arXiv:2304.00142v1 [math.DS] 31 Mar 2023

全纯慢快系统

´GABRIEL RONDON、PAULO R. DA SILVA 和 LUIZ F. S. GOUVEIA

Abstract. 本文旨在研究二维全纯系统中不变复流形的存在性。根据几何奇异摄动理论，我们知道，如果一个慢-快系统具有与之关联的正规双曲紧致临界流形，那么就存在一个光滑局部不变流形。然而，这个光滑流形未必具有复结构。本文给出了保证一维不变复流形存在的条件。因此，我们得以证明，约化问题中的中心、焦点和节点在奇异摄动下具有持续性。我们使用的工具是 Fenichel 的常用方法和 Briot-Bouquet理论。

1. Introduction

在动力系统定性理论中，已有多项关于奇异摄动问题的研究（例如，[3, 9, 10,17]）。本文旨在研究 $\mathbb{R}^4$中的奇异摄动问题，这些问题可以写成二维全纯系统。值得强调的是，尽管二维全纯系统可以用于建立应用模型（参见 [11, 12],），关于这一主题的文章仍然不多，例如 [13, 14]。

我们考虑的基本系统形式为

$$\text{(SF1)} \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{z} &= f(z,w), \\ \dot{w} &= g(z,w), \end{cases}$$

其中 f, g : $D \to \mathbb{C}$ 是全纯函数， $D \subseteq \mathbb{C}^2$ 是单连通域， $\varepsilon > 0$ 是足够小的参数，点号 $\cdot$表示函数 $z(\tau)$ 和 $w(\tau)$ 关于实变量 τ 的导数。

2020 数学主题分类。 34C45, 34A09。关键词和短语。 全纯系统、几何奇异摄动理论、Fenichel 理论、不变复流形。

.

需要强调的是 $C_0 = \{(z, w) \in D : f(z, w) = 0\}$ 是与系统（SF1）相关联的一维临界流形，前提是 $\frac{\partial f}{\partial z}(z, w) \neq 0$ 对所有 $(z, \overline{w}) \in C_0$成立。回想一下，（SF1）可在 $\mathbb{R}^4$ 的适当定义域内写成一个实四维自治系统。

假设 $S_0 \subset C_0$ 是一个正规双曲紧临界流形。因此，我们可以假设 S_0 表示为关于 w的 z的函数图。事实上，由于对于所有$(z, w) \in S_0$，$\frac{\partial f}{\partial z}(z, w) \neq 0$，那么根据隐函数定理（见 [15]），存在一个开集 U和一个全纯函数 $z = h(w)$，使得对于所有 $w \in U.$，$f(h(w)\ w) = 0$。因此，不失一般性，我们可以假设$S_0 = \{(z, w) : z = h(w)\ w \in U\}.$

本文的主要目标之一是研究二维全纯系统（SF1）不变复流形的存在性。在某些时候，读者可能会认为只需应用*Fenichel*定理（例如，参见 [9]）即可得到一维不变复流形。一般而言，事实并非如此，因为有些光滑流形并不具有复结构。一个显而易见的障碍是光滑流形的维数必须为偶数。另一个障碍是可定向性，因为每个复流形都是可定向的。

尽管几何奇异摄动理论无法保证不变复流形的存在性，但可以利用该理论和 Laurent级数构造没有复结构的光滑流形实例。事实上，如果我们将*Fenichel*定理应用于与系统 C^∞（SF1）相应的 $S_\varepsilon = \{$四维实系统$z,\ w$则：$z = h_\varepsilon(w)\}$ 慢快系统（SF1）中存在一个光滑的局部不变流形 S_0. 一般而言，该函数 $h_\varepsilon(z)$不一定是全纯的，正如下面的例子所示。考虑复动力系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = z + w, \\ \dot{w} = w^2, \end{cases} \tag{1}$$

注意到 $C_0 = \{(z, w) : z = -w\}$ 是（1）的一个正规双曲临界流形。此外，若 $S_0 \subset C_0$ 是一个紧集，则（1）在 $\mathbb{R}^4$ 中的等价系统具有一个光滑局部不变流形S_ε。然而，这个流形没有复结构。事实上，假设存在一个全纯函数 h_ε 使得 $S_\varepsilon = \{(z, w) : z = h_\varepsilon(w)\}$。那么 h_ε 可以写成幂级数。在

第5节中，我们将证明这个级数由下式给出

$$h_\varepsilon(w) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k k! w^{k+1}.$$

注意到，当 $w \neq 0$ 时，该级数发散，这与 h_ε 是全纯的事实相矛盾。

此时，自然会问：在什么条件下，我们能够确保系统（SF1）具有复结构的不变流形的存在性？在第3节中，我们运用 ***Briot-Bouquet*** 理论，并给出保证一维不变复流形存在的条件。具体而言，在定理A中，我们证明，当 $\varepsilon > 0$充分小时，该系统

$$\text{(SF2)} \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \tilde{f}(z,w), \\ \dot{w} = \beta w + \tilde{g}(z,w), \end{cases} \quad \text{where } \tilde{f}, \tilde{g} = \mathcal{O}_2(z,w) \text{ and } \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

具有唯一的一维不变复流形 C_ε，该流形经过平衡点 $q_\varepsilon = (0, 0)$，条件是临界流形是正规双曲的。

我们运用定理A 证明，与全纯慢-快系统（SF1）相关的约化问题的中心、焦点和节点在奇异摄动下保持不变，其中 f 和 g 的雅可比矩阵在原点处是可对角化的。更多详细信息请参见定理B和图1。

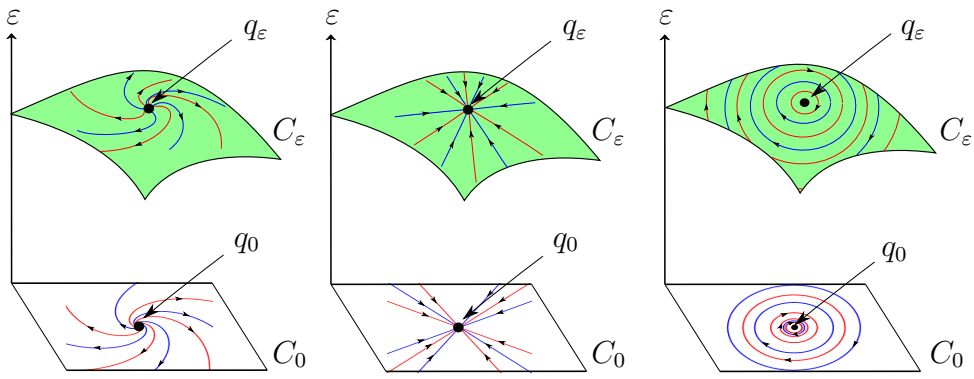

FIGURE 1. 通过奇异摄动分别得到约化问题中焦点、节点和中心的持久性。

此外，我们还关注确定某些二维全纯系统族是否存在复不变流形。这些系统在 f 和 g 处的雅可比矩阵不一定可对角化，且该点不必是系统的平衡点，参见定理C和D。具体而言，定理C

确立了与慢快系统（SF1）相关联的一维复不变流形的存在性，其轨道方程可分离；也就是说，在存在全纯函数η， κ 使得 $\frac{g(z,\ w)}{f(z,\ w)} = \eta(z)\kappa(w)$在某个适当定义域内成立的情形。此外，在定理D 中，我们陈述了确保该系统何时

$$\text{(SF3)} \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta G(w), \\ \dot{w} = g(w), \end{cases} \text{where } G' \equiv 1/g \text{ and } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

具有一个与之关联的一维指数吸引不变复流形 C_ε。

最后，我们将介绍一种研究以下形式的慢-快系统的方法

$$\text{(SF4)} \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta w, \\ \dot{w} = g(w), \end{cases} \text{, where } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ and } \beta \in \mathbb{C},$$

其中 g 是 [4], 中给出的标准形之一，即： $\dot{w} = 1$， $\dot{w} = (a + ib)w$， $\dot{w} = w^n$， $\dot{w} = \frac{1}{w^n}$ 以及 $\dot{w} = \frac{\gamma w^n}{1+w^{n-1}}$。我们将确定这些族中哪些可能关联具有复结构的流形，并在这种情况下研究当约化问题的一个奇点在 $\varepsilon > 0$. 时受到扰动会发生什么。具体而言，在命题 10和 11 中，我们证明了与系统 (SF4) 相关联的约化问题的中心和n 阶极点，在奇异摄动下具有持久性。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍关于复流形、几何奇异摄动理论和 Briot-Bouquet 理论的一些基本结果。在第3节中，我们运用 Briot-Bouquet 理论证明定理A 和B。在第4节中，我们陈述并证明定理C和D。最后，在第5节中，我们利用 Laurent级数给出没有相应复流形的复系统。

2. Preliminaries

本节旨在建立一些将在全文中用到的基本结果。

2.1. 复流形。A全纯函数 f 是定义在定义域 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}$ 上的复值函数，并满足

- $u = \text{Re}(f)$ 和 $v = \text{Im}(f)$ 连续，
- 存在偏导数 u_x， u_y， v_x， v_y 在 $\mathcal{V}$ 中，并且

- 这些偏导数满足柯西–黎曼方程，见 [5],

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \forall z = x + iy \in \mathcal{V}.$$

我们回顾一下，*Looman–Menchoff* 定理证明了上述条件足以保证 f 的解析性。该结果意味着，对于任意 $z_0 \in \mathcal{V}$

$$f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + ..., \quad A_k = a_k + ib_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

对于 $z \in D(z_0, R_{z_0}) \subseteq \mathcal{V}$ 其中 $D(z_0, R_{z_0})$ 是包含在 $\mathcal{V}$. 中的最大可能的 z_0–中心圆盘

如果 f 在去心圆盘 $D(0, R) \setminus \{0\}$ 内全纯，且在 0 处不可导，则称 0 是 f 的一个奇点。在这种情况下， f 等于其在 $D(0, R) \setminus \{0\}$ 内的 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k,$$

其中 $B_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) z^{k-1} dz$, $A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$，其中 C_ε 的参数由 $z(t) = \varepsilon e^{it}$, $\varepsilon \sim 0, t \in [0, 2\pi]$ 给出。

如果 $B_k \neq 0$ 对一个无限指标集 k 成立，我们称 0 是一个本性奇点；如果存在 $n \geq 1$ 使得 $B_n \neq 0$ ，并且对每个 $k > n$ 都有 $B_k = 0$ ，那么我们称 0 是一个*n* 阶极点。

全纯函数的概念可以如下扩展。

设 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^2$ 为一个开子集，并令 $f : \mathcal{W} \to \mathbb{C}$ 为一个连续可微函数。若对所有坐标 $z_j = x_j + iy_j$，且$j = 1$，2，柯西-黎曼方程成立，则称 f 为全纯，即

$$u_{x_j} = v_{y_j}, \quad u_{y_j} = -v_{x_j}, \quad \forall z_j = x_j + iy_j \in \mathcal{W}.$$

此外，如果 f 在 $\mathcal{W}$，中是全纯的，那么对于每个点 ζ =(ζ_1, ζ_2), $\in \mathcal{W}$都有一个开邻域 $D(\zeta, R_\zeta)$，使得函数 f 可以展开为幂级数

$$f(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1 + k_2 = n} c_{k_1, k_2} (z - \zeta_1)^{k_1} (w - \zeta_2)^{k_2},$$

它对所有 $(z, w) \in D(\zeta, R_\zeta)$ 均收敛。

复流形的定义类似于光滑流形，但我们要求坐标图取值于 $\mathbb{C}^2$ ，并且转移函数是全纯的（见图 2）。

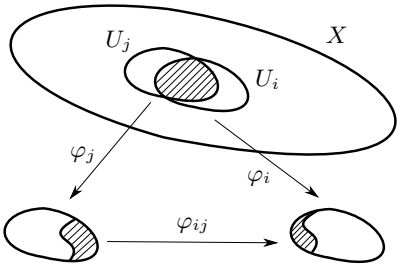

FIGURE 2. 复流形要求过渡函 φ_{ij} 数是全纯的。

拓扑空间 $X \subseteq \mathbb{C}^2$ 中的一个全纯图册是由一对对（U_i， φ_i）组成的集合，这些对子称为全纯坐标图，其中

- 每个 U_i 都是 X 中的开集，并且是 $X = \bigcup_i U_i$；
- 每个 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$的某个开集上的同态，且满足 $n \leq 2$;
- 每当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 过渡

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

是一个全纯映射。

复流形 是一个拓扑空间 X，它是豪斯多夫的且具有可数基，并配备了一个极大全纯图册。数 n 称为 X的复维数。

下面的命题将给出一种构造复子流形的方法。更多详情请参见，例如 [7, 18]。

命题 1。 设 $\phi : X \subseteq \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 是复流形之间的全纯映射。考虑 $b \in \phi(X) \subseteq \mathbb{C}$，使得对于所有 $a \in \phi^{-1}(b)$， ϕ 的秩均为最大值（$rank(\phi) = 1$）。那么 $\phi^{-1}(b)$ 是X的一个复子流形，其维数为1。

2.2. 几何奇异摄动理论。 我们考虑微分方程的奇异摄动系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \end{cases} \tag{2}$$

这称为慢快系统，其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ε_0较小，$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}$，一个开集 $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^4$ 且 f， $g : (0, \varepsilon_0) \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}^4$ 是 C^r。点 $\cdot$表示函数 $\mathbf{x}(\tau)$ 和$\mathbf{y}(\tau)$ 关于变量 τ 的导数。

如果我们写成 $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$，那么系统（2）变为

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \mathbf{y}' = \varepsilon g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \end{cases} \tag{3}$$

其中，撇号 ' 表示函数$\mathbf{x}(t)$和$\mathbf{y}(t)$关于变量 t的导数。注意，参数 $\varepsilon = \frac{\tau}{t}$ 表示时间尺度之比。

考虑方程（2），并令 $\varepsilon = 0$。由此得到所谓的约化问题，其形式如下

$$0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \quad \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0). \tag{4}$$

注意，（4）不是常微分方程，而是一个代数微分方程。

（4）的解包含于集合

$$C_0 = \Big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M} : \ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0\Big\}.$$

集合 C_0 称为临界集。当 C_0 是一个流形时，C_0 称为临界流形。

另一方面，在方程（ $\varepsilon = 0$ 3）中令，即可得到所谓的层问题

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \quad \mathbf{y}' = 0. \tag{5}$$

此外，系统（5）可以看作一个常微分方程系统，其中$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 是一个参数，而临界集 C_0是（5）的平衡点集合。

几何奇异摄动理论的主要目标是研究系统（4）和（5），以获得关于完整系统（2）的信息。注意，当 $\varepsilon > 0$时，系统（2）和（3）是等价的，因为它们仅在时间尺度上不同。

接下来我们介绍正规双曲点的概念。

设$\mathbf{x}_0 \in S$，其中 $S \subset \mathcal{M}$为任意集合。若$\mathbf{x}_0$ 的正规双曲矩阵 2×2 $Df_{\mathbf{x}}$（$\mathbf{x}_0$）不存在实部为零的特征值，则称其为正规双曲。

接下来我们给出*Fenichel*定理的一个版本，其证明可见 [16]。

定理 2. 考虑 $\mathcal{M}$一个 C^{r+1} 流形， $2 \le r \le \infty$. 设 $X_\varepsilon, \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 为定义在 $\mathcal{M}$ 上的一个向量场族，并假设 $\mathcal{M}$ 的一个 C^r 子流形 C_0 完全由 X_0. 的平衡点构成。若 $S \subset C_0$ 是约化向量场 X_R 的一个 $j-$维紧致正规双曲不变流形，具有一个 $j + j^s-$维局部

稳定流形 $\mathcal{W}^s$ 和一个 $j+j^u-$维局部不稳定流形$\mathcal{W}^u$，则存在 $\varepsilon_1>0$，使得

(i) 存在一族流形 $\{S_\varepsilon:\ \varepsilon\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\}$，满足 $S_0=S$，且 S_ε 是 X_ε. 的正规双曲不变流形。*(ii)* 存在两族维数分别为 $(j+j^s+k^s)-$ 和 $(j+j^u+k^u)-$ 的流形 $\{S^s_\varepsilon:\ \varepsilon\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\}$ 和 $\{S^u_\varepsilon:\ \varepsilon\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\}$，使得对于 $\varepsilon>0$，流形 S^s_ε 和 S^u_ε 是 S_ε. 的局部稳定流形和不稳定流形

现在，假设 S 如定理2所给出，则 $Df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ 0)$ 对所有 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in S$. 由隐函数定理可知，存在一个光滑函数 h_0 定义在紧致域 $K\subset\mathbb{R}^2$ 上，使得

$$S=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})):\mathbf{x}=h_0(\mathbf{y})\}.$$

也就是说，S 局部上是关于**y**的**x**函数图像

定理3。假设定理2的相同条件。如果 $\varepsilon>0$ 足够小，则存在一个函数 $\mathbf{x}=h_\varepsilon(\mathbf{y})$，定义在 K上，使得其图像

$$S_\varepsilon=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})):\mathbf{x}=h_\varepsilon(\mathbf{y})\}$$

在(3)下局部不变。此外，h_ε 对于任意 C^r，在 $r<\infty$上关于**y** 和 ε联合地为。

2.3. **二维全纯慢快系统**。考虑二维全纯慢快系统（SF1），其中 $f(z,w)=u_1+iv_1$ 以及 $g(z,\ w)=u_2+iv_2$ 是复变量 $(z,\ w)=(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)\in D$.的全纯函数

回顾与系统（SF1）关联的快系统为

$$\begin{cases} z'=f(z,w)=u_1+iv_1,\\ w'=\varepsilon g(z,w)=\varepsilon(u_2+iv_2),\end{cases}\tag{6}$$

其中撇号 ' 表示函数 $z(t)$ 和$w(t)$ 关于变量 t 的导数，其中 $t=\tau/\varepsilon$。注意，与系统（6）关联的临界集定义为 $C_0=\{(z,\ w)\in D:\ f\ (z,\ w)=0\}$.

在此背景下，约化问题为

$$0=f(z,w),\ \dot{w}=g(z,w),\tag{7}$$

并且层问题定义为

$$z'=f(z,w),\ w'=0.\tag{8}$$

注意到，系统 (SF1) 和 (6) 在 $\varepsilon > 0$ 时等价，因为它们仅在时间尺度上有所不同。此外，系统 (7) 和 (8) 使我们能够获得有关系统 (SF1) 的信息。

现在，我们在复数情形下引入正规双曲性的概念。设 $q_0 = (z_0, w_0) \in C_0$ 是系统（6）的一个平衡点，其中 $\varepsilon = 0$。由于 f, g 是全纯函数，因此柯西-黎曼方程成立。于是，系统在$\mathbb{R}^4$ 处与（6）相关的雅可比矩阵在 q_0 处为

$$J_{\mathbb{R}}(f,0)|_{q_0} = \begin{pmatrix} (u_1)_{x_1} & -(v_1)_{x_1} & (u_1)_{x_2} & -(v_1)_{x_2} \\ (v_1)_{x_1} & (u_1)_{x_1} & (v_1)_{x_2} & (u_1)_{x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

这意味着 $J_{\mathbb{R}}(f,0)|_{q_0}$的特征值为 $\lambda_{\pm} = (u_1)_{x_1} \pm i(v_1)_{x_1}$.因此，若对所有 $q \in S.$，都有 Re $\left(\frac{\partial f}{\partial z}(q)\right) = (u_1)_{x1}(q) \neq 0$，则称子集 $S \subset C_0$ 为正规双曲的

—

2.4. **布里奥-布盖系统**。布里奥-布盖系统在研究文献中得到了广泛应用（例如参见 [6, 13, 14]）。

Briot 和 Bouquet 系统具有以下形式

$$zw' = F(z,w), \quad F(0,0) = 0, \tag{10}$$

其中，F 是一个全纯函数，撇号 ' 表示函数 $w(z)$ 关于复变量 z 的导数。

自 Briot 和 Bouquet 的开创性工作以来，一维理论已广为人知（见 [1]）。这里我们将使用以下结果，该结果在 [8, 命题 1.1.1] 中得到了证明。

命题 4（布里奥-布盖判据）。若 $F(z, w) = \lambda w + \mathcal{O}(z, w^2)$ 且 $\lambda \notin \mathbb{N}$，则 (10) 在 $z = 0$处存在唯一的全纯解，满足 $w(0) = 0$。

3. Persistence of Invariant Manifold

本节旨在证明，与全纯慢-快系统（SF1）相关的约化问题的中心、焦点和节点（其雅可比矩阵在原点处关于 f 和 g 可对角化）在奇异摄动下得以保留。

为此，我们首先将通过 *Briot-Bouquet* 理论构造一维不变复流形。因此，考虑由（SF1）给出的复微分系统。不失一般性，假设 $q_\varepsilon = (0, 0)$ 是（SF1）在 D中的一个平衡点。假设其相关的线性化系统满足：其

雅可比矩阵 $J_{\mathbb{C}}(f,\ g)|_{q_\varepsilon}$ 的 $f,\ g$ 特征值分别为 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ 且 $J_{\mathbb{C}}(f,\ g)|_{q_\varepsilon}$ 是可对角化的。因此，我们可以将（SF1）写成（SF2），其中

$$\tilde{f}(z,w)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{s+l=n}a_{s,l}z^s w^l \quad \text{and} \quad \tilde{g}(z,w)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{s+l=n}b_{s,l}z^s w^l, \tag{11}$$

它在 q_ε 的某个邻域内收敛。其中 $s,\ l$ 为非负整数，$a_{s,\ l},\ b_{s,\ l}$ 为复常数。

在此背景下，与复系统（SF2）˜相关的临界集为 $C_0=\{(z,\ w):\alpha z+f(z,\ w)=0\}$. 强调，如果 C_0 是正规双曲临界流形，那么 $\mathbf{Re}(\alpha)\neq 0$.

为求得系统（SF2）的一个不变流形，我们考虑以下初值问题

$$(\alpha z+\tilde{f}(z,w))\frac{dw}{dz}=\varepsilon(\beta w+\tilde{g}(z,w)),\quad w_\varepsilon(0)=0,\quad w_\varepsilon'(0)=0. \tag{12}$$

下面我们给出一个基本结果，它将用于证明本节的主要定理。

定理 A. 设 C_0 是与复系统 (SF2) 相关的正规双曲临界流形，并设 $\varepsilon>0$ 是一个足够小的参数。那么，系统 (SF2) 存在唯一的一维不变复流形 C_ε 经过平衡点 q_ε，其表达式为

$$C_\varepsilon=\{(z,w):w=h_\varepsilon(z),\quad h_\varepsilon(0)=0,\quad h_\varepsilon'(0)=0\},$$

其中 h_ε 在 $B=B(0,\ r)$ 中是全纯的。

证明。 首先，我们证明初值问题（12）具有唯一解 $w=h_\varepsilon(z)$，该解在 $B.$ 中是全纯的。 事实上，考虑全纯变换 $w(z)=z\varphi(z)$，其中 $z\in B.$ 于是，初值问题（12）可以写成

$$(\alpha z+\tilde{f}(z,z\varphi))[\varphi+z\varphi']=\varepsilon(\beta z\varphi+\tilde{g}(z,z\varphi)),\quad \varphi_\varepsilon(0)=0. \tag{13}$$

由于 C_0 是正规双曲临界流形，因此 $\mathbf{Re}(\alpha)\neq 0$.因此，将方程（13）除以 αz，可得

$$\left(1+\frac{\tilde{f}(z,z\varphi)}{\alpha z}\right)[\varphi+z\varphi']=\varepsilon\left(\frac{\beta\varphi}{\alpha}+\frac{\tilde{g}(z,z\varphi)}{\alpha z}\right). \tag{14}$$

现在，我们定义全纯函数 $p(z,\ \varphi):=\frac{f(z,\ z\varphi)-\alpha z}{\alpha z}$ 以及 $q(z,\ \varphi):=\frac{\tilde{g}(z,\ z\varphi)}{\alpha z}$. 然后，由（11）和 $w=z\varphi$，我们得到

$$\tilde{p}(z,\varphi)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{s+l=n}a_{s,l}\varphi^l z^{n-1} \quad \text{and} \quad \tilde{q}(z,\varphi)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{s+l=n}b_{s,l}\varphi^l z^{n-1},$$

其在 q_ε 的某个邻域内收敛。重写方程（14），可得

$$z\varphi' = -\varphi + \varepsilon\frac{\frac{\beta\varphi}{\alpha} + q(z,\varphi)}{1+p(z,\varphi)} := F_\varepsilon(z,\varphi).$$

因此，将 F_ε 的线性部分明确写出，我们得到

$$z\varphi' = -\left(1-\frac{\varepsilon\beta}{\alpha}\right)\varphi + \frac{\varepsilon b_{20}}{\alpha}z + \varepsilon Q(z,\varphi), \tag{15}$$

其中

$$Q(z,\varphi) = \left(q(z,\varphi) - \frac{b_{20}}{\alpha}z\right) - \frac{q(z,\varphi)p(z,\varphi)}{1+p(z,\varphi)} - \frac{\beta\varphi p(z,\varphi)}{\alpha(1+p(z,\varphi))}.$$

回顾一下， F_ε 是 q_ε的一个邻域内的全纯函数，$F_\varepsilon(0,0) = 0$ 且 $Q(z,\varphi) = \mathcal{O}_2(z,\varphi)$。当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有$\frac{\varepsilon\beta}{\alpha} - 1 \notin \mathbb{N}$，于是根据布里奥-布盖判据（见命题4），我们得出（15）具有唯一解 $\varphi = \Lambda_\varepsilon(z)$，其在 $B.$ 中是全纯的。利用 $w = z\varphi$，初值问题（12）具有唯一解 $w = h_\varepsilon(z)$，其中 $h_\varepsilon(z) = z\Lambda_\varepsilon(z)$在 $B.$中是全纯的

现在，考虑全纯函数 $H_\varepsilon(z,\ w) = w - h_\varepsilon(z)$，其中$H_\varepsilon(0,\ 0) = 0$ 且 $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}(0,\ 0) = 0.$ 定义集合 $C_\varepsilon := \{(z,\ w) :\ w = h_\varepsilon(z) \quad h_\varepsilon(0) = 0, \quad h'_\varepsilon(0) = 0\}$。强调 $C_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}(0)$。根据构造，我们得到 C_ε 是一个不变集。

注意到， H 的秩就是矩阵 1×2的秩，其表达式为

$$J_{\mathbb{C}}H_\varepsilon(z,w) = \left(\frac{\partial H}{\partial z}(z,w), \frac{\partial H}{\partial w}(z,w)\right) = \left(-\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial z}(z), 1\right).$$

因此， $J_{\mathbb{C}}H$ 在 $C_\varepsilon.$ 的每一点都具有最大秩（秩为 1）。根据命题1，我们得出 C_ε 是一个维数为 1 的复流形。□

注5。从定理A的证明可以推知，将 C_0 是正规双曲流形这一假设替换为$\frac{\partial f}{\partial z}(0,\ 0) = \alpha \neq 0$，这个较弱的假设后，结论仍然成立。

下文假设：

(H) $J_{\mathbb{C}}(f,\ g)|_{q_\varepsilon}$的特征值为 α，$\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 和α，β 属于同一类型，也就是说，α 和 β 均为纯虚复数、实数，或实部和虚部均非零的复数。

此时，我们可以假设， C_0 表示为关于 w的 z 函数图，其中~。事实上，定义 $\Theta(z,w) = \alpha z + f(z,w)$以及$q_0 = (0,0)$。由于 $\Theta(q_0) = 0$ 且 $\frac{\partial\Theta}{\partial z}(q_0) = \alpha \neq 0,$ 因此根据隐式

函数定理，存在 q_0 的一个邻域 U_{q_0} 以及一个全纯函数 $z = L(w)$，使得 $L(0) = 0$ 且 $\Theta(L(w)\ w) = 0$，对所有 $w \in U_{q_0}$. 均成立。因此，局部地，临界流形由$C_0 = \{(z, w) : z = L(w) \quad L(0) = 0, \quad w \in U\}$.给出

回想一下， C_0 上的动力学由下式给出

$$\dot{w} = \beta w + g(L(w), w) =: G(w). \tag{16}$$

根据 b的第 [4, 定理 1。1] 中的第（ G ）项，我们知道 βw 和 βw 是 0-共形共轭的。

我们现在可以陈述本节的主要结果。

定理 B。 假设 $J_{\mathbb{C}}(f, g)|_{q_\varepsilon}$ 的特征值满足假设 **(H)**，其中 ε 是一个足够小的正参数。那么，与约化问题相关的中心、焦点和节点 (SF1)在奇异摄动下具有持久性。

证明。 由定理 A可知，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，系统（SF2）存在唯一的一维不变复流形 C_ε ，位于q_ε，其表达式为

$$C_\varepsilon = \{(z, w) : w = h_\varepsilon(z), \quad h_\varepsilon(0) = 0, \quad h'_\varepsilon(0) = 0\},$$

其中 h_ε 在 B 中全纯。

强调一下，关于 C_ε 的动力学由下式给出

$$\dot{z} = \frac{\dot{w}}{h'_\varepsilon(z)} = \frac{\alpha}{\varepsilon} z + \frac{\tilde{f}(z, h_\varepsilon(z))}{\varepsilon} =: \Gamma_\varepsilon(z). \tag{17}$$

根据 b 中的第 [4, 定理 1.1] 项，我们可以得出 Γ_ε 和 $\frac{\alpha}{\varepsilon} z$ 是 0-共形共轭的。根据（16）和（17），以及 α 和β 属于同一类型这一事实，结论成立。□

4. Other families of holomorphic slow-fast systems

本节旨在寻找慢快系统的一维不变复流形；这类系统在原点处的雅可比矩阵不一定可对角化。此外，我们不要求原点是系统的平衡点。

4.1. **非耦合微分系统**。考虑二维全纯慢-快系统（SF1），其中 f， g 是定义在穿孔圆盘 $D = D(0, \ R) \ \setminus \{0\}$.

我们假设，对于所有 $(z, w) \in C_0.$， $\frac{\partial f}{\partial w}(z, w) \neq 0$。根据命题 1，我们知道 C_0 是一个复流形。此外，我们可以假设 C_0 表示为一个函数的图，其中 w 用 z 表示。事实上，由于对于所有 $(z, w) \in C_0$， $\frac{\partial f}{\partial w}(z, w) \neq 0$，因此根据隐函数定理，

—

存在一个开集 U 和一个全纯函数 $w = \lambda(z)$，使得对于所有 $z \in U.$， $f(z, \lambda(z)) = 0,$

我们来引入系统（SF1）的轨道方程:

$$\frac{dw}{dz} = \varepsilon \frac{g(z,w)}{f(z,w)}. \tag{18}$$

假设存在定义在 Ω 上的全纯函数 η, κ，使得 $\frac{g}{f}(z,w) = \eta(z)\kappa(w)$ 对所有 $z, w \in \Omega$ 都成立，其中 L 是一条从 0 出发的射线， $B = B(0, r) \setminus \{0\}$，并且

- 或者 0 是 η （分别为 κ）在 B 中的唯一零点;
- 或者 0 是 η （分别为 κ）的一个孤立奇点，并且 η （分别为 κ）在 B 中没有零点。

由 [2, 推论 6.16], 可知，全纯函数 $\eta, \kappa : \Omega \to \mathbb{C}$ 在 Ω 中有原函数。因此 $1/\eta, 1/\kappa$ 也是 Ω 中的全纯函数，进而 η, κ 和 $1/\eta, 1/\kappa$ 都在 Ω 中有原函数。对方程 $\frac{dw}{dz} = \varepsilon\eta(z)\kappa(w)$ 积分可得，存在全纯函数 F, G，使得 $G(w) = \varepsilon F(z)$ $F'(z) = \eta(z)$ 且 $G'(w) = 1/\kappa(w)$。

下面我们陈述一个关于与慢-快系统相关的不变复流形存在性的有趣结果，其中轨道方程是可分离的。

定理 *C*. 考虑慢快系统 *(SF1)*，并假设存在定义在 *Ω* 中的全纯函数 η、κ ，使得 $\frac{g}{f}(z,w) = \eta(z)\kappa(w)$，对所有 $z, w \in \Omega$ 均成立。则存在一个与微分系统 *(SF1)* 相关联的一维不变复流形 C_ε ，使得

（a） C_ε 上的流在 $\varepsilon \to 0$时收敛于慢流。（b） C_ε 上的动力学由 $\dot{z} = g(z, w)$ 给出。

证明。考虑全纯函数 $H_\varepsilon(z, w) = G(w) - \varepsilon F(z)$ 以及集合 $C_\varepsilon = \{(z, w) : G(w) = \varepsilon F(z)\}$。回顾 $C_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}(0)$。由（18），我们得到 C_ε 是不变集。

强调 H_ε的秩就是矩阵 1×2的秩，其定义为

$$J_{\mathbb{C}} H_\varepsilon(z,w) = \left(\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}(z,w), \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}(z,w) \right) = \left(-\varepsilon\eta(z), \frac{1}{\kappa(w)} \right).$$

因此， $J_{\mathbb{C}} H_\varepsilon$ 在 C_ε. 的每一点处都具有最大秩（秩为 1）。由命题1，我们得出 C_ε 是一个维数为 1 的复流形。

现在，我们将证明条目（a）。推导方程 $G(w) = \varepsilon F(z)$，可得 $1 = \varepsilon k(w)\eta(z)$，这意味着 $f(z,\ w) = \varepsilon g(z,\ w)$。因此，$C_\varepsilon \subset D_\varepsilon = \{(z,\ w)\colon\ f(z,\ w) = \varepsilon g(z,\ w)\}$ 和 $D_0 = C_0$.

由于对所有（$z,\ w$）$\in C_\varepsilon$都有 $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}(z,w) \neq 0$，根据隐函数定理，存在一个开集 V 以及一个全纯函数 $w = h_\varepsilon(z)$，使得对所有 $z \in V$. 都有 $H_\varepsilon(z, h_\varepsilon(z)) = 0$。于是，将 $h_\varepsilon(z)$ 在 $\varepsilon = 0$ 附近展开为泰勒级数，可得对所有 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ 和 $z \in V \cap U$，$h_\varepsilon(z) = \lambda(z) + \varepsilon Q(z, \varepsilon)$，其中 Q 是一个全纯函数，并且$C_0 = \{(z, w)\colon\ w = \lambda(z)\ \ z \in U\}$ 在局部上是临界流形。

下面我们将证明 C_0 与C_ε之间的豪斯多夫距离的阶为 ε，即 $d_H(C_0,\ C_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。回忆一下，非空子集 A 和 B 之间的豪斯多夫距离 d_H 定义为

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x, y)\,,\, \sup_{x\in B}\inf_{y\in A} d(x, y)\right\}.$$

因此，$d_H(C_0,\ C_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$，前提是以下陈述成立：

i. 对每个 $p \in C_\varepsilon$，存在 $q \in C_0$，使得 $d(p,\ q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$；

ii. 对每个 $q \in C_0$，存在 $p \in C_\varepsilon$，使得 $d(p,\ q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。

下文将验证条目（i）。条目（ii）可以类似地验证。

考虑点 $p = (z,\ w) \in C_\varepsilon$，并取 $q = (z,\ \xi) \in C_0$. 然后，$w = h_\varepsilon(z) = \lambda(z) + \varepsilon Q(z,\ \varepsilon)$，且 $\xi = \lambda(z)$。因此，

$$d(p, q) = ||(0, w - \xi)|| = ||(0, \varepsilon Q(z, \varepsilon))|| = |Q(z, \varepsilon)|\,\varepsilon \leq \varepsilon M,$$

其中我们使用了对于所有 $(z,\ \varepsilon) \in K_{V\cap U} \times [0, \varepsilon_0]$，$|Q(z,\ \varepsilon)| \leq M$，且 $K_{V\cap U}$ 是 $V \cap U$ 的紧子集。这意味着 $d(p,\ q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。

最后，我们证明条目（b）。由于 $H_\varepsilon(z,\ w) = 0$ 对于所有 $(z,\ w) \in \overline{C}_\varepsilon$，因此 $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}\dot{w} = 0$. 所以，$C_\varepsilon$ 上的动力学由

$$\dot{w} = -\frac{\dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}\dot{z}}{\dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}} = -\frac{-\varepsilon\eta(z)\dot{z}}{\dfrac{1}{\kappa(w)}} = \varepsilon\,\underbrace{\eta(z)\kappa(w)}\,\dot{z} = \frac{g(z,w)}{f(z,w)} f(z,w) = g(z,w).$$

□

需要强调的是，可以将前述结果推广到如下形式的非耦合慢-快系统：

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{z} = f(z), \\ \dot{w} = g(w), \end{cases} \tag{19}$$

其中 f，g 是在 Ω 中定义的全纯函数。因此，以下结果是上述结论的直接推论。

推论 6。与 n 相关的约化问题的平衡点和(19)中阶数为的极点在奇异摄动下具有持久性。

例 7。 设 n 为自然数，且 $n \geq 2$. 考虑如下系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = z^n, \\ \dot{w} = g(w), \end{cases} \tag{20}$$

其中 g 是 [4, 定理 11]中给出的标准形之一。记得， $C_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ z = 0\}$ 是与系统 (20)相关联的临界流形，该临界流形不是正规双曲的。根据定理 C，存在一个不变复流形 C_ε 其形式为:

- $C_\varepsilon = \{(z, w) : z^{n-1} \ln(w) = \varepsilon \frac{\eta}{-n+1}\}$, *provided that* $g(w) = \eta w$, *with* $\eta \in \mathbb{C}$.
- $C_\varepsilon = \{(z, w) : z^{n-1} = \varepsilon \frac{m-1}{n-1} w^{m-1}\}$, *provided that* $g(w) = w^m$, *with* $m \geq 2$.
- $C_\varepsilon = \{(z, w) : z^{n-1} = \varepsilon \frac{m+1}{-n+1} w^{-(m+1)}\}$, *provided that* $g(w) = \frac{1}{w^m}$, *with* $m \geq 2$.
- $C_\varepsilon = \left\{(z, w) : z^{n-1} \left(\frac{w^{-m+1}}{-m+1} + \ln(w)\right) = \varepsilon \frac{\gamma}{-n+1}\right\}$, *provided that* $g(w) = \frac{\gamma w^m}{1+w^{m-1}}$, *with* $m \geq 2$ *and* $\gamma \in \mathbb{C}$.

此外，在这两种情况下，我们都有 C_ε 在 ε 趋于 *0* 时收敛到 C_0 。

4.2. **耦合微分方程**。 考虑系统（SF3），其中 g, G 是在 Ω 中定义的全纯函数，满足 $G'(w) = 1/g(w)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 在此背景下，（SF3）的临界流形为 $C_0 = \{(z, w)$: $z = -\frac{\beta G(w)}{\alpha}\}$。

我们来介绍系统（SF3）的轨道方程:

$$\varepsilon \frac{dz}{dw} = \frac{\alpha z + \beta G(w)}{g(w)}. \tag{21}$$

由于 $\dot{w} = g(w)$，因此 $G(w) = t$. 由（SF3）的第一个方程，我们得到由 $\varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta t$. 回顾一下，$z = -\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha t + \varepsilon)$ 是前述方程的一个解。因此，我们得到方程 $z = -\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha G(w) + \varepsilon)$ ，它满足轨道方程（21）。

在下一个结果中，我们证明满足上述方程的点集实际上是一个一维不变复流形。此外，如果假设临界流形并非正规双曲，那么几何奇异摄动理论 无法确定不变流形 C_ε 的稳定类型。然而，

在下述定理中，我们给出确保不变流形 C_ε 具有指数吸引性的条件（见图3）。

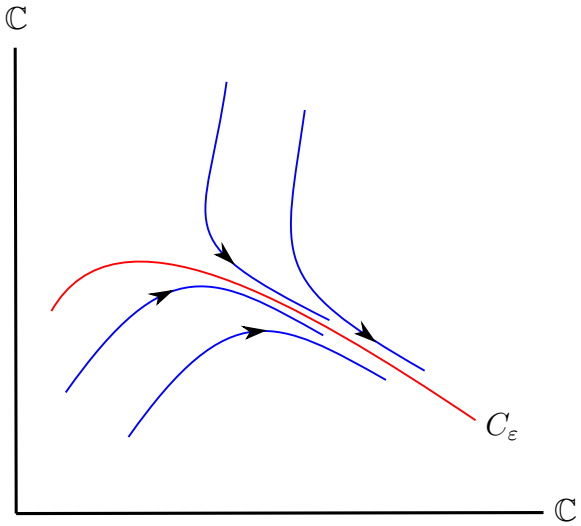

FIGURE 3. C_ε 在某个区域 $\mathcal{R}$ 内具有指数吸引性，此时 C_0 不是正规双曲的。

定理 D。考虑慢快系统 （SF3）。那么，存在一个一维不变复流形 C_ε 与微分系统 （SF3）相关联，使得

（*a*）当 $\varepsilon \to 0$ 时， C_ε 上的流收敛于慢流。（*b*） C_ε 上的动力学由 $\dot{w} = g(w)$ 给出。（*c*）如果 $\alpha = i\alpha_2$，其中 $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，那么以初始条件 $z(w_0)$ 出发的系统（*21*）的轨道 $= z_0$ 在区域 $\mathcal{R} = \{(z, w): \ \alpha_2 \Im(G(w) - G(w_0)) \geq \eta > 0\}$ 内始终与不变流形 C_ε 保持指数接近，其中某个 $\eta > 0$。

证明。考虑全纯函数 $H_\varepsilon(z, w) = z + \frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha G(w) + \varepsilon)$ 以及集合 $C_\varepsilon = \{(z, w) : z = -\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha G(w) + \varepsilon)\}$。回顾一下， $C_\varepsilon = H_\varepsilon^{-1}(0)$。根据构造， C_ε 是一个不变集。

请注意， H_ε 的秩就是矩阵 1×2 的秩，其表示为

$$J_{\mathbb{C}} H_\varepsilon(z, w) = \left(\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}(z, w), \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}(z, w) \right) = \left(1, \frac{\beta}{\alpha g(w)} \right).$$

因此， $J_{\mathbb{C}} H_\varepsilon$ 在 C_ε. 的每一点都具有最大秩（秩为 1）。根据命题1，我们得出 C_ε 是一个维数为 1 的复流形。

现在，我们将证明命题（a。为此，只需证明 C_0 与 C_ε 之间的豪斯多夫距离为 ε 阶，或者等价地证明以下陈述成立：

i. 对每个 $p \in C_\varepsilon$，都存在 $q \in C_0$，使得 $d(p,q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$;
ii. 对每个 $q \in C_0$，都存在 $p \in C_\varepsilon$，使得 $d(p,q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。
接下来，我们将验证第（i）项。第（ii）项可以用类似的方法验证。

考虑点 $p = (z, w) \in C_\varepsilon$ 并取 $q = (\xi, w) \in C_0$. 然后，$z = -\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha G(w) + \varepsilon)$ 和 $\xi = -\frac{\beta}{\alpha} G(w)$。因此，

$$d(p,q) = ||(z-\xi, 0)|| = \left|\left|\left(-\frac{\beta}{\alpha^2}\varepsilon, 0\right)\right|\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha^2}\right|\varepsilon.$$

这意味着 $d(p, q) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。

接下来，我们证明第（b）项。由于对于所有 $(z, w) \in C_\varepsilon$, $H_\varepsilon(z, w) = 0$，那么 $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}\dot{w} = 0$. 因此，$C_\varepsilon$ 上的动力学由以下内容决定：

$$\dot{w} = -\frac{\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial z}\dot{z}}{\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial w}} = -\frac{\dot{z}}{\frac{\beta}{\alpha g(w)}} = -\frac{\alpha z + \beta G(w)}{\frac{\varepsilon\beta}{\alpha g(w)}} = -\frac{-\frac{\varepsilon\beta}{\alpha}}{\frac{\varepsilon\beta}{\alpha g(w)}} = g(w).$$

最后，我们证明第（c）项。定义 $h_\varepsilon(w) = -\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha G(w) + \varepsilon)$。因此，不变流形由 $C_\varepsilon = \{(z, w) : z = h_\varepsilon(w)\}$. 给出
现在，我们对方程（$v = z - h_\varepsilon$）w进行变量代换，得到：21

$$\varepsilon\frac{dv}{dw} = \frac{i\alpha_2}{g(w)}v. \tag{22}$$

回顾一下，具有初始条件 22）v（w_0）$= z$（w_0）$-h_\varepsilon$（w_0）的解可写为 v（w）$= v$（w_0）$e^{\frac{i\alpha_2(G(w)-G(w_0))}{\varepsilon}}$. 因此，

$$|v(w)| = |v(w_0)|e^{-\frac{\alpha_2\Im(G(w)-G(w_0))}{\varepsilon}} \leq |v(w_0)|e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}}.$$

由于 $\eta > 0$，因此任意解都会指数趋近于不变流形 C_ε. □

例 8。考虑如下定义的系统

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{z} = iz + w^2, \\ \dot{w} = \frac{1}{2w}, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $(z_0, w_0) = (\varepsilon + i, 1)$。注意，$G(w) = w^2$ 和 $\alpha = i$. 由于 $G'(w) = 2w$, 根据定理 D，存在一个与微分系统 (23) 相关联的一维不变复流形 C_ε，它在 $\mathcal{R} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2$ 上是指数吸引的：$Re(w)\, Im(w) > 0\}$.

5. Fenichel manifold approximation

本节重点介绍如何利用 Laurent级数和 *Fenichel* 定理 来近似慢快系统（SF4）的复流形，并寻找不带复结构的光滑流形。特别是，我们感兴趣的是研究系统（SF4）的动力学。

5.1. 不存在具有复结构的光滑流形。 下面我们介绍两族慢-快系统。尽管它们具有相关的光滑局部不变流形，却不具有复结构。

5.1.1. 线性w^n 情形。 考虑以下系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta w, \\ \dot{w} = w^n, \end{cases} \tag{24}$$

其中 α, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $n \geq 2$。回忆一下，与系统C_0 （24）相关的临界流形在 Re（α） $= \alpha_1 \neq 0$时是正规双曲的。令 S_0 为 C_0. 的一个紧子集

现在我们将 *Fenichel*定理 应用于与系统（ $\mathbb{C}^\infty$ 24）相关的等价四维实系统，于是存在慢-快系统（24）的一个光滑局部不变流形 (,) : 0)，它与

强调指出，这并不能保证复函数$h_\varepsilon(z)$是全纯函数。事实上，假设存在一个不变流形 $C_\varepsilon = \{(z,\ w)\colon\ z = h_\varepsilon(w)\}$，其中

$$h_\varepsilon(w) = a_0 + \cdots + a_n w^n + \cdots + a_{2n-1} w^{2n-1} + \mathcal{O}(w^{2n}). \tag{25}$$

由于 $\dot{z} = h'_\varepsilon(w)\ \dot{w}$ 因此我们得到以下方程

$$\alpha h_\varepsilon(w) + \beta w = h'_\varepsilon(w) \varepsilon w^n. \tag{26}$$

将（25）代入（26），得到对于所有 $i \neq kn - (k-1)$，$a_1 = -\frac{\beta}{\alpha}$，$a_n = -\frac{\beta\varepsilon}{\alpha^2}$，以及 $a_{kn-(k-1)} = -\frac{\beta^k \varepsilon^k \prod_{j=2}^{k} [(j-1)n - (j-2)]}{\alpha^{k+1}}$，均有 $k \geq 2$. 因此，

$$C_\varepsilon = \left\{ (z,w) : z = -\frac{\beta}{\alpha} w - \frac{\beta\varepsilon}{\alpha^2} w^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{kn-(k-1)} w^{kn-(k-1)} \right\}.$$

注意，级数 $\sum_{k=2}^{\infty} a_{kn-(k-1)} w^{kn-(k-1)}$ 在 $w \neq 0$ 时发散，这与全纯函数 h_ε. 的存在相矛盾

5.1.2. 线性-$\frac{\gamma w^n}{1+w^{n-1}}$情形。考虑以下系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta w, \\ \dot{w} = \frac{\gamma w^n}{1+w^{n-1}}, \end{cases} \tag{27}$$

其中 α, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $n \geq 2$。回顾一下，与系统（C_0 相关联的临界流形，在满足 27）是正规双曲的，条件是 Re（α） $= \alpha_1 \neq 0$。取 S_0 的一个紧子集 C_0.

现在，我们将 ***Fenichel*定理**应用于与该系统等价的 $\mathbb{C}^\infty$ 四维实系统，该系统与系统（27）相关联。于是，慢快系统（ $S_\varepsilon = \{$（z， w）：$z = h_\varepsilon$（w）$\}$ 存在一个光滑局部不变流形 27），它与 S_0.微分同胚

请注意，这并不能保证复函数$h_\varepsilon(z)$是全纯函数。事实上，假设存在一个不变流形 $C_\varepsilon = \{(z,\ w):\ z = h_\varepsilon(w)\}$，其中

$$h_\varepsilon(w) = a_0 + \cdots + a_n w^n + \cdots + a_{2n-1} w^{2n-1} + \mathcal{O}(w^{2n}). \tag{28}$$

由于 $\dot{z} = h'_\varepsilon(w)\, \dot{w}$，因此

$$\alpha h_\varepsilon(w) + \beta w = h'_\varepsilon(w) \varepsilon \frac{\gamma w^n}{1 + w^{n-1}}. \tag{29}$$

将（28）代入（29），可得 $a_i = 0$，对所有 $i \neq kn - (k-1)$，$a_1 = -\frac{\beta}{\alpha}$，$a_n = -\frac{\beta\gamma\varepsilon}{\alpha^2}$，以及$a_{kn-(k-1)} = -\frac{\beta\gamma\varepsilon \prod_{j=2}^{k} [\alpha - ((j-1)n - j - 2)\gamma\varepsilon])()}{\alpha^{k+1}}$，其中 $k \geq 2$. 因此，

$$C_\varepsilon = \left\{ (z, w) : z = -\frac{\beta}{\alpha} w - \frac{\beta\gamma\varepsilon}{\alpha^2} w^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{kn-(k-1)} w^{kn-(k-1)} \right\}.$$

注意，级数 $\sum_{k=2}^{\infty} a_{kn-(k-1)} w^{kn-(k-1)}$ 在 $w \neq 0$ 时发散，这与全纯函数 h_ε. 的存在相矛盾

以下结果可直接由 [4, 定理 1。1] 以及情形5.1.1和5.1.2得出。

命题 9。考虑系统(SF1) 满足 g 有一个$n > 1$ 阶零点，且 f 是线性全纯函数，则系统(SF1) 不存在形如 $C_\varepsilon = \{(z,\ w) :\ z = h_\varepsilon(w)\}$的复流形。

5.2. **复不变流形的近似**。 这里我们介绍两类慢-快系统：当它们具有相关的局部不变光滑流形且该流形具有复结构时，可通过 Laurent级数对其进行近似；此外，奇异摄动还会保留约化问题相关的奇点。

5.2.1. 线性-线性情形。 考虑以下系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = az + bw, \\ \dot{w} = cz + dw, \end{cases} \tag{30}$$

其中 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 且 b， c， $d \in \mathbb{C}$。假设与系统（$C_0$30）相关联的临界流形 a 是正规双曲的，即 Re（$\neq 0$）。

注意，与系统（30）相关联的约化问题为

$$\begin{cases} 0 = az + bw, \\ \dot{w} = \left(\frac{ad-bc}{a}\right) w =: \widetilde{g}(w). \end{cases} \tag{31}$$

因此，平衡点为 $w_0 = 0$ 且 $\widetilde{g}'(w_0) = \frac{ad-bc}{a} = \alpha + i\beta$，其中 $\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{ad-bc}{a}\right)$ 且 $\beta = \mathrm{Im}\left(\frac{ad-bc}{a}\right)$. 此外，系统 (31) 在该平衡点处的雅可比矩阵为

$$J_{\mathbb{R}}\widetilde{g}|_{w_0} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

行列式 D 和迹 T 为

$$D = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{and} \quad T = 2\alpha.$$

- $\beta \neq 0$. 我们有：如果 $\alpha > 0$，那么原点是约化问题（31）的排斥焦点；如果 $\alpha < 0$，那么原点是（31）的吸引焦点。
- $\beta = 0$. 我们有，如果 $\alpha > 0$ 那么原点是约化问题的排斥节点（31）；如果 $\alpha < 0$ 那么原点是（31）的吸引节点。

因此，我们得到下表：

α	j^u	j^s
$+$	2	0
$-$	0	2

其中 j^u、j^s 已在定理 2 中定义。在这种情况下，雅可比矩阵（9）的特征值为 $\lambda_{\pm} = \mathrm{Re}\,(a) \pm i\mathrm{Im}\,(a)$。因此，我们得到下表：

Re (a)	k^u	k^s
$+$	2	0
$-$	0	2

其中 k^u， k^s 已在定理 2 中定义。因此，若 α，$\mathrm{Re}(a) > 0$，则 $j^u + k^u = 4$ 且 $j^s + k^s = 0$。若 α，$\mathrm{Re}\,(a) < 0$，则 $j^u + k^u = 0$ 且

$j^s+k^s=4$.若 $sign(\alpha)\neq sign(\mathrm{Re}\,(a))$，则 $j^u+k^u=2$且 $j^s+k^s=2$.根据定理的第 (ii) 项2:

- 若 α，$\mathrm{Re}\,(a)>0$，则系统（ $q_\varepsilon=0$，0）的平衡点30是一个全局排斥点。
- 若 α，$\mathrm{Re}\,(a)<0$，则系统（ $q_\varepsilon=0$，0）的平衡点30是一个全局吸引点。
- 若 $sign(\alpha)\neq sign(\mathrm{Re}(a))$，则系统（ $q_\varepsilon=$（30）的平衡点是一 $(0,0)$ 个鞍点。

注意，当 $\alpha=0$时，我们无法使用定理 ii中的第 2 项，不过，C_0 是正规双曲的，因此，若取 S_0 C_0的一个紧子集，就可以对与系统（ ***Fenichel*定理**）等价的 $\mathbb{C}^\infty$ 四维实系统应用Fenichel定理。于是，慢-快系统（30）存在一个光滑局部不变流形 $S_\varepsilon=\{(z,\ w)\colon\ z=h_\varepsilon(w)\}$，它与30微分同胚 S_0.

虽然这并不能保证复函数 $h_\varepsilon(z)$ 是全纯函数，但如果 Fenichel 流形存在，我们希望了解其上的动力学。因此，假设 $C_\varepsilon=\{(z,w)\colon\ z=h_\varepsilon(w)\}$，其中 $h_\varepsilon(w)=\lambda_0+\lambda_1 w+\mathcal{O}(w^2)$。由于 $\dot{z}=h_\varepsilon'(w)\,\dot{w}$，于是

$$ah_\varepsilon(w)+bw=h_\varepsilon'(w)\varepsilon((\alpha+i\beta)w).$$

这意味着 $\lambda_i=0$，对所有 $i\neq 1$ 和 $\lambda_1=\ _{a-\varepsilon}{}^{-b}\ \cancel{(\alpha+i\beta)}$. 因此，

$$C_\varepsilon=\left\{(z,w):z=\frac{-b}{a-\varepsilon(\alpha+i\beta)}w\right\}.$$

特别地，如果 $\alpha=0$，那么

$$C_\varepsilon|_{\alpha=0}=\left\{(z,w):z=\frac{-b}{a-i\varepsilon\beta}w\right\}.$$

回忆一下，流形 $C_\varepsilon|_{\alpha=0}$ 上的动力学由下列微分方程给出

$$\dot{w}=i\beta w.$$

因此，如果 w_0 是约化问题（31）的中心，那么 w_ε 是系统（30）的中心，并且 $w_\varepsilon\to w_0$ 当 $\varepsilon\to 0$ （见图 4）。

以下结果是 [4,定理 11] 以及情形 5.2.1的直接推论。

命题 10. 考虑系统 (SF1) 满足 g 有一个一阶零点 w_0且 f 是线性全纯函数。如果系统 (SF1)存在具有复结构的不变流形，那么与 (SF1) 相关的约化问题的中心在奇异扰动下保持不变。

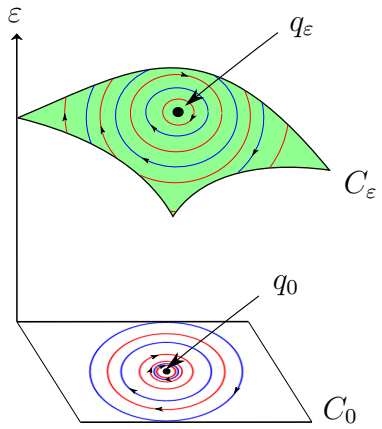

FIGURE 4. 通过奇异摄动保持约化问题的中心。

5.2.2. 线性极点情形。 考虑以下系统

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{z} = \alpha z + \beta w, \\ \dot{w} = \frac{1}{w^n}, \end{cases} \tag{32}$$

其中 α， $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $n \geq 1$。回顾一下，C_0 与系统（32）相关联的临界流形在 Re（α） $= \alpha_1 \neq 0$时是正规双曲的。令 S_0 为 C_0.的一个紧子集

现在将*Fenichel*定理应用于与系统（ $\mathbb{C}^\infty$ 32）等价的四维实系统，则慢快系统（32）存在一个光滑局部不变流形 $S_\varepsilon = \{$（z， w）：$z = h_\varepsilon$（w）$\}$，该流形与 S_0.微分同胚

尽管这并不能保证复函数 $h_\varepsilon(z)$ 是全纯函数，但如果 Fenichel 流形存在，我们希望了解其上的动力学。因此，假设存在一个不变流形 $C_\varepsilon = \{(z,\ w)\colon\ z = h_\varepsilon(w)\}$，其中

$$h_\varepsilon(w) = a_0 + \cdots + a_{n+2}w^{n+2} + \cdots + a_{2n+3}w^{2n+3} + \cdots + \mathcal{O}(w^{3n+4}). \tag{33}$$

由于 $\dot{z} = h'_\varepsilon(w)\,\dot{w}$，因此得到以下方程

$$\alpha h_\varepsilon(w) + \beta w = h'_\varepsilon(w)\varepsilon w^{-n}. \tag{34}$$

将（33）代入（34），可得 $a_i = 0$，对于所有 $i \neq kn + (k+1)$ 和 $a_{kn+(k+1)} = \frac{\alpha^{k-1}\beta}{\varepsilon^k \prod_{j=1}^{k}[jn+(j+1)]}$，且 $k \geq 1$.。因此，

$$C_\varepsilon = \left\{ (z,w) : z = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn+(k+1)} w^{kn+(k+1)} \right\}.$$

容易看出，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn+(k+1)} w^{kn+(k+1)}$ 对所有 $w \in \mathbb{C}$ 都收敛。回想一下，流形 C_ε 上的动力学由以下微分方程给出

$$\dot{w} = \frac{\beta w + \frac{\alpha\beta}{(n+2)\varepsilon} w^{n+2} + \frac{\alpha^2\beta}{(n+2)(2n+3)\varepsilon^2} w^{2n+3} + \mathcal{O}(1/\varepsilon^3, w^{3n+4})}{\frac{\beta}{\varepsilon} w^{n+1} + \frac{\alpha\beta}{(n+2)\varepsilon^2} w^{2n+2} + \mathcal{O}(1/\varepsilon^3, w^{3n+3})} =: F_\varepsilon(w).$$

因此，在 $w_0 = 0$ 附近展开 F_ε，可得

$$F_\varepsilon(w) = \frac{\varepsilon}{w^n} + \mathcal{O}(1/\varepsilon, w^{n+2}).$$

因此， w_0 是 n 阶 F_ε 的极点（见图5）。由 [4, 定理 1。1], 可得， F_ε 和 $G \equiv \frac{1}{w^n}$ 是 0-共形共轭的。 —

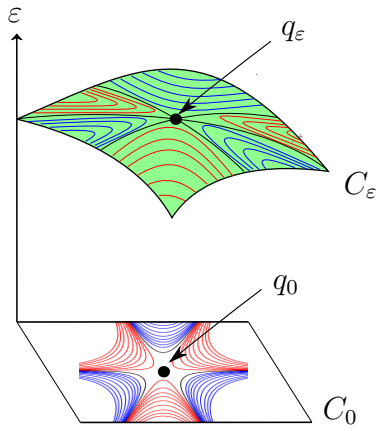

FIGURE 5. 奇异摄动下约化问题的极点持久性。

以下结果可直接由 [4,定理 11] 及情形5.2.2得出。

命题 11。考虑系统(SF1)，其中 g 有一个 w_0阶极点 $n \geq 1$，且 f 是线性全纯函数。如果系统(SF1) 存在具有复结构的不变流形，那么，与(SF1) 相关的约化问题中的 n 阶极点在奇异摄动下具有持久性。

6. 声明与宣言

作者声明，他们不存在任何已知的竞争性经济利益或个人关系，可能影响本文所报告的工作。

7. Acknowledgements

本文得益于巴西联邦研究生教育支持与评估机构（CAPES）所提供的奖学金资助，该资助属于 CAPES-Print 项目，项目编号为 88887.310463/2018-00，国际合作项目编号为 88881.310741/2018-01。Paulo Ricardo da Silva 还获得了 S˜ao Paulo Research Foundation（FAPESP）拨款 2019/10269-3 以及 CNPq 拨款 302154/2022-1 的部分支持。

Gabriel Rond´on 获得圣保罗研究基金会（FAPESP）项目资助，项目编号为 2020/06708-9 和 2022/12123-9。Luiz Fernando Gouveia 获得圣保罗研究基金会（FAPESP）项目资助，项目编号为 2020/04717-0。

References

[1] B. J. Briot，C. 关于由微分方程定义的函数性质的研究。*J. Ecol. Imp. Poly.*，21:133–197，1856。[2] J. B. Conway。单复变量函数，数学研究生教材第 11 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1978。[3] N. Fenichel。常微分方程的几何奇异摄动理论。*J. Differential Equations*，31(1):53–98，1979。[4] A. Garijo、A. Gasull 和 X. Jarque。一维全纯向量场奇点的标准形。*Electron. J. Differential Equations*，第 122 号，7 页，2004。[5] J. D. Gray 和 S. A. Morris。满足柯西-黎曼方程的函数何时解析？*Amer. Math. Monthly*，85(4):246–256，1978。[6]E. Hille。复域中的常微分方程。纯粹数学与应用数学。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons]，，纽约-伦敦-悉尼，1976。[7] D. Huybrechts。复几何。Universitext。Springer-Verlag，柏林，2005。导论。[8]K. Iwasaki、H. Kimura、S. Shimomura 和 M. Yoshida。从 *Gauss* 到 *Painlev´e*。数学专题，E16。Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1991。特殊函数的现代理论。[9] C. K. R. T. Jones。几何奇异摄动理论。载于动力系统（*Montecatini Terme，1994*），数学讲义第 1609 卷，载于数学讲义，第 44–118 页。Springer，柏林，1995。[10] J. Llibre、P. R. da Silva 和 M. A. Teixeira。通过 $\mathbb{R}^3$ 奇异摄动对不连续向量场进行正则化。*J. Dynam. Differential Equations*，19(2):309–331，2007。[11]I. M. Moroz。电信领域中出现的一些复微分方程。载于奇点理论及其应用，第二部分（*Coventry，1988/1989*），数学讲义第 1463 卷，载于数学讲义，第 278–293 页。Springer，柏林，1991。[12] I. M. Moroz。一类复微分方程中的分岔。*EuropeanJ. Appl. Math.*，3(3):273–282，1992。

[13] D. J. Needham。二维复全纯系统的中心定理及其推广。*Proc. Roy. Soc. London Ser. A*，450(1939):225–232，1995。[14] D. J. Needham 和 S. McAllister。二维复全纯动力系统中的中心族。*R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng.Sci.*，454(1976):2267–2278，1998。[15]V. Scheidemann。多复变函数论导论。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2005。[16] P. Szmolyan。奇异摄动问题中的横截异宿轨道和同宿轨道。*J. Differential Equations*，92(2):252–281，1991。[17] M. A. Teixeira 和 P. R. da Silva。非光滑系统的正则化与奇异摄动技术。*Phys. D*，241(22):1948–1955，2012。[18] R. O. Wells, Jr。微分与复几何：原点、抽象与嵌入。Springer，Cham，2017。

São Paulo State University (Unesp), Institute of Biosciences, Hu-manities and Exact Sciences. Rua C. Colombo, 2265, CEP 15054–000S. J. Rio Preto, São Paulo, Brazil.电子邮件地址: gabriel.rondon@unesp.br电子邮件地址: paulo.r.silva@unesp.br电子邮件地址: fernando.gouveia@unesp.br