lambda') \\ &= \theta'_g(\lambda)\pi_g(\theta(x)h(v, v')x'\lambda') \\ &= \pi_g(\theta(x)h(v, v')x'\lambda'(\theta'_g)(\lambda)). \end{aligned}$$

□

3.2.2 指标 2 下的Clifford代数

设 (A, σ) 是定义在 k 上的正交对合代数，并假设其指标至多为二。因此，设 Q 是与 A Brauer 等价的四元数代数，并写作 $A = \mathrm{End}_Q(V)$，其中 V 是一个 Q-右模。于是有 $\sigma = \sigma_h$，其中 h 是定义在 $(Q,)$ 上的反厄米形式。选取一个正交基 (e_i)，它给出对角化 $h = \langle z_1, \ldots, z_r \rangle$，其中 $z_i \in Q$ 是可逆纯四元数。下文假设 $r \geqslant 2$。

我们希望通过生成元，明确描述 (A, σ) 的Clifford代数 $B = Cl(A, \sigma)$，并赋予其典范对合 τ。所采用的方法取自 [29], ，我们的主要贡献在于显式计算生成元之间的关系。首先陈述我们希望得到的结果。

定理 *3.2.28.* 假设由 h 的对角化得到的 z_i 两两k-线性无关。那么存在 $L \subset B$，它是k代数的严格极大 *étale* 子代数，形式为 $L = k(\xi_1, \ldots, \xi_r)$，且 $\xi_i^2 = z_i^2$，使得 $Z(B) = k(\xi)$，其中 $\xi = \prod_i \xi_i$。代数 L 自然是k 上的 G-伽罗瓦代数，且 $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$；对合 τ的作用对应于元素 $(1, \ldots, 1)$，并且 $Z(B) = L^H$，其中 $H \subset G$ 是由各分量求和给出的态射 $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的核。群 H 由$\tau_{p,q}$ 生成，对所有 $p \neq q$均如此；它们仅在指标 p 和 q处的分量非零。那么对所有 $p \neq q$，存在$u_{p,q} \in B$ 使得：

- 由 $u_{p,q}$ 共轭作用诱导出 $\tau_{p,q}$ 在 L上；
- $\tau(u_{p,q}) = -u_{p,q}$；
- 若 $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$，$u_{i,j}$ 与 $u_{p,q}$ 对易；
- $u_{p,q}^2 = Tr_Q(z_p z_q) - 2\xi_p \xi_q$；

- 若 i,p,q 互不相同：

$$u_{i,p}u_{i,q} = (\lambda_0 - \xi_i + \lambda_p\xi_p - \lambda_q\xi_q - \lambda_{p,q}\xi_p\xi_q)u_{p,q}$$

$o\grave{u}\ z_i = \lambda_0 + \lambda_p z_p + \lambda_q z_q + \lambda_{p,q}z_p z_q.$

由于 $\tau_{p,\ q}$ 生成 H，$u_{p,\ q}$ 生成 B 及 L，因此该定理给出了 $(B,\ \tau)$ 的结构的完整描述。在正式开始证明之前，我们先展开所需的构造。

注释 3.2.29。关于 z_i 的独立性假设保证了对于所有 $p,\ q$，$(1,\ z_p,\ z_q,\ z_pz_q)$ 构成 Q 的一个 k-基，从而使陈述中使用的分解 $z_i = \lambda_0 + \lambda_p z_p + \lambda_q z_q + \lambda_{p,\ q}z_p z_q$ 具有合理性。

若 k 是无限的（这一点可以不失一般性地假设，因为在有限域上该理论没有意义），只需改变 e_i，就总能归结到这种情形，而且不改变 z_i^2 在 $k^*/(k^*)^2$中的类。事实上，若 z_p 与z_q 共线，则将 e_q 替换为任意一个既不与 z_q交换也不与其反交换的 z，这相当于排除两个 k-平面。可以对所有存在问题的配对递归地进行这一修改；由于有限个平面的并集不可能等于 Q，因此总能找到一个合适的z 。

此外，当该条件得到满足时，对于所有 $p \neq q$，$(1,\ z_p,\ z_q,\ z_pz_q)$ 构成 Q 的一个 k 基，因此，命题中使用的 z_i 在此基下的表示始终存在且唯一。

为了证明该定理，我们将使用下降法。设 $K \subset Q$ 是 k 的二次扩张（总能找到这样的扩张，除非 k 是代数闭域；在这种情况下，所有这些内容都没有意义），并设 $j \in Q$ 是一个纯四元数，使得对任意 $\lambda \in K$ 都有 $j\lambda = \lambda j$。令 $j^2 = \pi \in k^*$。于是有 $Q = K \oplus jK$。因此，我们处于带对合的交叉乘积的情形（代数 $(Q,\ )$ 配备伽罗瓦子域 K/k，其群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$），以及该代数上的反厄米模 $(V,\ h)$ 的情形，因此可以应用前一部分的结果。

根据命题 3.2.10，我们得到 $A = \mathrm{End}_K(V)^{\mathrm{Gal}(K/k)}$，其中若 s 是 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 的非平凡元素，则有 $s \cdot f = T \circ f \circ T^{-1}$，且 $T(v) = vj^{-1}$。此外，将命题 3.2.26 应用于 $g = s$（这里，对合确实限制为伽罗瓦群的一个元素），若将由 $\sigma \otimes \mathrm{Id}$ 通过识别 A_K与 $\mathrm{End}_K(V)$ 而得到的 $\mathrm{End}_K(V)$ 上的对合记为 σ_K，则 $\sigma_K = \sigma_b$，其中 $b\colon V \times V \to K$ 由 $h(x,\ y) = a(x,\ y) + jb(x,\ y)$刻画。

引理 3.2.30。对于任意 x、$y \in V$，有

$$b(T(x), y) = -\frac{1}{\pi}a(x, y) = -\overline{b(x, T(y))}.$$

证明。应用引理 3.2.25 的最后两个公式，此处取$h_1 = a$、$h_s = b$和 $u_t = u_s = j$。于是得到 $b(xj, y) = -a(x, y)$以及 $b(x, yj) = a(x, y)$，结合这两个公式便得到所需结果。□

因此，(B,τ) 是 $Cl^0(V,b)$在上述伽罗瓦作用所诱导的作用下的下降。下面描述这一作用：

命题 3.2.31. $K/k\mathrm{Gal}(K/k)$ 在 $Cl^0(V,b)$ 上的自然作用对任意 $x,y\in V$ 定义为

$$s(x\cdot y)=-\pi T(x)\cdot T(y),$$

而 $B=Cl^0(V,b)^s$ 则是此作用下的

证明. 考虑典范同一

$$\begin{array}{rccc}\varphi_b: & V\otimes_K V & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(V)\\ & x\otimes y & \longmapsto & v\mapsto xb(y,v)\end{array}$$

那么 $s\cdot\varphi_b(x\otimes y)=T\circ\varphi_b(x\otimes y)\circ T^{-1}$ 因此

$$\begin{aligned}(s\cdot\varphi_b(x\otimes y))(v)&=xb(y,vj)j^{-1}\\&=\pi T(x)\overline{b(y,T(v))}\\&=-\pi T(x)b(T(y),v)\\&=-\pi\varphi_b(T(x)\otimes T(y))(v).\end{aligned}$$

因此 $s\cdot\varphi_b(x\otimes y))=\varphi_b(-\pi T(x)\otimes T(y))$，由此得到结论，因为对 $Cl^0(V,b)$ 的作用由对 φ_b 的像的作用刻画。 □

我们知道，B 由典范态射 $\psi: V\otimes_Q(^\gamma V)\to Cl(A,\sigma)$ 的像生成。下面将明确描述这个态射：

命题 3.2.32. ψ 与典范嵌入 $Cl(A,\sigma)\hookrightarrow Cl^0(V,b)$ 的复合由下式给出：

$$\psi(x\otimes y)=\pi(T(x)\cdot y-x\cdot T(y)).$$

证明。需要验证，由 $f(x\otimes y)=\pi(T(x)\otimes y-x\otimes T(y))$ 定义的映射 f 使交换图成立

$$\begin{array}{ccc}V\otimes_Q^\gamma V & \xrightarrow{f} & V\otimes_K V\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_h} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_b}\\ \mathrm{End}_Q(V) & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(V).\end{array}$$

Or：

$$\begin{aligned}\varphi_b(f(x\otimes y))(v)&=\varphi_b(\pi(T(x)\otimes y-x\otimes T(y)))(v)\\&=\pi(T(x)b(y,v)-xb(T(y),v))\\&=x(jb(y,v)-a(y,v))\\&=\varphi_h(x\otimes y)(v)\end{aligned}$$

其中使用了引理 3.2.30 中的关系。 □

现在可以进行定理的证明:

证明。 对于所有 $x,\ y \in V$，令 $u(x,\ y) = \frac{1}{2}\psi(x \otimes y + y \otimes x)$ 且 $u(x) = \frac{1}{2}\psi(x \otimes x)$。 于是，将命题中的生成元定义为:

$$\xi_i = u(e_i), \quad u_{p,q} = u(e_p, e_q).$$

由于 K 的选择不影响命题，因此总可以假设 z_i 中没有任何一个属于 K。对于任意 $1 \leqslant i \leqslant r$，写作 $z_i = x_i + jy_i$，其中 x_i、$y_i \in K$，因此可以假设 $y_i \neq 0$。若令 $f_i = e_i z_i$，则 $(e_i,\ f_i)_i$ 是 K 的基，并且关于 b 正交。事实上，唯一需要验证的是 $b(e_i,\ f_i) = 0$，但 $h(e_i,\ f_i) = h(e_i,\ e_i)z_i = z_i^2 \in k$。注意，$b(e_i,\ e_i) = y_i$，且 $b(f_i,\ f_i) = -z_i^2 y_i$。

On a

$$\xi_i = -\frac{1}{y_i} e_i f_i$$

et

$$u_{p,q} = \frac{1}{y_p y_q}\left((x_q y_p - x_p y_q)e_p e_q - y_p e_p f_q - y_q e_q f_p\right).$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned} e_i j &= e_i \left[(x_i + jy_i)\frac{1}{y_i} - \frac{x_i}{y_i}\right] \\ &= (-e_i x_i + f_i)\frac{1}{y_i} \end{aligned}$$

这可以嵌入到 $\xi_i = \frac{1}{2}((e_i j)e_i - e_i(e_i j))$ 和 $u_{p,\ q} = \frac{1}{2}((e_p j)e_q - e_p(e_q)j + (e_q j)e_p - e_q(e_p j))$ 中，同时考虑 $Cl(V,\ b)$ 中的反交换关系。

因此，所有关系都可以通过在 $Cl(V,\ b)$ 中进行显式计算，并利用 e_i 和 f_i 的基得出。特别是，由正交关系可以立即看出，ξ_i 彼此对易；当 $i \notin \{p, q\}$时，$u_{p,\ q}$ 与 ξ_i 对易；当 $i \in \{p, q\}$时，它们反对易；并且当 $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$时，$u_{i,\ j}$ 与 $u_{p,\ q}$ 对易。典范对合的作用也很容易确定，因为根据定义，$\tau(x \cdot y) = y \cdot x = -x \cdot y$，若 x 和 y 正交。

我们也很容易得到 $\xi_i^2 = -\frac{1}{y_i^2} e_i^2 f_i^2 = z_i^2$，并且

$$\begin{aligned} u_{p,q}^2 &= \frac{1}{y_p^2 y_q^2}\left(-(x_q y_p - x_p y_q)^2 e_p^2 e_q^2 - y_p^2 e_p^2 f_q^2 - y_q^2 e_q^2 f_p^2 - 2y_p y_q e_p f_p e_q f_q\right) \\ &= -\frac{1}{y_p y_q}(x_q y_p - x_p y_q)^2 + \frac{1}{y_q} z_q^2 + \frac{1}{y_p} z_p^2 - 2\frac{1}{y_p y_q} e_p f_p e_q f_q \\ &= (2x_p x_q + \pi y_p \overline{y_q} + \pi y_q \overline{y_p}) - 2\xi_p \xi_q \\ &= \mathrm{Trd}_Q(z_p z_q) - 2\xi_p \xi_q. \end{aligned}$$

最后一个关系最难证明。设 $z_i = \lambda_0 + \lambda_p z_p + \lambda_q z_q + \lambda_{p,\ q} z_p z_q$。那么

$$x_i = \lambda_0 + \lambda_p x_p + \lambda_{p,q} x_p x_q + \lambda_{p,q} \pi \overline{y_p} y_q \tag{3.2.33}$$
$$y_i = \lambda_p y_p + \lambda_q y_q + \lambda_{p,q} y_p x_q - \lambda_{p,q} x_p y_q. \tag{3.2.34}$$

注意到，由于 z_i 是纯四元数，$x_i = -x_i$ 这可表示为方程

$$2\lambda_0 + \lambda_{p,q}(2x_p x_q + \pi \overline{y_p} y_q + \pi y_p \overline{y_q}) = 0. \tag{3.2.35}$$

一方面，我们需要比较

$$\frac{1}{y_i^2 y_p y_q} \left((x_p y_i - x_i y_p) e_i e_p - y_i e_i f_p - y_p e_p f_i\right) \left((x_q y_i - x_i y_q) e_i e_q - y_i e_i f_q - y_q e_q f_i\right)$$

另一方面

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y_p y_q} \left(\lambda_0 + \frac{1}{y_i} e_i f_i - \frac{\lambda_p}{y_p} e_p f_p + \frac{\lambda_q}{y_q} e_q f_q - \frac{\lambda_{p,q}}{y_p y_q} e_p f_p e_q f_q\right) \\ &\times \left((x_q y_p - x_p y_q) e_p e_q - y_p e_p f_q - y_q e_q f_p\right). \end{aligned}$$

于是可以展开并辨认相应的分量。对于 $e_p e_q$、$e_p f_q$、$e_q f_p$、$f_p f_q$、$e_i f_i e_p e_q$、$e_i f_i e_p f_q$和 $e_i f_i e_q f_p$这几个分量，可以得到非零项。计算后，后三个分量对应的系数立即相等，且不涉及 z_i的分解（它们分别为 $\frac{x_q}{y_i y_q} - \frac{x_p}{y_i y_p}$、$-\frac{1}{y_i y_q}$ 和 $-\frac{1}{y_i y_p}$）。其余四个系数则需要更仔细地处理，因此需要证明以下等式：

$$\begin{aligned} \lambda_0(x_q y_p - x_p y_q) + \lambda_p y_q z_p^2 + \lambda_q y_p z_q^2 &= -x_p x_q y_i + (x_p y_q + x_q y_p) x_i + \pi y_p y_q \overline{y_i}; \\ \lambda_0 y_p + \lambda_q (x_q y_p - x_p y_q) + \lambda_{p,q} y_q z_p^2 &= x_i y_p - y_i x_p; \\ \lambda_0 y_q + \lambda_p (x_q y_p - x_p y_q) + \lambda_{p,q} y_p z_q^2 &= y_i x_q - x_i y_q; \\ \lambda_p y_p + \lambda_q y_q + \lambda_{p,q} (x_q y_p - x_p y_q) &= y_i. \end{aligned}$$

对于第二个和第四个，只需将 x_i 和 y_i替换为公式（3.2.33）；对于另外两个，还需使用关系式（3.2.35）。

□

注记 3.2.36。尽管定理给出了代数结构的完整描述，但它并未直接给出与 L所对应的交叉积结构相关的余循环公式。事实上，对于伽罗瓦群的元素$\tau_{i,j}$，我们有相应的规范生成元，但对于群中的其他元素，并没有真正自然的选择。例如，可以将一个 $g \in G$ 分解为支集互不相交的$\tau_{i,j}$ 的乘积，并作出归一化选择（例如分解为

en $\tau_{i_1,j_1}\cdots\tau_{i_s,j_s}$，其中有 $i_1<j_1<i_2<\cdots<j_s$），并规定$u_g=u_{i_1,j_1}\cdots u_{i_s,j_s}$。这样做的优点是只涉及彼此交换的生成元，但不同 u_g 之间的乘积计算会变得非常繁琐，因为它大量涉及系数上的序的组合结构。另一方面，也可以例如将 g 分解为$\tau_{i_1,r}\cdots\tau_{i_s,r}$，利用指标 r 作为枢轴，并定义$u_g=u_{i_1,r}\cdots u_{i_s,r}$。这样一来，模式更加规整，但所涉及的生成元并不交换，因此计算仍然十分繁琐。无论如何，尽管理论上可以用初等方式描述与 B相对应的余循环，但只要 r 不是很小，这项任务实际上就相当繁琐。

3.2.3 次数 4 的判别代数

现在我们希望描述类型为 A_3 与 D_3的代数之间等价的另一方向，也就是说，显式计算次数为 4 的带酉对合代数的判别代数。

因此，设 (B,τ) 是 k 上这样一个代数，其中心为 $K=k(\xi)$，且 $\xi^2=\delta\in k^*$。假设我们有一个 $L\subset B$ k-代数 G-伽罗瓦扩张，并且 $G=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ 满足 $\tau(L)=L$，其中 $\tau_{|L}\in G$。由于我们知道 (B,τ) 是某个指标为 2 的代数（具体而言，即其判别代数）的 Clifford 代数，前一部分表明，这样的子代数总是存在。

于是令 $H\subset G$ 使得 $K=L^H$，并写作 $H=\langle s,t\rangle$。有 $L=K(\xi_1,\ \xi_2)$，其中 $\xi_i^2=\delta_i\in K^*$ 满足 $s(\xi_1)=-\xi_1,\ \ s(\xi_2)=\xi_2,\ \ t(\xi_1)\xi_1$ 以及 $t(\xi_2)=-\xi_2$。我们在 B^* 中选取 u_s、u_t 和 u_{st}，它们定义了一个交叉积结构。利用命题 3.2.16 的公式和希尔伯特 90 定理，可以看出，只需改变 u_g，就可以假设对所有 $g\in H$ 都有 $\tau(u_g)=u_g$（反向计算时得到的生成元则满足$\tau(u_g)=-u_g$，但这样可以避免处理符号；只需将 u_g 替换为 ξu_g，即可回到另一种情形）。

我们采用以下若干记号：对于任意 $g\in H$, $a_g=\alpha(g,g)=u_g^2\in L^*$ $v=\alpha\ s\ t$ $a_g\in L^{*\ \langle g,\tau\rangle}$ $n\ a_g=$, (,)。$N_{L^{\langle g,\tau\rangle}/k}\ a_g$ $tr\ a_g=$ $_{L^{\langle g,\tau\rangle}/k}\ a_g$ $n\ a_s=a_st\ a_s$ $tr\ a_s=$ 注意到 ( )，并定义 ( ) ( ) 和 ( ) Tr ( )（因此，例如 ( ) ( ) 和 ( ) $a_s+t(a_s)$）。我们还定义 $N=N_{L/K}(v)$，不难验证它属于 k^*。(B,τ) 的交叉积结构完全由 a_s, a_t 和 v刻画。出于技术原因，我们假设 a_g 不在 k^*中；只需改变 u_g即可做到这一点。于是得到以下命题：

定理 3.2.37. 设 $(A,\sigma)=D(B,\tau)$。那么 $A\simeq M_3(Q)$ 其中 $Q=(\delta\delta_1,n(a_s))$。记 $k'=L^{\langle\tau,t\rangle}=k(\xi\xi_1)\subset Q$，且 $j\in Q$ 使得 $j^2=n(a_s)$ 并且 $Q=k'\oplus jk'$。

那么 $\sigma \simeq \sigma_h$ 其中 $h = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ 满足:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\delta tr(a_{st})\xi\xi_1}{Nn(a_{st})} + j\frac{2\delta t(v)\xi\xi_1}{Na_s a_{st}\tau(v)},\\
z_2 &= \delta_2 Nn(a_{st})\xi\xi_1,\\
z_3 &= \frac{-tr(a_s)\xi\xi_1}{n(a_s)} + j\frac{-2\xi\xi_1}{n(a_s)}.
\end{aligned}
$$

本部分余下的内容将用于证明这一结果，我们将采用下降法。因此，证明的思路是用一个 1-余循环 $G \longrightarrow PGL_6(L)$ 来刻画 $D(B,\tau)$，记作 $g \mapsto [Q_g]$（其中 $[Q_g]$ 是 $Q_g \in GL_6(L)$ 的类），从而 $D(B,\tau) \subset M_6(L)$ 可以刻画为 G 给出的半线性作用 $g * A = Q_g g(A) Q_g^{-1}$ 的不动点。为此，我们先根据余循环 $H \to PGL_4(L)$ 描述 B，再由此推导出定义 $\Lambda^2 B$ 的余循环 $H \longrightarrow PGL_6(L)$，并通过给出 τ 的作用，将这个余循环扩展到 G，如 [17, §10.E] 所述。接下来，我们将给出另一个描述 $M_3(Q)$ 的 1-余循环 $G \to PGL_6(L)$（记作 $g \mapsto [R_g]$），并证明这两个余循环上同调等价，由此即可得到命题中的同构。这相当于求出满足 $[Y^{-1}Q_g g(Y)] = [R_g]$ 的 $Y \in GL_6(L)$。

关于对合 σ，它是 $L^6 \simeq \Lambda^2(L^4)$ 上典范形式的伴随对合的下降；可以使用显式矩阵 Y 以及 Morita 等价，从典范形式的矩阵求出厄米形式 h 的矩阵。

定义 B 的余循环

设 E L-自由模，维数为 4，基为 (e_i)，我们将用它来标识 $\mathrm{End}_L(E) = M_4(L)$。于是定义一个 K-嵌入 $\varphi : B \to \mathrm{End}_L(E)$，如下:

$$
\forall \lambda \in L, \varphi(\lambda) = \widetilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & s(\lambda) & & \\ & & t(\lambda) & \\ & & & st(\lambda) \end{pmatrix},
$$

$$
\varphi(u_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ a_s & 0 & & \\ & & 0 & u \\ & & \frac{t(a_s)}{u} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\varphi(u_t) = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ a_t & 0 & & \\ 0 & s(a_t) & & \end{pmatrix}
$$

其中记 $u = \overset{v}{st\tau}(v)$，它满足 $u_t u_s = u \cdot u_s u_t$，且 $N_{L/K}(u) = 1$。

可以验证，φ 满足预期的关系，从而定义一个嵌入。由此得到一个同构 $\Phi: B_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_L(E)$，其定义为 $\Phi(x \otimes \lambda) = \lambda\varphi(x)$。

于是令

$$P_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ a_s & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & a_s & 0 \end{pmatrix}, P_t = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & t(u) \\ a_t & 0 & & \\ 0 & \frac{a_t}{u} & & \end{pmatrix}.$$

可以验证，若对 $g = s, t$ 定义 $g * A = P_g g(A) P_g^{-1}$，则可得到 H 在 $\mathrm{End}_L(E)$ 上的半线性作用，它来自 Φ（显然，P_g 在相差一个 L^* 的标量意义下定义）。

这可由 $g * \varphi(u_h) = \varphi(u_h)$ 以及 $g * \lambda = \widetilde{g(\lambda)}$ 验证，其中 $g, h \in \{s, t\}$，且 $\lambda \in L$（当然，只需定义 s 和 t 的作用即可）。

定义 $\lambda^2 B$的余循环

同构 Φ 诱导出一个同构 $\lambda^2\Phi: \lambda^2 B_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$，我们将利用它通过下降来刻画 $\lambda^2 B$。赋予 $\Lambda^2 E$ 自然基 $(e_{12}, e_{34}, e_{13}, e_{24}, e_{14}, e_{23})$，其中记作 $e_{ij} = e_i \wedge e_j$（此顺序是为便于后续计算而选取的），于是我们将把 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 与 $M_6(L)$ 等同起来。

对于任意 $f \in \mathrm{End}_L(E)$，由函子性可得一个元素 $\Lambda^2(f) \in \mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$，其定义为 $(\Lambda^2 f)(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$。于是可以证明，$H$ 在 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上的半线性作用由 $g * A = Q_g g(A) Q_g^{-1}$给出，其中 $Q_g = \Lambda^2 P_g$，即:

$$Q_s = \begin{pmatrix} -a_s & 0 & & & & \\ 0 & -a_s & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & a_s^2 & 0 & & \\ & & & & 0 & a_s \\ & & & & a_s & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_t}{s(a_t)} & & & & \\ a_t^2 & 0 & & & & \\ & & -a_t u & 0 & & \\ & & 0 & -a_t t(u) & & \\ & & & & 0 & -a_t \\ & & & & \frac{-a_t^2}{s(a_t)} & 0 \end{pmatrix}.$$

要证明，$\Lambda^2(\Phi)$的像在该作用下保持不变。若 f属于 Φ 的像，则 $\Lambda^2(f)$属于 $\Lambda^2(\Phi)$的像。事实上，若我们写作

$\lambda^2 B = \mathrm{End}_{B^{\otimes 2}}(B^{\otimes 2}(1-g))$，其中 g 为 Goldman 元素，那么对任意 $b \in B$，都可以在 $B^{\otimes 2}(1-g)$中通过右乘 $b\otimes b$ 来定义 $\lambda^2 b \in \lambda^2 B$（确实，$(b\otimes b)(1-g) = (1-g)(b\otimes b)$，因此该运算是良定义的）；在分裂情形下，这对应于构造 $\Lambda^2(f)$，故由函子性可得$(\lambda^2\Phi)(\lambda^2 x) = \Lambda^2(\Phi(x))$。由此，若 A 属于 Φ的像，则有

$$(\Lambda^2 P_g)\cdot g(\Lambda^2 A)\cdot(\Lambda^2 P_g)^{-1} = \Lambda^2(P_g g(A) P_g^{-1}) = \Lambda^2 A$$

因此，$\Lambda^2(\Phi)$ 的像确实在该作用下保持不变。

定义余循环的 $D(B,\ \tau)$

要定义 $A = D(B,\ \tau)$，还需要定义 $\tau \in G$ 在 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上的作用。我们将证明，该作用由 $\tau * A = Q_\tau \tau(A) Q_\tau^{-1}$ 给出，其中

$$Q_\tau = \begin{pmatrix} 0 & a_s & & & & \\ a_s n(a_t) & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_t & & \\ & & -a_s^2 s(a_t) & 0 & & \\ & & & & 0 & a_s s(a_t) \\ & & & & a_s a_t & 0 \end{pmatrix}.$$

根据 [17, def 10.28]，$D(B,\ \tau)$ 由 τ 在 $\lambda^2 B$ 上作用的不动元素构成，该作用由 $\tau^{\wedge 2}\circ\gamma$ 给出，其中 γ 是典范对合。因此，τ 在 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上的作用由 $(\lambda^2\Phi)_*(\tau_L^{\wedge 2})$ 与 $(\lambda^2\Phi)_*(\gamma_L)$ 的复合给出（两者可交换）。

由函子性，$(\lambda^2\Phi)_*(\gamma_L)$ 是典范形式的伴随映射

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 E \times \Lambda^2 E & \longrightarrow & \Lambda^4 E = L\cdot e_{1234} \simeq L \\ (x,y) & \longmapsto & x\wedge y \end{array}$$

其在 $\Lambda^2 E$ 的所选基下的矩阵为:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

至于 $(\lambda^2\Phi)_*(\tau_L^{\wedge 2})$，它是厄米形式 $h^{\wedge 2}$ 的伴随映射，其中 h 是定义在 E 上的厄米形式，满足 $\sigma_h = \Phi_*(\tau_L)$。可以证明，$h$ 在基 (e_i)下的矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} a_s a_t & & & \\ & a_t & & \\ & & a_s & \\ & & & \frac{a_t}{s(a_t)} \end{pmatrix}.$$

事实上，有

$$\sigma_h(A) = M^{-1}\tau({}^tA)M$$

~ ~ ~与 $\sigma_h(\lambda) = \tau(\lambda)$，因此 M 与矩阵 λ可交换。取一个不被 H中的任何元素固定的 λ，可得 M 必须是对角矩阵。此外，对于 $g = s, t$，必须有 $\sigma_h(\varphi(u_g)) = \varphi(u_g)$，这一点可通过计算验证。于是， $h^{\wedge 2}$ 的矩阵为:

$$M' = \Lambda^2 M = \begin{pmatrix} n(a_t) & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & a_s s(a_t) & & & & \\ & & & \frac{a_t}{a_s} & & & \\ & & & & a_t & & \\ & & & & & s(a_t) & \end{pmatrix}.$$

因此得到 $\tau * A = B^{-1t}((M')^{-1}\tau({}^tA)M')B$，从而有 $Q_\tau = B^{-1t}M'$；经过计算即可得到所述矩阵。

定义 $M_3(Q)$ **的余循环**

因此，设 Q 为 k上的四元数代数，由二次子代数 $k' = k(\xi\xi_1)$ 和纯四元数 j 生成，满足 $j^2 = n(a_s)$（且 j 与 $\xi\xi_1$反交换）。有 $k' = L^D$ 与 $D = \langle t, s\tau\rangle \subset G$。

于是选取嵌入

$$\begin{array}{rcl} Q & \longrightarrow & M_2(k') \\ x + jy & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & n(a_s)s(y) \\ y & s(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

其中 $x,\ y \in k'$，它诱导出一个嵌入 $M_3(Q) \longrightarrow M_6(L)$。可以验证，与该嵌入关联的 1-余循环为 $g \mapsto [R_g]$ 其中 $R_g = I_6$ 若 $g \in D$，否则为 $R_g = S$，其中

$$S = \begin{pmatrix} 0 & n(a_s) & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & n(a_s) & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & n(a_s) \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

上同调等价的余循环

因此，我们要寻找满足以下条件的 $Y \in GL_6(L)$: $[Y^{-1}Q_g g(Y)] = [R_g]$ 属于 $PGL_6(L)$，即

$$Y^{-1}Q_g g(Y) = c_g R_g$$

其中 $c_g \in L^*$，只需对 $g = s,\ t,\ \tau$验证即可。

可以验证

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & & \\ & Y_2 & \\ & & Y_3 \end{pmatrix}$$

是合适的，其中

$$Y_1 = \xi \begin{pmatrix} \frac{1}{s(v)} & \frac{-a_s}{st\tau(v)} \\ \frac{a_t}{\tau(v)} & \frac{-a_s a_t}{t(v)} \end{pmatrix}, Y_2 = \xi_2 \begin{pmatrix} a_s n(a_t)u & 0 \\ 0 & a_s^3 n(a_t)us(u) \end{pmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} a_t st(u) & a_s s(a_t)u \\ a_t & a_s s(a_t)ut(u) \end{pmatrix}$$

其中 $c_s = \frac{1}{u}$, $c_t = \frac{a_t}{st(u)}$ 和 $c_\tau = s(a_t)t(u)$。

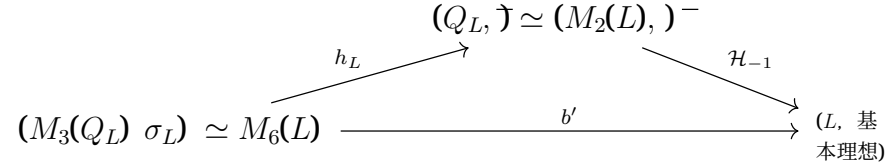
证明纯属计算，为了便于阅读，这里不再重现计算过程。下面列出公式中各个元素之间需要使用的关系：$t(a)a = us(u)$，$sb() = ut(u)$，以及 $N_{L/K}(u) = 1$。

Y的存在性通过上同调的常用机制表明，$D(B,\tau) \simeq M_3(Q)$。但这里还有更具体的结论：若将 $g *_1 A = Q_g g(a) Q_g^{-1}$记作第一个所考虑的作用，将 $g *_2 A = R_q g(a) R_g^{-1}$记作第二个作用，那么令 $\psi(A) = Y^{-1}AY$，它是 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 的一个自同构，并且恰有 $g *_2 (\psi(A)) = \psi(g *_1 A)$。而 $D(B,\tau)$ 由作用 $*_1$ 的不动点构成，$M_3(Q)$ 则由 $*_2$ 的不动点构成，因此得到如下具体同构：在 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 中，ψ 将 $D(B,\tau)$ 映到 $M_3(Q)$。

二次型的下降

我们已经描述了 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上的典范二次型，其矩阵为B。它在 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上诱导出某个对合，该对合限制到 $D(B,\ \tau)$ 上时，正是其典范对合。因此，要得到 $M_3(Q)$ 上相应的对合，我们使用由 Y 给出的基变换：与矩阵为 $B' = {}^tYBY$ 的二次型相对应的 $\mathrm{End}_L(\Lambda^2 E)$ 上的对合，限制后即为 $M_3(Q)$ 上所需的对合。

因此，我们处于如下交换三角形的情形，其中 $\mathbf{Br}_h(K)L$ ：



其中 b' 是矩阵 B'，而 $\mathcal{H}_{-1}$ 是交错（双曲）平面。由 Morita 等价可得，σ_L 在 $M_6(L) = M_3(M_2(L))$ 上的对合是

与 $(M_2(L),)$ 上矩阵为 CB' 的反厄米形式相伴随的，其中

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于这样的矩阵只在相差一个标量的意义下才有定义，因此必须有 $\lambda \in L^*$，使得 $\lambda CB'$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} x_1 & n(a)s(y_1) & & & & \\ y_1 & s(x_1) & & & & \\ & & x_2 & n(a)s(y_2) & & \\ & & y_2 & s(x_2) & & \\ & & & & x_3 & n(a)s(y_3) \\ & & & & y_3 & s(x_3) \end{pmatrix}$$

其中 x_i，$y_i \in k'$，于是令 $z_i = x_i + jy_i \in Q$，$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ 便是所求反厄米形式的对角化。

具体而言，若取 $\lambda = {}^{\xi\xi_1}_{a_s^2 n\ a_t()u}$，通过计算可得定理 3.2.37陈述中的 z_i，由此完成其证明。

3.3 低次数下的一些不变量

这里给出一些带对合代数不变量的例子，并运用第 3.1 和 3.2 部分的结果。

3.3.1 次数 6 的不变量 a_3 与 a_4

本节考虑定义在 k 上的 D_3 型代数（A，σ）：因此，A的次数为 6，指标至多为二，且 σ 是正交的。特别地，我们可以应用第 3.1.3 节的结果来构造上同调不变量：根据命题3.1.6之后的讨论，每个不变量 $\alpha \in \mathrm{Inv}^d(I,\ \mu_2)$都定义了一个取值于 $M_Q^{d-1}(K)$的不变量 $\tilde{\alpha}(A,\ \sigma)$；若该不变量为零，则可以定义 $\alpha(A,\ \sigma) \in M_Q^d(K)$。我们将证明，其中一些不变量可以提升为上同调不变量（取值于 $H^d(K,\ \mu_2)$，而非$M_Q^d(K)$）。

在 [28,§7], 中，作者考察了型为 A_3 的代数 (B,τ) 的对合迹形式 T_τ，其中满足 $Z(B) = k(\sqrt{-1})$；因此，它对应于一个型为 D_3 且判别式为 -1 的代数 (A,σ)。他们证明，在此条件下 $T_\tau = n_Q + q_4$，其中 q_4 是一个 4-Pfister 形式（因此这种写法是

唯一的），并定义 $a_4(A,\sigma) = e_4(q_4) \in H^4(k,\mu_2)$（所用记号略有不同）。我们打算稍微扩展这一构造，并将其与我们的方法联系起来。

具体而言，我们将建立与不变量 $v_4^{(1)} \in \mathrm{Inv}^4(I, \mu_2)$ 的联系（见 1.2.34）。它满足 $v_4^{(1)} = v_3^{(1)}$（见 1.2.65），因此可以定义 $v_3^{(1)}(A, \sigma) \in M_Q^3(k)$；当这个类为零时，可以定义 $v_4^{(1)}(A, \sigma) \in M_Q^4(k)$。特别地，由于 $v_3^{(1)} = (-\delta) \cup u_2^{(1)}$，$v_3^{(1)}$ 在判别式 -1 下总是为零，因此在 [28] 所研究的情形中，总可以定义 $v_4^{(1)}(A, \sigma)$。我们将证明，$a_4(A, \sigma)$ 是 $v_4^{(1)}(A, \sigma)$ 的一个提升，即使在不对判别式作任何假设的更一般情形下也是如此。

对合迹形式

设 $(B, \tau) = Cl(A, \sigma)$。回顾一下，$T_\tau$ 是 B 迹型在对称元素的子-k-空间上的限制；还要回顾一下，若 d 为偶数，则 $\lambda^d(\sigma) \in GW(k)$ 是良定义的（例如，可定义为 $\lambda^d(\langle 1\rangle_\sigma) \in GW(k) \subset GW(A, \sigma)$）。

命题3.3.1。 $GW(k)$ 中有如下等式：$T_\tau = 1 + \lambda^4(\sigma)$。

在证明过程中，我们需要用到以下引理：

引理3.3.2。 设 $z \in Q$。那么

$$\mathrm{Trd}_Q(z)^2 - 4\,\mathrm{Nrd}_Q(z) = 4z_0^2$$

其中，z_0 是 z 的纯部分。

证明。 有 $z = x + z_0$ 其中 $2x =$ 约化迹$_Q(z)$，且

$$\begin{aligned} N_Q(z) &= (x + z_0)(x - z_0) \\ &= x^2 - z_0^2 \end{aligned}$$

因此 $4x^2 - 4N_Q(z) = 4z_0^2$。 □

证明。 我们写作 $\sigma \simeq \sigma_h$ 其中 $h = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$，其中 $z_i \in Q$ 为纯四元数，且 Q 是与 A Brauer 等价的四元数代数。我们假设这些 z_i 两两不对易。于是我们采用定理 3.2.28 中的记号来描述 (B, τ)。记 $H = \{1, g_1, g_2, g_3\}$，其中 $g_i(\xi_i) = \xi_i$，因此 $g_i = \tau_{p,\,q}$ 其中 $i \neq p,\ q$，且 $u_i = u_{g_i} = u_{p,\,q}$。

设 V 为 (B,τ) 的对称元素集合；它是一个维数为 16 的 k-向量空间。对于任意 $\lambda \in L$ 和任意 $g \in H$，有 $\tau(u_g) = \varepsilon_g u_g$，其中 $\varepsilon_1 = 1$ 且 $\varepsilon_g = -1$，若 $g \neq 1$，因此 $\tau(\lambda u_g) = \tau(u_g)\tau(\lambda) = \varepsilon_g(g\tau)(\lambda)u_g$。由此，$\lambda u_g \in V$ 当且仅当 $(g\tau)(\lambda) = \varepsilon_g\lambda$。记 L_g 为满足这一条件的 $\lambda \in L$ 集合

条件，且 $V_g = L_g u_g \subset V$。由于 $\mathbf{dim}_k(L_g) = 4$，因此 $\bigoplus_{g\in H} V_g$ 在 k 上的维数为 16，故 $V = \bigoplus_{g\in H} V_g$。此外，这个分解关于 T_τ 是正交的，因为这些 Lu_g 对迹型正交（事实上，若 $g \neq 1$，则 $\mathbf{Trd}_B(\lambda u_g) = 0$）。因此有 $T_\tau = \sum_g b_g$，其中

$$\begin{array}{rccc} b_g: & L_g \times L_g & \longrightarrow & k \\ & (x,y) & \longmapsto & \mathrm{Tr}_{L/K}(xg(y)u_g^2). \end{array}$$

k空间 L_1 的基为 $(1, \xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \xi_2\xi_3)$，这是一个正交基，因此 b_1（它与扩张 L^τ/k的迹型等距）与 $\langle 1, z_1^2z_2^2, z_1^2z_3^2, z_2^2z_3^2\rangle$等距。若记 $\{i,p,q\} = \{1,2,3\}$，则 L_{g_i} 的一组 k基为：$(\xi, \xi_i, \xi_i\xi_p, \xi_i\xi_q)$。已知 $u_i^2 = \mathbf{Trd}_Q(z_pz_q) - 2\xi_p\xi_q$，可得 b_{g_i} 在此基下的矩阵：

$$\begin{pmatrix} \delta\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q) & -2\delta & & \\ -2\delta & z_i^2\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q) & & \\ & & -z_i^2z_p^2\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q) & 2\delta \\ & & 2\delta & -z_i^2z_q^2\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q) \end{pmatrix}.$$

两个对角块的行列式相同

$$\Delta = \delta z_i^2(\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q)^2 - 4z_p^2z_q^2),$$

根据引理3.3.2，其值为

$$\Delta = 4\delta z_i^2(z_pz_q)_0^2 \equiv z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2 \bmod (k^*)^2.$$

由此可得：

$$\begin{aligned} b_{g_i} &= \langle \delta\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q)\rangle\langle 1, z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2\rangle + \langle -z_i^2z_p^2\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q)\rangle\langle 1, z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2\rangle \\ &= \langle \delta\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q)\rangle\langle 1, -z_q^2\rangle\langle 1, z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2\rangle \\ &= \langle \delta\,\mathrm{Trd}_Q(z_pz_q)\rangle\langle\langle z_q^2, -z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (z_q^2, -z_p^2z_q^2(z_pz_q)_0^2) &= (z_q^2, z_p^2) + (z_q^2, (z_pz_q)_0^2) \\ &= (z_p^2, z_q^2) + [Q] \end{aligned}$$

（提醒一下，z_q与（z_pz_q）$_0$反对易）。由此，$\langle\langle z_q^2, -z_p^2z_q^2\ (z_pz_q)_0^{\ 2}\rangle\rangle = \varphi_{z_p,\ z_q}$（根据命题2.2.25），最后 $b_{g_i} = \langle -\delta\rangle\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle$（根据命题 2.2.27）。因此，结合 b_1 和 b_{g_i} 的计算：

$$T_\tau = \langle 1, z_1^2z_2^3, z_1^2z_3^2, z_2^2z_3^2\rangle + \sum_{p<q}\langle -\delta\rangle\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle. \tag{3.3.3}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}1+\lambda^4(h) &= 1+\sum_{p<q}\lambda^2(\langle z_p\rangle)\lambda^2(\langle z_q\rangle)+\sum_{p<q}\lambda^2(\langle z_i\rangle)\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle\\ &= \langle 1, z_1^2z_2^3, z_1^2z_3^2, z_2^2z_3^2\rangle+\sum_{p<q}\langle -z_i^2\rangle\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle\end{aligned}$$

并由此得出， $z_p^2z_q^2$ 由$\varphi_{z_p,\ z_q}$ 表示（事实上， $-z_p^2$ 和 $-z_q^2$都可表示），因此 $\langle -\delta\rangle\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle = \langle -z_i^2\rangle\langle z_p\rangle\langle z_q\rangle$。 □

不变量 a_3 和 a_4

利用公式（3.3.3），可见

$$\begin{aligned}e_2(T_\tau) &= (-z_1^2z_2^2, -z_1^2z_3^2)+\sum_{i<j}[Q]+(z_i^2, z_j^2)\\ &= (-1,-\delta)+\sum_{i<j}(z_i^2, z_j^2)+[Q]+\sum_{i<j}(z_i^2, z_j^2)\\ &= (-1,-\delta)+[Q]\end{aligned}$$

因此可以设

$$q_\tau = T_\tau - \langle\langle -1,-\delta\rangle\rangle - n_Q \in I^3(k).$$

于是定义 $a_3(A,\ \sigma) = e_3(q_\tau)$，并且若 $a_3(A,\ \sigma) = 0$，则设 $a_4(A,\ \sigma) = e_4(q_\tau)$（当 $\delta = -1$时，这与前面的定义一致）。

命题 3.3.4。 $a_3(A,\sigma)$ 在 $M_Q^3(k)$ 中的类为 $v_3^{(1)}(A,\sigma)$；若 $a_3(A,\sigma) = 0$，则 $a_4(A,\sigma)$ 在 $M_Q^4(k)$ 中的类为 $v_4^{(1)}(A,\sigma)$。

证明。 根据 M_Q^d 中不变量的构造，只需在 A 展开时证明该结果。因此，设 q 是维数为 6 的对象，且 $\sigma = \sigma_q$。将 $q = q_1 + q_2$ 写成 $q_i = \langle a_i, b_i, c_i\rangle$。根据前一个命题， $q_\tau = 1+\lambda^4(q) - \langle\langle -1,-\delta\rangle\rangle$。我们有

$$\begin{aligned}1+\lambda^4(q) &= 1+\lambda^3(q_1)q_2+\lambda^2(q_1)\lambda^2(q_2)+q_1\lambda^3(q_2)\\ &= 1+\lambda^3(q_1)\lambda^3(q_2)\lambda^2(q_2)+\lambda^2(q_1)\lambda^2(q_2)+\lambda^3(q_1)\lambda^2(q_1)\lambda^3(q_2)\\ &= (1+\langle -\delta\rangle\lambda^2(q_1))(1+\langle -\delta\rangle\lambda^2(q_2))\end{aligned}$$

因为 $q_i = \lambda^3(q_i)\lambda^2(q_i)$，且 $-\delta = \lambda^3(q_1)\lambda^3(q_2)$。然而

$$\begin{aligned}1+\langle -\delta\rangle\lambda^2(q_i) &= 1+\langle -\delta\rangle\langle a_ib_i, a_ic_i, b_ic_i\rangle\\ &= (1-\langle -\delta\rangle)+\langle -\delta\rangle\langle 1, a_ib_i, a_ic_i, b_ic_i\rangle.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}1+\lambda^4(q) &= (\langle\langle -\delta\rangle\rangle + \langle -\delta\rangle\langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle)(\langle\langle -\delta\rangle\rangle + \langle -\delta\rangle\langle\langle -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle)\\ &= \langle\langle -1, -\delta\rangle\rangle - \langle\langle -\delta\rangle\rangle(\langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle + \langle\langle -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle)\\ &\quad + \langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1, -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle\end{aligned}$$

donc

$$q_\tau = -\langle\langle -\delta\rangle\rangle(\langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle + \langle\langle -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle) + \langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1, -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle.$$

特别地，由于可以验证 $(-a_ib_i, -a_ic_i) = w_2(q_i) + (-1) \cup w_1(q_i) + (-1, -1)$，我们得到

$$\begin{aligned}a_3(q) &= w_1(q) \cup ((-1) \cup w_1(q) + w_2(q_1) + w_2(q_2))\\ &= (-1, -1) \cup w_1(q) + (w_1(q_1) + w_1(q_2)) \cup (w_2(q_1) + w_2(q_2))\\ &= (-1, -1) \cup w_1(q) + w_3(q_1) + w_3(q_2) + w_1(q_1) \cup w_2(q_2) + w_1(q_2) \cup w_2(q_1)\\ &= (-1, -1) \cup w_1(q) + w_3(q).\end{aligned}$$

然而，根据命题 1.2.76，我们恰好有 $v_3^{(1)}(q) = w_3(q) + (-1, -1) \cup w_1(q)$，因此在分裂情形下确有 $v_3^{(1)}(q) = a_3(q)$。

假设 $a_3(q) = 0$。那么 $\langle\langle -\delta\rangle\rangle(\langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle + \langle\langle -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle)$ 属于 $I^4(k)$，因此 $\langle\langle -\delta, -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle = \langle\langle -\delta, -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle$，这意味着

$$q_\tau = -\langle\langle -1, -\delta, -a_1b_1, -a_1c_1\rangle\rangle + \langle\langle -a_1b_1, -a_1c_1, -a_2b_2, -a_2c_2\rangle\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}a_4(q) &= ((-1, -1) + (-1) \cup w_1(q_1) + w_2(q_1))\\ &\quad \cup ((-1) \cup w_1(q) + (-1, -1) + (-1) \cup w_1(q_2) + w_2(q_2))\\ &= (-1)^{\cup 4} + (-1, -1) \cup w_2(q_1) + (-1, -1) \cup w_2(q_2) + w_2(q_1) \cup w_2(q_2)\\ &\quad + (-1)^{\cup 3} \cup w_1(q_1) + (-1) \cup w_1(q_1) \cup w_2(q_2) + (-1) \cup w_3(q_1).\end{aligned}$$

另一方面，根据命题 1.2.76，有

$$\begin{aligned}v_4^{(1)}(q) &= a_3(q) + (-1)^{\cup 4} + (-1, -1) \cup w_2(q) + w_4(q)\\ &= (-1)^{\cup 4} + (-1, -1) \cup w_2(q_1) + (-1, -1) \cup w_2(q_2) + w_2(q_1) \cup w_2(q_2)\\ &\quad + (-1, -1) \cup w_1(q_1) \cup w_1(q_2) + w_1(q_1) \cup w_3(q_2) + w_3(q_1) \cup w_1(q_2)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}a_4(q) - v_4^{(1)}(q) &= (-1)^{\cup 3} \cup w_1(q_1) + (-1) \cup w_1(q_1) \cup w_2(q_2)\\ &\quad + (-1) \cup w_3(q_1) + (-1, -1) \cup w_1(q_1) \cup w_1(q_2)\\ &\quad + w_1(q_1) \cup w_3(q_2) + w_3(q_1) \cup w_1(q_2).\end{aligned}$$

最后，只需证明这个类等于 $w_1(q_1)\cup a_3(q)$，根据假设其值为 0。事实上，利用以下事实： $w_1(q_1)\cup w_1(q_1)=(-1)\cup w_1(q_1)$,$w_1(q_1)\cup w_2(q_1)=w_3(q_1)$ 和 $w_1(q_1)\cup w_3(q_1)=(-1)\cup w_3(q_1)$，可得：

$$\begin{aligned} w_1(q_1)\cup a_3(q) &= w_1(q_1)\cup((-1,-1)\cup w_1(q)+w_3(q)) \\ &= w_1(q_1)\cup((-1,-1)\cup w_1(q_1)+(-1,-1)\cup w_1(q_2)+w_3(q_1) \\ &+ w_2(q_1)\cup w_1(q_2)+w_1(q_1)\cup w_2(q_2)+w_3(q_2) \\ &= (-1)^{\cup 3}\cup w_1(q_1)+(-1,-1)\cup w_1(q_1)\cup w_1(q_2) \\ &+ (-1)\cup w_3(q_1)+w_3(q_1)\cup w_1(q_2) \\ &+ (-1)\cup w_1(q_1)\cup w_2(q_2)+w_1(q_1)\cup w_3(q_2). \end{aligned}$$

□

3.3.2 12 次不变量 a_5

在第一章中，我们描述了函子I^n的上同调不变量，也描述了若干$_1$不变量，其元素的形式为 $\langle\langle c\rangle\rangle q$，其中 q 属于I^{n-1}。这些不变量属于 $\Delta^n{}_1(\alpha)$类型： $\langle\langle c\rangle\rangle q\mapsto(c)\cup\alpha(q)$，其中 α 是 I^{n-1} 的任意一个不变量（见命题 1.2.85）。我们希望将这些不变量推广到某些类型的带对合代数，尤其是将 [9, 定义 20.8] 中的不变量 a_5（另见 [27, §9]）推广到指标为 2 的代数。

具体而言，设 (A,σ) 是一个次数为 12 的正交对合代数，并且 σ “泛型地属于 I^3”，也就是说，在任意分裂域 L上， σ_L 都伴随于一个形式 $q\in I^3(L)$（或者等价地，$\widetilde{}$满足 $\langle 1\rangle_\sigma\in I^3_0(A,\sigma)$）。那么，根据 [24]， I^3 中的任意 12 次二次型实际上都属于 I^3,1，因此 σ 泛型地属于 I^3,1。现在假设 A 的指标为 2。对于任意上同调不变量 $\alpha\in \mathrm{Inv}^d(I^2,\mu_2)$，因此可以将 Δ^3,1$(\widetilde{\alpha})$ 应用于 (A,σ)，从而得到 $M^d_Q(K)$ 的一个元素；若该不变量为零，则可以定义 Δ^3,1$(\alpha)(A,\sigma)\in M^{d+1}_Q(K)$。

命题 3.3.5. 设 (A,σ) 是一个次数为 *12*、指标至多为二的正交对合代数，并且对 A 的每个分裂域 L， σ 都是 $I^3(L)$ 中某个形式的伴随映射。那么，若 $(-1)\cup e_3(A,\sigma)=0$，便可定义不变量 $a_5(A,\sigma)\in M^5_A(K)$；在分裂情形下，它对应于 *[9]* 的不变量 a_5。

证明。根据构造，不变量 a_5 等于（采用我们的记号）$_{\Delta^3,1(u_4^{(2)})}$，因此上一段的讨论适用于 $\alpha=u_4^{(2)}\in\mathrm{Inv}^4(I^2,\mu_2)$。于是， $\widetilde{\alpha}=(-1)\cup u_2^{(2)}=(-1)\cup e_2$，故 Δ^3,1$(\widetilde{\alpha})=(-1)\cup e_3$。因此，当 $(-1)\cup e_3(A,\sigma)=0$ 时，我们将 $a_5(A,\sigma)$ 定义为$\in M^5_Q(K)$ 如下：$_{\Delta^3,1(u_4^{(2)})}(A,\sigma)$。

□

还可以注意到，当 -1 在 K 中是一个平方时，命题中的条件总是成立。

符号索引

一般

k 特征为非2的域 $\neq 2K$ 在 k 上的扩张 L 在 K 上的扩张（K, v）配备了秩1离散赋值的域 Field$/k$ 域扩张范畴，底域为 k集合范畴 Set$_*$ 带基点集合范畴（$a_1, \ldots, a_r$）在 H^n 中的伽罗瓦符号（K, μ_2）$\binom{n}{a_1 \ldots}$ $, ,a_r)$ 多项式系数$\lceil x \rceil$ x 的上取整$\lfloor x \rfloor$ x 的下取整$s \vee t$ 对 s 和 t 的各位应用逻辑或（1.2.48）$s \wedge t$ 对 s 和 t 的各位应用逻辑与（1.2.48）$\mathfrak{S}_{p,q}$ $\mathfrak{S}_d$ 的杨子群 p.82Sh（p, q） $\mathfrak{S}_d$ 的（p, q）混洗集合 p.82$R[G]$ 在 R 上的群代数R_g R 的次数为 $g \in G$ 的分量， G-分次环Φ 自然同构 $R \oplus R \to R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ （2.2.20）x（x, 0)（2.2.20）$x_{(1)}$ Φ(0, x)（2.2.20）Δ 对角嵌入 $R \to R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ （2.2.21）Ψ 修正同构 $R \oplus R \to R[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ （2.2.22）

二次型

$\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ 对角化二次型$C(q)$ q的 Clifford代数$C_0(q)$ q的偶Clifford代数q的判别式（带符号） q

$\mathcal{H}$ 对称双曲平面$\mathcal{H}_{-1}$ 交错双曲平面$SGW(K)$ K上的二次型半环$GW(K)$ K的Grothendieck-Witt环$W(K)$ K的Witt环$SGW^-(K)$ K上的交错型幺半群$GW^-(K)$ K 上的交错型的 Grothendieck-Witt 群 $SGW^{\pm}(K)$ $SGW(K)$ $\oplus$ $SGW^-(K)$$GW^{\pm}(K)$ $GW(K)$ $\oplus$ $GW^-(K)$ $\hat{}I(K)$ GW的零维型理想(K) 第19页$I(K)$ W的基本理想K第19页$\langle\langle a\rangle\rangle$ 第19页 $\hat{}\langle\langle a_1,\dots,a_r\rangle\rangle$ r-Pfister 形式 $\langle\langle a_1\rangle\rangle\cdots\langle\langle a_r\rangle\rangle \in I^r(K)$ 第19页 Quad_{2r} 维数为 $2r$的二次型函子 Quad'_{2r} Quad 的子函子， $_{2r}$ 平凡判别式型 第56页 $\hat{}\lambda^d(q)$ 运算 λ 通过 $I\simeq$ 观察 $\hat{}I$ (1.2.70)$P^d(q)$ 运算 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle\mapsto\sum_{i_1<\cdots<i_d}\langle\langle a_{i_1},\dots,a_{i_d}\rangle\rangle$ (1.2.74)$I^n,^r(K)$ I^n中的半分解型(K) (1.2.84)

$$\text{forme de Pfister } \langle 1\rangle-\langle a\rangle\in\hat{I}(K) \tag{2.2.1}$$

$$(2.2.1)$$

不变量

Inv(F,H) 取值于 H 的 F 不变量 p.13 Inv$_{norm}(F,H)$ 取值于 H 的 F 归一化不变量 p.13 Inv(F,μ_2) 取值于 μ_2 的 F 上同调不变量 p.13 Inv$^d(F,\mu_2)$ 取值于 μ_2 的 F 的次数 d 上同调不变量 p.13 Inv(F,W) F 的 Witt 不变量 p.13w_i Stiefel-Whitney 不变量 (0.0.2)e_n Milnor 猜想的不变量 (0.0.3)$A(K)$ 一般为 $H^*(K,\mu_2)$ 或 $W(K)$ p.32$A^d(K)$ A 的次数分量 d (K) p.32$\delta(A)$ A 的 $=\delta$ 元素 (k)（通常为 0 或 1）(1.2.51)f_n I^n 态射 $(K)\to A^n(K)$ p.33$\{a_1,\dots,a_r\}$ $f_n(\langle\langle a_1,\dots,a_r\rangle\rangle)$ p.33M Inv(I^n,A) p.35M^d Inv(I^n,A^d) p.35$f_n^d(f_{nd}\circ\pi_n^d)$ $\in$ Inv$^{nd}(I^n,A)$ (1.2.7)g_n^d (1.2.32)
$u_{nd}^{(n)}$ (1.2.8)
$v_{nd}^{(n)}$ (1.2.34)
Φ^{ε} (1.2.16)

$$\text{invariant dans } \mathrm{Inv}^{nd}(I^n,A)$$
$$f_n^d \text{ si } A(K)=H^*(K,\mu_2)$$
$$g_n^d \text{ quand } A(K)=H^*(K,\mu_2)$$
$$\text{opérateur } M\to M\ (\varepsilon=\pm1)$$

Φ 移位算子 Φ^+ (1.2.16)

α^{ε}	$\Phi^{\varepsilon}(\alpha)$ $(\varepsilon = \pm 1)$	(1.2.16)
$\alpha^{s+,t-}$	$(\Phi^{+})^{s} \circ (\Phi^{-})^{t}(\alpha)$	(1.2.20)
$\alpha_{\mid I^{n+1}}$	restriction de $\alpha \in \mathrm{Inv}(I^{n}, A)$ à I^{n+1}	p.46
Ψ	算子 $M \to M$	(1.2.59)
$\widetilde{\alpha}$	$\Psi(\alpha)$	(1.2.59)
$h^{d}(q)$	$P^{d}(q)$ 或 $w_{d}(q)$	p.55
$\Delta^{n,r}$	算子 $\mathrm{Inv}_{norm}(I^{n,\ r},\ A) \to \mathrm{Inv}_{norm}(I^{n-r},\ A)$	(1.2.85)
$\alpha^{(r)}$	$\Delta^{n,\ r}\ (\alpha)$	(1.2.85)

希腊环

$G(R)$ $1 + tR[[t]] \subset R[[t]]$ (1.1.4)α_{t} 希腊运算 $R \to G(R)$ (1.1.6)α^{d} d希腊运算的第 - 个分量 (1.1.1)$\Gamma(R)$ R 的希腊运算集合 (1.1.1)$+_{G}$ $G(R)$ 的加法（级数的乘积）(1.1.29)$\times_{G}$ $G(R)$ 的乘积 (1.1.29)

ε_{R} (1.1.5)LR 的希腊字母 R (1.1.7)Λ_{R} 自然映射 $\Gamma(R) \longrightarrow L(R)$ (1.1.8)$A(R)$ 与 ε_{R} 交换的 G 的自同构 (1.1.9)π_{n}^{d} d 希腊运算 π_{n} 的第 - 个分量 (1.1.41)

代数与对合

(A, σ) 定义在 K 上的第一类带对合代数 (A_{L}, σ_{L}) 从 $(A,$ $\sigma)$ 到域 L 的扩张 $Sym\,(A, \sigma)$ $(A\sigma)$ 的对称元素 $Skew\,(A, \sigma)$ (A, σ) 的反对称元素 $C_{A}\,(B)$ 在 A 中 B 的中心化子 $Z\,(A)$ A 的中心 A^{op} A 的对立代数 Trd_{A} A 的约化迹 T_{σ} (A, σ) 的对合迹形式 T_{σ}^{+} 将 T_{σ} 限制到 $Sym\,(A, \sigma)$ T_{σ}^{-} 将 T_{σ} 限制到 $Skew\,(A, \sigma)$ $T_{\sigma,a}$ 被 a 扭曲的对合迹型 Nrd_{A} A 的约化范数 σ_{b} b 的伴随对合 σ_{q} q 的伴随对合 (2.1.7)

(2.2.10)

Cl (A,σ) (A,σ) 的 Clifford 代数（偶部）K A 的一般分裂域 A A 的一般约化域，指标为 2^r p.94 Br(K) K 的 Brauer 群 $[A]$ A 的 Brauer 类 $A\sim B$ A B 与 K Brauer 等价 Br(K) K 的 Brauer 2-群 第一部分 2.1.1 Mor(R) 交换环 R 的 Morita 范畴 (2.1.1) $B\xrightarrow{V}A$ V 是一个 B-A 单双模 第一部分 2.1.1 dim(V) A-模的约化维数 (2.4.1)U^* B-A 双模 U 的对偶 (2.1.2)$^\sigma U^\tau$ 通过对合 σ 和 τ 所见的双模对偶 (2.1.8)g_A A 的 Goldman 元素 p.83$g_A(\pi)$ 与 $\pi\in\mathfrak{S}_d$ 对应的 $A^{\otimes d}$ 的元素 p.83$s_{d,A}=s_d$ $A^{\otimes d}$ 的反对称化元素 (2.3.4) Alt^d (V) A-模的交错幂 (2.3.5)λ^d (A) 代数 A 的第 d 交错幂 (2.3.6)sh_p, $V^{\otimes d}$ 的混合映射 (2.3.8)$x\#y$ x 与 y 的混合积 (2.3.7)$\sigma^{\wedge d}$ 对合的外幂 (2.3.14)

厄米形式

σ_h 伴随对合 $hh\perp h'$ 两个形式的正交和 ε-厄米形式。$\langle a\rangle_\sigma$ 在 (A,σ) 上的对角形式$\mathcal{H}(A,\sigma)$ 在 (A,σ) 上的厄米双曲空间 Br$_h(K)$ K 的 Hermite Brauer 2-群B第 2.1.2 节 (τ,V) (h,$\longrightarrow$)A(σ,V) (h, ε) 是一个 h_A -厄米双模 A第 2.1.2 节 σBr$_h(K)$ 中 (h^* , ε) 的恒等映射 (2.1.4) h $\varphi^{(d)}$ -厄米形式的对偶 $_A$(2.1.9)$_\sigma$($_h$,R) (2.2.8) Mor $\iota(R,\iota)$ ($f\oplus f'$,$_h$) 的厄米 Morita 范畴 (2.1.1)KBr$SGW^\varepsilon(A)$ 中态射的正交和 σ(ε,A) 在 (σ, GW^ε) 上的 A-厄米形式幺半群 (2.2.1) σ(ε,W^ε) A-厄米形式的 Grothendieck-Witt 群 σ(ε,$SGW^\pm$) (A,σ) $SGW(A,\sigma)$ $\oplus$ $SGW^-(A,\sigma)$$GW^\pm(A,\sigma)$ $GW(A,\sigma)$ $\oplus$ $GW^-(A,\sigma)$ $W^\pm(A,\sigma)$ $W(A,\sigma)$ $\oplus W^-(A,\sigma)$ $\xrightarrow{\text{isom.}}$ $SGW(A,\sigma)$ (A,σ) 的混合 Grothendieck-Witt 半环 (2.2.1)

$$(A,\sigma)^{\otimes d}\to(A,\sigma)\text{ ou }(K,\mathrm{Id}) \tag{2.2.10}$$

(2.2.1)

$\sim GW(A,\sigma)$ (A,σ) 的混合 Grothendieck-Witt 环 (2.2.1)$\sim W(A,\sigma)$ (A,σ) 的混合 Witt 环 (2.2.12)Γ 分次群 $\{+,-,o,s\}$ (2.2.2)$\sim\sim SGW(A,\sigma)_+$ $SGW(K)$ 第 70 页$\sim GW(A,\sigma)_+$ $GW(K)$ 第 70 页$\sim W(A,\sigma)_+$ $W(K)$ 第 76 页 $\sim\sim SGW(A,\sigma)_-$ $SGW^-(K)$ 第 70 页 $\sim GW(A,\sigma)_-$ $GW^-(K)$ 第 70 页 $\sim W(A,\sigma)_-$ 0 第 76 页

$\sim\sim$ $\sim\sim SGW(A,\sigma)_o$ $SGW(A,\sigma)$ 的正交分量 第 70 页$\sim$ $\sim GW(A,\sigma)_o$ $GW(A,\sigma)$ 的正交分量 第 70 页$\sim$ $\sim W(A,\sigma)_o$ $W(A,\sigma)$ 的正交分量 第 76 页

$\sim\sim$ $\sim\sim SGW(A,\sigma)_s$ $SGW(A,\sigma)$ 的辛分量 第 70 页$\sim$ $\sim GW(A,\sigma)_s$ $GW(A,\sigma)$ 的辛分量 第 70 页$\sim$ $\sim W(A,\sigma)_s$ $W(A,\sigma)$ 的辛分量 第 76 页$\sim$ $\sim GW(K)$ $GW(K,\mathrm{Id})$ (2.2.18)$\sim$ $\sim W(K)$ $W(K,\mathrm{Id})$ (2.2.19) $\mathrm{Alt}^d(h)$ 形式的交错幂 ε-厄米形式 (2.3.12)$\Lambda^d(V)$ A-模的外幂 (2.3.17)$\lambda^d(h)$ 形式的外幂 ε-厄米形式 (2.3.17) $\dim(h)$ 形式的约化维数 ε-厄米形式 (2.4.1)

$\sim$ $\sim GI(A,\sigma)$ $GW(A,\sigma)$ 的基本理想 第 90 页$\sim$ $\sim I(A,\sigma)$ $W(A,\sigma)$ 的基本理想 第 90 页

$\sim$ $\sim$ $\sim GI(A,\sigma)_o$ $GI(A,\sigma)\cap GW(A,\sigma)_o$第 90 页

$\sim$ $\sim$ $\sim I(A,\sigma)_o$ $I(A,\sigma)\cap W(A,\sigma)_o$第 90 页

$\sim$ $\sim$ $\sim GI(A,\sigma)_s$ $GI(A,\sigma)\cap GW(A,\sigma)_s$第 90 页

$\sim$ $\sim$ $\sim I(A,\sigma)_s$ $I(A,\sigma)\cap W(A,\sigma)_s$第 90 页$\sim H^n(A,\sigma)$ 混合上同调 2.4.3$\sim$ $\sim GI(K)$ $GI(K,\mathrm{Id})$ 第 91 页$\sim$ $\sim I(K)$ $I(K,\mathrm{Id})$ 第 91 页$GI(K)$ $\mathrm{Ker}(GW^{\pm}(K)\to\mathbb{Z})$ 第 91 页$GJ(K)$ $\mathrm{Ker}(GW^{\pm}(K)\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 第 91 页$GJ^{(n)}(K)$ $GI^{n-1}(K)GJ(K)$ $(n\geqslant 1)$ 第 91 页$\sim$ $\sim H^n(K)$ $H^d(K,\mathrm{Id})$ (2.4.6)$I^n(A,\sigma)_o$ $I^{n-1}(K)W(A,\sigma)_o$ (2.4.8)$H^n(A,\sigma)_o$ $I^n(A,\sigma)_o/I^{n+1}(A,\sigma)_o$ (2.4.9)$I^n(A,\sigma)_s$ $I^{n-1}(K)W(A,\sigma)_s$ (2.4.8)

$H^n(A,\sigma)_s$ $I^n(A,\ \sigma)_s/I^{n+1}(A,\ \sigma)_s$ (2.4.9)
$\widetilde{GI}^n_r(A,\sigma)$ élém. dans $\widetilde{GI}^n(A,\sigma)$ sur $K_r(A)$ (2.4.13)
$\widetilde{I}^n_r(A,\ \sigma)$ 元素于 $\widetilde{I}^n(A,\ \sigma)$ 在 $K_r(A)$ (2.4.13)

四元数

$(Q,)$带有典范对合的四元数代数n_Q 四元数代数的范数形式 $Q\varphi_{z_1,\ldots,z_r}$ r-重 Pfister 形式 $\langle\langle z_1^2,\ldots,z_r^2\rangle\rangle - \langle\langle -1\rangle\rangle^{r-2}n_Q$(2.2.25)$\mathfrak{p}$ Severi-Brauer 簇的闭点 p.94$v_\mathfrak{p}$ 由 $\mathfrak{p}$ 诱导的赋值 p.94$\partial_{1,\mathfrak{p}}$第一残数 $W(F)\ \to W(K(\mathfrak{p}))$ p.94$\partial_{2,\mathfrak{p}}$第二残数 $W(F)\ \to W(K(\mathfrak{p}))$ p.94 ext$_\infty$ 标量扩张 $W^-(Q,)\ \to W(F)$ (2.4.14)W_{nr},1,∞(F) 第一非分歧Witt群 (2.4.15)W_{nr},2,∞(F) 第二非分歧Witt群 (2.4.16)$\partial_\mathfrak{p}$ 残数 $H^d(F,\mu_2)\ \to H^{d-1}(K(\mathfrak{p})\ \mu_2)$ p.96$H^d_{nr}(F,\mu_2)$ 非分歧上同调 (2.4.20)
$\widetilde{e}_d$ (2.4.21)$M^d_A(K)$ $H^d(K,\mu_4^{\otimes\ -})$的2-扭元$/[A]\cdot H^{d-2}(K,\mu_2)$ (2.4.23)$N^d_A(K)$ $H^d(K,\mu_2)/[A]\cdot H^{d-2}(K,\mu_2)$ p.96F_Q Q 上的与 F 相容的反厄米形式 p.103$F_{\alpha,Q}$ F_Q 中与 α 相容的形式的子函子 p.103 $\hat{}_\alpha$ 由 α 诱导的 Iny$(F_{\alpha,Q},M^d_Q)$ 中的不变量 (3.1.6)

$$\text{invariant } I^d_0(Q,\ ) \to H^{d-1}_{nr}(F,\mu_2^{\ 1})$$

交叉积

K k-étale代数 p.108$K_\mathfrak{p}$ K 的分量，对应于 $\mathfrak{p}$ß$\mathrm{Spec}(K)$ p.108u_g 交叉积的生成元 p.110$\alpha(g,\ h)$ 描述交叉积的 2-上循环 (3.2.7)T_g V 上的半线性运算 (3.2.8)S_g End$_L(V)$上的半线性运算 (3.2.9)

g $\theta_{|L}g^{-1}\theta_{|L}$ (3.2.13)
θ_g $g\theta_{|L}$ (3.2.14)
θ'_g $g^{-1}\theta_{|L}$ (3.2.14)μ_g

L^* 中的元素，用于描述交叉积上的对合 (3.2.16)π_g 与 g 相关的投影
$E\to L$ (3.2.21)$h_g(x,\ y)$ $\pi_g(h(x,\ y))$ (3.2.20)$f_g(x,\ y)$ $\pi_g(\theta(x)y)$ (3.2.22)

$$\varepsilon_g \quad g^{-1}(\mu_g) \tag{3.2.26}$$

Clifford代数

Q 与 AB Cl等价的四元数代数$A(\sigma,e_i)$ V的正交基 $\langle z_1,\ldots,z_r\rangle$ h的对角化L B的étale子代数G Gal(L/k) H Gal($L/Z(B)$)τ_p, $_q$ G中的元素K Q的二次子域j $Q=K\oplus jK$纯四元数, π j^2s K/k的非平凡 Gal 元素(b) $\sigma_K\simeq\sigma_b$双线性形式, φ_b $V\otimes_K V\to$ 的识别 $_K$End$V$(ψ) $V\otimes_Q$ 典范态射 $^\gamma V(\to Cl)$ $A(\sigma,u)x(y,\frac{1}{2}\psi)$ $x\otimes y+y\otimes x(u)$ $x(\frac{1}{2}\psi)$ $x\otimes x(\xi_i \quad u)e_i(\xi \quad \prod_i \xi_i)u_{pq} \quad u$, e_p (e_q,)

–
–

参考文献

[1] Adrian Albert. 对合单代数与实黎曼矩阵。《数学年刊》，1935。[2] Jon K. Arason. 二次型的上同调不变量。《代数学杂志》，1975。[3] John Baez 和 Aaron Lauda. 高维代数 V：2-群。《范畴理论与应用》，2003。[4] Grégory Berhuy. 四元数斜厄米模的上同调不变量。2006。[5] Grégory Berhuy、Marina Monsurro 和 Jean-Pierre Tignol. 辛对合的判别式。《太平洋数学杂志》。[6]Ingrid Dejaiffe. 带对合代数的正交和与 Clifford 代数。《代数通讯》，1998。[7] Richard Elman、Nikita Karpenko 和 Alexander Merkurjev. 二次型的代数与几何理论。美国数学会。[8]Miguel Ferrero 和 Antonio Paques. 重新探讨交换环的伽罗瓦理论。《代数与几何论丛》，1997。[9] Skip Garibaldi. 上同调不变量、例外群与自旋群。美国数学会，2009。[10] Skip Garibaldi、Alexander Merkurjev 和 Jean-Pierre Serre. 伽罗瓦理论中的上同调不变量。美国数学会。[11] Skip Garibaldi、Parimala 和 Jean-Pierre Tignol. 辛对合的判别式。《纯粹与应用数学》，2009。[12] Philippe Gille 和 Tamàs Szamuely. 中心单代数与伽罗瓦上同调。剑桥，2006。[13] Bill Jacob 和 Markus Rost. 二次型的四次上同调不变量。《数学发明》，1989。[14] Nathan Jacobson.《基础代数 *II*》。多佛出版社，2009。[15] Bruno Kahn、Markus Rost 和 R. Sujatha. 四次曲面的非分歧上同调 I。《美国数学杂志》，1998。

[16] Max-Albert Knus. 环上的二次型与厄米形式。Springer-Verlag，1991。[17] Max-Albert Knus、Alexander Merkurjev、Markus Rost 和 Jean-Pierre Tignol.《对合之书》。美国数学会，1998。[18] Max-Albert Knus、Parimala 和 Srinivas. 带对合的阿祖玛雅代数。《代数学杂志》，1990。[19] T.Y. Lam. 域上的二次型。美国数学会，2004。[20] David Lewis. 四元数除代数上的厄米形式乘积。《伦敦数学学会杂志》，1980。[21] Alexander Merkurjev. 半单群的三次上同调不变量。《欧洲数学学会杂志》，2016。[22] Alexander Merkurjev. 约化群的非分歧三次不变量。《数学进展》，2016。[23] James Milnor. 代数K理论与二次型。《数学发明》，1970。[24] Albrecht Pfister. 任意域上的二次型。《数学发明》，1966。[25] Anne Quéguiner. 带对合代数的上同调不变量。《代数学杂志》，1997。[26] Anne Quéguiner 和 Jean-Pierre Tignol. 四元数斜厄米特型与圆锥曲线的函数域。预印本。[27] Markus Rost. 关于 spin(14) 的伽罗瓦上同调。未发表。[28] Markus Rost、Jean-Pierre Serre 和 Jean-Pierre Tignol. 次数为 4 的中心单代数的迹型。《巴黎科学院院刊》，2005。[29] Elizabeth Seip-Hornix. 四元数二次型的 Clifford 代数。《荷兰数学学报》，1965。[30] Jean-Pierre Serre. 伽罗瓦上同调。Springer，第5版，1994。[31] Jean-Pierre Tignol. 二次型、线性代数群与上同调，章节：带对合代数的上同调不变量。Springer，2010。[32] Charles Vial. Milnor K理论中的运算。[33] Vladimir Voevodsky. 动机上同调，系数取**整环**/2。《高等科学研究所数学出版物》，2003。[34] André Weil. 带对合的代数与经典群。《印度数学学会杂志》，1960。[35] Donald Yau. *Lambda*环。World Scientific，2010。[36] Élie Cartan. 关于有限连续变换群的结构。博士论文，高等师范学院，1894。

数学博士论文

关键词： 上同调不变量，带对合代数，λ运算，Grothendieck 环 Witt，基本滤子，厄米 Morita 等价。

摘要： 为了研究某些类型的代数对象，尤其是代数群，Serre 引入了不变量的概念，特别是上同调不变量。构造非平凡的代数群上同调不变量是当前活跃的研究领域，而在严格高于 3 的次数中，已知的不变量非常少。

在第一章中，我们将函子 I^n 的 Witt 不变量和上同调不变量完整地描述为基本不变量的组合，这些基本不变量的行为类似于除幂；其构造关键地依赖于 Grothendieck-Witt环中的 λ 运算。我们还研究了这些不变量在乘积或相似变换等各种运算下的行为。

第二章致力于构造与带对合代数相关联的“混合”Witt环：其基本思想是借助该代数所关联的对合迹形式给出的典范 Morita 等价，定义两个eps-厄米形式的乘积。我们还在混合 Grothendieck-Witt环上定义了 lambda 运算，以及模仿分裂情形的基本滤子。特别关注指标为 2 的代数情形下的显式计算。

第三章运用这些工具，在厄米形式的框架下模仿第1章中的构造，并由此构造带对合代数的上同调不变量，同时对指标 2 的情形给出更详尽的结果。其主要意义在于，原则上可以构造次数任意高的非平凡不变量，尽管代数的指标构成了一种障碍形式。

标题：代数群与带对合代数的上同调不变量

摘要： 为了研究某些代数对象，尤其是代数群，Serre 引入了不变量的概念，特别是上同调不变量。构造代数群的非平凡上同调不变量是现代研究的一个活跃领域，而对于次数大于 3 的情形，目前已知的不变量寥寥无几。

在第一章中，我们完整描述了函子 I^n 的 Witt 不变量和上同调不变量，将其表示为基本不变量的组合；这些基本不变量的行为类似于除幂，其构造关键依赖于 Grothendieck-Witt环上的 λ运算。我们还研究了这些不变量在各种运算（如乘积或相似变换）下的性质。

第二章专门讨论与带对合的代数相关的“混合”Witt环的构造：其基本思想是利用由该代数的 involution迹形式给出的 Morita等价，定义两个 ε-厄米形式的乘积。我们还在混合 Grothendieck-Witt 环上定义了 λ运算，并构造了一个仿照分裂情形的基本过滤。我们特别关注了指标 2 的代数情形下的显式计算。

我们在第三章中运用这些工具，在厄米形式的框架下仿照第一章的构造，从而构造带对合的代数的上同调不变量，并对指标 2 的情形给出更详细的结果。主要的意义在于，原则上能够定义任意高次数的非平凡不变量，尽管指标构成了一种障碍。

论文在 *LAGA (UMR7539)* - 伽利略研究所撰写，地址：
让-巴蒂斯特·克莱芒大道*99*号，*93430* 维勒塔讷兹