ZMP-HH/22-17

G-等变弦网构造

ADRIEN DELAZZER MEUNIER, CHRISTOPH SCHWEIGERT, MATTHIAS TRAUBE

摘要。我们基于一个 G-分次球面融合范畴，构造了一个用于 G-等变三维拓扑场论的 (2,1) 维部分的弦网模型。在这一构造中，我们引入了托勒密群胚的 G-等变推广。我们计算了相应的圆柱范畴，并证明该模型与预期一致，与 G-等变 Turaev-Viro 理论密切相关。

arXiv:2304.00106v1 [math.QA] 31 Mar 2023

目录

1. 引言 2 1.1. 杂项记号 3 2. 范畴论预备知识 3 2.1. 球面融合范畴 3 2.2. 图形演算 5 2.3. G-范畴 7 3. 一次扩展的 G-等变 HTQFT 11 4. G-等变托勒密群胚 13 5. 裸弦网空间与圆柱范畴 19 5.1. 曲面的向量空间 19 5.2. 圆柱范畴 28 6. G-等变弦网 30 6.1. G-等变弦网空间的构造 30 6.2. G-弦网空间的计算 31 附录 A. 定理 4.9 的证明 42 参考文献 43

谨以此文纪念 Krzysztof Gawe̜dzki，并钦佩他在数学和物理学领域工作所展现的深度与广度。他开创了量子场论中的高阶结构研究，并特别运用等变结构和轨形构造，获得了许多精彩见解 [FGK88][GR04][GSW11]。

日期：2023年4月4日。

1. 引言

弦网起源于物理学，用于描述物质的拓扑相[LW05]。后来， [KJ11] 对弦网给出了数学表述。其思想是考虑一个由嵌入曲面的图生成的向量空间，并用来自某个球面融合范畴的数据进行标记。关系由该范畴中的图形演算给出，并在曲面上局部地加以考察。按照 [Wal06] 的意义，这可以理解为一种以生成元与关系表述的拓扑场论实例。

利用生成元与关系来描述（3,2,1）-余边双范畴 [BDSPV15], in [Goo18][Bar22] ，人们证明了弦网构造 [KJ11] 可以扩展为一个一次扩展的三维 TQFT，并且弦网 TQFT 等价于一次扩展的 Turaev-Viro TQFT [Ben10] [Bal10a] [Bal10b]。

一个自然的问题是，对于任意有限群 G，这种等价能否扩展到 G-等变情形。要回答这个问题，需要处理若干不同的问题。文献 [HBFL16], 定义了带有 G-丛的曲面上的 Levin-Wen 模型的一个版本。然而，并未按照文献 [KJ11], 的思路，对 G-等变弦网给出严格的数学表述。如果存在一种适用于曲面（可能带边界）的 G-等变弦网构造，那么接下来就应将其与 Turaev-Viro 构造的 G-等变版本进行比较。文献 [Tur10], 定义了流形上带有 G-丛的 TQFT，并称之为同伦量子场论（HTQFT）。文献 [TV12][TV20]给出了一种以 G-分次球面融合范畴为输入的（一次扩展）Turaev-Viro HTQFT 构造。因此，等变弦网构造有一个自然的候选对象可供比较。

本文为紧致曲面上的 G-等变弦网给出了数学定义，这些曲面允许具有非空边界。作为代数输入，我们需要一个 G-分次球面融合范畴 C。此外，我们证明，我们的构造确实重现了 [SW20] 中所定义的一次扩展高拓扑量子场论的 (2, 1) 部分。我们证明，在适当的 G-配边双范畴中，该构造在对象上的取值等价于 C 的 G-中心。此外，我们能够根据纯代数数据计算曲面上的弦网空间；具体而言，我们将在第 6.2.3 节证明，曲面上的弦网空间同 G-中心中的某个同态空间同构。将我们的弦网构造与 [TV20] 的 Turaev-Viro 理论进行比较颇为微妙，因为正如 [SW20，备注 2.4], 中所述，出于文中解释的原因，我们用双范畴语言表述构造，并采用相关但略有不同的几何输入。我们的假设使我们能够计算圆柱范畴，而不必将其作为公设，参见备注 5.17。

不过，扩展到三维配边超出了本文的范围。由于 [BDSPV15] 的结果不适用于 G- 等变 HTQFT，因此，这样的扩展将需要不同于 [Goo18] 中所采用的方法。

从应用的角度来看，我们的构造或许有助于构造轨道有理共形理论（RCFT）中的关联函数。关于如何借助三维 TQFT 构造（轨形）RCFT 中关联函数的工作，见一系列论文 [FFRS06, FRS05, FRS04b, FRS04a, FRS02]。鉴于弦网与三维 TQFT 密切相关， [SY21] 提出了一种弦网

构造，可用于构造基于 Cardy体代数场内容的闭RCFT关联函数。随后，该构造被推广到具有固定开闭场内容的任意开闭RCFT（见 [Tra22] ），以及具有缺陷的任意开闭RCFT（见 [FSY21]）。利用本文给出的弦网构造，似乎可以得到一种与先前构造非常相似的轨形关联函数构造。

本文结构如下。第 2 节回顾球面融合范畴以及 G-分次范畴的一些事实。特别地，我们在命题 2.3 中给出了 G-分次球面融合范畴的 G-中心的 G-交叉的显式表达式。第 3 节回顾一次扩展的 G-等变 HTQFT，并阐释我们对等变配边双范畴的定义。第 4、5、6 节是本文的主要部分。第 4 节引入了托勒密群胚的 G- 标记版本，这是我们进行弦网构造的核心技术工具。本节的主要结果是定理 4.9，我们证明 G- 增强的 Ptolemy 复形继承了普通 Ptolemy 复形的连通且单连通性质。第 5 节利用 G-Ptolemy 群胚，最终阐述 G-等变弦网空间的构造，并证明它确实是一次扩展 HTQFT 的 (2, 1)部分。第 6 节计算圆柱、裤子曲面以及带有三个边界分支的二亏格曲面的弦网空间。借此，我们将看到弦网构造的 HTQFT 结构如何导出 G-中心中的 G-交叉和幺半积。随后，高亏格计算将把等变弦网与等变Turaev-Viro HTQFT 联系起来。

1.1. 一些记号。我们固定一些将在全文中使用的记号。首先， $\mathbb{K}$ 表示一个特征为零的代数闭域，G 表示一个有限群，BG 表示其分类空间，它是一个 K(G,1) 型的 Eilenberg–MacLane 空间。

对于小范畴 C，其对象集合记为 C_0，态射集合记为 C_1。

给定一个图 Γ，其顶点集和边集分别记为 V(Γ) 和 E(Γ)。与顶点 v 相接的半边集合记为 H(v)。给定一个曲面 Σ 和一个嵌入图 $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$， $\Gamma^{[2]} := \Sigma \backslash \Gamma$ 的连通分支称为 Γ的二维面。若图 Γ 带有定向，则其有向边集合记为 $E^{or}(\Gamma)$。此外，带有定向的边 e 将用粗体符号表示，即 $\mathbf{e} := (e, or)$。同一条边取相反定向时，则在其上方加一横线，记为 $\mathbf{e} := (e, -or)$。若一个图的顶点和边均为有限个，则称其为有限图。

致谢：作者感谢 Yang Yang 和 Theo Johnson-Freyd 富有成效的讨论。CS 和 MT 受德国研究基金会（DFG）项目 SCHW1162/6-1 资助；此外，CS 还获得德国研究基金会“德国卓越战略”框架下的 EXC 2121“量子宇宙”项目（项目编号：390833306）资助。

2. 范畴论预备知识

2.1. 球面融合范畴。我们将专门研究球面融合范畴。为方便读者，现回顾一些定义和事实。相关陈述的证明

可在许多资料中找到，详尽的教材式论述见于 [EGNO10]。

本文中的范畴 C 总是赋值于有限维 $\mathbb{K}$向量空间的对称幺半范畴，并且是阿贝尔范畴。在这种情况下，我们称之为 $\mathbb{K}$-线性范畴。由于我们从一开始就固定了基域，因此只称其为线性范畴。如果存在双线性函子 $\otimes : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 以及一个单位对象 $\mathbb{I}$ in C，并配备通常的结合约束和单位约束，则称线性范畴为幺半范畴。不失一般性，我们可以假设幺半范畴是严格的，也就是说，以下对象相同：$\mathbb{I} \otimes c = c = c \otimes \mathbb{I}$ 以及 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$。在这些严格性条件下，结合约束和单位约束变得平凡。

此外，我们假设范畴是有限半单的。也就是说，简单对象的同构类构成一个有限集合；我们为其选取一组代表元 $I(\mathsf{C})$，其中包含幺半单位。每个对象都可分解为简单对象的有限直和，并且 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) \simeq \mathbb{K}$。满足这些性质的范畴称为融合范畴。

此外，如果对任意对象 $c \in \mathsf{C}$，都存在一个对象 c^*（分别为 ${}^*c$）及若干态射，则称幺半范畴具有右（分别为左）对偶

$$\mathrm{ev}_c : c^* \otimes c \to \mathbb{I}, \qquad \mathrm{coev}_c : \mathbb{I} \to c \otimes c^* \tag{2.1}$$

对于右对偶，

$$\widetilde{\mathrm{ev}}_c : c \otimes {}^*c \to \mathbb{I}, \qquad \widetilde{\mathrm{coev}}_c : \mathbb{I} \to {}^*c \otimes c \tag{2.2}$$

对于左对偶。求值态射和余求值态射必须满足蛇形恒等式

$$(\mathrm{Id}_c \otimes \mathrm{ev}_c) \circ (\mathrm{coev}_c \otimes \mathrm{Id}_c) = \mathrm{Id}_c, \qquad (\widetilde{\mathrm{ev}}_c \otimes \mathrm{Id}_c) \circ (\mathrm{Id}_c \otimes \widetilde{\mathrm{coev}}_c) = \mathrm{Id}_c \tag{2.3}$$

如果每个对象都有左对偶和右对偶，则称该范畴为刚性范畴。刚性范畴上的枢轴结构是一个幺半自然同构 $\pi : \mathrm{Id}_{\bullet} \Rightarrow (\bullet)^{**}$。与幺半结构类似，若枢轴结构存在，我们可以假设它是严格的 [NS07, Theorem 2.2]，即 $\pi_c = \mathrm{Id}_c$。在具有（严格）枢轴结构的范畴中，也就是说，在枢轴范畴中，我们可以构造态射 $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(c)$ 的左迹和右迹

$$\mathrm{tr}_\ell(f) := \mathrm{ev}_{c^*} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{c^*}) \circ \mathrm{coev}_c, \qquad \mathrm{tr}_r(f) := \widetilde{\mathrm{ev}}_{{}^*c} \circ (\mathrm{Id}_{{}^*c} \otimes f) \circ \widetilde{\mathrm{coev}}_c\,. \tag{2.4}$$

如果枢轴范畴中的左迹和右迹相等，则称该范畴为球形范畴。注意，在球形范畴中可以将左对偶和右对偶视为相同，我们将默认采用这种处理。由于球形范畴中的左迹和右迹相等，我们只称其为迹，并在记号中不再区分左迹和右迹。

在球形范畴中，我们可以为 $c \in \mathsf{C}_0$ 关联其维数 $d_c \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) \simeq \mathbb{K}$，定义为

$$d_c := \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_c) \quad . \tag{2.5}$$

整个范畴的整体维数为

$$D := \sum_{i \in I(\mathscr{C})} d_i^2 \tag{2.6}$$

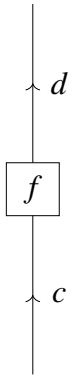
其不为零 [EGNO10，定理 7.21。12]。

2.2. 图形演算。球面融合范畴的图形演算在弦网构造中发挥着重要作用。我们简要讨论它，以确定一些约定。对于 $c \in C_0$，我们将 Id_c 表示为平面中的一条直线，自下而上定向，并标记为 c。类似地，Id_{c^*} 由一条标记为 c、自上而下定向的直线表示

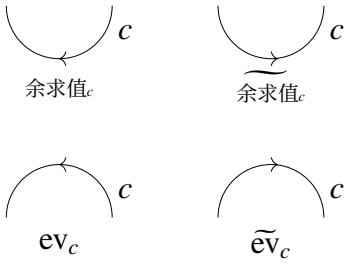
$\mathrm{Id}_c =$ 

$\mathrm{Id}_{c^*} =$ 

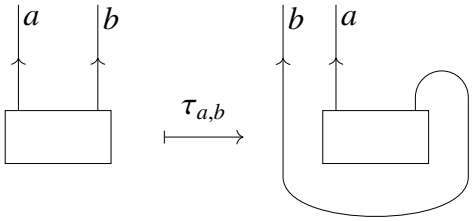
态射 $c \xrightarrow{f} d$ 绘制为



态射的复合就是弦图的简单串接。幺半积通过从左向右绘制定向的弦来表示。求值态射和余求值态射由定向的帽和杯给出



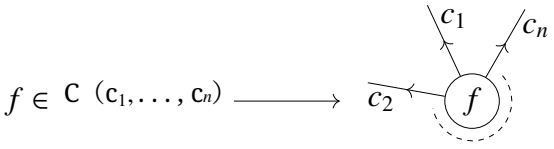
在定向曲面的弦网构造中，事实证明，将顶点直接用范畴中的态射标记并不方便；更合适的做法是使用向量空间中的元素来标记顶点。该向量空间平等地处理输入与输出，并且只取决于输入与输出的循环序。这个向量空间通过直极限构造。对于这个极限，我们需要对不同的同态空间进行识别；对于严格幺半对偶的 C，这类识别映射通过典范同构 τ_{ab} $\mathscr{C}_{\mathbb{I}}$，$\otimes_{,}$: Ho m $\tilde{\tilde{(}}$ a b) $\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}'b \otimes a)$ for all a, b $\in C_0$



枢纽性意味着 $\tau_{a,b} \circ \tau_{b,a} = \mathrm{Id}$。因此，我们不再分别考察每个态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, c_1 \otimes \cdots \otimes c_n)$，而是取该图表上的极限

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, c_{i+1} \otimes \cdots \otimes c_{i-1} \otimes c_i) \xrightarrow{\tau_{c_{i+1},c_{i+2}\otimes\cdots\otimes c_i}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, c_{i+2} \otimes \cdots \otimes c_i \otimes c_{i+1}) \longrightarrow$$

为便于后续使用，我们将极限记为 $\mathrm{C}(c_1, \cdots, c_n)$。元素 $f \in \mathrm{C}(c_1, \cdots, c_n)$ 将用圆形券而非方框表示，因为它仅取决于 $c_1, \cdots, c_n$ 的循环序。

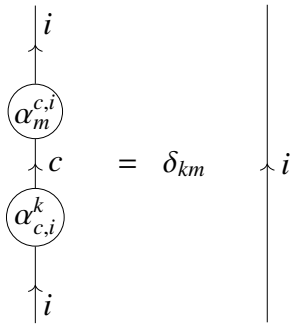


极限中的元素存在一个部分复合映射，它由以下映射诱导：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, a \otimes b) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, b^* \otimes c) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, a \otimes c) \\ (f, g) &\mapsto (\mathrm{Id}_a \otimes \widetilde{\mathrm{ev}}_b \otimes \mathrm{Id}_c) \circ (f \otimes g) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Th复合仍将通过在弦图中连接弦来表示。

利用半单性，对于任意 $c \in \mathrm{C}_0$，我们可以在 $\mathrm{C}(c, i^*)$ 中选取一组基 $\{\alpha^k_{c,i}\}_k$，并在 $\mathrm{C}(c^*, i)$ 中选取一组基 $\{\alpha^{c^*}_{m,i}\}_m$，其中 $i \in \mathrm{I}(\mathrm{C})$，且



因此

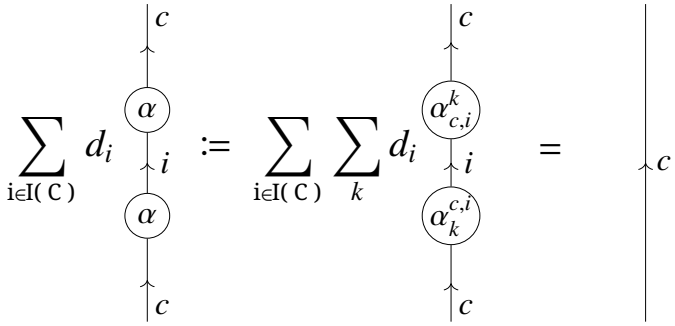
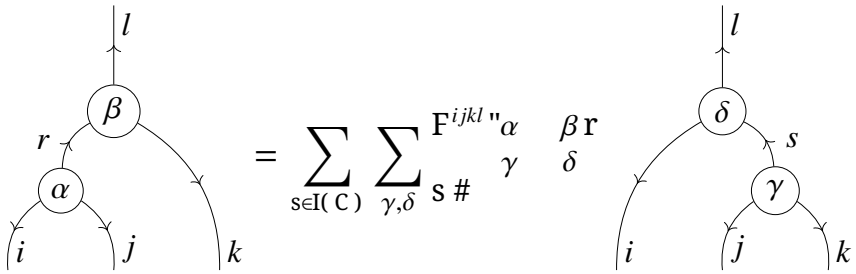


图1. 半单范畴 C 中的完备性关系。

其中 $d_i = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_i)$。最后，我们讨论 C 中的 6j 符号。在幺半对偶有限半单范畴中，通过在三点耦合空间中选取基，向量空间 C (i, j, k, l) 有两组不同的基。一组源自分解 C (i, j, k, l) $\simeq \mathrm{L}_r$ C (i, j, r) $\otimes$ C (r*, k, l)，另一组则对应于拆分 C (i, j, k, l) $\simeq \mathrm{L}_s$ C (j, k, s) $\otimes$ C (s*, l, i)。这两组基之间的变换矩阵的元素就是 6j 符号



6j 符号满足通常的五边形关系。

2.3. G-范畴。本节回顾与 G-分次范畴及可能带有 G-作用的范畴相关的定义。读者可在文献中找到关于 G-范畴的详细论述，例如 [Tur10，附录 5][TV13] 及其中引用的文献。除了回顾定义外，我们还在命题 2.3 中给出 G-分次范畴的 G- 中心上的 G- 交叉的一种替代定义。虽然我们的定义与 [TV13]，中的定义等价，但我们仍然引入它，因为它能让后文关于圆柱上弦网的讨论更加清晰。

在本节中，C 是一个 $\mathbb{K}$-线性严格幺半范畴。G 表示一个范畴，其对象为 G 的元素，且只有恒等态射。G 中的乘法赋予 G 一个严格幺半结构。

定义 2.1。若幺半线性范畴 C 可分解为两两不交的满 $\mathbb{K}$-线性子范畴的直和 $\bigoplus_{g\in G} \mathrm{C}_g$，使得

i）任意对象 $c \in \mathrm{C}$ 都可分解为有限直和 $c = c_{g_1} \oplus \cdots \oplus c_{g_n}$，其中 $c_{g_i} \in \mathrm{C}_{g_i}$。ii）对于 $c \in \mathrm{C}_g$、$d \in \mathrm{C}_h$，有 $c \otimes d \in \mathrm{C}_{gh}$。iii）对于 $c \in \mathrm{C}_g$ 和 $d \in \mathrm{C}$，$\mathrm{Hom}(c, d) = 0$，其中 g、h。iv）$\mathbb{I} \in \mathrm{C}_e$。

子范畴 C_g 称为 C 的齐次分量。对应于单位元 $e \in G$ 的分量 C_e 称为单位分量。存在显然的遗忘函子 $U: C \to C$，它只是遗忘 G-分次。若其底层线性幺半范畴 C 是刚性的/幺半对偶的/球形的，则 G-分次范畴 C 也是刚性的/幺半对偶的/球形的。若其底层范畴是融合范畴，且每个齐次分量至少包含一个简单对象，则称其为融合范畴。在 G-分次融合范畴中，简单对象同构类的任意一组代表对象都可分解为不交并 $I = \bigsqcup_{g\in G} I_g$，其中 I_g 是 C_g 中简单对象同构类的集合。因此，简单对象总是齐次的。

在 G-分次范畴中，群 G 充当指标集，但目前并不作用于该范畴。G-作用将以 G-交叉的形式出现。对于幺半范畴 D，回顾一下，$\mathrm{Aut}_\otimes(D)$ 是这样一个范畴：其对象为幺半等价 $F: D \xrightarrow{\simeq} D$，态射为幺半自然同构。函子复合赋予它严格幺半结构，其幺半单位是恒等函子。

定义 2.2. G-交叉范畴是一个 G-分次范畴 C，连同一个强幺半函子 $\rho: G \to \mathrm{Aut}_\otimes(C)$，使得 $\rho_h(\overline{C_g}) \subset C_{h^{-1}gh}$。函子 ρ 称为 G-交叉。

对于任意 $g \in G$，ρ_g 是一个强幺半函子。此外，由于 ρ 是强幺半的，G-交叉范畴带有自然同构 $\left\{\eta_{h,g}(\bullet): \rho_g\rho_h(\bullet) \xrightarrow{\simeq} \rho_{hg}(\bullet)\right\}^{\simeq}$ 以及 $\eta_0(\bullet): \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to \rho_e(\bullet)$。这些映射满足通常的相容图表，可见 [TV13，第 3]节。

正如有时需要为给定的幺半范畴赋予编织这一附加结构一样，G-交叉范畴也存在一种有意义的编织概念。由于对于非阿贝尔群 G，来自 C 的不同齐次分量的 c、d 一般满足 $\mathrm{Hom}(c\otimes d, d\otimes c) = 0$，因此这种编织不可能是底层幺半范畴上的普通编织。然而，对于 $d \in C_g$ 且 $c \in C_h$，$\mathrm{Hom}(c\otimes d, d\otimes\rho_g(c))$ 有可能非零，因为 $c \otimes d$ 和 $d \otimes \rho_g(c) \in C_{hg}$。因此，G-编织是一个自然同构

$$\left\{\beta_{c,d}: c\otimes d \to d\otimes\rho_g(c)\right\} \tag{2.8}$$

它定义在齐次元素 $d \in C_g$、$c \in C_h$ 上，其中 g、h $\in G$，并线性延拓至 C 的所有对象。该自然同构必须满足三个相容图表，相关内容请参见 [TV13，第 3] 节。

对于一个 G-分次范畴，我们将其 G-中心记为 $Z_G(C)$，它被定义为相对于 C_e 的相对中心。更明确地说，G-中心的对象是对象对 $(c,\gamma_{c,\bullet})$，其中 $c \in C$，且 γ_c 是对单位分量 C_e 中对象的相对半编织，即：

$$\gamma_{c,\bullet} = \{\gamma_{c,X}: c\otimes X \to X\otimes c\}_{X\in C_e} \tag{2.9}$$

是满足通常六边形关系的自然同构。态射 $(c,\gamma_c) \to (d,\gamma_d)$ 是 C 中满足 $(\mathrm{Id}_X\otimes f)\circ\gamma_{c,X} = \gamma_{d,X}\circ(f\otimes\mathrm{Id}_X)$ 的态射 $f: c \to d$。显然，G-中心是一个 G-分次范畴。与非分次情形类似，对于 C 为 G-分次球面融合范畴的情况，其中心具有 G-模范畴的结构。

当然，对于 G-分次范畴，也存在其 Drinfeld 中心 Z(C)。G-中心可能与 Drinfeld 中心非常不同。然而，二者通过轨形化 [GNN09, 定理 3.5] 联系起来。由于我们不需要 $\mathsf{Z}_G(\mathsf{C})$ 上完整的 G-模结构，因此我们简单地参考 [TV13] 对 G-模范畴的定义。我们只需 $\mathsf{Z}_G(\mathsf{C})$ 是 G-交叉的，并明确给出 G-交叉。

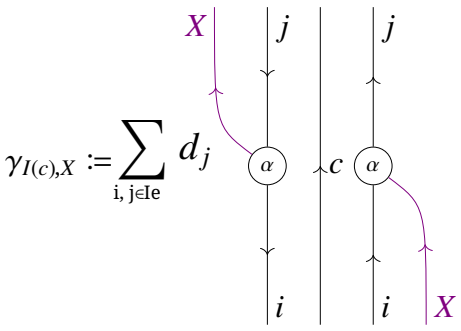
与非等变情形类似，存在一个伴随

$$I : \mathscr{C} \rightleftharpoons \mathsf{Z}_G(\mathscr{C}) : F, \qquad I \dashv F \tag{2.10}$$

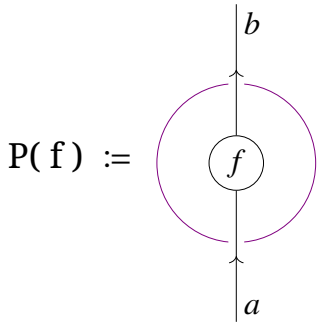
其中 F 是遗忘函子，其伴随函子 I 是归纳函子，定义在对象上

$$I(c) := \bigoplus_{i \in I_e} i^* \otimes c \otimes i\,, \tag{2.11}$$

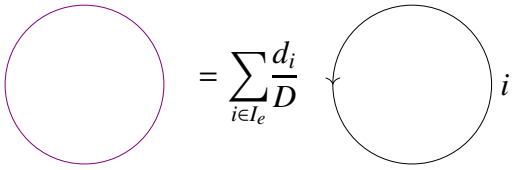
其中 I_e 是 C_e中的简单对象集合。它在态射上的作用是显然的。为了使对象 I(c) 具有分次中心中元素的结构，我们为其赋予标准的非交叉半编织



其中 $X \in C_e$。（回想图1，α 成对出现意味着对对偶基求和。）我们将继续使用这一记法，否则图中往往会出现过多的符号。由于与半编织相容，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}_G(\mathscr{C})}(a, b) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ 是一个真子空间。（这里我们滥用记法，将 $a \in \mathsf{Z}_G(\mathsf{C})$ 视为 C 中的底层对象。）一个幂等元 $P : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$，满足 $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}_G(\mathscr{C})}(a, b)$，定义如下：

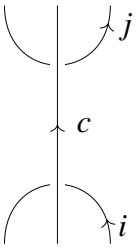


其中我们在 C 中引入了遮蔽圆



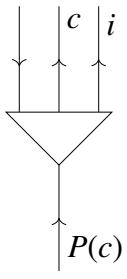
遮蔽圆与标记为 a 和 b 的线的交叉分别对应于 a 和 b 的半编织。证明 P 是一个幂等元，与非分次情形完全相同（参见 [KJB10]）。[GNN09] 证明了当 C 为 G- 融合范畴时，$Z_G(C)$ 上存在 G- 交叉。[TV13], 给出了 $Z_G(C)$ 上 G- 交叉的显式表达式，其中 C 只需是非奇异的[1], 幺半对偶 G-分次范畴。我们只考虑球面 G-融合范畴，它们自动是非奇异的。为定义 G-交叉，我们推广 (2.11)，并考虑函子 $I^h : Z_G(C) \to C$，其在对象上的作用如下：$I^h(c) = \bigoplus_{i \in I_h} i^* \otimes c \otimes i$。它在态射上的作用显而易见。我们希望由 I^h 在 $Z_G(C)$ 上构造一个 G-交叉。为此，我们考虑幂等元

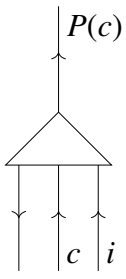
$$\pi_c^h : I^h(c) \longrightarrow I^h(c)$$

$$\pi_c^h := \sum_{i,j \in I_h} \frac{d_i}{D}$$


其中我们再次使用半编织 $\gamma_{c,i^* \otimes j}$ 来编织这些线束。[GNN09] 中证明了，对于所有 $h \in G$，都有 $\sum_{i \in I_e} d_i^2 = \sum_{U \in I_h} d_U^2$。利用这一点，可以很容易地证明 π_c 确实是一个幂等元。其像记为 $P(c) := \mathrm{Im}(\pi_c)$，限制映射和包含映射如下图所示

$$e_c : P(c) \longmapsto I^h(c) \qquad r_c : I^h(c) \longmapsto P(c)$$

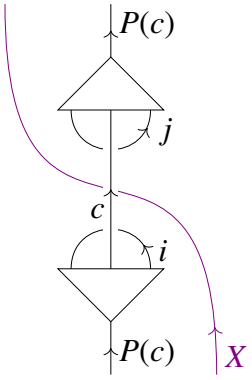
$$e_c := \sum_{i \in I_h}$$


$$r_c := \sum_{i \in I_h}$$


像 P(c) 具有半编织

[1]参见 [TV13，第 4 节1]，了解非奇异范畴的定义。

$$\gamma_{P(c),X} := \sum_{i,j\in Ih} \frac{d_i}{D}$$



其中 X ∈C $_e$，我们再次使用半编织 $\gamma_{c,\ i\otimes X\otimes j^*}$。因此，(P(c), $\gamma_{P(c),\ \bullet}$) ∈Z_G(C)$_{h^{-1}gh}$。由此，我们可以为 Z_G(C) 给出一个显式的 G-交叉。

命题 2.3。这些映射

$$\begin{aligned} \phi_h : Z_G(\mathscr{C})_g &\to Z_G(\mathscr{C})_{h^{-1}gh} \\ c &\mapsto (P(c), \gamma_{P(c),\bullet}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

在 Z_G(C) 上构成一个 G-交叉。

除张量因子的重新排列外，证明与 [TV13 第 4], 节中给出的证明相同，因此这里略去。

备注 2.4。我们定义的 G-交叉与[TV13]中给出的 G-交叉并不相同。不过，在半单情形下，不难证明，赋予这两种不同 G-交叉的中心作为 G-交叉范畴是等价的。我们的定义受到圆柱上的弦网构造的启发（参见第 6.2.1 节）。

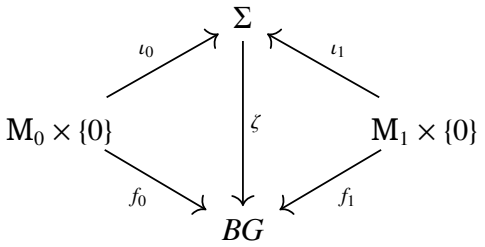
3. 一次扩展的G-等变 HTQFT

现代的一次扩展HTQFT表述采用双范畴和 2-函子的语言。 [SW20]给出了一个合适的对称幺半双范畴 G$\mathcal{B}ord$(n, n − 1, n − 2)，用于描述一次扩展的 G-等变配边。出于技术原因，我们需要对这个双范畴稍作修改，并将指向 BG 的带基点映射作为对象。为方便起见，我们还将在以下定义中为一维流形选取基点。正如我们将在备注 3.2 中解释的那样，这些选择并非真正必不可少

下文中，如果对流形 M 的每个连通分支都选定了一个特殊基点，则称 M 是带基点的。带基点流形 M $_f$ → N 之间的映射是保持基点的连续映射。此外，我们一次性选定一个基点 ⋆ ∈ BG。

定义 3.1。对称幺元双范畴 G$\mathcal{B}ord_\star$(3,2,1) 定义如下：

(0) G$\mathcal{B}ord_\star$(3, 2, 1) 的对象是对 (M, f)，其中 M 是带基点、闭合且定向的 1 维流形，f : M → (BG, ⋆) 是带基点映射。(1) 1-态射是对 (Σ, ζ) : (M_0, f_0) → (M_1, f_1)，由一个带边界的定向紧致领圈 2 维流形 Σ、保持定向的微分同胚 $\iota_0 : M_0 \times (-1, 0] \to \Sigma_0$, $\iota_1 : M_1 \times [0, 1) \to \Sigma_1$ 以及映射 ζ : Σ → BG 组成，且图表



交换。这里 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 是 Σ的领圈。注意，没有为Σ选取基点。

(2) 一个 2-态射 $(W, \phi) : (\Sigma_0, \zeta_0) \Rightarrow (\Sigma_1, \zeta_1)$ in $G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 是一个三维、带领圈的紧致定向配边 $W : \Sigma_0 \to \Sigma_1$，连同一个映射 $\phi : W \to BG$，满足映入 BG 的映射之间的相容图表。

关于 $G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 中 2-态射、态射的复合以及对称幺半结构的精确定义，请参阅 [SW20，定义 2.3]。$G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 中的 1-态射也称为 G-曲面。

备注 3.2. 由于 BG 是道路连通的，$G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 与 $G\mathcal{B}ord(3, 2, 1)$ 之间存在对称幺半双范畴的等价。该等价由遗忘函子 $G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1) \to G\mathcal{B}ord(3, 2, 1)$ 给出，它在对象上遗忘基点。由于任意映射 $S^1 \to BG$ 都同伦等价于一个保基点映射，因此遗忘函子在对象上是本质满射。注意，对于 $G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 和 $G\mathcal{B}ord(3, 2, 1)$，1-态射和 2-态射完全相同，因此这两个双范畴作为对称幺半双范畴是等价的。

定义 3.3. 取值于对称幺半双范畴 S 的三维一次扩展G-等变HTQFT，是一个对称幺半2-函子

$$Z : G\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1) \to \mathcal{S} \tag{3.1}$$

此外还要求，对于一个2-态射 (W, ϕ)，Z 仅取决于映射 $\phi : W \to BG$ 相对于边界的同伦类。

在我们对 G-等变配边双范畴和一次扩展的 G-等变高拓扑量子场论的定义中，带基点映射到分类空间是数据的一部分，并且所有相容图都严格交换。同伦不变性内置于函子 Z 的性质之中。在 [TV20] 中，作者给出了另一种表述。他们构造了一个范畴 $G\mathcal{C}ob$，其对象是带基点曲面，并配备了到分类空间的带基点映射的同伦类。$G\mathcal{C}ob$ 中的态射是三维配边，并且同样配备了到 BG 的带基点映射的同伦类。此时，到 BG 的映射图只需在同伦意义下交换。两种表述之间的比较颇为微妙。我们选择了双范畴框架，因为我们希望利用弦网构造一次扩展高拓扑量子场论的 (2, 1)部分。双范畴是进行此类构造的自然代数框架。

尽管一次扩展HTQFT的定义是针对以任意对称幺半双范畴为目标而表述的，但我们将只以双模范畴 $\mathcal{B}iMod_{\mathbb{K}}$作为目标。这个对称幺半双范畴是标准的 [Bor94, 命题 7.8。2], 关于其 $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$-富集版本，另见 [BDSPV15, 定义 2。8]

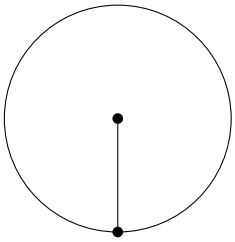


图2。理想三角剖分中一种可能的弧配置。沿边切开后，便得到一个真正的三角形。

其对象是线性范畴。1-态射 $\mathsf{C} \xrightarrow{F} \mathsf{D}$ 是一个线性函子

$$\mathscr{D}^{op} \boxtimes \mathscr{C} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}, \tag{3.2}$$

其中 $\mathsf{D}^{op}\boxtimes\mathsf{C}$ 的对象是配对 $(d, c) \in \mathsf{D}^{op}\times\mathsf{C}$，且 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{op}\boxtimes\mathscr{C}}((d, c), (d', c')) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{op}}(d, d') \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, c')$。1-态射的另一种称呼是双模，或预函子。2-态射就是线性函子之间的自然变换。富集张量积赋予 $\mathcal{B}i\mathcal{M}od_{\mathbb{K}}$ 对称幺半结构。给定预函子 $\mathsf{F} : \mathsf{E}^{op}\boxtimes\mathsf{D} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$ 和 $\mathsf{G} : \mathsf{D}^{op}\boxtimes\mathsf{C} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$，复合 $\mathsf{F}\circ\mathsf{G} : \mathsf{E}^{op}\boxtimes\mathsf{C} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$ 由余端给出

$$(F \circ G)(e, c) := \int^{d\in\mathscr{D}} F(e, d) \otimes G(d, c) \quad . \tag{3.3}$$

4. G-等变托勒密群胚

本节介绍曲面上的 G-三角剖分，它是对曲面理想三角剖分的扩展。主要结果是定理 4.9。借助该定理，我们可以将任意 G-曲面视为组合对象。

我们考虑一个定向的紧致光滑曲面 Σ，它有 r 个 > 0 边界分支。我们在每个边界连通分支上选取一个特选点，并用 $\delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_r\}$ 表示所选点的集合。此外，我们固定一个任意有限的标记点集 $\mathsf{M} \subset \Sigma\backslash\partial\Sigma$。若 Σ 是圆盘，则 M 必须至少包含一个元素；其他情况下，M 可以为空。

定义 4.1. [Pen12，定义 1.19] $(\Sigma, \delta, \mathsf{M})$ 的一个理想三角剖分T 由一族 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 嵌入弧的同伦类组成，这些弧的端点属于 $\delta \cup \mathsf{M}$，并满足：对于每个边界分支 b，其相对于 $\delta \cup \mathsf{M}$ 的同伦类包含在 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 中，且 $\Sigma - \cup_{i\in I}\alpha_i$ 是若干三角形的不交并。

理想三角剖分的对偶图是一个单三价胖图，其顶点上的循环序由对偶三角形边界的定向诱导。当然，三角形边界的定向由 Σ 的定向诱导。

理想三角剖分$\mathsf{T}^{[1]}$ 的1-骨架是一个嵌入图的同伦类；当提到理想三角剖分的顶点、边和面时，我们始终指T 的顶点、边和面$\mathsf{T}^{[1]}$。理想三角剖分通常并非三角剖分，例如，我们可能会遇到图2所示的气泡图。

众所周知，任意两个曲面三角剖分都可以通过有限次 $2-2$ 和 $3-1$ 帕赫纳变换相互转化。尽管理想

三角剖分并不是三角剖分，但对于理想三角剖分，也存在 2 – 2-帕赫纳变换的类似变换。

定义 4.2. 设 f ∈ E(T)，且 f 与 T的两个不同二维面相邻，同时 f 不是边界边。沿 f 翻转即为图 3 所示的操作。

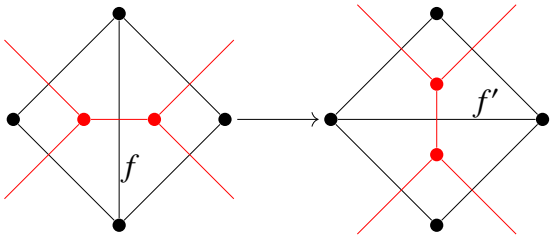


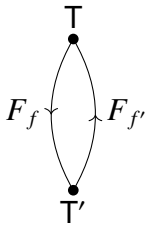
图 3. 沿边 f 翻转。红线表示对偶带状图。

与三角剖分不同，理想三角剖分不存在 3 – 1 操作，因为我们使用的是固定的顶点集。更准确地说，存在一个二维 CW 复形 P (Σ, δ, M)，即 Ptolemy 复形，用以描述 (Σ, δ, M) 上的理想三角剖分。与 Lego-Teichm¨uller 复形一样，Ptolemy 复形是额外的结构 omΣ，使我们能够以组合方式处理曲面 Σ。

定义 4.3。P (Σ, δ, M) 是一个二维 CW 复形，其

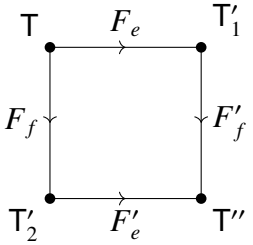
0-胞腔：P (Σ, δ, M) 的顶点是理想三角剖分。1-胞腔：对于图 3 中的任意翻转 F_e : T → T′，两个顶点之间都有一条边。二维胞腔：二维胞腔分为三种类型：

P1：对于满足翻转 F_f 存在的 f ∈ E(T)，有如下二维胞腔



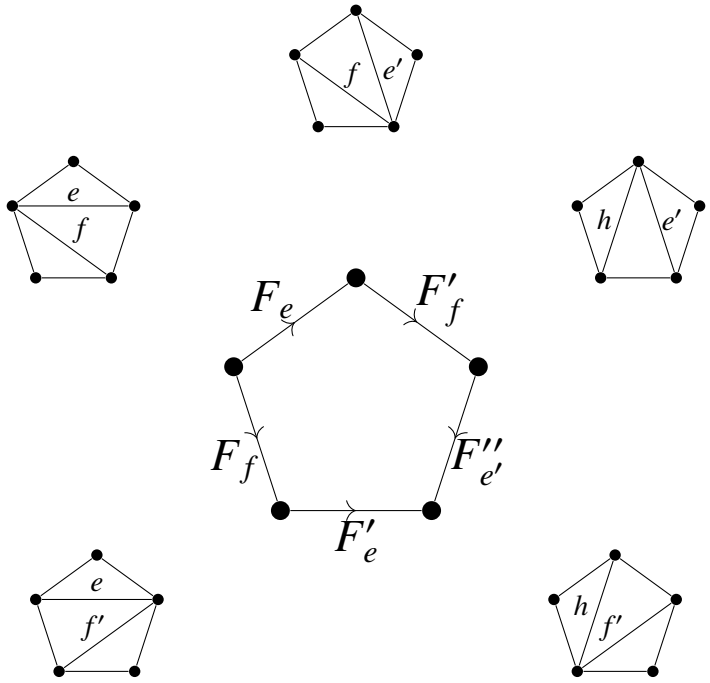
边 f′ 是翻转中出现的新边（见图 3）。

P2：对于任意两条端点互不相交的边 e, f ∈ E(T)，若 F_e和 F_f 均有定义，则翻转可交换，即存在一个四边形 2-胞腔



翻转 F'_e、F'_f 分别是在边 e、f 上进行的翻转，这些边现在分别属于新的理想三角剖分 T'_1 和 T'_2。

P3：给定两条边 e、f ∈ E(T)，它们恰好共享一个端点，且 F_e、F_f存在，则有一个五边形 2-胞腔



定理 4.4。 [Pen12，推论 V.1.1。2] Ptolemy复形 P (Σ, δ, M) 是连通且单连通的。

连通性是一个经典结果，可以用纯粹的组合的方法来证明。然而，证明 P (Σ, δ, M) 是单连通的，需要用到相当多的泰希¨米勒理论。关键在于，理想三角剖分或粗图给出了带装饰的泰希¨米勒空间 T (Σ, δ, M) 的一个胞腔分解，而该空间是可缩的。在 [Pen12，第 5 章，定义 1.1] 中，托勒密群胚被定义为 T (Σ, δ, M) 的路径群胚，因此它就是托勒密复形的基本群胚。

到目前为止，我们讨论的是仅涉及带理想三角剖分的曲面的经典情形。然而，在本文中，我们需要一个还能描述曲面上 G-丛的 Ptolemy 复形。因此，我们引入 G-托勒密复形的概念，并证明它仍然是连通且单连通的。从理念上说，这是由 ζ: Σ → BG 确定的 G-丛的整体单值化函子的离散实现。

定义 4.5。在 (Σ, δ, M) 上的 G-标记理想三角剖分，是一个嵌入的有向图 T ↪ Σ 的同伦类，并配有一个映射 g : E^{or}(T) → G，使得

i）忘记定向后，T 的底层图是（Σ， δ， M）的理想三角剖分。ii）映射 g 满足 g(e) = g(e)$^{-1}$。iii）如果有向边 e_1, e_2, e_3 构成T 中一个三角形的逆时针有向边界，则在 G 中成立以下关系

$$g(\mathbf{e}_1)\, g(\mathbf{e}_2)\, g(\mathbf{e}_3) = e \quad . \tag{4.1}$$

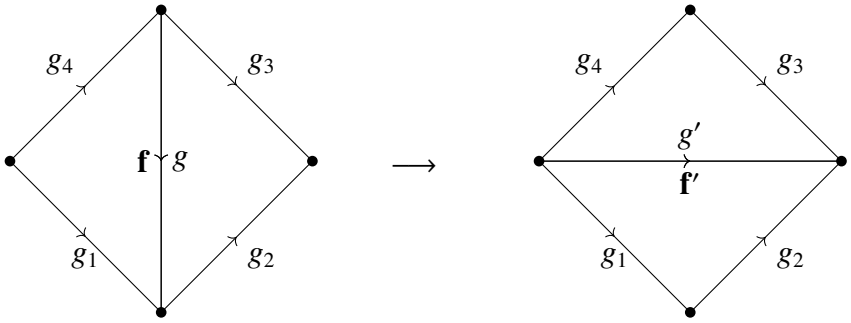


图4. 根据循环性条件 (4.1)，G-标记 g 和 g′ 由 G-标记 g_1, g_2, g_3, g_4唯一确定。

映射 g 使用有向边定义。由于 ii）中的条件给出了边的一种定向上的映射，因此唯一确定了该边在相反定向下的映射。

定义 4.6. 给定 G-三角剖分 T 的一条边 f，若它与两个不同的二维胞腔相邻，则沿 f 的 G-翻转由图4所示的变换给出。

备注 4.7. 执行 G-翻转的边 f 不能是边界边。

G-三角剖分是一种组合工具，用于描述双范畴 $G\mathcal{B}ord_\star(3,2,1)$ 中的 1-态射。在 $G\mathcal{B}ord_\star(3,2,1)$ 中，所有三层数据都配有一个到 BG 的映射。等价地，可以将 $G\mathcal{B}ord_\star(3,2,1)$ 视为配边 2-范畴，其对象为配有 G-主丛数据的配边。为精确说明这一点，回顾一下，对于拓扑空间 M、N，映射群胚 Π(M, N) 的对象是连续映射 $M \xrightarrow{f} N$，而态射 $f \to g$ 是相对于 $M \times \{0,1\}$的同伦 $f \sim_h g$ 的同伦类。对于 $N = BG$（G 的分类空间），存在一个典范的群胚等价

$$\Pi(M, BG) \simeq \mathcal{PB}un_G(M)\,, \tag{4.2}$$

其中$\mathcal{PB}un_G(M)$ 是 M 上 G-主丛的群胚。通过选取一个基点 $\bullet \in M$，并将对象限制为从 M 到 BG 的带基点映射，同时将态射保留为无基点同伦的等价类，可得到一个等价的群胚$\Pi_\star(M, BG)$。因此，从带基点映射 $f : (M, \bullet) \to (BG, \star)$ 可知，$G\mathcal{B}ord_\star(3,2,1)$ 的对象可以描述为带有固定 G-主丛的圆的并。连通对象 $((M, \bullet), f)$ 的底流形与圆 S^1 微分同胚，其分类映射确定了一个同态 $f_* : \pi_1(S^1, \bullet) \simeq \mathbb{Z} \to G \simeq \pi_1(BG, \star)$，即 G 中的一个元素 $f_*(1) =: g$。从这个意义上说，我们可以将 $G\mathcal{B}ord_\star(M, BG)$ 的对象等同于由群元素标记的有限多个圆。

设 $(\Sigma, \zeta) : ((M_0, \bullet), f_0) \to ((M_1, \bullet), f_1)$。曲面 Σ 本身没有指定基点；然而，如果 $* \in M_0$ 是某个连通分支的基点，则有 $\zeta(\iota_0(*)) = f_0(*) = \star$。因此，Σ 边界上所有基点的像都会被 ζ 映射到 BG 中的基点。

对于一个 1-态射 $(\Sigma, \zeta) : ((M_0, m_0), f_0) \to ((M_1, m_1), f_1)$ 的数据，我们希望将 Σ 的一个 G-三角剖分与之关联。首先选取一个有限点集 $K \subset \Sigma \backslash \partial\Sigma$；当 Σ 同胚于圆盘时，K 必须非空。令 $\delta := \iota_0(m_0) \cup \iota_1(m_1) \in \partial\Sigma$ 为基点的像，并令 T 为一个以 $\delta \cup K$ 为基点的理想三角剖分。令

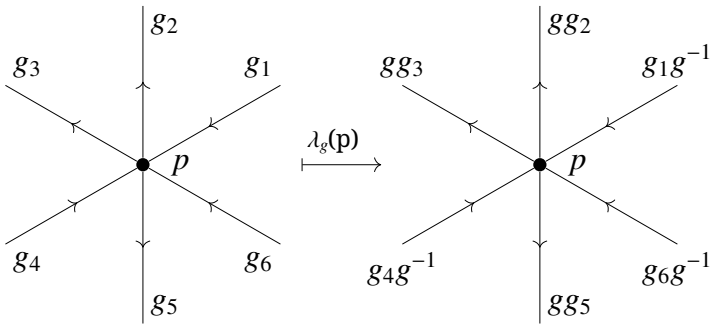
$\mathrm{b} \subset \partial\Sigma$ 为边界的一个连通分支。假设映射到 b 的圆标记为 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$。根据构造，$\zeta_*(\mathrm{b}) \in \pi_1(\mathrm{BG}, \star)$ 是与 g 对应的环。因此，T 中边界边的 G-标记由该 1-态射的源对象和目标对象唯一确定。由于 Σ 中所有基点的像都映射到 $\star$，非边界边 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}^{or}(\mathrm{T})$（其两个端点均在 δ 中）的像是 $\pi_1(\mathrm{BG}, \star)$ 中的一个有向环，因而确定一个群元素 $\mathrm{g_e}$。其他所有边的 G-着色在某些规范变换下确定。令 $\mathrm{p} = (\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_r)$ 为 T 中一条端点位于 δ的有向边路径。路径 p 映射为 BG 中一个以 $\star$ 为基点的环。因此，存在 $\mathrm{g}_p \in \mathrm{G}$，使得 $\mathrm{Im}(\zeta|_p) \simeq \mathrm{g}_p$ 成立。我们可以假设路径的首边和末边是仅有的端点位于 δ 的边。对 p 中的每条边 $\mathrm{e}_i \in$，赋予一个群元素 g_i，使得

$$g_1 g_2 \cdots g_r = g_p \quad . \tag{4.3}$$

这种着色并非唯一。我们可以改变 $\mathrm{g}_i \mapsto \mathrm{g}_i\mathrm{h}$ 和 $\mathrm{g}_{i+1} \mapsto \mathrm{h}^{-1}\mathrm{g}_{i+1}$，而新的颜色仍满足 (4.3)。这类变换称为规范变换。若有向边的群元素标记满足 (4.3) 对所有端点位于 δ 中的可能边路径均成立，则称其与 ζ 相容。所有与 ζ 相容的T 的 G-着色集合记为 $\mathrm{Col}_G(\mathrm{T})$。规范变换于是是一个映射

$$\lambda : M \to \mathrm{Maps}\left(G, \mathrm{End}\left(\mathrm{Col}_G(\mathrm{T})\right)\right), \tag{4.4}$$

其中，对于 $\mathrm{p} \in \mathrm{M}$ 和 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，$\lambda_g(\mathrm{p})$ 的作用为



G 中的乘法赋予规范变换集合群结构，使规范群在 $\mathrm{Col}_G(\mathrm{T})$ 上传递作用。总而言之，对于 $\mathrm{G}\mathcal{B}ord_\star(3,2,1)$ 中任意一个 1-态射 (Σ, ζ)，以及 Σ 的任意理想三角剖分T，以基点的像为基点，并取一个可能为空的集合 M，我们都得到一个 G-三角剖分，且其在规范变换意义下唯一。

定义 4.8. 设 $(\Sigma, \zeta) : (\mathrm{M}_0, \mathrm{f}_0) \to (\mathrm{M}_1, \mathrm{f}_0)$ 是 $\mathrm{G}\mathcal{B}ord_\star(3, 2, 1)$ 中的 1-态射，且 $\mathrm{M} \subset \Sigma\backslash\partial\Sigma$ 为有限点集。G-等变托勒密群胚 $\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$ 是一个二维CW复形，定义如下。

0-胞腔：$\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$ 的顶点是由 ζ 诱导的（理想）G-三角剖分。1-胞腔：对于任意 G-翻转和规范变-换，$\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$ 中都有一条边 $\mathrm{T} \to \mathrm{T}'$。二维胞腔：由于 G-翻转的 G-标记是唯一确定的，我们将托勒密群胚的关系 P1- P3 提升到 $\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$ 中。由此得到三个关系 GP1,

GP2 和 GP3。此外，还有一个混合关系以及两个纯规范关系。

GP4：设 e 是 G-三角剖分的一条边，v 是与 e 相邻的一个顶点。沿 e 进行翻转与在 v 处进行规范变换可交换。也就是说，存在一个四边形 2-胞腔

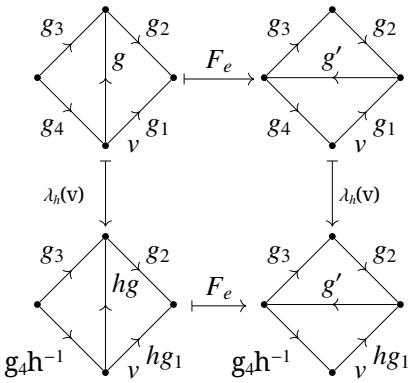
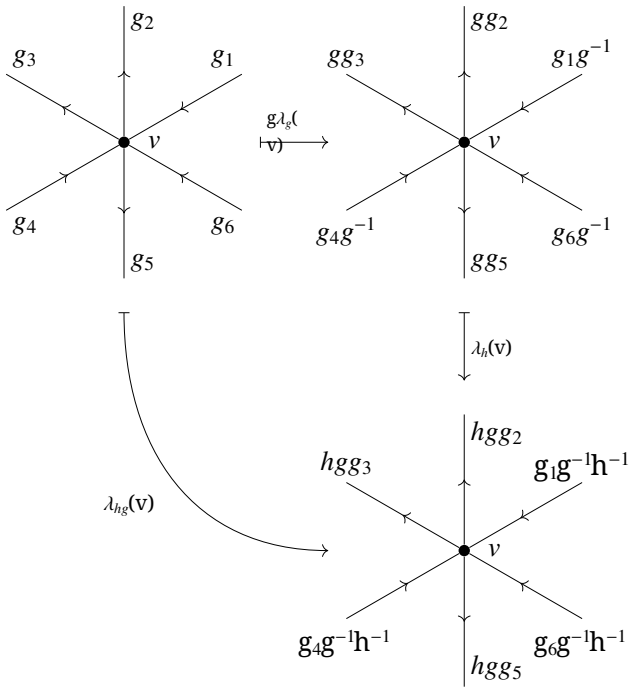


图5。翻转与规范变换可交换

GP5：不同顶点处的规范变换可交换，即对于 G-三角剖分的顶点 v、u，存在分别对应于 $\lambda(\mathrm{v})\lambda(\mathrm{u}) = \lambda(\mathrm{u})\lambda(\mathrm{v})$的四边形 2-胞腔。

GP6：最后，我们添加三角形2-胞腔 $\lambda_g(\mathrm{v})\cdot\lambda_h(\mathrm{v}) = \lambda_{gh}(\mathrm{v})$，以实现规范作用。



定理 4.9。定义 4.8 中的 G-等变托勒密群胚 $\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$ 是连通且单连通的。

定理 4.9 的证明留待附录给出，因为它并未为本文的主要结果提供更深入的见解。

5. 裸弦网空间与圆柱范畴

5.1. 曲面的向量空间。我们已经为构造 1-态射的 G-等变弦网空间做好了准备。基本思路是从 (Σ, ζ) 上的理想 G-三角剖分T 出发，仅允许与T横截的图，并据此定义相对于该剖分的弦网空间。随后，我们通过取商，逐步实现圆盘中图形演算对 C 的规则，其中圆盘相对于T具有不同的位置关系。由此，对于任意 G-三角剖分T，都将得到弦网空间 $\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}{}_{\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta)$。为得到一个仅依赖于 (Σ, ζ) 的空间，我们为 $\mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta)$ 的每条边定义弦网之间的一个同构。这些映射满足 GP1-6，从而得到一个向量空间的射影系统。取该系统的极限，最终便得到弦网空间。

乍看之下，这似乎是定义 G-曲面上弦网空间的一种过于繁琐的方法。在通常的弦网方法中，我们只需考虑所有由 D 着色的嵌入图，其中 D 是任意球面融合范畴。然而，似乎无法判断 Σ 上任意一个由 C 着色的嵌入图是否与 Σ 上的 G-结构相容。只有当图足够精细时，这似乎才有可能；也就是说，该图至少与 Σ 的某个 CW-分解的 1-骨架同位。换言之，在等变情形下，弦网图需要能够反映 Σ 的整体拓扑。我们不采用任意 CW-分解，而是使用理想三角剖分，因为这样我们可以完全掌控其中涉及的组合结构。闲言少叙，现在我们来详细说明这一构造。

我们任意选取一个有限但固定的点集 $\mathrm{M} \subset \Sigma \backslash \partial\Sigma$。注意，除了圆盘的情形外，M 可以为空。

定义 5.1. 设 Γ 是 Σ 中任意一个嵌入的有限有向图，且 C 是一个 G-分次融合范畴。Γ 的 C-着色由两个函数构成。首先

$$c : E^{\mathrm{or}}(\Gamma) \to \mathscr{C}_0^{\mathrm{hom}} \tag{5.1}$$

将齐次对象赋给每条有向边 $(\mathrm{e}, \mathrm{or})$，使得 $\mathrm{c}(\mathrm{e}) = \mathrm{c}(\mathrm{e})^*$。第二个函数是一个映射

$$\begin{aligned} &\phi : V(\Gamma) \to \mathscr{C}_1 \\ &v \mapsto \phi_v \in \mathscr{C}\left(\bigotimes_{\mathbf{e} \in H(v)} c(\mathbf{e})^{\epsilon_{\mathbf{e}}}\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，若 e 的方向背离 v，则 $\varrho_{\mathbf{e}} = 1$；若其方向朝向 v，则 $\varrho_{\mathbf{e}} = -1$。c 中对象的负指数表示其对偶。

特别地，通过分次映射 $\mathrm{p} : \mathrm{C}_0^{\mathrm{hom}} \to \mathrm{G}$，我们得到 Γ 的一个 G-标记 g_Γ，它满足 $\mathrm{g}_\Gamma(\mathrm{e}) = \mathrm{g}_\Gamma(\mathrm{e})^{-1}$。图及其 G-标记应与 G-三角剖分相容，具体定义如下（参见定义 5.3）。

定义 5.2. 设 $\mathsf{T} \in \mathrm{P}_G(\Sigma, \zeta, \mathrm{M})$。若嵌入图 $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$ 与T完全横截，即 $\mathrm{V}(\mathsf{T}) \cap \Gamma = \mathsf{T} \cap \mathrm{V}(\Gamma) = \emptyset$，且T中任何不在边界上的边都至少与 Γ的一条边相交，则称该嵌入图 $\Gamma \hookrightarrow \Sigma$ 与T完全横截。此外，所有交点都是横截交。

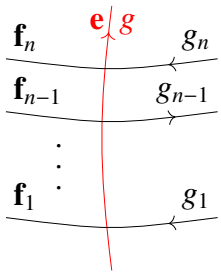


图6。在彩色版本中，橙色线表示带有 G-标记 g 的T的边。黑色线是边 (Γ,c)

与理想三角剖分横截的图，一个显而易见的例子是其对偶三价粗图。设 Γ 为一个 C-着色图，它与 G-三角剖分T底层的理想三角剖分完全横截。选取T同伦类中的一个代表。对于一条边 $\mathbf{e} \in \mathrm{E}^{\mathrm{or}}(\mathrm{T})$，考虑与 e 相交的边 $\{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n\}$，如图6所示。边 $\mathbf{f}_i$ 的 G-颜色为 g_i。e 的定向在相交边的集合上诱导出一个线性序。根据 $\mathbf{f}_i$的定向，横截交可以是正交或负交；例如，图6中的交点 $\mathbf{e} \cap \mathbf{f}_1$ 为正，而 $\mathbf{e} \cap \mathbf{f}_{n-1}$ 为负。线性序使我们能够在考虑定向的情况下，将各条 $\mathbf{f}_i$的 G-标记相乘。对于图6中的图，这给出

$$G \ni m_{\mathbf{e}} = g_1 \cdots g_{n-1}^{-1} g_n \quad . \tag{5.3}$$

容易检查出，$m_{\mathbf{e}}$ 是良定义的，即与 T 的同伦类中所选代表元无关。

定义 5.3. 设 Γ 是一个 C-着色图，它与底层理想三角剖分 G-三角剖分 T 完全横截。那么，若 Γ 与 T 横截，Γ 就是 G-横截的。

$$m_{\mathbf{e}} = g(\mathbf{e}) \tag{5.4}$$

对 T 的任意边均成立。

如果上下文中 G-三角剖分是明确的，我们有时就简称嵌入图为 G-横截的。

我们研究的是带边界曲面，因此弦网空间将取决于边界条件或边界值的选择。

D定义 5.4. 1）曲面 (Σ, ζ) 的一个边界值是有限多个点的不交并 $\mathrm{B} \in \partial\Sigma$，以及一个映射 $\mathrm{B} : \mathrm{B} \to \mathrm{C}_0^{hom}$。2）G-横截图 Γ 在 Σ 上的边界值定义为图与 $\partial\Sigma$ 的交点 B_Γ 的不交并，以及映射 $\mathrm{B} : \mathrm{B}_\Gamma \to \mathrm{C}_0^{hom}$，该映射将一个交点映射到其对应边的 C-颜色。

备注 5.5. 注意，在没有映射 ζ 的情况下，也可以完全相同地给出曲面边界值的定义。ζ 进入定义的唯一作用，是限制可能的边界值，因为边的 G-标记必须与 ζ 相容。

定义 5.6. 令 $\mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}{}_G{}_\mathrm{T}(\Sigma, \zeta, \mathrm{M}; \mathrm{B})$ 为由所有与 T 横截且边界值为 B 的图自由生成的 $\mathbb{K}$-向量空间。

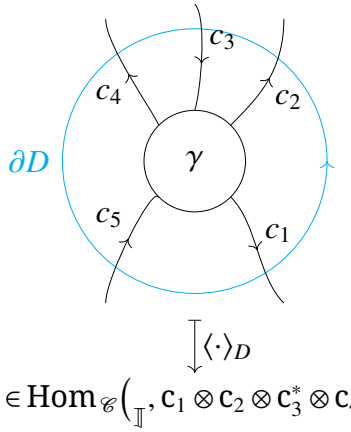


图7. γ 是 G-横截图 Γ中位于 D 内部的子图。

备注 5.7. 向量空间 $\mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; B)$ 非常庞大，例如，具有相同 C-颜色的同痕图目前仍被视为不同的图。只有在要求 C 的图形演算在圆盘上局部成立之后，才会得到同痕不变性。

首先，我们考虑嵌入闭圆盘 $D \hookrightarrow \Sigma\backslash\mathsf{T}$。给定一个 G-横截图 Γ，要求圆盘 D 的边界与 Γ 的边横截相交，且不得与 Γ的顶点 Γ 相交。和往常一样，我们从与 ∂D 相交的边的 C-颜色得到一个循环对象集合 $\{c_i\}$，以及一个线性求值映射 [KJ11，定理 2。3]

$$\langle\bullet\rangle_D : \mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; \mathbf{B}) \to \mathscr{C}\left(\bigotimes_i c_i^{\epsilon_i}\right) \quad . \tag{5.5}$$

该映射定义在满足相对于 D 的横截性要求的向量上。符号约定可从图7中明显看出。

定义 5.8. 设 $D \hookrightarrow \Sigma\backslash\mathsf{T}$ 是一个嵌入圆盘。若元素 $\Gamma := \sum_i x_i \Gamma_i \in \mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; \mathsf{T})$ 满足以下条件，则称其相对于 D 为零：

- 所有 Γ_i 均与 D 横截。
- $\Gamma_i|_{\Sigma\backslash D} = \Gamma_j|_{\Sigma\backslash D}$ 对所有 i, j
- $\langle\Gamma\rangle_D = 0$。

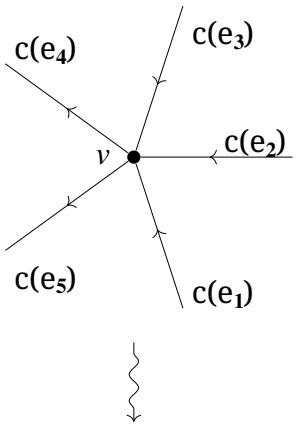
T-圆盘零图 $\mathrm{NGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; B)$ 的向量空间，是由所有可能的圆盘 $D \hookrightarrow \Sigma\backslash\mathsf{T}$对应的所有零图张成的 $\mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; B)$ 子空间。

$\mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; B)$ 对 T-圆盘零图 $\mathrm{NGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; B)$ 的向量空间取商，记为

$$\mathrm{SN}''_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) := \frac{\mathrm{VGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; \mathbf{B})}{\mathrm{NGraph}^{\mathscr{C}}_{G\mathsf{T}}(\Sigma, \zeta, M; \mathbf{B})} \quad . \tag{5.6}$$

备注 5.9. 由于 C 的 G-分次，$\mathrm{SN}''_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, M; B)$ 中的非零向量在其所有顶点处都满足循环性条件。也就是说，给定 $v \in V(\Gamma)$，其关联边 $\{e_i\} = E^{\mathrm{or}}(v)$ 的 C-颜色必须满足

$$p\left(c\left(\mathbf{e}_1\right)^{\epsilon_1}\right) \cdots p\left(c\left(\mathbf{e}_n^{\epsilon_n}\right)\right) = e \quad . \tag{5.7}$$



$$p(c(e_1)^*)p(c(e_2)^*)p(c(e_3)^*)p(c(e_4))p(c(e_5)) = e$$

图8. 顶点处颜色的循环性条件。

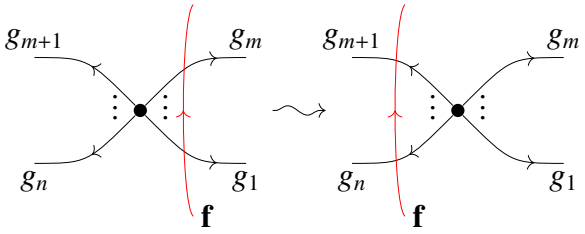


图9. 两个弦网 Γ, Γ′ 在此处所示邻域之外相同。该操作是将弦网顶点穿过T的一条边f进行同胚变形。

关联边的定向涉及一种符号约定，可由图8轻易推得，与图7中所用的约定类似。

空间 $SN''_{T,\mathscr{C}}(\Sigma, M; B)$ 仅部分实现了将C的图形演算推广到Σ的目标。到目前为止，我们只在T的二维面内施加了局部关系。为了在 Σ 上的所有位置定义局部关系，我们进一步取商。这样便可在与理想三角剖分T的边相交的圆盘内建立关系。我们引入一种等价关系，以实现将 Γ 的顶点穿过T的一条边进行同胚变形。

定义5.10. 设 $\Gamma, \Gamma' \in SN''_{T,\mathscr{C}}(\Sigma, M; B)$，则 $\Gamma \sim_{\mathbf{f}} \Gamma'$ 当且仅当这两个图由图9所示的操作关联。

注意，由于循环性条件 (5.7)，关系 $\sim_{\mathbf{f}}$ 是良定义的。我们将 $SN''_{T,\mathscr{C}}(\Sigma, M; B)$ 对 T 的所有边 f 的 $\sim_{\mathbf{f}}$ 取商，并将其记为

$$SN'_{T,\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.8}$$

在 $SN'_{T,\mathscr{C}}(\Sigma, M; B)$ 中，所有不与标记点的像相交的圆盘内都满足局部关系。因此，弦网的边界点不能移动。

最后，这些图仍然取决于所选的 G-三角剖分T。接下来我们消除这种依赖。设 Δ 是T 的一个二维面，其逆时针有向边界为 $\{e_1,e_2,e_3\}$，G-着色为 $\{g_1,g_2,g_3\}$。二维面 Δ 可能包含一条边界边，我们假设它是 e_1。我们将 B_Δ 记为限制在

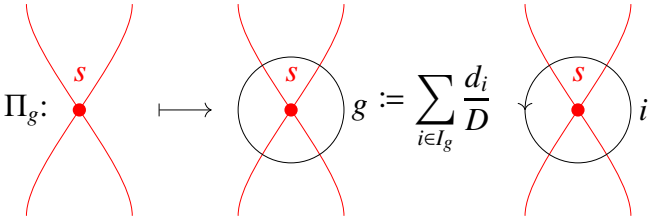


图1 映射 Π_g 对理想三角剖分中顶点 s 的作用。

该边界分支上的边界值。因此，对于含有边界边的二维面，我们考虑向量空间

$$\mathrm{Hom}_\Delta(\mathscr{C}) := \bigoplus_{i\in I_{g_2},\, j\in I_{g_3}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, \mathbf{B}_\Delta \otimes j \otimes k)\,. \tag{5.9}$$

对于所有其他二维面，我们设

$$\mathrm{Hom}_\Delta(\mathscr{C}) := \bigoplus_{i\in I_{g_1}, j\in I_{g_2}, k\in I_{g_3}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, i \otimes j \otimes k)\,. \tag{5.10}$$

并定义一个向量空间

$$H^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma; \mathbf{B}) := \bigotimes_{\Delta\in \mathsf{T}^{[2]}} \mathrm{Hom}_\Delta(\mathscr{C})\,, \tag{5.11}$$

其中 $\mathsf{T}^{[2]}$ 表示 T 的二维面集合。

引理 5.11. 存在一个同构

$$\Psi : H^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma; \mathbf{B}) \to \mathrm{SN}'_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.12}$$

它将元素 $\mathrm{N}_{f\in\pi_0(\Delta)}\phi_f \in \mathrm{H}_{\mathscr{C}\mathsf{T}}(\Sigma; \mathrm{B})$ 映射到对偶带状图 Γ 的等价类，该图的边界值为 $\mathrm{B}_\Gamma = \mathrm{B}$，且其顶点由映射$\phi_f$着色。

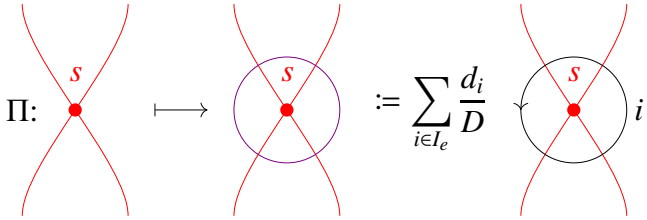
除其他内容外，引理 5.11 还说明，$\mathrm{SN}'_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, \mathrm{M}; \mathrm{B})$ 有一个基，该基由满足条件 $\partial\Sigma$ 的粗图等价类构成，这些粗图与T对偶。基元素的内部边用简单对象着色，而其顶点则通过映射 Ψ 用相应同态空间 $\mathrm{H}^{\mathscr{C}}{}_{\mathsf{T}}(\Sigma; \mathrm{B})$ 中的基元素着色。我们称之为T的胖图基。引理 5.11 的证明与[KJ11, 引理 5.3] 的证明非常相似，因此将其改编到当前情形就留给读者完成。

我们几乎得到了一个合理的弦网空间定义。剩下的问题是，弦网的边无法穿过标记点 M。可以通过标记点遮蔽来处理这一问题，其定义为投影到 $\mathrm{SN}'_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma; \mathrm{B})$ 的一个子空间。令

$$\Pi_g : \mathrm{SN}'_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \to \mathrm{SN}'_{\mathsf{T},\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.13}$$

为按图 10 在 M 的邻域内作用的映射。

对于单位元 $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$，我们直接写作 $\Pi := \Pi_e$，并用没有群标签的紫色圆圈表示



容易看出， $\Pi^2 = \Pi$，我们令

$$\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) := \mathrm{Im}(\Pi)\,. \tag{5.14}$$

利用图1的完备性关系，遮蔽圆使我们能够将弦网的边穿过标记点。不过，如果这条边带有非平凡 G-颜色，例如图 11 中的 $c \in C_g$，遮蔽圆的颜色可能会发生变化

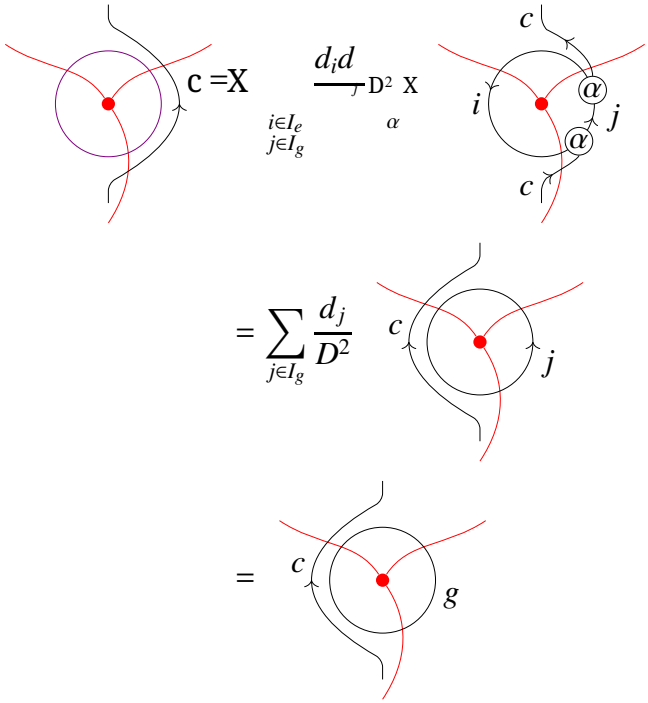


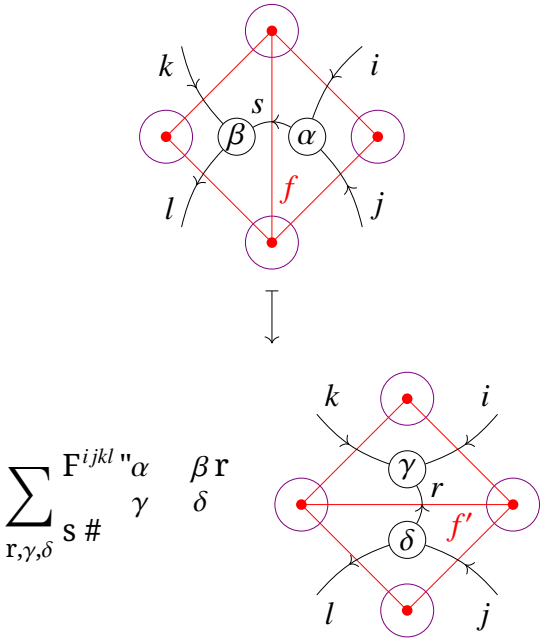
图 11. 我们可以利用 C 中的完备性，将一条弦网边穿过 T 的一个顶点。不过，遮蔽圆的颜色可能会发生变化。

所得弦网仍属于 Π 的像，这一点可以通过再次使用完备性关系轻松验证。

向量空间 $\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}{}_{T}(\Sigma, M; B)$ 显然取决于 G-三角剖分的选择。令 $(T, g) \xrightarrow{f} (T', g')$ 为一个 G-翻转，其中两个三角形的边均不是边界边。我们定义相应的线性映射

$$F_{\mathsf{T},\mathsf{T}'} : \mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \to \mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}'}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.15}$$

作为由胖图基的元素定义的映射的线性延拓



$$\sum_{r,\gamma,\delta} F^{ijkl}{}_{\substack{s\,\#\\ \gamma}}{}^{\substack{\alpha\quad\beta\,r\\ \delta}}$$

其中，该映射在图中以红色显示的边 f 的开邻域之外为恒等映射。若存在边界边，我们首先使用完备性关系，将终止于 $\partial\Sigma$ 的 C 颜色边分解为简单着色边之和，然后执行与前一种情况相同的操作，最后再应用完备性关系的逆变换。

对于规范变换 $\mathsf{T}\xrightarrow{\lambda_g(v)}\mathsf{T}'$，我们关联映射 $G_g(v):\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma,M;B)\to\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}'}(\Sigma,M;B)$，即在 G-三角剖分 T 的内部顶点 v 周围添加一个 I_g 颜色的遮蔽圆。

定理 5.12。存在一个函子

$$\begin{aligned}\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}:\Pi_1\left(\mathscr{P}^G(\Sigma,\zeta)\right)&\to \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}\\ (\mathsf{T},g)&\mapsto \mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma,M;\mathbf{B})\\ \left[\mathsf{T}\xrightarrow{F_e}\mathsf{T}'\right]&\mapsto F_{\mathsf{T},\mathsf{T}'}\\ \left[\mathsf{T}\xrightarrow{\lambda_g(v)}\mathsf{T}'\right]&\mapsto G_g(v)\end{aligned}\tag{5.16}$$

证明。线性映射 $F_{\mathsf{T},\mathsf{T}'}$、$G_g(v)$ 确实是同构。为说明第一点，注意到 $F_{\mathsf{T},\mathsf{T}'}$ 是其自身的逆映射。对于规范变换映射，这一结论源于 C 中的完备性关系。因此，我们只需验证关系 GP1-GP6 映射为线性同构之间的等价。关系 GP1 恰好表明 $F_{\mathsf{T},\mathsf{T}'}$ 是其自身的逆映射。GP2 的等价性成立，因为我们操作的是弦网中互不相交的部分，而这些操作显然可交换。接下来，GP3 映射为 6j 符号的五边形关系。关系 GP4 可利用 C 中的图形演算轻易验证。由于在不同内部顶点处添加遮蔽圆彼此可交换，关系 GP5 成立。群律 GP6 则由两次应用完备性关系得到。

□

定义 5.13。给定一个 G-曲面 (Σ, ζ)、一组标记点 M 和一个 G-分次球面融合范畴 C，基于标记点的裸弦网空间定义为

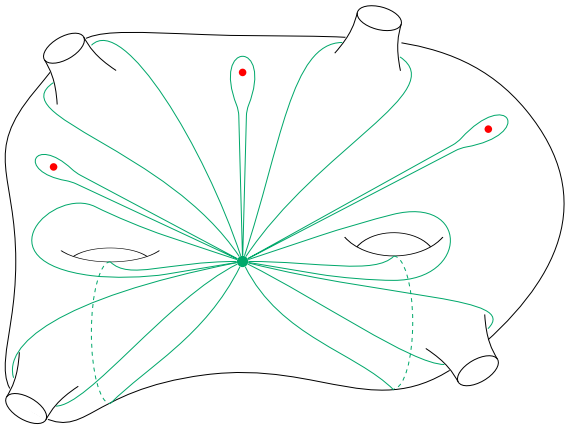
$$\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) := \varprojlim_{\Pi_1(\mathscr{P}^G(\Sigma,\zeta))} \mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.17}$$

备注 5.14。我们也可以不对该图表取极限，而改为取其余极限。所得向量空间是同构的，因为该图表只涉及线性同构。出于同样的原因，我们有一个典范同构

$$\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \cong \mathrm{SN}^{\mathscr{C}}_{\mathsf{T}}(\Sigma, M; \mathbf{B}) \tag{5.18}$$

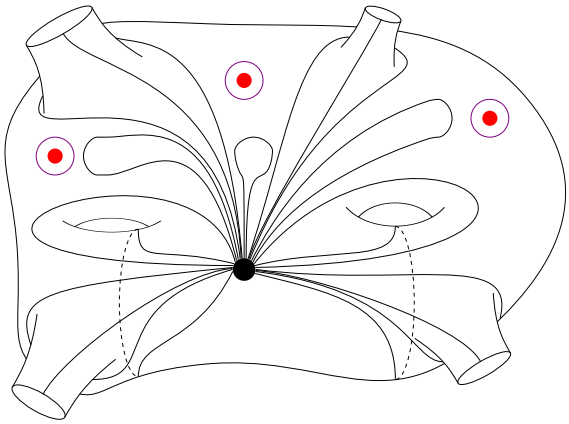
对于任意 G-三角剖分 T。

以 M 为基于标记点的裸弦网空间仅取决于 G-曲面 (Σ, ζ)、标记点集合 M 和 C，而不取决于基于 $\delta \cup \mathrm{M}$ 的 G-三角剖分的选择。集合 δ 将由一个 1-态射的输入数据唯一确定。因此，唯一剩下的任意选择就是标记点集合 M。然而，对于不同标记点选择所得到的基于标记点的裸弦网空间之间，存在一个特定同构。我们通过证明：对于所有基于标记点的弦网空间，都存在一个特定同构，将其同构于 $\mathrm{M} = \emptyset$ 的基于标记点的裸弦网空间；在圆盘的情况下，则同构于 M 为单点的基于标记点的裸弦网空间，来说明这一点。给定 M 后，我们选取一个 G-三角剖分，并由引理 5.11 得到，$\mathrm{SN}^{\mathscr{C}}(\Sigma, \mathrm{M}; \mathrm{B})$ 具有一个胖图基，并且在 M 中的元素周围附加了遮蔽圆。为了使论证更加直观，我们讨论一个带有 4 个边界分支的亏格 2 曲面 Σ 的具体情形。我们任取一点 $\star \in \Sigma \backslash \mathrm{M}$，并在 $\pi_1(\Sigma \backslash \mathrm{M}, \star)$ 中选取一组生成元

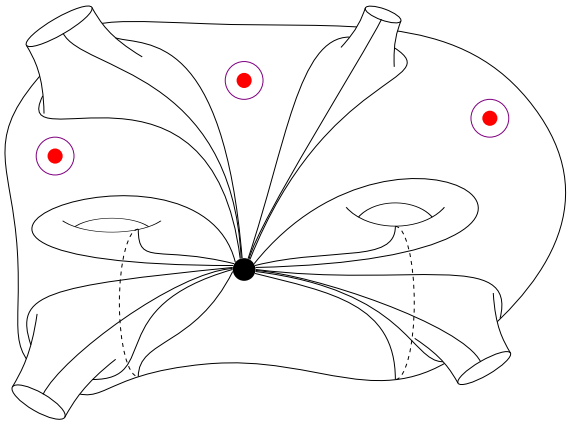


对于理想三角剖分T的对偶带状图 Γ，我们选取一棵极大树 t，并记 $\mathrm{l} := \mathrm{E}(\Gamma) - \mathrm{E}(\mathrm{t})$。由于带状图 Γ 生成 $\pi_1(\Sigma \backslash \mathrm{M}, \star)$，实际上我们可以这样选择 t：将 t 收缩为 $\star$ 后，剩余边 l 的同伦类与所选的 $\pi_1(\Sigma \backslash \mathrm{M}, \star)$ 的生成元一致。这意味着，对于任意生成元 γ，都存在一个元素 $\mathrm{l}_\gamma \in \mathrm{l}$，使得将 t 收缩为 $\star$ 后，有 $\mathrm{hl}_\gamma \mathrm{i} = \gamma$。树 t 有一个圆盘形邻域。利用该圆盘上的局部关系，我们可以将胖图基中的元素替换为支撑在收缩图上的弦网。这些弦网仍构成基于标记点的裸弦网空间的一组基。我们使用完备性关系，随后可能再进行一次规范变换

同构，将这些新的基元素映射为这样的弦网：M 的点仅被遮蔽圆包围



进一步收缩该图后，我们得到



其中，我们可以将着色限制为由简单对象进行的着色。因此，对于标记点 M_1, M_2, 的任意两种选择，通过识别基元素，我们在以$\delta \cup M_1$ 和 $\delta \cup M_2$为基点的 G-三角剖分所定义的弦网空间之间，得到一个特定同构。这些同构构成一个向量空间射影系统，我们可以取其射影极限，记为 $SN^{\mathscr{C}}(\Sigma; B)$。

定义 5.15. 向量空间 $SN^{\mathscr{C}}(\Sigma; B)$ 称为裸弦网空间。

总结一下我们的构造：首先，我们需要为带有映射 $\zeta\colon \Sigma \to BG$ 的曲面 Σ 找到一种组合替代物，以便为 Σ 中的弦网图给出一个合理的定义，使其符合 G-结构。通过使用 G-三角剖分，我们解决了这一问题。在给出依赖于给定 G-三角剖分的预弦网空间定义后，本节其余部分都致力于建立一种仅依赖于 Σ 和 ζ、而不依赖于组合模型的定义。对仅涉及同构的射影系统取极限有一个优点：每当我们要处理裸弦网空间时，只需选取自己喜欢的 G-三角剖分，并据此计算一切。第 6.2 节实际计算弦网空间时，我们将利用这一点。

备注 5.16。在理想三角剖分中允许额外的一组顶点 M，将简化第 6.1 节所述弦网空间在 G-曲面粘合下的行为描述。基于曲面边界点的 G-三角剖分集合在曲面粘合下并不保持不变，因为粘合会产生一个新的内部顶点。因此，我们从一开始就必须允许更一般的 G-三角剖分。

5.2. 圆柱范畴。由于我们想要构造函子的 (2,1)部分

$$Z : GBord_\star(3,2,1) \to BiMod_{\mathbb{K}} \tag{5.19}$$

一个具有 n 个边界分支的曲面 Σ 应被映射到一个预函子

$$Z_\Sigma : \underbrace{Cyl(\mathcal{C})^{\epsilon_1} \boxtimes \cdots \boxtimes Cyl(\mathcal{C})^{\epsilon_n}}_{n} \to Vect_{\mathbb{K}} \tag{5.20}$$

它取值于 $Cyl(C) := Z(S^1)$ 或其对偶，具体取决于边界分支的定向。例如，一个具有两个入射边界端和一个出射边界端的裤子曲面赋予 $Cyl(S^1)$ 一个幺半结构。关于一次扩张的 G-等变高拓扑量子场论如何赋予 $Cyl(S^1)$ 一个 G- braided 范畴结构的讨论，参见 [SW20]。

因此，我们需要求出弦网函子在带有额外 G-标记 g 的圆上的取值（参见第 4 节）。也就是说，我们需要计算圆柱范畴。由于在弦网构造的非等变情形中，圆范畴等价于输入范畴的 Drinfeld 中心，因此可以合理地预期，带 g 标记的圆上的等变弦网计算出 G-中心 $Z_G(C)_g$ 的 g-齐次分量。

备注 5.17. 在 [TV20] 中，通过在带边界曲面上选择一个 $Z_G(C)$-着色，将圆柱范畴选为 $Z_G(C)$。弦网构造的一个优点是，无需做出这一选择，而是可以直接计算出该范畴。所需的唯一输入是一个 G-分次球面融合范畴 C，它应当是完全扩展高维拓扑量子场论在一点上的取值。

与此同时，下面的计算也验证了我们的构造确实是合理的。

设 S^1_g 是带有 g-标记的圆。回顾一下，S^1_g 具有一个特定基点 $\star \in S^1_g$。g我们如下定义一个范畴 Cyl_g。对象是由 C -标记的带符号标记点组成的集合 $(m, c) := n(m_1^{\epsilon_1}, c_1^{\epsilon_1}), \cdots, (m^{\epsilon_N}{}_N, c^{\epsilon_N}{}_N)$o。这些点以从 ⋆ 开始沿圆的逆时针方向绕行的顺序线性排列。对象 $c^{\epsilon_i}{}_i$ 的底层 G-颜色为 $g^{\epsilon_i}{}_i$，并且我们要求

$$g_1^{\epsilon_1} \cdots g_N^{\epsilon_N} = g\ . \tag{5.21}$$

在非等变弦网构造中，圆柱范畴的态射空间定义为圆柱上的弦网空间，并带有适当的边界值。类似地，在我们的等变情形中，$\mathrm{Hom}^{\widetilde{Cyl}_g}((m, c), (n, d))$ 由弦网空间给出，其中还需指定一个到分类空间 BG 的映射。在圆上，这个映射由 g 给出。对于圆柱范畴，要求“径向”方向上的映射取单位元 $e \in G$ 是恰当的，参见图12。态射的复合由粘合圆柱并拼接弦网给出。

g 命题 5.18。令 $\mathcal{Cyl}_g$ 为 $\mathcal{Cyl}_g$ 的 Karoubi 包络。存在一个等价

$$\mathcal{Cyl}_g \simeq \mathsf{Z}_G(\mathscr{C})_g \quad . \tag{5.22}$$

g 证明。$\mathcal{Cyl}_g$ 中的一个对象是一个二元组 ((m, c), p)，其中 (m, c) 是$\mathcal{Cyl}_g$ 中的一个对象，而 p 是$\mathcal{Cyl}_g$中的一个幂等元。我们选取一个不含内部标记点的圆柱 G-三角剖分。不难看出，p 可以表示为图12中红色所示的图。

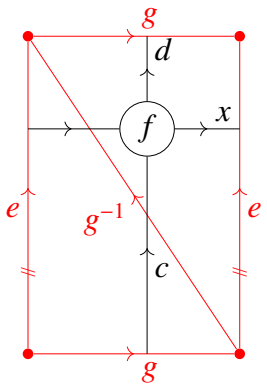


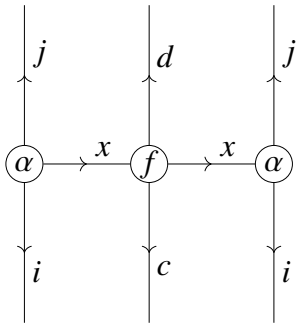
图12. 红色部分表示圆柱的一个理想三角剖分，其入边界和出边界均为 S^1_g。红色竖线沿圆柱的“径向”延伸。

其中 c, d $\in \mathsf{C}_g$ 表示对象 c、d 的带符号张量积，而 x $\in \mathsf{C}_e$。我们定义一个函子 $\mathsf{F}: \mathcal{Cyl}_g \to \mathsf{Z}_G(\mathsf{C})_g$，其在对象上的作用定义如下：

$$F: ((\mathbf{m}, \mathbf{c}), p) \longmapsto (I(c), F(p)) \tag{5.23}$$

其中 I 是归纳函子（参见 (2.11)），而 F(p) 是下图所示的幂等元：

$$\mathsf{F}(\mathsf{p}) = \mathsf{M}_{\mathsf{i},\mathsf{j}\in\mathsf{Ie}} \frac{d_i}{D}$$



其中，f 是上文给出的 p 的表示中的态射。它对态射的作用按显然的方式定义。反过来，我们定义函子 $\mathsf{K}: \mathsf{Z}_G(\mathsf{C})_g \longrightarrow \mathcal{Cyl}_g$ 映射 Z $\in \mathsf{Z}_G(\mathsf{C})_g$ 到底层对象 C_g 以及由下式给出的幂等元

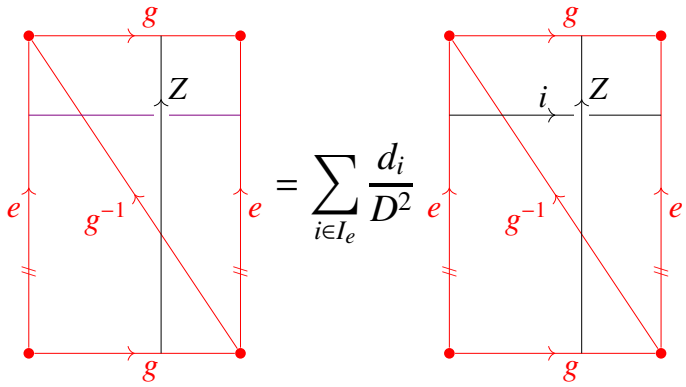
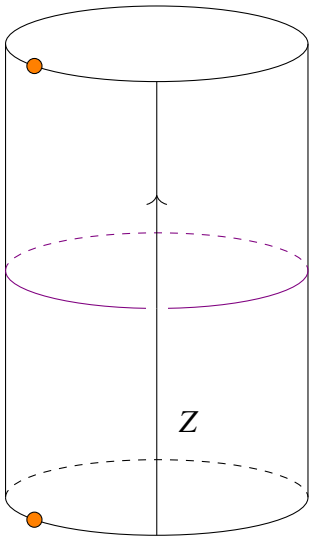


图13. 从 G-中心到圆柱范畴的函子 K 的一部分。

也就是说，交叉就是 $Z_G(C)_g$ 中的半编织。证明函子 F、K 给出范畴等价的方式，与 [KJ11, 定理 6.4] 中给出的方式等价。□

6. G-等变弦网

6.1. G-等变弦网空间的构造。本节将说明如何从 G-等变弦网中提取范畴 $Z_G(C)$ 的结构。为此，我们必须能够为 Σ 的每个边界连通分支赋予一个对象 $Z \in Z_G(C)_g$。给定 Z，考虑由圆柱给出的 G-等变弦网



其中紫色线是一个遮蔽圆。这正是图13中的幂等元。将这样的圆柱粘合到一个边界分支上，就在相应的裸弦网空间上定义了一个幂等元。

对于边界的每个连通分支，给定边界值 $Z_i \in Z_G(C)$，我们将这些边界值对应的弦网空间 $KSN^{\mathscr{C}}(\Sigma; Z) := KSN^{\mathscr{C}}(\Sigma; Z_1, \ldots, Z_n)$ 定义为所有这些幂等元的公共像。

圆柱范畴与弦网空间应构成函子的 (2, 1)部分

$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}} : G\mathcal{B}ord_{\star}(3,2,1) \to \mathcal{B}i\mathcal{M}od_{\mathbb{K}} \quad . \tag{6.1}$$

因此，我们需要讨论曲面粘合时弦网空间的表现。设Σ、 Σ′ 是可复合的 1-态射，属于 G$\mathcal{B}ord_{\star}$(3, 2, 1)，则我们需要证明

$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma \circ \Sigma'; \mathbf{Z}, \mathbf{Z}') \simeq \int^{Z \in \mathsf{Z}_G(\mathscr{C})} \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; \mathbf{Z}, Z) \otimes \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma'; Z^*, \mathbf{Z}'), \tag{6.2}$$

其中，Z、$Z^* \in \mathsf{Z}_G(\mathsf{C})$ 是粘合Σ、 Σ′ 处边界分支的边界值。设 Σ、 Σ′ 分别配备了 G-三角剖分 T 和 T′。粘合后的曲面Σ∘Σ′继承一个 G-三角剖分，其中各个曲面的边界顶点被映射到新的内部顶点。对于 Σ，我们选取一个 G-三角剖分，使其在粘合边界附近与图13所示的 G-三角剖分类似。利用粘合边界周围环形邻域上的所选 G-三角剖分，(6.2) 的证明与非等变情形相同，参见 Goo18，第 5 节。2]。

细心的读者可能已经注意到，我们尚未定义没有边界分支的曲面上的弦网空间。然而，我们可以将 (Σ', ζ') 视为具有单个边界分支 b 的曲面，并将 $\zeta|_b = \mathsf{e} \in \mathsf{G}$ 视为单位元。此外，(Σ, ζ) 是通过在 b 处粘合一个圆盘 D，由 (Σ', ζ') 获得的曲面。注意，所有闭 G 曲面都可以通过这种方式获得，因此我们简单地定义

$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma) := \int^{Z \in \mathsf{Z}_G(\mathscr{C})_e} \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(D; Z) \otimes \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; Z^*). \tag{6.3}$$

我们预期，与非等变情形一样，映射

$$\begin{aligned} \mathcal{C}yl &: (S^1, g) \to \mathcal{C}yl_g \\ \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}} &: (\Sigma, \zeta) \to \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma) \end{aligned} \tag{6.4}$$

构成对称幺半函子 $\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}$: G$\mathcal{B}ord_{\star}$(3, 2, 1) $\to \mathcal{B}i\mathcal{M}od_{\mathbb{K}}$ 的 (2, 1)部分。

6.2. G-弦网空间的计算。本节中，我们计算不同曲面上的弦网空间。我们给出圆柱、裤子曲面以及具有三个边界分支的二亏格曲面上的计算。圆柱的计算展示了如何恢复$\mathsf{Z}_G(\mathsf{C})$ 上的 G-交叉，而裤子曲面则给出了幺半积。高亏格计算将我们的构造与 [TV20] 的 G-等变 Turaev-Viro构造联系起来。然而，由于我们使用了略有不同的输入数据，我们无法得到 G-曲面之间向量空间的直接同构。尽管如此，我们仍可用 G-中心中的态射空间来表示弦网空间，这与 [TV20] 中的结果密切相关。最后，我们注意到，计算所有其他曲面上的弦网空间，与此处介绍的步骤类似。

6.2.1. 圆柱。我们先计算圆柱上的弦网空间。由于圆柱在其边界上的 G-丛之间给出了一个同伦，边界圆必须携带共轭 G-标记。我们选取一个理想三角剖分，并注意到任意弦网都可以表示为以下类型弦网的和

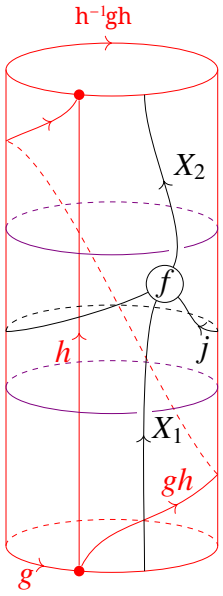


图14. 圆柱上的基本弦网。

其中，对于任意 $h \in G$，$j \in I_h(C)$。我们将下边界标记为 g、上边界标记为 $h^{-1}gh$ 的圆柱记作 ${}_gC_{h^{-1}gh}$。此后，我们在论证中不再展示理想三角剖分。图示很快就会变得过于繁杂；而且，除了为弦网建立一种有用的表示方式外，理想三角剖分并无其他作用。

命题6.1. 对于 $X_1 \in Z_G(C)_g$ 和 $X_2 \in Z_G(C)_{h^{-1}gh}$，我们有

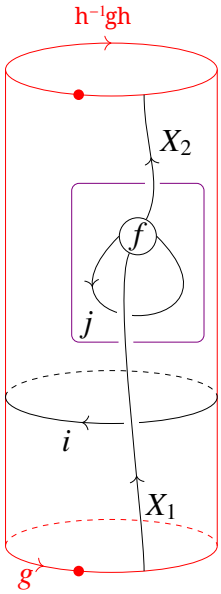
$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}\left({}_gC_{h^{-1}gh}; X_1, X_2\right) \simeq \mathrm{Hom}_{Z(\mathscr{C})}(\phi_h(X_1), X_2)\,, \tag{6.5}$$

其中 ϕ_h 是来自命题 2.3 的 $Z_G(C)$ 上的 G-交叉。由此，G-等变弦网编码了 $Z_G(C)$ 上的 G-作用。

证明。我们可以利用图14中的下方遮蔽圆和完备性关系，将标记为 j 的线与另一个遮蔽圆移到前面

(6.6)

$$\sum_{i\in I_h}\frac{d_i}{D}$$

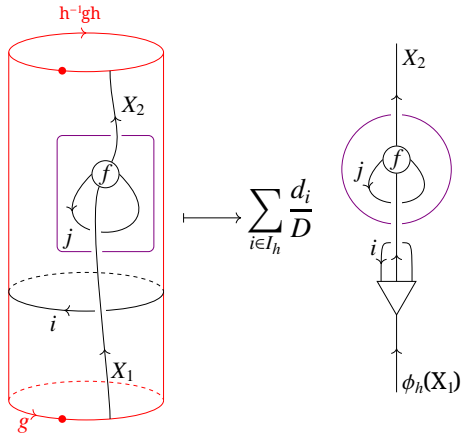


这也会改变下方遮蔽圆的颜色。(6.6) 中下方连续的三个下交叉构成半编织 $\gamma_{x_1,\, i\otimes n_0\otimes j^*}$，其中 $n_0\in I_e(C)$ 是 C 的单位分量中的一个简单对象，它来自中间的遮蔽圆。

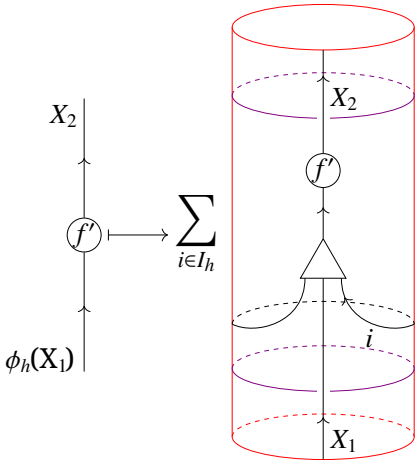
我们定义线性映射

$$F:\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}\left({}_gC_{h^{-1}gh};X_1,X_2\right)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{Z(\mathscr{C})}(\phi_h(X_1),X_2)$$

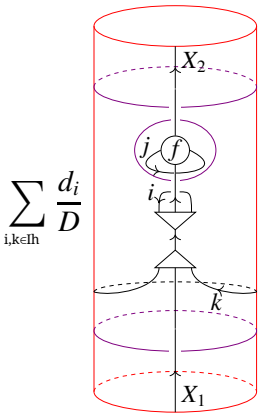
$$\sum_{i\in I_h}\frac{d_i}{D}\longmapsto\sum_{i\in I_h}\frac{d_i}{D}\in \mathrm{Hom}z_{G(\mathscr{C})}(\phi_h(X_1),X_2)$$

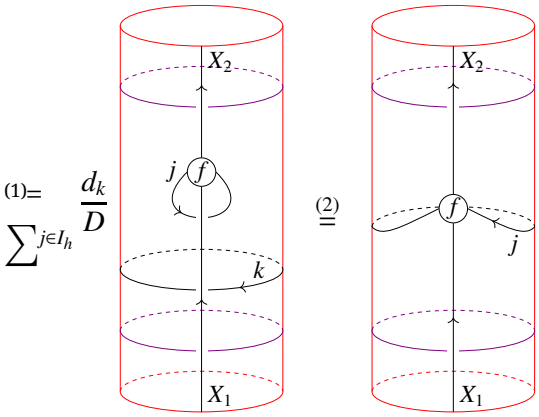


$$G:\mathrm{Hom}z_{(\mathscr{C})}(\phi_h(X_1),X_2)\longrightarrow \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}\left({}_gC_{h^{-1}gh};X_1,X_2\right)$$



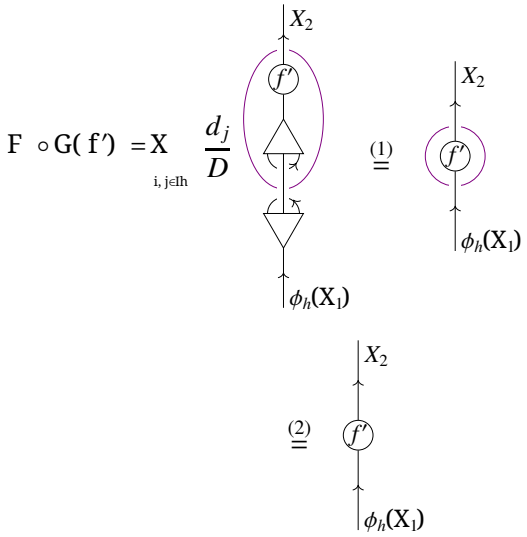
我们断言这两个映射互为逆映射。将G ∘ F 应用于弦网（6.6）可得





在步骤 (1) 中，我们使用幂等元的定义 $\pi(X_2)$，然后利用完备性关系去掉 f 周围的遮蔽圆。步骤 (2) 再次使用完备性关系，这次使用的是带有 I_h 颜色的遮蔽圆。

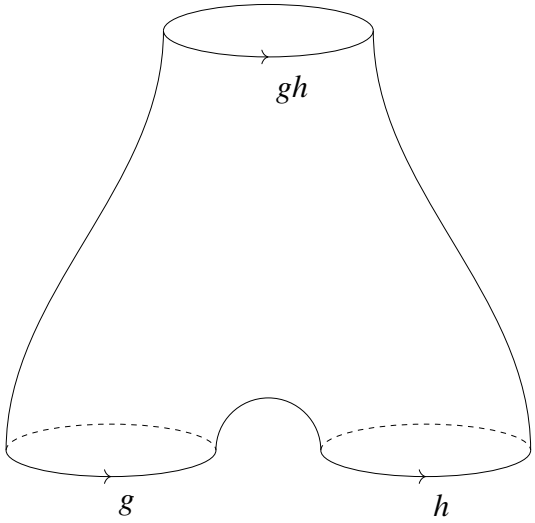
对于另一个复合，令 $f' \in \mathrm{Hom}_{Z(\mathscr{C})}(\phi_h(X_1), X_2)$，则



等式 (1) 是半编织 $\gamma_{\phi_h(X_1),\bullet}$ 的定义。(2) 成立，因为 f' 已经是 G-中心中的一个态射。

□

6.2.2. 裤子曲面。与圆柱类似，裤子曲面应为 Cyl 范畴赋予额外结构，在此情形下，该结构是一个幺半积背后的函子。作为第二项一致性检验，我们证明等变弦网构造确实在 $Z_G(\mathcal{C})$ 中诱导出幺半积。我们用符号 $P^{gh}{}_{g,h}$ 表示具有图示边界 holonomy 的以下曲面

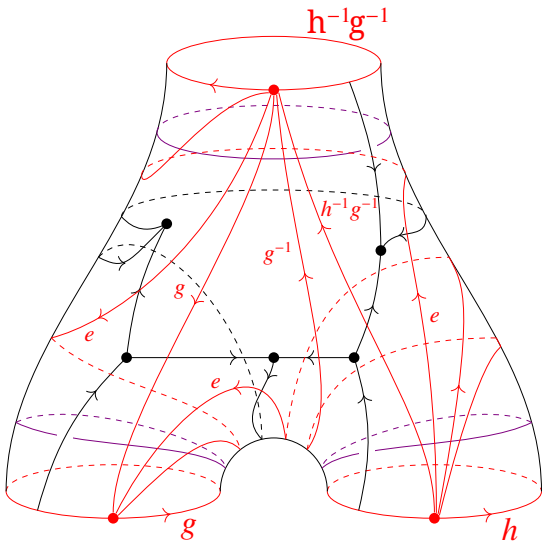


命题 6.2. 对于 $X_1 \in Z_G(\mathcal{C})_g$、$X_2 \in Z_G(\mathcal{C})_h$ 和 $X_3 \in Z_G(\mathcal{C})_{gh}$，有

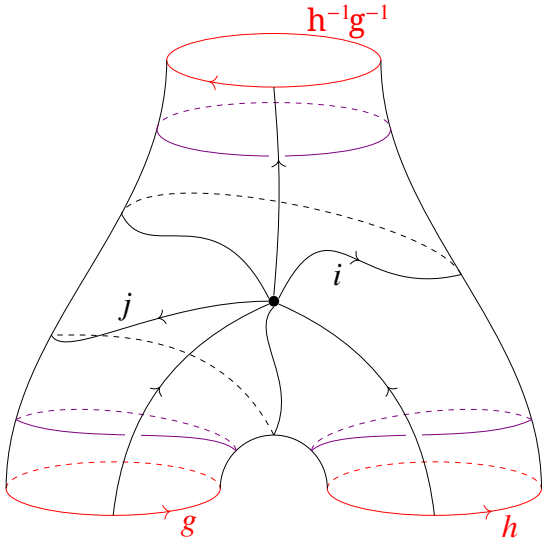
$$\mathrm{KSN}_{\mathscr{C}}(P^h{}_{g,h}; X_1, X_2, X_3) \simeq \mathrm{Hom}_{Z_G(\mathscr{C})}(X_1 \otimes X_2, X_3)。 \tag{6.7}$$

通过这种方式，G-等变弦网编码了 $Z_G(\mathcal{C})$ 的幺半结构。

证明。证明与前一个证明非常相似。我们从裤子曲面上的一个理想 G-三角剖分开始

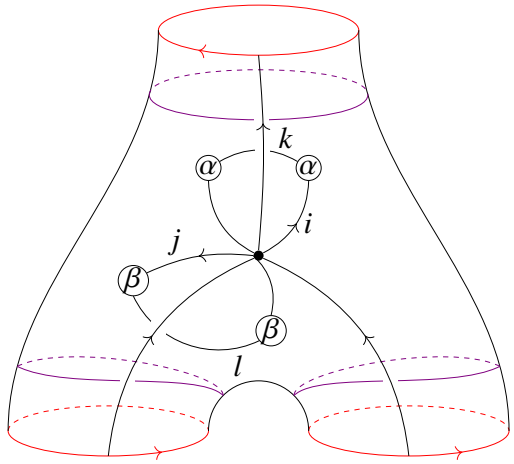


我们还用黑色标出了对偶单三价胖图。在粗图中选取一棵极大子树，并将相应的弦网压缩，得到

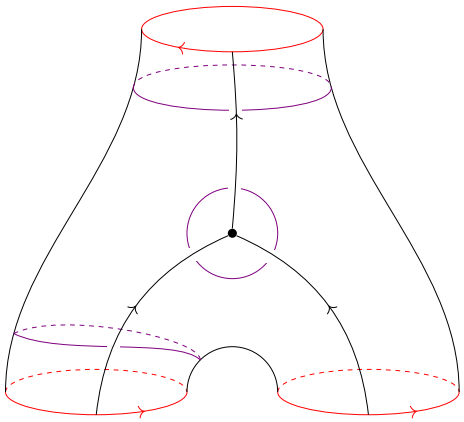


注意，由于理想三角剖分中的 G-着色，有 $i, j \in I_e$ 成立。利用 C 中的完备性关系，我们得到一个弦网

$$\sum_{k,l\in I_e} d_k d_l$$

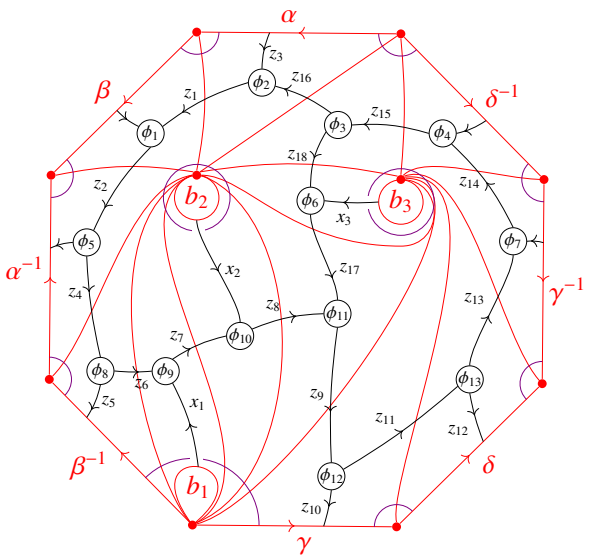


它可以展开为弦网的线性组合



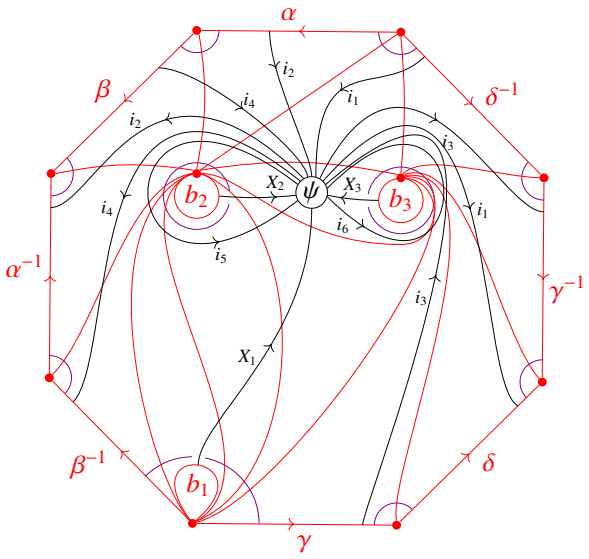
从弦网的这种表示可以明显看出该同构。 □

6.2.3. 高亏格曲面。作为示例，我们考虑一个具有三个边界分支的亏格 2 曲面。我们选取一个没有内部顶点的 G-三角剖分。

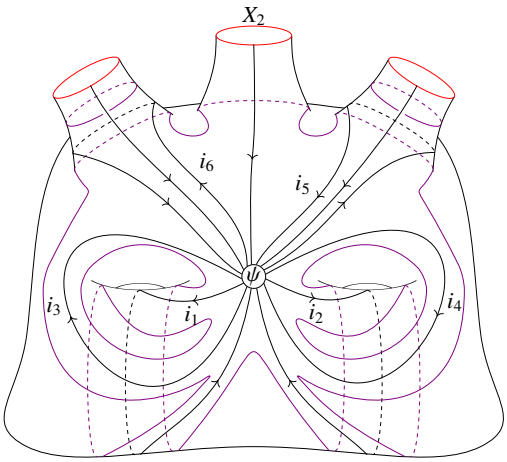


图中以红色显示了 G-三角剖分。其边界八边形给出了一个亏格 2 曲面的多边形分解，而多边形的边标记为群元素 α、β、γ 和 δ。边界边带有 G-标记 b_1, b_2 和 b_3。黑色部分显示了曲面上的一个弦网，其中我们已将 G- 三角剖分各个面的所有平面图收缩为带有标签 ϕ_i 的单顶点图。标记为 α、β、γ、δ 和 b_1,b_2,b_3 的边生成了 Σ 的第一同调群。根据引理 5.11，$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; B)$ 的一个基由上述图的等价类张成，其边标记为相容的简单对象。

我们在上述弦网所依托的粗图中选取一棵任意但固定的极大树 T。这棵树必须位于一个圆盘内，我们可以利用局部关系将其所有边收缩。由此得到 $\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; B)$ 的一组基，其元素为如下形式的图（的等价类）：

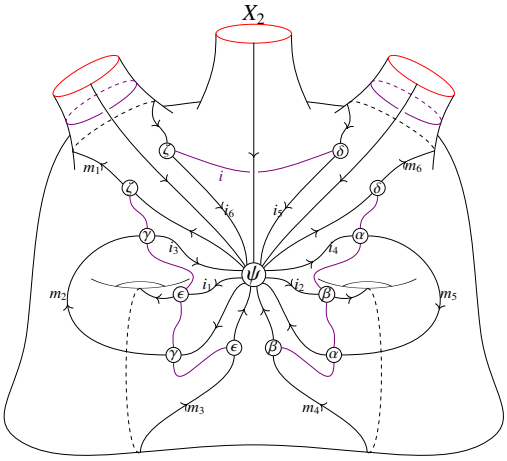


其中 i_n 是简单对象。接下来我们将不再显示 G-三角剖分。我们可以将围绕第一个边界分支的遮蔽圆作同伦变形，使其与粗图平行。于是，绘制在 Σ 上的弦网如下所示



我们可以多次使用完备性关系，将粗图变为如下形式

$$\sum_{\substack{i\in I_e,\\ m_1,\dots,m_6}} \frac{d_i}{D}\mathrm{d}_{m_1}\mathrm{d}_{m_2}\mathrm{d}_{m_3}\mathrm{d}_{m_4}\mathrm{d}_{m_5}\mathrm{d}_{m_6}$$



注意， ζ 唯一确定了一个没有内部标记点的 G-三角剖分的 G-着色。通过压缩一棵极大树，我们得到单顶点图中各边的固定 G-着色。由于顶点上的循环性条件在局部变换下保持不变，因此该着色满足

$$hb_3h^{-1}b_1gb_2g^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = e \quad . \tag{6.8}$$

其中，h 是 i_8 的 G-着色，而 g 是 i_5 的 G-着色。通过收缩粗图的极大树 T，未被收缩的边构成了以唯一顶点为基点的 $\pi_1(\Sigma)$ 的生成元。选择另一棵极大树后，我们会得到一组不同的自由生成元。然而，由于粗图的 G-着色是唯一确定的，因此生成元的 G-着色

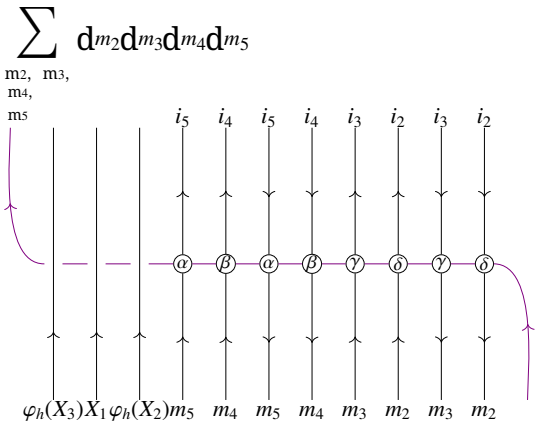
在这两种情况下也都是唯一确定的。它仅取决于映射ζ。

对于此处选取的树，我们定义一个对象

(6.9) $c_{X_3,\ X_1,X_2,\mathbf{m}} := \phi_h(X_3) \otimes X_1 \otimes \phi_g(X_2) \otimes m_5 \otimes m_4 \otimes m_5^* \otimes m_4^* \otimes m_3 \otimes m_2 \otimes m_3^* \otimes m_2^*$，其中 $m_5 \in I_\beta$、$m_4 \in I_\alpha$、$m_3 \in I_\delta$、$m_2 \in I_\gamma$ 以及 $X_i \in Z_G(C)_{b_i}$ 是边界值。该对象

(6.10) $$c := \bigoplus_{\mathbf{m}} c_{X_3,X_1,X_2,\mathbf{m}}$$

具有自然的半编织

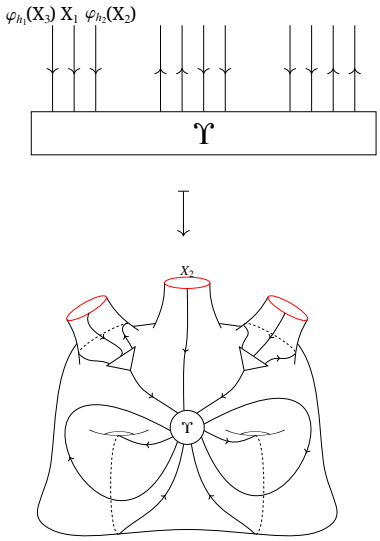


因此可以看作对象 $(c, \sigma) \in Z_G(C)$ ([TV20，第 10.4] 节)。

现在的计算与圆柱的计算类似。我们定义一个线性映射

$$\mathrm{Hom}_{Z_G(\mathscr{C})}(\mathbb{I}, c) \longrightarrow \mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; X_1, X_2, X_3)$$

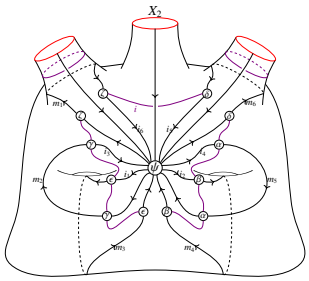
其通过以下方式作用于 $\Upsilon \in \mathrm{Hom}_{Z_G(\mathscr{C})}(\mathbb{I}, c)$



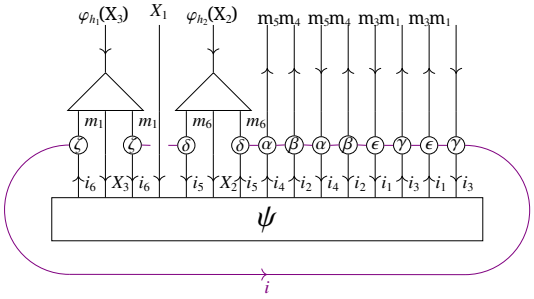
以及反方向上的一个线性映射

$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; X_1, X_2, X_3) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}_G(\mathscr{C})}(\mathbb{I}, c)$$

$$\sum_{\substack{i\in I_e,\\ m_1,\dots,m_6}} \frac{d_i}{D}\mathrm{d}_{m_1}\mathrm{d}_{m_2}\mathrm{d}_{m_3}\mathrm{d}_{m_4}\mathrm{d}_{m_5}\mathrm{d}_{m_6}$$



$$\sum_{\substack{i\in I_e,\\ m_1,\dots,m_6}} \frac{d_i}{D}\mathrm{d}_{m_1}\mathrm{d}_{m_2}\mathrm{d}_{m_3}\mathrm{d}_{m_4}\mathrm{d}_{m_5}\mathrm{d}_{m_6}$$



使用与之前相同的论证，现在很容易证明这两个映射互为逆映射。

上述计算可总结为以下命题。

命题 6.3. 对于 Σ 一个带有三个边界分支的二亏格曲面以及如式 (6.10) 中所示的 $c \in \mathsf{Z}_G(C)$，有

$$\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; X_1, X_2, X_3) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Z}_G(\mathscr{C})}(\mathbb{I}, c) \quad . \tag{6.11}$$

注释 6.4。弦网空间 $\mathrm{KSN}^{\mathscr{C}}(\Sigma; X_1, X_2, X_3)$ 与 [TV20] 中通过另一种构造得到的向量空间具有相同的结构。两种构造中不同的几何输入数据使得对这些向量空间进行详细比较并无益处。

附录 A. 定理 4.9 的证明

该定理将由 [BK00，命题 6.2]，推出；为方便读者，现快速陈述如下。

定理 A.1. 给定两个二维 CW 复形 F、B，以及它们的 1-骨架之间的映射 $\pi : F^{[1]} \to B^{[1]}$，满足：

i) 对于 B 中任意顶点 v 和边 e，都存在一个顶点 v′ 和一条边 e′，使得$\pi(v') = v$ 且 $\pi(e') = e$。此外，对于 $v_1 \xrightarrow{e} v_2$ B 中的一条边，以及任意 $v_1' \in \pi^{-1}(v_1)$，都存在一条边 $v_1' \xrightarrow{e'} v_2'$，使得 $\pi(e') = e$。ii) B 是连通的*d and simpl*性连通的 *d.*

iii) 存在一个顶点 $v \in B$，使得 $\pi^{-1}(v)$ 连通且单连通。iv) 给定 B 中的一条边 $v_1 \xrightarrow{e} v_2$、$\pi^{-1}(v_1)$ 中的一条边 $v_1' \xrightarrow{f_1} v_1''$，以及 e 的两个提升 $v_1' \xrightarrow{e'} v_2'$、$v_1'' \xrightarrow{e''} v_2''$，存在 $\pi^{-1}(v_2)$ 中的一条边 $v_2' \xrightarrow{f_2} v_2''$，使得该方形

$$\begin{array}{ccc} v_1' & \xrightarrow{e'} & v_2' \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ v_1'' & \xrightarrow{e''} & v_2'' \end{array}$$

在 F 中是可缩的。

v) B 中任意二维胞腔的边界 ∂C 在 B 中都有一个可缩的提升。

那么复形 F 是连通且单连通的。

定理 4.9 的证明。证明包括验证定理 A.1 的 i)-v) 各点对遗忘映射 $\pi : P_G(\Sigma, \zeta, M)^{[1]} \to P(\Sigma, M)^{[1]}$, 均成立；该映射忘掉边上的 G-标记，将 G-翻转映射为底层理想三角剖分的翻转，并将规范变换映射为恒等映射。注意，对任意理想三角剖分T，π 上的纤维是由 $\zeta : \Sigma \to BG$ 诱导的 Δ 的所有可能 G-标记构成的集合。

i) 遗忘映射在顶点和边上显然是满射的。此外，给定一个翻转 $\Delta \xrightarrow{e}_F \Delta'$ 以及任意 G-三角剖分 $(\Delta, g) \in \pi^{-1}(\Delta)$，存在一个覆盖 e 的 G-翻转 $(\Delta, g) \xrightarrow{e}_F (\Delta', g')$。

ii) 根据定理 4.4，Ptolemy 复形是连通且单连通的。

iii) 设 Δ 是 Σ的任意理想三角剖分。纤维 $\pi^{-1}(\Delta)$ 是连通的，因为规范群 G_Δ 将由 ζ诱导的任意两个 G-标记联系起来。由于关系 GP5，$\pi^{-1}(\Delta)$ 中的任意规范变换序列都同伦于形如 $\lambda_1(v) \cdots \lambda_{n_v}(v)\lambda_1(w) \cdots \lambda_{n_w}(w)\lambda_1(u) \cdots$的序列，该序列以任意顺序遍历 Δ 的所有顶点。此外，在 $\pi^{-1}(\Delta)$ 中具有相同起点和终点且完全由同一顶点处的不同规范变换组成的任意两条路径都是同伦的。这源于以下观察：由于 GP6，由 G-三角剖分的单个顶点处的规范变换张成的子复形是一个 $|G| - 1$-维单纯形的二维骨架，因此是单连通的。由此可知，$\pi^{-1}(\Delta)$ 是单连通的。

iv) 这直接由混合关系 GP4 得出。v) 与上一点类似，这是因为二维胞腔 GP1、GP2 和 GP3 的边界分别投影到二维胞腔 P1、P2 和 P3 的边界。

□

参考文献

[Bal10a] Benjamin Balsam. Turaev-Viro不变量作为扩展拓扑量子场论 II. arXiv:1010.1222, 2010.[Bal10b] Benjamin Balsam. Turaev-Viro不变量作为扩展拓扑量子场论 III. arXiv:1012.0560, 2010.[Bar22] Bruce Bartlett. 通过弦网与二维手术构造三维拓扑量子场论. arXiv预印本 arXiv:2206.13262, 2022.[BDSPV15] Bruce Bartlett, Christopher L Douglas, Christopher J Schommer-Pries, and Jamie Vicary. 模范畴作为三维配边2-范畴的表示. arXiv预印本 arXiv:1509.06811, 2015.[Ben10] Benjamin Balsam and Alexander Kirillov Jr. Turaev-Viro不变量作为扩展拓扑量子场论. arXiv:1004.1533, 2010.[BK00] Bojko Bakalov and Alexander Kirillov. 关于乐高-Teichm¨uller游戏. 变换群, 5(3):207–244, 2000.[Bor94] Francis Borceux. 《范畴代数手册》, 《数学及其应用百科全书》第1卷. 剑桥大学出版社, 1994.[EGNO10] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dimitri Nikshych, and Victor Ostrik. 《张量范畴》, 《数学调查与专著》第205卷. 美国数学会, 2010.[FFRS06] Jens Fjelstad, J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. TFT构造RCFT关联函数. V. 模不变性与因子化的证明. 理论与应用范畴, 16:342–433, 2006.[FGK88] Giovanni Felder, Krzysztof Gawedzki, and Antti Kupiainen. 任意单群的Wess-Zumino-Witten模型谱. 数学物理通讯, 117(1):127–158, 1988.[FRS02] J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. TFT构造RCFT关联函数 I. 配分函数. Nucl. Phys. B, 646:353–497, 2002.[FRS04a] J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. TFT构造RCFT关联函数. II. 无定向世界面. Nucl. Phys. B, 678:511–637, 2004.[FRS04b] J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. TFT构造RCFT关联函数. III. 简单流. Nucl. Phys. B, 694:277–353, 2004.[FRS05] J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. TFT构造RCFT关联函数 IV：结构常数与关联函数. Nucl. Phys. B, 715:539–638, 2005.[FSY21] J¨urgen Fuchs, Christoph Schweigert, and Yang Yang. RCFT关联函数的弦网构造. arXiv预印本 arXiv:2112.12708, 2021.[GNN09] Shlomo Gelaki, Deepak Naidu, and Dmitri Nikshych. 分次融合范畴的中心. 代数与数论, 3(8):959–990, 2009.[Goo18] Goosen, Gerrit. 通过弦网与态和构造定向123-TQFT. 博士论文, 斯泰伦博斯大学, 2018.[GR04] Krzysztof Gawedzki and Nuno Reis. 非单连通紧群上的基本丛幺半群. 几何与物理杂志, 50(1-4):28–55, 2004.[GSW11] Krzysztof Gawedzki, Rafal R Suszek, and Konrad Waldorf. 定向反转σ模型的丛幺半群. 理论与数学物理进展, 15(3):621–687, 2011.[HBFL16] Chris Heinrich, Fiona Burnell, Lukasz Fidkowski, and Michael Levin. 对称性富集弦网：用于集合相的精确可解模型. 《物理评论B》, 94(23):235136, 2016.[KJ11] Alexander Kirillov Jr. Turaev-Viro不变量的弦网模型. arXiv预印本 arXiv:1106.6033, 2011.[KJB10] Alexander Kirillov Jr and Benjamin Balsam. Turaev-Viro不变量作为扩展拓扑量子场论. arXiv预印本 arXiv:1004.1533, 2010.[LW05] Michael A. Levin and Xiao-Gang Wen. 弦网凝聚：拓扑相的一种物理机制. Phys. Rev. B, 71:045110, 2005.

[NS07] Siu-Hung Ng 和 Peter Schauenburg。《幺半对偶范畴的高阶 Frobenius-Schur 指标》。Hopf 代数及其推广，441：63–90，2007 年。[Pen12] Robert C. Penner。《装饰 Teichmüller 理论》。QGM 大师班系列。欧洲数学学会出版社，2012 年。[SW20] Christoph Schweigert 和 Lukas Woike。《扩展同伦量子场论及其轨形化》。纯粹与应用代数杂志，224(4)：106213，2020 年。[SY21] Christoph Schweigert 和 Yang Yang。《通过弦网模型研究 Cardy 体场的 CFT 关联函数》。对称性、可积性与几何：方法与应用，2021 年 4 月。[Tra22] Matthias Traube。《Cardy 代数、缝合约束与弦网》。数学物理通讯，390：1–45，2022 年。[Tur10] Vladimir Turaev。《同伦量子场论》，EMS 数学论著第 10 卷。欧洲数学学会出版社，2010 年。[TV12] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。《三维同伦量子场论 I》。国际数学杂志，23(09)：1250094，2012 年。[TV13] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。《关于分次范畴的分次中心》。纯粹与应用代数杂志，217(10)：1895–1941，2013 年。[TV20] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。《三维同伦量子场论 III：两种方法的比较》。国际数学杂志，31(10)：2050076，2020 年。[Wal06] Kevin Walker。《拓扑量子场论》。可见于 https://canyon23.net/math/，2006 年。

Adrien DeLazzer Meunier：达尔豪斯大学，6299South St，哈利法克斯，NS，B3H 4R2 电子邮箱：adelazzer@dal.ca

Christoph Schweigert：汉堡大学，Bundesstraße 55，20146Hamburg 电子邮箱：christoph.schweigert@uni-hamburg.de

Matthias Traube：汉堡大学，Bundesstraße 55，20146 Hamburg 电子邮箱：matthias.traube@uni-hamburg.de