arXiv:2304.00182v1 [math.ST] 1 Apr 2023

# 改进的自适应II型渐进删失下Chen分布的统计分析

Li Zhang✉*

西北师范大学数学与统计学院，中国兰州 730070

2023年4月4日

**摘要**

本文研究了改进的自适应II型渐进删失数据下，具有浴盆形风险率函数的Chen分布两个未知参数的估计。提出了两个参数的最大似然估计，并利用渐近正态性建立了近似置信区间。在对称损失函数和非对称损失函数下进行贝叶斯估计，其中提出了重要性抽样和Metropolis-Hastings算法。最后，通过蒙特卡罗模拟实验评估各种估计方法的性能，并通过分析一个真实数据集展示所提出估计方法的应用。

**关键词**：浴盆形风险率函数；改进的自适应 II 型渐进删失；最大似然估计；近似置信区间；贝叶斯估计；蒙特卡罗模拟

## 1 引言

在可靠性研究和寿命试验中，大多数试验需要很长时间才能结束，但考虑到试验的成本和时间，无法观察到所有个体的故障时间，只能观察到少数实验个体的确切故障时间，并且还需要考虑可能导致个体故障的因素，因此，开展以下关于删失数据的研究是合理且必要的。

*✉通讯作者。电子邮箱：2021212088@nwnu.edu.cn

经典删失方案包括I型删失和II型删失，这是最基本的删失方案。其定义如下：假设有 $n$ 个相互独立且同分布的试验单元投入寿命试验，I型删失要求试验在预先设定的时间点 $T$终止，而II型删失要求在观察到预定数量的故障个体$m < n$ 后终止试验。混合删失方案是I型删失与II型删失的混合。Epstein（1954年）首次提出了I型混合删失方案。Chen和Bhattacharyya（1987年）推导了基于混合删失样本的指数分布均值的最大似然估计量的精确分布，以及均值的精确置信下限。Childs等人（2003年）提出了一种混合删失方案，可确保寿命试验中至少发生固定数量的故障，并研究了指数分布下最大似然估计量的精确分布以及均值的精确置信下限。Kundu（2007年）研究了数据为混合删失时威布尔参数的统计推断。上述三种删失方案的缺点是，除试验终止时外，这些试验单元在其他时间点都不会被移除。为解决这一问题，可采用II型渐进删失方案，该方案结合了II型渐进删失和I型删失。可参见Balakrishnan和Aggarwala（2000年）提出的II型渐进删失方案。II型渐进删失方案可描述如下：考虑将 $n$ 个相同的试验单元投入寿命试验，令 $X_1$、$X_2$、$\cdots$、$X_n$ 为相应的故障时间，且$X_1 < X_2 < \cdots < X_n$，令 $m$ 为预定的故障数量。当发生第一次故障时，将故障时间记为 $X_{1:m:n}$，此时从剩余的 $n-1$ 个试验单元中随机移除 $R_1$ 个。类似地，观察到第二个故障时间 $X_{2:m:n}$时，从剩余的 $n-2-R_1$ 个试验单元中随机移除 $R_2$ 个，依此类推；在第 $m$-$th$ 个故障时间 $X_{m:m:n}$时，移除所有剩余的 $n-m-R_1-R_2-\cdots-R_{m-1}$个试验单元。在渐进删失方案中， $R_1$、$R_2$、$\cdots$、$R_m$ 在研究开始前预先确定，且在试验期间保持不变。Childs等人（2008年）提出了II型渐进混合删失方案。若 $X_{m:m:n} > T$，则试验在 $X_{m:m:n}$终止；否则，试验在 $T$终止。Dey和Dey（2014年）考虑了II型渐进删失方案下瑞利分布未知参数的估计。Tomer和Panwar（2015年）研究了I型渐进混合删失下麦克斯韦分布的点估计和区间估计

数据。ö.Gürünlü Alma & Belaghi (2016年）讨论了当单个个体的寿命分布服从正态分布和极值分布时，渐进II型渐进混合删失数据的分析。Cramer等人 (2016年)研究了该删失方案下的指数分布。Zhang & Gui (2019)基于渐进II型删失数据，研究了广义瑞利分布可靠性的推断。Zhang& Gui(2020年)基于渐进II型删失方案，为帕累托分布构建了拟合优度检验过程。

然而，这类删失方案存在一个问题：有效单元的数量是随机的。如果获得的有效样本非常小或接近于0，就会导致统计推断过程无法进行，或者实验效率非常低。因此，为了避免这一问题，Ng等人（2009年）首次提出了一种称为自适应II型渐进删失（AT-II PCS）的新方案，该方案融合了I型删失和II型渐进删失。在此删失方案下，待观测的失效单元数量 $m$ 和渐进删失方案 $R_1 R_2 \cdots R_m$均预先给定，但在实验过程中，某些 $R_i$ 值可能会根据实际情况发生变化，因此该删失方案能够尝试在实验总时间、失效单元数量以及统计分析的有效性之间取得平衡。具体说明如下：如果 $X_{m:m:n} < T$，则实验在 $X_{m:m:n}$时结束，剩余的 $R_m$ 个单元全部移除。否则，如果在时间点 $T$之前，失效个体的数量为 $j$（$0 < j < m$）且 $X_{j:m:n} < T < X_{j+1:m:n}$。令$R_{j+1} = \cdots = R_{m-1} = 0$，试验继续进行，直至观测到第m个单元失效，且 $R_m = n - m - \sum_{i=1}^{j} R_i$（$i = 1, \cdots, j$），实验在 $X_{m:m:n}$时结束。这里的$T$、 $m$、 $R_1$、 $R_2$、 $\cdots$、 $R_m$（$R_1 + R_2 + \cdots + R_m + m = n$）均在实验前预先设定。时间 $T$ 的取值在确定 $R_i$的取值方面起着非常重要的作用。当$T \to \infty$时，显然时间并非实验者关注的主要因素。因此，如果 $T \to 0$，该删失方案将退化为一般的II型渐进删失；如果 $T \to 0$，则该删失方案退化为传统的II型删失方案。Ye等人（2014年）研究了自适应II型渐进删失方案的一些一般统计性质。Nassar & Abo-Kasem（2017年）描述了自适应II型渐进删失方案下逆威布尔分布参数的估计。El-Din等人（2017年）研究了基于自适应II型渐进删失方案的广义指数分布估计。Panahi & Moradi（2020年）讨论了基于自适应II型渐进删失方案的反指数化瑞利分布参数估计问题。Mohan & Chacko（2021年）研究了基于自适应II型渐进删失方案的双参数库马拉斯瓦米-指数分布参数估计。Elshahhat & Nassar（2022年）考虑了具有随机移除的自适应II型渐进混合删失抽样。Lv等人（2022年）研究了统计推断

基于自适应II型渐进删失方案的Gompertz分布。在自适应II型渐进删失方案中，实验时间并非重要考量。我们关注的是能否观测到足够多的 $m$ 失效单元。如果试验单元是高可靠性产品，实验持续时间将会很长，而自适应II型渐进删失方案无法保证试验总时间令人满意且适当。但在许多实际情况下，实验时间不可避免地是一个需要考虑的重要因素。

为弥补这一不足，Yan等人（2021年）提出了一种改进的删失方案，称为改进的自适应II型渐进删失方案（IAT-II PCS）。该方案的优点之一是能够确保试验在规定时间内结束。IAT-II PCS的详细说明如下：假设试验中有 $n$ 个单位。假设这些单位相互独立且服从相同分布，试验前预先指定待观测的失效单位 $m$ 以及删失方案 $R=(R_1, R_2, \ldots\ldots, R_m)$。此外，还预先指定两个时间阈值 $T_1$ 和 $T_2$ $(T_1, T_2>0)$，其中 $T_1<T_2$，时间 $T_1$ 是试验时间的预警阈值，$T_2$ 是试验允许的最长时间，这意味着试验进行到时间 $T_1$时，必须加快试验。为确保试验在$T_2$时终止时能够观测到尽可能多的失效个体，加快试验后不再删失任何试验单位。当然，在这一删失方案下，试验时间足够长时，允许观测到的失效个体数少于 $m$。试验分为以下三种情形。

$$Case1: \quad X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n}, \quad if\ X_{m:m:n}<T_1<T_2, \tag{1}$$

$$Case2: \quad X_{1:m:n}, \ldots, X_{k_1:m:n} \ldots, X_{m:m:n}, \quad if\ X_{k_1:m:n}<T_1<X_{m:m:n}<T_2, \tag{2}$$

$$Case3: \quad X_{1:m:n}, \ldots, X_{k_1:m:n} \ldots, X_{k_2:m:n}, \quad if\ X_{k_1:m:n}<T_1<X_{k_2:m:n}<T_2, \tag{3}$$

这三种情况下的删失方案和实验结束位置如下

$$Case1: \quad R=(R_1, R_2, ..., R_m) \quad R_m=0, \tag{4}$$

$$Case2: \quad R=(R_1, R_2, ..., R_{k_1}, 0, ..., 0, R_m), R_m=n-m-\sum_{i=1}^{k_1} R_i, \tag{5}$$

$$Case3: \quad R=(R_1, R_2, ..., R_{k_1}, 0, ..., R_{k_2} R_{T_2}) \quad R_{k_2}=0, \quad R_{T_2}=n-k_2-\sum_{i=1} R_i, \tag{6}$$

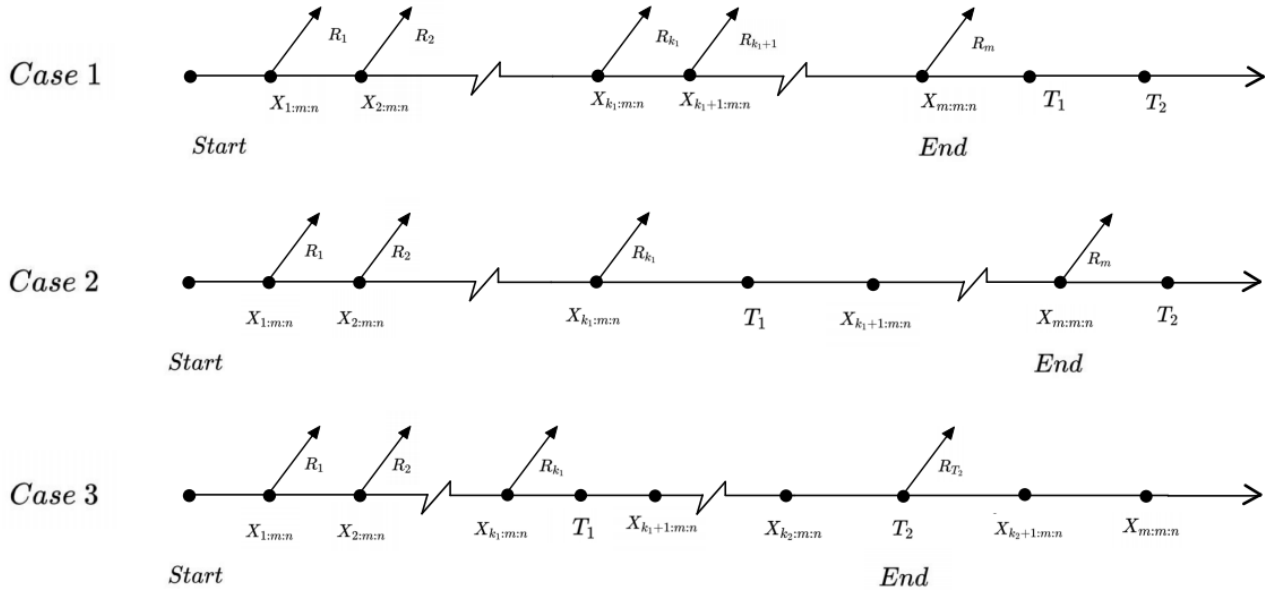



图 1： IAT-II PCS 的示意图

在现实生活中，有许多风险率函数用于对实际数据建模，其中最常见的失效率函数是恒定失效率、递增失效率或递减失效率函数。例如威布尔分布、伽马分布和指数化指数分布等。然而，风险函数还有其他不同的形式，例如单峰型、浴盆形、递增—递减—递增等。上述分布模型也无法很好地拟合非单调风险率，尤其是可靠性及其他领域中常见的浴盆形状风险率。新安装的电子设备的失效率就是浴盆形失效率的一个例子：设备初期失效率较高，故障频发，生产性能在短时间内降至最低水平；使用几天或几个月后，设备趋于稳定，并在这一水平维持数年；之后，设备经过各种形式的大修或技术改造，生产性能得以恢复。 Yan 等人（2021年）将 Burr-XII 分布应用于2021年提出的 IAT-II PC，其风险率函数无法拟合浴盆曲线数据。近年来，已有多种概率分布被提出用于对具有浴盆形状的风险率建模，相关研究可见文献。本文主要关注 Chen （2000年）提出的一种双参数浴盆分布。概率密度函数

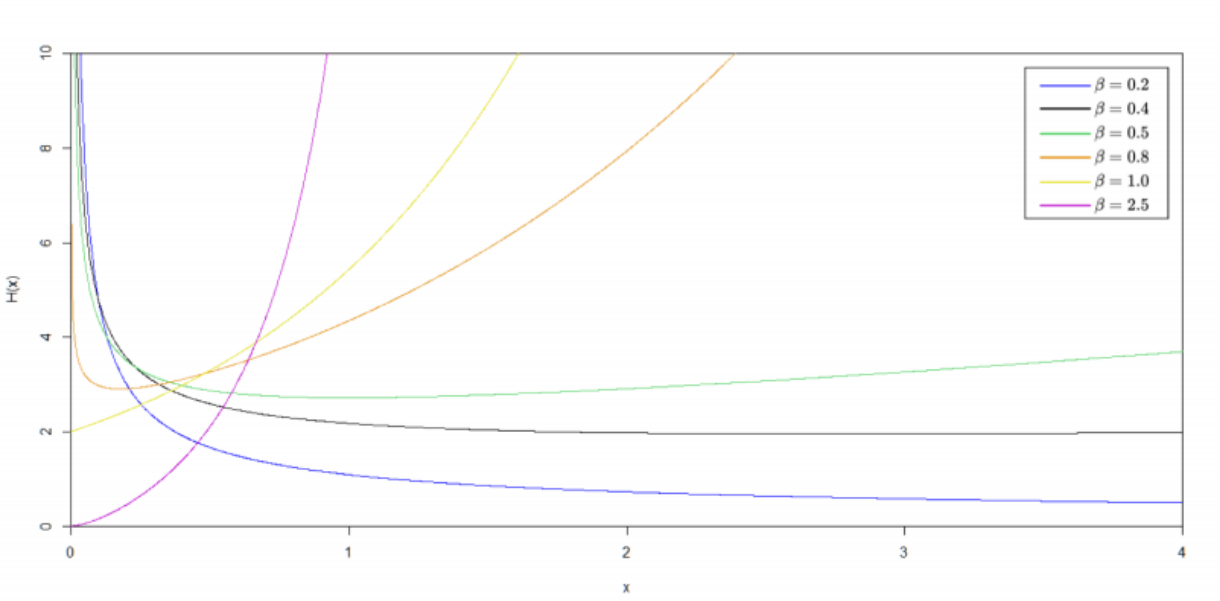



图2： $\alpha = 2$的失效率函数。

$X$的（$PDF$）和累积分布函数（$CDF$）分别为

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}\exp\left[\alpha(1-e^{x^\beta})+x^\beta\right] \quad x>0,\alpha,\beta>0, \tag{7}$$

$$F(x;\alpha,\beta) = 1-\exp\left[\alpha(1-e^{x^\beta})\right] \quad x>0,\alpha,\beta>0. \tag{8}$$

Th $X$ 的可靠性和风险率函数如下

$$S(x;\alpha,\beta) = \exp\left[\alpha(1-e^{x^\beta})\right] \quad x>0,\alpha,\beta>0, \tag{9}$$

$$H(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{x^\beta} \quad x>0,\alpha,\beta>0, \tag{10}$$

其中， $\alpha$ 和 $\beta$ 分别为未知的尺度参数和形状参数；当 $\beta<1$时，风险率函数呈浴盆形。

本文其余部分安排如下：第2节推导未知参数的最大似然估计（MLE），并提出近似置信区间。第3节采用伽马先验进行贝叶斯估计，并使用重要性抽样和Metropolis-Hastings算法。随后，第4节基于蒙特卡罗方法开展大量模拟，以进行参数估计和区间估计。使用一个真实数据集评估第2节和第3节中的估计方法。最后，在第6节中，我们提出一些总结性

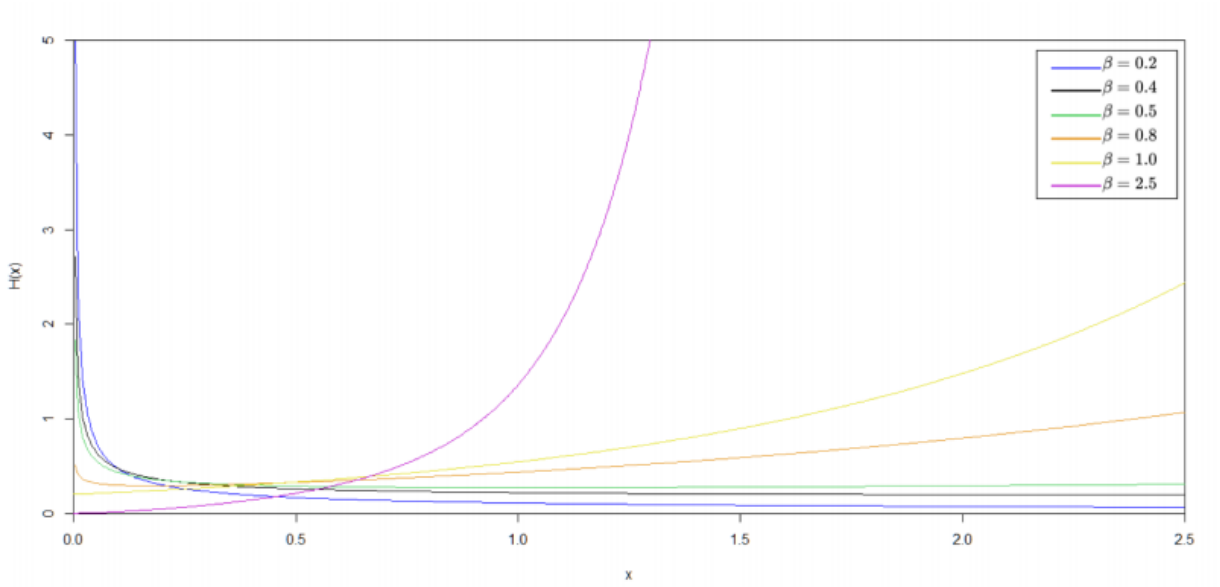



图 3： 具有 $\alpha = 0.2$ 的失效率函数。

结论。

## 2 模型描述与符号说明

设 $X = X^R_{1:m:n}, X^R_{2:m:n}, \ldots, X^R_{k_1:m:n}, \ldots, X^R_{k_2:m:n}, \ldots, X^R_{m:m:n}$ 是来自规模为 $m$ 的寿命试验的 IAT-II PC 样本，该试验样本量为 $n$，其中寿命服从 Chen 分布，其概率密度函数和累积分布函数如公式（7）所示。在试验中预定移除单位数为 $R = （R_1, R_2, \ldots, R_{k_1}, \ldots, R_{k_2}, \ldots, R_m）$。参数 $x^R_{i:m:n}$ （在后文公式中简写为 $x_i$， $i = 1, 2, \ldots, m$）用于表示 IAT-II PC 样本的观测值。在此基础上，相应的似然函数为

$$L = C \prod_{i=1}^{D_2} f(x_i) \prod_{i=1}^{D_1} [(1 - F(x_i))]^{R_i} (1 - F(x_B))^B , \tag{11}$$

其中 $D_2$， $D_1$， $B$， $C$ 如表（1）所示

表1：似然函数中 $D_2$、 $D_1$、 $B$、 $C$ 的含义

| | $D_2$ | $D_1$ | $B$ | C |
|---|---|---|---|---|
| 情况1 | $m$ | $m$ | $0$ | $\prod_{i=1}^{m}\left(n-i+1-\sum_{s=1}^{i-1}R_s\right)$ |
| 情况2 | $m$ | $k_1$ | $n-m-\sum_{i=1}^{k_1}R_i$ | $\prod_{i=1}^{m}\left(n-i+1-\sum_{s=1}^{k_1}R_s\right)$ |
| 情况3 | $k_2$ | $k_1$ | $n-k_2-\sum_{i=1}^{k_1}R_i$ | $\prod_{i=1}^{m}\left(n-i+1-\sum_{s=1}^{k_1}R_s\right)$ |

然后，由（7）、（11）， $\alpha$ 和 $\beta$ 的似然函数为

$$\begin{aligned} L(\alpha,\beta) =& C\left[\prod_{i=1}^{D_2}\alpha\beta x_i^{\beta-1}\exp\left(\alpha\left(1-e^{x_i^\beta}\right)+x_i^\beta\right)\right] \\ &\times\left[\prod_{i=1}^{D_1}\left[\exp\left(\alpha\left(1-e^{x_i^\beta}\right)\right)\right]^{R_i}\right]\left[\exp\left(\alpha\left(1-e^{x_B^\beta}\right)\right)\right]^{B}. \end{aligned} \tag{12}$$

然后，我们提出几种统计推断方法。

## 2.1 最大似然估计

我们可以将似然函数的自然对数写成如下形式

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha,\beta) =& \ln C + D_2\ln\alpha + D_2\ln\beta + \sum_{i=1}^{D_2}(\beta-1)\ln x_i \\ &+ \alpha(1-e^{x_i^\beta}) + x_i^\beta + \sum_{i=1}^{D_1}R_i\alpha(1-e^{x_i^\beta}) + B\alpha(1-e^{x_B^\beta}). \end{aligned} \tag{13}$$

$\alpha$ 和 $\beta$ 的最大似然估计可通过求解以下两个方程获得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} =& \frac{D_2}{\alpha} + \sum_{i=1}^{D_2}(1-e^{x_i^\beta}) + \sum_{i=1}^{D_1}R_i(1-e^{x_i^\beta}) + B(1-e^{x_B^\beta}) = 0, \\ \frac{\partial\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta} =& \frac{D_2}{\beta} + \sum_{i=1}^{D_2}\ln x_i + x_i^\beta\ln x_i \end{aligned} \tag{14}$$

$$-\alpha\left(\sum_{i=1}^{D_2} e^{x_i^\beta} x_i^\beta \ln x_i + \sum_{i=1}^{D_1} R_i e^{x_i^\beta} x_i^\beta \ln x_i + B e^{x_B^\beta} x_B^\beta \ln x_B\right) = 0. \quad (15)$$

由（14）， $\alpha$ 的最大似然估计可表示如下

$$\hat{\alpha} = \frac{D2}{\nu(x_i, \beta)}, \quad (16)$$

其中 $\nu(x_i, \beta) = \sum_{i=1}^{D_2}(e^{x_i^\beta} - 1) + \sum_{i=1}^{D_1} R_i(e^{x_i^\beta} - 1) + B(e^{x_B^\beta} - 1)$。现在将方程（16）代入方程（15），用$\hat{}\alpha$ 代替 $\alpha$ ，得到 $\beta$ 的最大似然估计如下

$$\frac{D_2}{\beta} + \sum_{i=1}^{D_2} \ln x_i (1 + x_i^\beta) - \frac{D2}{\nu(x_i, \beta)}\left(\sum_{i=1}^{D_2} \phi_i(x_i, \beta) + \sum_{i=1}^{D_1} R_i \phi_i(x_i, \beta) + B\phi_B(x_B, \beta)\right) = 0, \quad (17)$$

其中 $\phi_i(x_i, \beta) = e^{x_i^\beta} x_i^\beta \ln x_i$。方程（17）没有闭式解，因此可通过以下非线性方程的数值方法求得 $\beta$

$$g(\beta) = \left(-\frac{\sum_{i=1}^{D_2} \ln x_i (1 + x_i^\beta)}{D_2} + \frac{\sum_{i=1}^{D_2} \phi_i(x_i, \beta) + \sum_{i=1}^{D_1} R_i \phi_i(x_i, \beta) + B\phi_B(x_B, \beta)}{\nu(x_i, \beta)}\right)^{-1}. \quad (18)$$

$\hat{}\ \beta$ 的最大似然估计记为 $\beta$，而 $g(\beta) = \beta$ 的解可通过简单的迭代法求得

$$\beta^{(k+1)} = g(\beta^{(k)}),$$

这里 $\beta^{(k)}$ 表示第 $k\text{-}th$ 次迭代；当连续两次解之间的差小于预先设定的容差限时，迭代过程即停止。当获得 $\beta$的最大似然估计后，可直接由方程（ $\alpha$ 的最大似然估计可由方程（16）直接求得。

## 2.2 近似置信区间

在本小节中，我们进一步讨论基于最大似然估计量 $(1-\gamma) \times 100\%$ 未知参数的近似置信区间 $\lambda = (\alpha, \beta)$ 。最大似然估计量 $\hat{}\lambda$ 的渐近分布为 $(\hat{}\lambda - \lambda) \rightarrow N_2(0, I^{-1}(\lambda))$ (见[Jerald, (1982年)]) 。其中， $I^{-1}(\lambda)$ 定义为两个未知参数的 Fisher 信息矩阵的逆矩阵。

费 Fisher 信息矩阵 $I(\lambda)$ 表示为以下形式，其元素为下列各项的相反数:

期望值 v $\ln L(\alpha,\beta)$ 的二阶偏导数的期望值。结果如下 s

$$I(\lambda)=-E\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\alpha} & \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\beta}\end{bmatrix}. \tag{19}$$

一般而言，可以证明， $MLE$的渐近方差-协方差矩阵是 Fisher 信息矩阵 $I^{-1}(\lambda)$ 的逆矩阵。具体推导如下

$$I^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\alpha} & -\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}\\ -\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} & -\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\beta}\end{bmatrix}^{-1}_{(\alpha,\beta)=(\hat\alpha,\hat\beta)}=\begin{bmatrix}var(\hat\alpha) & cov(\hat\alpha,\hat\beta)\\ cov(\hat\beta,\hat\alpha) & var(\hat\beta)\end{bmatrix}. \tag{20}$$

由式（13中的对数似然函数可得$\ln L$（$\alpha$， $\beta$）的二阶导数如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\alpha} &= -\frac{D_2}{\alpha^2},\\ \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial^2\beta} &= -\frac{D_2}{\beta^2}+\sum_{i=1}^{D_2}\ln^2 x_i x_i^{\beta}-\alpha\left(\sum_{i=1}^{D_2}\phi_i\xi_i+\sum_{i=1}^{D_1}R_i\phi_i\xi_i+B\phi_B\xi_B\right),\\ \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta\partial\alpha} &= \frac{\partial^2\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}=-\left(\sum_{i=1}^{D_2}\phi_i+\sum_{i=1}^{D_1}R_i\phi_i+B\phi_B\right),\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\xi_i=\ln x_i(1+x_i^{\beta})$， $\xi_B=\ln x_B(1+x_B^{\beta})$， $\frac{\partial\phi_i}{(x_i,\beta)\ \partial\beta}=\exp(x_i^{\beta})x_i^{\beta}\ln\ x_i\xi_{i\circ}$

因此，可以得到参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的（$1-\gamma$）$\times 100\%$ 近似置信区间，如下所示

$$\left(\hat\alpha+Z_{\gamma/2}\sqrt{var(\alpha)},\ \hat\alpha+Z_{\gamma/2}\sqrt{var(\alpha)}\right),\quad \left(\hat\beta+Z_{\gamma/2}\sqrt{var(\beta)},\ \hat\beta+Z_{\gamma/2}\sqrt{var(\beta)}\right), \tag{22}$$

whe其中 $Z_{\gamma/2}$ 是标准正态分布的上侧（$\gamma/2$）$^{th}$ 分位点 .

# 3 贝叶斯估计

本节旨在基于改进自适应渐近II型删失数据，求得Chen分布参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计量。采用对称及非对称损失函数求得贝叶斯估计，包括平方误差损失函数（SEL）、LINEX损失函数（LL）和熵损失（EL）函数。假设参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 相互独立，且服从伽马先验分布，其先验分布如下： $G$（$a$， $b$）和 $G$（$c$， $d$）分布的概率密度函数

分别为

$$\pi_1(\alpha;a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha},\quad \alpha>0,a,b>0,$$
$$\pi_2(\beta;c,d)=\frac{d^c}{\Gamma(c)}\beta^{c-1}e^{-d\beta},\quad \beta>0,c,d>0.$$

因此， $\alpha$ 和 $\beta$ 的联合先验分布为

$$\pi(\alpha,\beta)\propto\alpha^{a-1}\beta^{c-1}e^{-(b\alpha+d\beta)}\quad \alpha,\beta>0,a,b,c,d>0. \tag{23}$$

随后， $\alpha$ 和 $\beta$ 的联合后验分布变为

$$\pi(\alpha,\beta\mid X)=\frac{L(\alpha,\beta X)\pi(\alpha,\beta)}{\int_0^\infty\int_0^\infty L(\alpha,\beta X)\pi(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}.$$

给定 $\alpha$、 $\beta$，直接计算联合后验分布 $\pi$(α， $\beta\mid X$)如下

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\beta\mid X)\propto&\alpha^{D_2+a-1}\exp\left[-\alpha\left(b-\sum_{i=1}^{D_2}\left(1-e^{x_i^\beta}\right)-\sum_{i=1}^{D_1}R_i\left(1-e^{x_i^\beta}\right)\right.\right.\\&\left.\left.-B\left(1-e^{x_B^\beta}\right)\right)\right]\times\beta^{D_2+c-1}\exp\left[-\beta\left(d-\sum_{i=1}^{D_2}logx_i\right)\right]\exp\left(\sum_{i=1}^{D_2}x_i^\beta\right).\end{aligned} \tag{24}$$

在平方误差损失函数（SEL）下，任意参数 $\mu$的贝叶斯估计为

$$\hat{d}_{SEL}=E(\eta\mid\mu). \tag{25}$$

Fo对于LINEX损失函数（LL），任意参数 $u$ 的贝叶斯估计为 y

$$\hat{d}_{LL}=-\frac{1}{g}\ln E_\eta(e^{-g\eta}\mid\mu). \tag{26}$$

对于熵损失函数（EL），通过最小化风险函数得到的贝叶斯估计为

$$\hat{d}_{EL}=\left[E_\eta(\eta^{-q}\mid\mu)\right]^{-\frac{1}{q}}. \tag{27}$$

其中 $g$ 和 $q$ 为已知常数， $\eta$ 表示任意一个未知参数。显然，(25)、(26)、(27)无法得到显式解。因此，采用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）方法从后验密度函数中生成样本，并

进而计算未知参数的贝叶斯估计。下面介绍两种计算贝叶斯估计的技术。

## 3.1 结合吉布斯抽样的 Metropolis-Hastings算法

Metropolis-Hastings（M-H）算法作为一种通用的马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）方法，由 Metropolis 等人（1953年）提出，随后 Hastings （1970年）对 M-H 算法进行了扩展。吉布斯抽样是 MCMC 方法的一种特殊情形，可用于根据随机变量的全条件概率分布生成一系列样本。吉布斯抽样要求将每个参数的联合后验分布分解为全条件分布，然后从这些分布中抽样。我们可以应用吉布斯抽样过程，从（24）中生成样本，进而计算贝叶斯估计。

Ther因此， $\alpha$ 和 $\beta$ 的后验条件密度函数可表示为

$$\pi(\alpha \mid \beta, x) \propto \alpha^{D_2+a-1} \exp\left[-\alpha\left[b - \sum_{i=1}^{D_2}(1-e^{x_i^\beta}) - \sum_{i=1}^{D_1} R_i(1-e^{x_i^\beta}) - B(1-e^{x_B^\beta})\right]\right], \tag{28}$$

$$\pi(\beta \mid \alpha, x) \propto \beta^{D_2+c-1} \exp\left[-\beta\left(d - \sum_{i=1}^{D_2} \ln x_i\right)\right] \exp\left(\sum_{i=1}^{D_2} x_i^\beta\right), \tag{29}$$

这里，我们使用结合吉布斯抽样的 M-H 算法从式（28）和式（29）中生成样本。M-H 算法用于进行贝叶斯估计。

**算法1**Metropolis-Hastings算法

**输入：**采用 Metropolis-Hastings 技术，在不同损失函数下对参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行贝叶斯估计。

**输出：**

步骤1：给定参数的初始值为 $\eta^{(0)} = (\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$。

步骤2：使用 Metropolis-Hastings算法生成 $\alpha^{(0)}$ 自(28) 和 $\beta^{(0)}$ 自 (29)ˆ作为吉布斯抽样迭代值。 $q(\beta) = N(\beta)$。采用正态分布作为提议分布。重复 $N$ 次，得到 $\eta^{(h)} = (\alpha^{(h)}, \beta^{(h)})$ $h$ =1, 2, ..., $N$。

步骤3：将前 $M$ 个结果作为预热阶段。在不同的损失函数下，贝叶斯估计为

$$\begin{aligned}
\hat{d}_{SEL} &= \frac{1}{N-M}\sum_{h=M+1}^{N}\eta^{(h)}, \\
\hat{d}_{LL} &= -\frac{1}{g}\ln\left(\frac{1}{N-M}\sum_{h=M+1}^{N}e^{g\eta^{(h)}}\right), \\
\hat{d}_{EL} &= \left[\frac{1}{N-M}\sum_{h=M+1}^{N}\left(\eta^{(h)}\right)^{-q}\right]^{-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

步骤4：获取步骤2中的结果。按升序排列为 $\left(\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, ..., \eta_{(N)}\right)$ .

## 3.2 重要性抽样技术

重要性抽样方法可用于计算（25）、（26）和（27）的近似结果，从而获得贝叶斯估计。由（24），可得

$$\pi(\alpha, \beta \mid X) \propto g(\alpha \mid \beta, x) g(\beta \mid x) \omega(\alpha, \beta), \tag{30}$$

其中

$$g(\alpha \mid \beta, x) \propto \alpha^{D_2+a-1} \exp\left[-\alpha\left[b + \sum_{i=1}^{D_1} R_i\left(e^{x_i^{\beta}} - 1\right) + B\left(e^{x_B^{\beta}} - 1\right)\right]\right], \tag{31}$$

$$g(\beta \mid x) \propto \beta^{D_2+c-1} \exp\left[-\beta\left(d - \sum_{i=1}^{D_2} log x_i\right)\right], \tag{32}$$

$$\omega(\alpha,\beta) \propto \frac{\exp\left[\sum_{i=1}^{D_2}\alpha\left(1-e^{x_i^{\beta}}\right)+\sum_{i=1}^{D_2}x_i^{\beta}\right]}{\left[b+\nu\left(x_i,\beta\right)\right]^{D_2+a}}, \tag{33}$$

其中 $\nu(x_i,\ \beta) = \sum_{i=1}^{D_2}(e^{x_i^{\beta}}-1) + \sum_{i=1}^{D_1} R_i(e^{x_i^{\beta}}-1) + B(e^{x_B^{\beta}}-1)$。注意，$g(\alpha \mid \beta,\ x)$ 的分布服从参数为$(D_2+a-1)$和 $(b-\sum_{i=1}^{D_2}(1-e^{x_i^{\beta}}) - \sum_{i=1}^{D_1} R_i(1-e^{x_i^{\beta}}) - B(1-e^{x_B^{\beta}}))$的Gamma分布。 $g(\beta \mid x)$ 的分布服从参数为 $(D_2+c-1)$ 和 $(d-\sum_{i=1}^{D_2}\log\ x_i)$ 的Gamma分布。因此，可以分别从 $\alpha$ 和 $\beta$ 的分布中轻松生成样本。然后，利用重要性抽样方法，在平方误差损失函数下，$\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计可表示为

$$\hat{\alpha}_{SEL} = \frac{\sum_{i=1}^{N_2}\alpha^{(i)}\omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2}\omega^{(i)}}, \tag{34}$$

and

$$\hat{\beta}_{SEL} = \frac{\sum_{i=1}^{N_2}\beta^{(i)}\omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2}\omega^{(i)}}. \tag{35}$$

类似地，在LINEX损失函数下，$\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\alpha}_{LL} = -\frac{1}{g}\ln\left[\frac{\sum_{i=1}^{N_2}e^{-g\alpha^{(i)}}\omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2}\omega^{(i)}}\right], \tag{36}$$

and

$$\hat{\beta}_{LL} = -\frac{1}{g}\ln\left[\frac{\sum_{i=1}^{N_2}e^{-g\beta^{(i)}}\omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2}\omega^{(i)}}\right]. \tag{37}$$

此外，在熵损失函数下，$\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\alpha}_{EL} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N_2}(\alpha^{(i)})^{-q}\omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2}\omega^{(i)}}\right]^{-\frac{1}{q}}, \tag{38}$$

and

$$\hat{\beta}_{EL} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_2} (\beta^{(i)})^{-q} \omega^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_2} \omega^{(i)}} \right]^{-\frac{1}{q}}. \tag{39}$$

重要性抽样的步骤如下

**算法2** 重要性抽样算法**输入：** 采用重要性抽样技术，在不同损失函数下对参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行贝叶斯估计。**输出：** 步骤1：从 $g(\beta \mid x)$生成 $\beta^{(1)}$ 。步骤2：从 $g(\alpha \mid \beta, x)$生成 $\alpha^{(1)}$ 。步骤3：计算 $\omega^{(1)}(\beta^{(1)})$ 和 $\theta^{(1)} = \theta(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$。步骤4：重复上述过程 $N_2$ 次，得到 $\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, ..., \omega^{(N_2)}\right)$ 和$\left(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, ..., \theta^{(N_2)}\right)$。步骤5：计算不同损失函数下参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计量。

# 4 模拟实验

本节通过蒙特卡罗模拟开展模拟研究，以评估所提方法的性能。在 IAT-II PCS 和 $R$ 程序下，评估了 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最大似然估计和贝叶斯估计的偏差及均方误差（MSE）。贝叶斯估计采用重要性抽样和 M-H技术计算。在不同的 $(n, m)$ 组合及不同的删失方案 $(T_1, T_2, R_1, R_2, \cdots, R_m)$ 下，分别根据平均偏差和 MSE 评估点估计和区间估计结果。

所有估计均用于计算任意的未知参数值 $\alpha = 0.2$ 和$\beta = 0.5$）。相应地，伽马先验中的超参数设为 $a = 2, b = 2,$ 和$c = 2, d = 2$。这里我们考虑四种不同的删失方案，即:

方案1：$R_m = n - m, R_i = 0$ 对于 $i \neq m$.方案2：$R_1 = n - m,$ $R_i = 0$ 对于 $i \neq 1$.方案3：$R_{\frac{m+1}{2}} = n - m, R_i = 0$ 对于 $i \neq \frac{m+1}{2}$;

如果 $m$ 为奇数,且

$$R_{\frac{m}{2}} = n - m, R_i = 0 \quad \text{for } i \neq \frac{m}{2}, \text{ if } m \text{ is even.}$$

$$\text{Scheme4} \quad : \quad R_i = \frac{n-m}{m}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

在我们的研究中，两个测试期望时间（$T_1, T_2$）分别为（0.4,4）和（1,7）。我们考虑（$n, m$）的三个不同取值，分别为（15,5）、（20,10）和（30,15）。为了评估LINEX损失函数下的贝叶斯估计量，我们取 $g = 1$；对于熵损失函数，我们取 $q = 1$。根据模拟研究，我们得出以下结论。

从表2 和 3的模拟结果可以得出以下关于最大似然估计的结论。由这些表可得出以下结论：

1. 通过偏差和均方误差评估最大似然估计的效果，其中均方误差比偏差更合适。

2. 在大多数情况下，对于不同的删失方案，方案4为均匀删失方案，其余方案为非均匀删失方案。从表中可以看出，均匀删失方案的估计效果优于其他非均匀删失方案。

3. 与表 2 和表 3相比，在大多数情况下，随着时间阈值增大，相关最大似然估计的偏差和均方误差也会增大，$(T_1, T_2) = (1,7)$ 的估计效果较差。因此，在实验中设置合理的时间阈值至关重要。

表2： 最大似然估计$\hat{\alpha}$ 和$\hat{\beta}$在不同 $n, m$ 和 $T_1 = 0.4, T_2 = 4$取值下的偏差和均方误差。

| | | | | $\hat{\alpha}$ | | $\hat{\beta}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.18276 | 0.03340 | 0.11049 | 0.01221 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.06933 | 0.00481 | -0.24902 | 0.06201 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.19048 | 0.03628 | 0.17394 | 0.03026 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.03561 | 0.00127 | -0.01553 | 0.00024 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.08918 | 0.00795 | 0.25224 | 0.06362 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.09200 | 0.00846 | -0.23686 | 0.05610 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.06425 | 0.00413 | -0.14137 | 0.01998 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.05793 | 0.00336 | 0.11998 | 0.01440 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.17254 | 0.02977 | 0.41297 | 0.17055 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.11648 | 0.01357 | -0.35441 | 0.12561 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.10793 | 0.01165 | -0.08880 | 0.00789 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.02276 | 0.00052 | -0.21521 | 0.04632 |

表 4 和 5 给出了双侧 95.5%

表3： 不同 $n$、 $m$ 和 $T_1 = 1$、 $T_2 = 7$取值下 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最大似然估计偏差和均方误差。

| | | | | $\hat{\alpha}$ | | $\hat{\beta}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.09838 | 0.00968 | -0.03055 | 0.00093 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.11620 | 0.01350 | -0.34789 | 0.12103 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.08268 | 0.00684 | -0.34844 | 0.12141 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.11235 | 0.01262 | 0.21203 | 0.04496 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.11840 | 0.01402 | 0.18201 | 0.03313 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.12462 | 0.01553 | -0.22917 | 0.05252 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | -0.11064 | 0.01224 | 0.24352 | 0.05930 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.12914 | 0.01668 | 0.31077 | 0.09658 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.11563 | 0.01337 | 0.19582 | 0.03834 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.11043 | 0.01219 | 0.23403 | 0.05477 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | 0.07763 | 0.00603 | -0.20020 | 0.04008 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.08184 | 0.00670 | 0.16316 | 0.02662 |

采用最大似然法（使用费舍尔观测信息矩阵）构造的参数置信区间的覆盖概率和平均长度。由这些表可得出以下结论：

1. $\alpha = 0.2$ 和 $\beta = 0.5$ 的真实值位于各区间的中间位置，且能够被很好地覆盖。

2. 通过费舍尔观测信息矩阵获得的 $\beta$ 渐近置信区间，在大多数情况下，随着时间阈值的增加，区间的平均长度变长。同时，不同的删失方案 $R$ 对区间估计的 $\alpha$ 和 $\beta$ 结果没有显著影响。

3. 在两个时间阈值（0.4、4）和（1、7）下，关于 $\alpha$ 的区间平均长度存在显著差异。

4. $\alpha$的渐近置信区间在大多数情况下比$\beta$的更理想。

表4： 不同 $n$、 $m$ 和 $T_1 = 0.4$、 $T_2 = 4$取值下的区间估计和平均长度（AL）。

| n,m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha - AL$ | $\beta - AL$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | (0.00129,0.58393) | (0.48694,1.71175) | 0.58264 | 1.22482 |
| | II | (0.02411,0.28934) | (0.04585,0.63700) | 0.26523 | 0.59115 |
| 15,5 | III | (0.02096,0.40454) | (0.11858,1.42586) | 0.38358 | 1.30727 |
| | IV | (0.06947,0.71424) | (0.09405,0.86234) | 0.64476 | 0.76829 |
| | I | (0.01640,0.70959) | (0.17385,0.90605) | 0.57258 | 0.73220 |
| | II | (0.13701,0.53979) | (0.01334,0.04607) | 0.38361 | 0.03273 |
| 20,10 | III | (0.13223,0.75290) | (0.14972,0.85257) | 0.62068 | 0.70285 |
| | IV | (0.10312,0.54511) | (0.14693,0.65170) | 0.44199 | 0.50477 |
| | I | (0.03949,0.31102) | (0.45257,1.11968) | 0.27154 | 0.66710 |
| | II | (0.15002,0.56836) | (0.11233,0.51236) | 0.41834 | 0.40002 |
| 30,15 | III | (0.12563,0.55586) | (0.16401,0.78419) | 0.43023 | 0.62018 |
| | IV | (0.06050,0.33362) | (0.36250,1.06036) | 0.27311 | 0.69786 |

表5： 区间估计和不同 $n$， $m$ 和 $T_1 = 1$， $T_2$ =选择下的平均长度（AL）

7.

| n,m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha - AL$ | $\beta - AL$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | (0.02227,0.46365) | (0.17421,1.26507) | 0.44138 | 1.09087 |
| | II | (0.02410,0.29141) | (0.04789,0.66570) | 0.26731 | 0.61781 |
| 15,5 | III | (0.02988,0.46066) | (0.04098,0.80587) | 0.43079 | 0.76489 |
| | IV | （0.02385,0.32205） | (0.31173,2.04524) | 0.29820 | 1.73351 |
| | I | (0.02728,0.73341) | (0.09402,0.61997) | 0.58973 | 0.52595 |
| | II | (0.13713,0.76841) | (0.08804,0.65271) | 0.63127 | 0.56467 |
| 20,10 | III | (0.02880,0.27724) | （0.46691,1.07021） | 0.24844 | 0.60330 |
| | IV | (0.01690,0.29710) | (0.47157,1.23919) | 0.28020 | 0.76762 |
| | I | (0.03392,0.20986) | (0.48876,0.96220) | 0.17594 | 0.47344 |
| | II | (0.04174,0.33184) | (0.38175,1.41139) | 0.29011 | 1.02963 |
| 30,15 | III | (0.14169,0.54398) | (0.15428,0.58258) | 0.40229 | 0.40229 |
| | IV | (0.05112,0.27315) | (0.41602,1.05710) | 0.22203 | 0.64107 |

表6、7、8、9 给出了在平方误差损失函数、LINEX损失函数和熵损失函数下，通过重要性抽样技术对 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。表10、11、12、13 给出了通过Metropolis-Hasting技术对 $\alpha$ 和 $\beta$进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。根据这些表格，得出以下结论：

1. 从这些表格中还可以看出， $\alpha$ 和 $\beta$的贝叶斯估计量的偏差和均方误差小于相应的最大似然估计。

2. 从表6、表8以及表7、表9可以看出，在大多数情况下，采用平方误差损失函数时，通过重要性抽样技术得到的 $\alpha$ 和 $\beta$ 的贝叶斯估计量具有最小偏差和均方误差。随着时间阈值增大，采用熵损失函数时也具有最小偏差和均方误差。从表10和表12可以看出，采用平方误差损失函数时，通过M-H技术得到的 $\alpha$ 的贝叶斯估计量具有最小偏差和均方误差。从表11可以看出，当时间阈值为$(T_1, T_2) = (0.4, 4)$时，采用LINEX损失函数时，通过M-H技术得到的 $\beta$ 的贝叶斯估计量具有最小偏差和均方误差；从表13可以看出，当时间阈值为$(T_1, T_2) = (1, 7)$时，采用LINEX损失函数和熵损失函数时，通过M-H技术得到的 $\beta$ 的贝叶斯估计量具有最小偏差和均方误差。

3. 在大多数情况下，使用 M-H技术进行贝叶斯估计的偏差和均方误差小于使用重要性抽样所得的结果。

表6： 在平方误差损失函数$\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\alpha}_{LL}$和熵损失函数$\hat{\alpha}_{EL}$下，针对不同的 $n$， $m$， $\alpha$， $\beta$ 和 $T_1 = 0.4$, $T_2 = 4$，通过重要性抽样技术得到的$\hat{\alpha}$ 贝叶斯估计的偏差和均方误差。

| | | | | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | α | beta | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.05442 | 0.00296 | -0.05454 | 0.00297 | -0.05571 | 0.00310 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.00409 | 0.00002 | 0.00236 | 0.00001 | -0.01083 | 0.00012 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.03628 | 0.00132 | -0.03630 | 0.00132 | -0.03644 | 0.00133 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.08628 | 0.00744 | -0.08746 | 0.00765 | -0.10018 | 0.01004 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.05352 | 0.00286 | -0.05365 | 0.00288 | -0.05504 | 0.00303 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.07435 | 0.00553 | -0.07471 | 0.00558 | -0.07949 | 0.00632 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.01078 | 0.00012 | 0.01070 | 0.00011 | 0.01009 | 0.00010 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.01141 | 0.00013 | 0.00952 | 0.00009 | -0.00244 | 0.00001 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.10540 | 0.01111 | -0.10750 | 0.01156 | -0.13787 | 0.01901 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.05013 | 0.00251 | 0.04831 | 0.00233 | 0.03676 | 0.00135 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.02612 | 0.00068 | -0.02675 | 0.00072 | -0.03156 | 0.00100 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.01169 | 0.00014 | 0.01142 | 0.00013 | 0.00932 | 0.00009 |

表7： 采用重要性抽样技术，在平方误差损失函数 $\hat{}\beta_{SEL}$、LINEX损失函数 $\hat{}\ \beta_{LL}$ 和熵损失函数 $\hat{}\ \beta_{EL}$ 下，对不同的 $n, m, \alpha, \beta$和 $T_1 = 0.4, T_2 = 4$，计算$\hat{}\,\beta$的贝叶斯估计的偏差和均方误差。$\hat{}$

| | | | | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.06578 | 0.00433 | 0.06322 | 0.00400 | 0.05649 | 0.00319 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.11644 | 0.01356 | 0.10269 | 0.01055 | 0.04396 | 0.00193 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | 0.09152 | 0.00838 | 0.09152 | 0.00838 | 0.09152 | 0.00838 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.07352 | 0.00541 | 0.06354 | 0.00404 | 0.04380 | 0.00192 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.04531 | 0.00205 | -0.04584 | 0.00210 | -0.04785 | 0.00229 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.15521 | 0.02409 | 0.12921 | 0.01670 | 0.01849 | 0.00034 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | -0.00909 | 0.00008 | -0.00917 | 0.00008 | -0.00943 | 0.00009 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.01205 | 0.00015 | -0.01630 | 0.00027 | -0.03579 | 0.00128 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.21632 | 0.04679 | 0.21328 | 0.04549 | 0.20346 | 0.04140 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.25439 | 0.06471 | 0.24590 | 0.06047 | 0.21985 | 0.04834 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.07071 | 0.00500 | -0.07143 | 0.00510 | -0.07462 | 0.00557 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.15959 | 0.02547 | 0.15892 | 0.02526 | 0.15735 | 0.02476 |

表8： 采用重要性抽样技术，在平方误差损失函数 $\hat{}\alpha_{SEL}$、LINEX损失函数 $\hat{}\alpha_{LL}$和熵损失函数 $\hat{}\alpha_{EL}$下，对不同的 $n, m, \alpha, \beta$和 $T_1 = 1, T_2 = 7$，计算$\hat{\alpha}$ 的贝叶斯估计的偏差和均方误差。

| | | | | $\hat{\alpha_{SEL}}$ | | $\hat{\alpha_{LL}}$ | | $\hat{\alpha_{EL}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.02854 | 0.00081 | 0.02854 | 0.00081 | 0.02845 | 0.00081 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.05099 | 0.00260 | -0.05099 | 0.00260 | -0.05576 | 0.00311 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | 0.06638 | 0.00441 | 0.06638 | 0.00441 | 0.06353 | 0.00404 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.04207 | 0.00177 | 0.04207 | 0.00177 | 0.04180 | 0.00175 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.00651 | 0.00004 | -0.00651 | 0.00004 | -0.01564 | 0.00024 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.05089 | 0.00259 | 0.05089 | 0.00259 | 0.04696 | 0.00220 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | -0.09754 | 0.00951 | -0.09754 | 0.00951 | -0.09998 | 0.01000 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.09069 | 0.00823 | 0.09069 | 0.00823 | 0.08205 | 0.00673 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.05424 | 0.00294 | -0.05424 | 0.00294 | -0.05457 | 0.00298 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.06160 | 0.00379 | -0.06160 | 0.00379 | -0.06420 | 0.00412 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.04417 | 0.00195 | -0.04417 | 0.00195 | -0.04914 | 0.00241 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.00413 | 0.00002 | 0.00413 | 0.00002 | 0.00167 | 0.00000 |

表9： 在平方误差损失函数 $\hat{}\beta_{SEL}$、LINEX损失函数 $\hat{}\ \beta_{LL}$ 和熵损失函数 $\hat{}\ \beta_{EL}$ 下，通过重要性抽样技术获得的 $\hat{}\beta$ 贝叶斯估计的偏差和均方误差，以及 $n$、 $m$、 $\alpha$、 $\beta$ 和 $T_1 = 1$、 $T_2 = 7$的不同取值。 $\hat{}$

| | | | | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.01712 | 0.00029 | -0.01712 | 0.00029 | -0.01714 | 0.00029 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.15450 | 0.02387 | -0.15542 | 0.02416 | -0.16039 | 0.02572 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.10080 | 0.01016 | -0.30124 | 0.09074 | -0.30434 | 0.09262 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.06374 | 0.00406 | -0.13645 | 0.01862 | -0.13695 | 0.01876 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.08405 | 0.00706 | 0.07961 | 0.00634 | 0.04465 | 0.00199 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.02863 | 0.00082 | 0.02693 | 0.00073 | 0.01339 | 0.00018 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.03779 | 0.00143 | 0.03532 | 0.00125 | 0.02682 | 0.00072 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.11941 | 0.01426 | -0.12013 | 0.01443 | -0.12269 | 0.01505 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.07355 | 0.00541 | 0.07316 | 0.00535 | 0.07221 | 0.00521 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.04997 | 0.00250 | 0.04939 | 0.00244 | 0.04749 | 0.00226 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.06077 | 0.00369 | -0.06093 | 0.00371 | -0.06154 | 0.00379 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.06078 | 0.00369 | 0.06014 | 0.00362 | 0.05806 | 0.00337 |

表10： 在平方误差损失函数 $\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数 $\alpha_{LL}$ 和熵损失函数 $\alpha_{EL}$ 下，通过M-H技术获得的 $\hat{\alpha}$ 贝叶斯估计的偏差和均方误差，以及 $n$、 $m$、 $\alpha$、 $\beta$ 和 $T_1 = 0.4$、 $T_2 = 4$的不同取值。

| | | | | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.03289 | 0.00108 | -0.05811 | 0.00338 | -0.16499 | 0.02722 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.02562 | 0.00066 | 0.01058 | 0.00011 | -0.00766 | 0.00006 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.03411 | 0.00116 | -0.07142 | 0.00510 | -0.13038 | 0.01700 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.05093 | 0.00259 | 0.01892 | 0.00036 | -0.03241 | 0.00105 |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.02719 | 0.00074 | -0.07549 | 0.00570 | -0.16503 | 0.02723 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.00444 | 0.00002 | -0.02316 | 0.00054 | -0.03929 | 0.00154 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.00170 | 0.00000 | -0.03327 | 0.00111 | -0.07890 | 0.00622 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.01749 | 0.00031 | -0.04216 | 0.00178 | -0.14863 | 0.02209 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.08353 | 0.00698 | 0.06098 | 0.00372 | -0.03633 | 0.00132 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.03041 | 0.00092 | -0.05154 | 0.00266 | -0.11496 | 0.01322 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | 0.06115 | 0.00374 | 0.04258 | 0.00181 | 0.01858 | 0.00035 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.00978 | 0.00010 | -0.01915 | 0.00037 | -0.12970 | 0.01682 |

表11： 在平方误差损失函数$\hat{}$ $\beta_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{}$ $\beta_{LL}$和熵损失函数$\hat{}$ $\beta_{EL}$下，针对不同的 $n$、 $m$、 $\alpha$、 $\beta$和 $T_1 = 0.4$、$T_2 = 4$，采用Metropolis-Hasting技术对$\hat{}$ $\beta$ 进行贝叶斯估计的偏差和均方误差。$\hat{}$

| | | | | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.02572 | 0.00066 | -0.04132 | 0.00171 | -0.03905 | 0.00153 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.06254 | 0.00391 | 0.04549 | 0.00207 | 0.04602 | 0.00212 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.02232 | 0.00050 | -0.05789 | 0.00335 | -0.13166 | 0.01734 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | -0.02203 | 0.00049 | -0.03712 | 0.00138 | -0.03318 | 0.00110 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.06556 | 0.00430 | 0.04950 | 0.00245 | 0.05266 | 0.00277 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.04908 | 0.00241 | 0.03299 | 0.00109 | 0.03581 | 0.00128 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.04123 | 0.00170 | 0.02461 | 0.00061 | 0.02561 | 0.00066 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.05221 | 0.00273 | 0.03508 | 0.00123 | 0.03523 | 0.00124 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.27074 | 0.07330 | 0.20603 | 0.04245 | -0.01829 | 0.00033 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.20663 | 0.04269 | 0.14835 | 0.02201 | -0.26525 | 0.07036 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | -0.00897 | 0.00008 | -0.06634 | 0.00440 | -0.33857 | 0.11463 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.09338 | 0.00872 | 0.04952 | 0.00245 | -0.20184 | 0.04074 |

表12： 在平方误差损失函数$\hat{}$ $\alpha_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{}$ $\alpha_{LL}$和熵损失函数$\hat{}$ $\alpha_{EL}$下，针对不同的 $n$、 $m$、 $\alpha$、 $\beta$和 $T_1 = 1$、 $T_2$ =7，采用Metropolis-Hasting技术对$\hat{}$ $\alpha$ 进行贝叶斯估计的偏差和均方误差。

| | | | | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.00518 | 0.00003 | -0.01761 | 0.00031 | -0.16221 | 0.02631 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.05806 | 0.00337 | 0.04225 | 0.00178 | 0.02617 | 0.00068 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.00693 | 0.00005 | -0.03054 | 0.00093 | -0.16305 | 0.02658 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.05205 | 0.00271 | 0.03126 | 0.00098 | -0.01381 | 0.00019 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.05050 | 0.00255 | 0.02748 | 0.00075 | -0.05710 | 0.00326 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.04886 | 0.00239 | -0.06539 | 0.00428 | -0.08724 | 0.00761 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.00867 | 0.00008 | -0.02407 | 0.00058 | -0.07979 | 0.00637 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.02826 | 0.00080 | -0.01598 | 0.00026 | -0.12982 | 0.01685 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.04949 | 0.00245 | 0.02357 | 0.00056 | -0.12603 | 0.01588 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.02273 | 0.00052 | -0.03918 | 0.00154 | -0.06612 | 0.00437 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | 0.03766 | 0.00142 | 0.01636 | 0.00027 | -0.05739 | 0.00329 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.04199 | 0.00176 | 0.01822 | 0.00033 | -0.08413 | 0.00708 |

表13： 在平方误差损失函数 ˆ $\beta_{SEL}$ 、LINEX损失函数 ˆ $\beta_{LL}$ 和熵损失函数 ˆ $\beta_{EL}$ 下，通过Metropolis-Hasting技术对不同 $n$、$m$、 $\alpha$、 $\beta$和 $T_1 = 1$的贝叶斯估计 ˆ的偏差和均方误差。 ˆ

| | | | | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n,m | sc | $\alpha$ | $\beta$ | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.5 | -0.01451 | 0.00021 | -0.04061 | 0.00165 | -0.13918 | 0.01937 |
| | II | 0.2 | 0.5 | -0.12429 | -0.12429 | -0.14812 | 0.02194 | -0.18092 | 0.03273 |
| 15,5 | III | 0.2 | 0.5 | -0.20364 | 0.04147 | -0.23067 | 0.05321 | -0.29499 | 0.08702 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.04736 | 0.00224 | -0.00273 | 0.00001 | -0.18747 | 0.03514 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.13877 | 0.01926 | 0.09580 | 0.00918 | -0.04724 | 0.00223 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.05261 | 0.00277 | 0.03182 | 0.00101 | 0.02369 | 0.00056 |
| 20,10 | III | 0.2 | 0.5 | 0.00837 | 0.00007 | -0.00689 | 0.00005 | -0.00274 | 0.00001 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.08137 | 0.00662 | 0.06326 | 0.00400 | 0.06173 | 0.00381 |
| | I | 0.2 | 0.5 | 0.04209 | 0.00177 | 0.02625 | 0.00069 | 0.02952 | 0.00087 |
| | II | 0.2 | 0.5 | 0.08297 | 0.00688 | 0.06655 | 0.00443 | 0.06909 | 0.00477 |
| 30,15 | III | 0.2 | 0.5 | 0.04989 | 0.00249 | 0.03292 | 0.00108 | 0.03339 | 0.00111 |
| | IV | 0.2 | 0.5 | 0.03840 | 0.00147 | 0.02289 | 0.00052 | 0.02695 | 0.00073 |

# 5 真实数据分析

本节给出一组真实数据，用于模拟和说明。该数据集表示在对一个更大系统进行现场跟踪研究时，设备样本的故障次数和运行时间。该数据集由Nelson（1998年） Merovci& Elbatal （2014年）Mohan & Chacko （2020年）研究。该数据集包含30个观测值，具体如下（见Oguntunde etal. （2017年））

2.75, 0.13, 1.47, 0.23, 1.81, 0.30, 0.65, 0.10, 3.00, 1.73, 1.06,3.00, 3.00, 2.12, 3.00,3.00, 3.00, 0.02, 2.61, 2.93, 0.88, 2.47, 0.28, 1.43, 3.00, 0.23, 3.00, 0.80, 2.45, 2.66.

我们使用 Anderson-Darling（AD）检验和 Kolmogorov-Smirnov（KS）检验来检查拟合优度。AD 检验统计量的值为 1.3748，相应的 P值为 0.2093。KS 检验统计量的值为 0.21649，相应的 P值为 0.1201。由于两种检验方法的 P值都较高（$P > 0.05$），我们无法拒绝原假设。总而言之，我们有充分证据认为，Chen分布能够很好地拟合该数据集。

然后，我们考虑在改进的自适应II型渐进删失数据下对两个参数进行估计。我们使用原始数据集生成改进的自适应II型渐进删失样本的随机集。我们考虑了不同的

组合： $m$、 $T_1$ 和 $T_2$。

使用不同方案以及不同组合获得的随机样本$m$、 $T_1$ 和 $T_2$ 如表14所示

我们使用原始数据集生成了表15中的改进的自适应II型渐进删失样本随机集。我们考虑的两个时间阈值为$(T_1,\ T_2)\ =(0。4,\ 4)$和$(T_1,\ T_2)\ =(1,\ 7)$。基于上述情况，我们得到了 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最大似然估计、区间估计和贝叶斯估计，结果见表16-27。

根据这些表格，我们得出以下结论：

在大多数情况下，随着样本量 $m$的增加，最大似然估计的偏差和均方误差会减小。随着时间阈值的增加，最大似然估计和贝叶斯估计的偏差和均方误差会增大。均匀删失方案得到的估计结果似乎优于非均匀删失方案的结果。

我们观察到，对于大多数 $n=30$、 $m=5$、15、20的情况，在平方误差损失函数、LINEX损失函数和熵损失函数下的贝叶斯估计，其均方误差均小于最大似然估计。

表14： 带有 $n=30$的改进的自适应II型渐进删失方案。

| m | 删失方案 | 删失数量 |
|---|---|---|
| 5 | I | r=(0,0,0,0,25) |
| | II | r=(10,3,4,0,8) |
| | III | r=(5,3,10,5,2) |
| | IV | r=(5,5,5,5,5) |
| 15 | I | r=(15,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) |
| | II | r=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,15) |
| | III | r=(0,0,0,0,0,0,0,15,0,0,0,0,0,0,0) |
| | IV | r=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) |
| 20 | I | r=(1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1) |
| | II | r=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,8) |
| | III | r=(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,7) |
| | IV | r=(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,9) |

Table 15: Improved adaptive Type-II progressive censored samples (CS) generated from the data under different censoring schemes

| m | CS | $T_1, T_2 = (0.4, 4)$ $k_1$,$k_2$ | $T_1, T_2 = (1, 7)$ $k_1$,$k_2$ | Data |
|---|---|---|---|---|
| 5 | I | (5,5) | (5,5) | 0.02,0.10,0.13,0.23,0.23 |
| | II | (0,5) | (0,5) | 1.06,1.81,2.66,2.75,3.00 |
| | III | (1,5) | (2,5) | 0.28,0.88,2.75,3.00,3.00 |
| | IV | (1,5) | (1,5) | 0.28,1.43,2.47,3.00,3.00 |
| 15 | I | (0,15) | (0,15) | 2.12,2.45,2.47,2.61,2.66,2.75,2.93,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00 |
| | II | (7,15) | (10,15) | 0.02,0.10,0.13,0.23,0.23,0.28,0.30,0.65,0.80,0.88,1.06,1.43,1.47,1.73,1.81 |
| | III | (7,15) | (7,15) | 0.02,0.10,0.13,0.23,0.23,0.28,0.30,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00 |
| | IV | (4,15) | (5,15) | 0.10,0.23,0.28,0.28,0.88,1.43,1.73,2.12,2.47,2.66,2.93,3.00,3.00,3.00,3.00 |
| 20 | I | (3,20) | (5,20) | 0.10,0.23,0.28,0.65,0.88,1.43,1.73,1.81,2.12,2.45,2.47,2.61,2.66,2.75,2.93,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00 |
| | II | (5,20) | (8,20) | 0.10,0.23,0.23,0.28,0.30,0.65,0.80,0.88,1.06,1.43,1.47,1.73,1.81,2.12,2.45,2.47,2.61,2.66,2.75,3.00 |
| | III | (5,20) | (8,20) | 0.10,0.13,0.23,0.28,0.30,0.65,0.80,0.88,1.06,1.43,1.47,1.73,1.81,2.12,2.45,2.47,2.61,2.75,2.93,3.00 |
| | IV | (6,20) | (9,20) | 0.02,0.13,0.23,0.23,0.28,0.30,0.65,0.80,0.88,1.06,1.43,1.47,1.73,1.81,2.12,2.45,2.47,2.61,2.66,3.00 |

表16： 真实数据不同 $m$ 和 $T_1 = 0.4$下最大似然估计$\hat{\alpha}$ 和$\hat{} \beta$ 的偏差和均方误差， $T_2 = 4$。

| m方案 | | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}$ Bias | $\hat{\alpha}$ MSE | $\hat{\beta}$ Bias | $\hat{\beta}$ MSE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.13755 | 0.01892 | -0.34460 | 0.11875 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.16250 | 0.02640 | -0.08052 | 0.00648 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | -0.16375 | 0.02681 | -0.10764 | 0.01159 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.14705 | 0.02162 | -0.28734 | 0.08257 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.11538 | 0.01331 | 0.02099 | 0.00044 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.07061 | 0.00499 | -0.38778 | 0.15037 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | -0.12998 | 0.01689 | 0.06769 | 0.00458 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.14268 | 0.02036 | -0.22197 | 0.04927 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.00829 | 0.00007 | -0.23010 | 0.05294 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.01764 | 0.00031 | -0.18955 | 0.03593 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | -0.07151 | 0.00511 | 0.08936 | 0.00799 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.08887 | 0.00790 | 0.15267 | 0.02331 |

表17： 真实数据不同 $m$ 和 $T_1 = 1$下最大似然估计$\hat{\alpha}$ 和$\hat{} \beta$ 的偏差和均方误差， $T_2 = 7$。

| m方案 | | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}$ Bias | $\hat{\alpha}$ MSE | $\hat{\beta}$ Bias | $\hat{\beta}$ MSE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.14386 | 0.02070 | -0.38721 | 0.14993 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.15644 | 0.02447 | -0.15489 | 0.02399 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | -0.18071 | 0.16391 | 0.03266 | 0.02687 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.16410 | 0.02693 | -0.10420 | 0.01086 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.12755 | 0.01627 | 0.09112 | 0.00830 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.06181 | 0.00382 | -0.32917 | 0.10835 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | -0.14848 | 0.02205 | -0.23134 | 0.05352 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.05637 | 0.00318 | -0.23491 | 0.05518 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.02912 | 0.00085 | -0.14887 | 0.02216 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.08256 | 0.00682 | 0.11204 | 0.01255 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | -0.08465 | 0.00717 | 0.11645 | 0.01356 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.09430 | 0.00889 | 0.16460 | 0.02709 |

表18： 真实数据不同 $m$ 的区间估计和平均长度（AL）以及 $T_1 = 0.4,\ T_2 = 4.$

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha - AL$ | $\beta - AL$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | (0.01317,0.29599) | (0.10762,1.17368) | 0.28282 | 1.06606 |
| | II | (0.01806,0.37642) | (0.03173,0.60056) | 0.35836 | 0.56882 |
| 5 | III | (0.00590,0.22284) | (0.21359,1.64287) | 0.21694 | 1.42928 |
| | IV | (0.01260,0.33131) | (0.14081,1.20937) | 0.31870 | 1.06856 |
| | I | (0.02120,0.49601) | (0.32968,1.57678) | 0.47482 | 1.24710 |
| | II | (0.13796,0.53081) | (0.16223,0.72060) | 0.39284 | 0.55837 |
| 15 | III | (0.01777,0.27589) | (0.43800,1.34556) | 0.25812 | 0.90756 |
| | IV | (0.03575,0.22436) | (0.26273,0.86978) | 0.18861 | 0.60705 |
| | I | (0.10367,0.41849) | (0.28334,0.77930) | 0.31482 | 0.49596 |
| | II | (0.11081,0.42743) | (0.31942,0.81573) | 0.31662 | 0.49631 |
| 20 | III | (0.05219,0.31635) | (0.53845,1.15719) | 0.26417 | 0.61874 |
| | IV | (0.04259,0.28997) | (0.59634,1.21920) | 0.24738 | 0.62286 |

表19： 真实数据的不同 $m$ 区间估计及平均长度（AL）和 $T_1 = 1,\ T_2 =$ 7.

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha - AL$ | $\beta - AL$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | (0.01267,0.24871) | (0.09530,1.02666) | 0.23603 | 0.93137 |
| | II | (0.00898,0.21137) | (0.19531,1.52142) | 0.20239 | 1.32611 |
| 5 | III | (0.00197,0.35623) | (0.38560,1.93552) | 0.35426 | 1.54991 |
| | IV | (0.00585,0.36446) | (0.21602,1.64324) | 0.35861 | 1.42722 |
| | I | (0.01482,0.55008) | (0.35590,1.75858) | 0.53526 | 1.40269 |
| | II | (0.13254,0.51718) | (0.19312,0.71206) | 0.38464 | 0.51894 |
| 15 | III | (0.03205,0.20312) | (0.27755,0.79135) | 0.17107 | 0.51380 |
| | IV | (0.06825,0.30224) | (0.26872,0.80495) | 0.23399 | 0.53623 |
| | I | (0.08599,0.33957) | (0.34566,0.87874) | 0.25357 | 0.53308 |
| | II | (0.04911,0.28086) | (0.56385,1.16947) | 0.23175 | 0.60562 |
| 20 | III | (0.04764,0.27928) | (0.61874,1.17494) | 0.23164 | 0.60760 |
| | IV | (0.04104,0.27228) | (0.61047,1.22451) | 0.23125 | 0.61404 |

表20： 在平方误差损失函数$\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\alpha}_{LL}$和熵损失函数$\hat{\alpha}_{EL}$下，针对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 0.4$， $T_2 = 4$，通过重要性抽样技术对$\hat{\alpha}$ 进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.07636 | 0.00583 | -0.07787 | 0.00606 | -0.10805 | 0.01167 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.08874 | 0.00787 | -0.09096 | 0.00827 | -0.11260 | 0.01268 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | -0.11380 | 0.01295 | -0.11393 | 0.01298 | -0.11576 | 0.01340 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.02445 | 0.00060 | -0.02474 | 0.00061 | -0.02715 | 0.00074 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.06151 | 0.00378 | -0.06152 | 0.00378 | -0.06155 | 0.00379 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.00017 | 0.00000 | -0.01691 | 0.00029 | -0.11025 | 0.01215 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | -0.05961 | 0.00355 | -0.06036 | 0.00364 | -0.06668 | 0.00445 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.01180 | 0.00014 | 0.01094 | 0.00012 | 0.00498 | 0.00002 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.00445 | 0.00002 | 0.00424 | 0.00002 | 0.00264 | 0.00001 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.02959 | 0.00088 | -0.03010 | 0.00091 | -0.03437 | 0.00118 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | 0.02763 | 0.00076 | 0.02709 | 0.00073 | 0.02399 | 0.00058 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.04536 | 0.00206 | 0.04257 | 0.00181 | 0.02717 | 0.00074 |

表21： 在平方误差损失函数$\hat{\ }\beta_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\ }\beta_{LL}$和熵损失函数$\hat{\ }\beta_{EL}$下，针对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 0.4$，$T_2 = 4$，通过重要性抽样技术对$\hat{\ }\beta$ 进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.02299 | 0.00053 | -0.04440 | 0.00197 | -0.18193 | 0.03310 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.03976 | 0.00158 | 0.03500 | 0.00122 | 0.02533 | 0.00064 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.02922 | 0.00085 | 0.02915 | 0.00085 | 0.02906 | 0.00084 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.14193 | 0.02014 | 0.13866 | 0.01923 | 0.13424 | 0.01802 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.01219 | 0.00015 | -0.01375 | 0.00019 | -0.01701 | 0.00029 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.24726 | 0.06114 | 0.24455 | 0.05981 | 0.23998 | 0.05759 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | -0.05202 | 0.00271 | -0.05525 | 0.00305 | -0.06325 | 0.00400 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.19761 | 0.03905 | 0.19443 | 0.03780 | 0.18915 | 0.03578 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.18049 | 0.03258 | 0.17883 | 0.03198 | 0.17615 | 0.03103 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.02903 | 0.00084 | 0.02830 | 0.00080 | 0.02693 | 0.00073 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | -0.02497 | 0.00062 | -0.02515 | 0.00063 | -0.02551 | 0.00065 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.05447 | 0.00297 | 0.04743 | 0.00225 | 0.03455 | 0.00119 |

表22： 在平方误差损失函数$\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\alpha}_{LL}$和熵损失函数$\hat{\alpha}_{EL}$下，针对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 1$， $T_2 = 7$，通过重要性抽样技术对$\hat{\alpha}$ 进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.05041 | 0.00254 | -0.05144 | 0.00265 | -0.06200 | 0.00384 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.10636 | 0.01131 | -0.10826 | 0.01172 | -0.12810 | 0.01641 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.13604 | 0.01851 | 0.13582 | 0.01845 | 0.13487 | 0.01819 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.11202 | 0.01255 | 0.11174 | 0.01249 | 0.11044 | 0.01220 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.05695 | 0.00324 | -0.05695 | 0.00324 | -0.05701 | 0.00325 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.00840 | 0.00007 | -0.01088 | 0.00012 | -0.12055 | 0.01453 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | -0.02730 | 0.00075 | -0.02827 | 0.00080 | -0.03582 | 0.00128 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.01630 | 0.00027 | -0.01748 | 0.00031 | -0.02542 | 0.00065 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.00692 | 0.00005 | -0.00730 | 0.00005 | -0.01038 | 0.00011 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.06124 | 0.00375 | -0.06157 | 0.00379 | -0.06439 | 0.00415 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | 0.02467 | 0.00061 | -0.02508 | 0.00063 | -0.02842 | 0.00081 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.08591 | 0.00738 | 0.08308 | 0.00690 | 0.06954 | 0.00484 |

表23： 在平方误差损失函数 $\hat{\beta}_{SEL}$ 、LINEX损失函数 $\hat{\beta}_{LL}$ 和熵损失函数 $\hat{\beta}_{EL}$ 下，针对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 1$，$T_2 = 7$，通过重要性抽样技术对 $\hat{\beta}$ 进行贝叶斯估计所得的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.05194 | 0.00270 | 0.03097 | 0.00096 | -0.15413 | 0.02376 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.11752 | 0.01381 | 0.10943 | 0.01197 | 0.09549 | 0.00912 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.00228 | 0.00001 | 0.00118 | 0.00000 | -0.00162 | 0.00000 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.07670 | 0.00588 | -0.07897 | 0.00624 | -0.08233 | 0.00678 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.03894 | 0.00152 | 0.03823 | 0.00146 | 0.03671 | 0.00135 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.22882 | 0.05236 | 0.22588 | 0.05102 | 0.22133 | 0.04899 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | 0.03251 | 0.00106 | 0.03111 | 0.00097 | 0.02666 | 0.00071 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.20779 | 0.04318 | 0.20631 | 0.04257 | 0.20332 | 0.04134 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.01289 | 0.00017 | 0.01176 | 0.00014 | 0.00921 | 0.00008 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.05215 | 0.00272 | -0.05243 | 0.00275 | -0.05302 | 0.00281 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | -0.04292 | 0.00184 | -0.04384 | 0.00192 | -0.04593 | 0.00211 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.01598 | 0.00026 | 0.01291 | 0.00017 | 0.00625 | 0.00004 |

表24： 在平方误差损失函数$\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\alpha}_{LL}$和熵损失函数$\hat{\alpha}_{EL}$下，采用 M-H技术对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 0.4$， $T_2 = 4$进行贝叶斯估计$\hat{\alpha}$ 所得的偏差和均方误差。

| m方案 | | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.01205 | 0.00015 | -0.02702 | 0.00073 | -0.05351 | 0.00286 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.05914 | 0.00350 | 0.01671 | 0.00028 | -0.07677 | 0.00589 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.09361 | 0.00876 | 0.03098 | 0.00096 | -0.18152 | 0.03295 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.03262 | 0.00106 | -0.02590 | 0.00067 | -0.18804 | 0.03536 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.01415 | 0.00020 | -0.02652 | 0.00070 | -0.02448 | 0.00060 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.03592 | 0.00129 | -0.00947 | 0.00009 | -0.13514 | 0.01826 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | 0.08795 | 0.00773 | 0.06847 | 0.00469 | 0.03149 | 0.00099 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.11408 | 0.01301 | 0.09599 | 0.00921 | 0.07760 | 0.00602 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.00804 | 0.00006 | -0.01747 | 0.00031 | -0.14197 | 0.02015 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.00150 | 0.00000 | -0.02589 | 0.00067 | -0.12907 | 0.01666 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | -0.04960 | 0.00246 | -0.07071 | 0.00500 | -0.13727 | 0.01884 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.00149 | 0.00000 | -0.02496 | 0.00062 | -0.12762 | 0.01629 |

表25： 在平方误差损失函数 ˆ $\beta_{SEL}$、LINEX损失函数 ˆ $\beta_{LL}$ 和熵损失函数 ˆ $\beta_{EL}$ 下，采用 M-H技术对真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 0.4$， $T_2 = 4$进行贝叶斯估计 ˆ $\beta$ 所得的偏差和均方误差。 ˆ

| m方案 | | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.00026 | 0.00000 | 0.16158 | 0.02611 | 0.11324 | 0.01282 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.10786 | 0.01163 | 0.07988 | 0.00638 | 0.05756 | 0.00331 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.08466 | 0.00717 | 0.05469 | 0.00299 | 0.03198 | 0.00102 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.17268 | 0.02982 | 0.14812 | 0.02194 | 0.13862 | 0.01922 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.00555 | 0.00003 | -0.05769 | 0.00333 | -0.23209 | 0.05387 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.00724 | 0.00005 | -0.04963 | 0.00246 | -0.14345 | 0.02058 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | 0.04112 | 0.00169 | -0.02387 | 0.00057 | -0.21480 | 0.04614 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.07185 | 0.00516 | 0.01602 | 0.00026 | -0.14434 | 0.02083 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.08643 | 0.00747 | 0.02546 | 0.00065 | -0.17772 | 0.03158 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.01869 | 0.00035 | -0.03623 | 0.00131 | -0.17325 | 0.03001 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | 0.05342 | 0.00285 | -0.00930 | 0.00009 | -0.16786 | 0.02818 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.01733 | 0.00030 | -0.08884 | 0.00789 | -0.29719 | 0.08832 |

表26： 在真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 1,\ T_2 = 7$条件下，采用平方误差损失函数$\hat{\alpha}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\alpha}_{LL}$和熵损失函数$\hat{\alpha}_{EL}$时，通过M-H技术得到的$\alpha$ 贝叶斯估计的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\hat{\alpha}_{SEL}$ | | $\hat{\alpha}_{LL}$ | | $\hat{\alpha}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.02627 | 0.00069 | -0.03927 | 0.00154 | -0.04494 | 0.00202 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.03707 | 0.00137 | -0.06351 | 0.00403 | -0.11340 | 0.01286 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.11327 | 0.01283 | 0.04831 | 0.00233 | -0.17754 | 0.03152 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.04528 | 0.00205 | -0.01225 | 0.00015 | -0.18208 | 0.03315 |
| | I | 0.2 | 0.7 | -0.00677 | 0.00005 | -0.01909 | 0.00036 | -0.01526 | 0.00023 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.02574 | 0.00066 | -0.02209 | 0.00049 | -0.13430 | 0.01804 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | 0.11666 | 0.01361 | 0.09819 | 0.00964 | 0.07273 | 0.00529 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | -0.02765 | 0.00076 | -0.05101 | 0.00260 | -0.16051 | 0.02577 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.00706 | 0.00005 | -0.01802 | 0.00032 | -0.14993 | 0.02248 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.05952 | 0.00354 | 0.03717 | 0.00138 | -0.06625 | 0.00439 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | 0.00884 | 0.00008 | -0.01686 | 0.00028 | -0.13304 | 0.01770 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.06622 | 0.00438 | 0.04601 | 0.00212 | -0.00263 | 0.00001 |

表27： 在真实数据的不同 $m$ 和 $T_1 = 1,\ T_2 = 7$条件下，采用平方误差损失函数$\hat{\beta}_{SEL}$、LINEX损失函数$\hat{\beta}_{LL}$ 和熵损失函数$\hat{\beta}_{EL}$ 时，通过M-H技术得到的$\beta$ 贝叶斯估计的偏差和均方误差。

| m | 方案 | $\alpha$ | $\beta$ | $\beta_{SEL}$ | | $\hat{\beta}_{LL}$ | | $\hat{\beta}_{EL}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Bias | MSE | Bias | MSE | Bias | MSE |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.08043 | 0.00647 | 0.25041 | 0.06271 | 0.22513 | 0.05068 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.11075 | 0.01226 | 0.07756 | 0.00602 | 0.04768 | 0.00227 |
| 5 | III | 0.2 | 0.7 | 0.03099 | 0.00096 | 0.00883 | 0.00008 | 0.00330 | 0.00001 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.11707 | 0.01371 | 0.08540 | 0.00729 | 0.05993 | 0.00359 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.02181 | 0.00048 | -0.03164 | 0.00100 | -0.14292 | 0.02043 |
| | II | 0.2 | 0.7 | -0.03177 | 0.00101 | -0.07534 | 0.00568 | -0.16969 | 0.02879 |
| 15 | III | 0.2 | 0.7 | 0.08504 | 0.00723 | 0.02962 | 0.00088 | -0.17040 | 0.02904 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.10244 | 0.01049 | 0.05754 | 0.00331 | -0.05893 | 0.00347 |
| | I | 0.2 | 0.7 | 0.09240 | 0.00854 | 0.03896 | 0.00152 | -0.08720 | 0.00760 |
| | II | 0.2 | 0.7 | 0.01618 | 0.00026 | -0.04503 | 0.00203 | -0.21788 | 0.04747 |
| 20 | III | 0.2 | 0.7 | 0.00047 | 0.00000 | -0.05444 | 0.00296 | -0.22237 | 0.04945 |
| | IV | 0.2 | 0.7 | 0.05222 | 0.00273 | -0.00639 | 0.00004 | -0.15100 | 0.02280 |

# 6 结论

本文研究了基于 Chen 分布的 IAT-II PCS 样本对两个未知参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行估计的问题。该分布具有浴盆形失效率函数。本文得到了这两个参数的最大似然估计量，以及基于观测费 Fisher 信息矩阵的区间估计。假设先验分布为 Gamma 分布，本文给出了平方误差损失函数、LINEX 损失函数和熵损失函数下的贝叶斯估计。本文使用 M-H 技术和重要性抽样技术计算贝叶斯估计。模拟和真实数据检验结果表明，最大似然估计与不同损失函数下的贝叶斯估计差异不显著，但后者的表现略优于前者。在 $\alpha$ 的贝叶斯估计量中，平方损失函数下的估计量表现最佳，熵损失函数下的估计效果次之。在 $\beta$的贝叶斯估计量中，LINEX 损失函数下的估计量具有最小的偏差和均方误差。

未来的工作可以考虑加速寿命试验下 IAT-II PCS 的参数推断、IAT-II PCS 在竞争失效试验中的应用，以及在更有效的删失方案下进行参数推断。

# 7 资助

本研究得到国家自然科学基金的资助。

# 参考文献

ö.Gürünlü Alma，& Belaghi，R.（2016年）。基于II型渐进混合删失数据的极值分布和正态分布参数估计。《统计计算与模拟》，*86*，569–596。

Balakrishnan，N.，& Aggarwala，R.（2000年）。渐进删失：理论、方法与应用。

Chen, S.-M.，& Bhattacharyya, G. K.（1987）。混合删失下指数参数的精确置信界。《Communications in Statistics - Theory and Methods》，16，2429–2442。

Chen, Z.（2000）。一种具有浴盆形状或递增失效率函数的新型双参数寿命分布。《Statistics 》&《Probability Letters》，49，155–161。Childs, A.，Chandrasekar, B.，& Balakrishnan, N.（2008）。渐进混合删失方案下指数参数的精确似然推断。（第323–334页）。Childs, A.，Chandrasekar, B.，Balakrishnan, N.，& Kundu, D.（2003）。基于来自指数分布的I型和II型混合删失样本的精确似然推断。《统计数学研究所年刊》，。Cramer, E.，Burkschat, M.，& Górny, J.（2016）。关于来自指数分布的II型渐进混合删失数据中最大似然估计的精确分布。《统计计算与模拟》，86，2036–2052。Dey, S.，& Dey, T.（2014）。带二项式移除的渐进II型删失下瑞利分布的统计推断。《应用数学建模》，38，974–982。El-Din, M. M. M. M.，Amein, M. M.，Shafay, A. R.，& Mohamed, S.（2017）。基于自适应自适应II型渐进删失样本的广义指数分布估计。《统计计算与模拟》，87，1292–1304。Elshahhat, A.，& Nassar, M.（2022）。带二项式移除的自适应II型渐进混合删失分析。《统计计算与模拟》，0，1–27。Epstein, B.（1954年）。指数情形下的截尾寿命试验。《The Annals of Mathematical Statistics》，25。Hastings, W. K.（1970年）。使用马尔可夫链的蒙特卡罗抽样方法及其应用。《生物统计学》，57，97–109。Jerald., L. F.（1982年）。寿命数据的统计模型与方法。《约翰·威利父子出版公司，纽约》，10，316–317。Kundu, D.（2007）。关于混合删失威布尔分布。《统计规划与推断杂志》，137，2127–2142。Lv, Q.，Tian, Y.，& Gui, W.（2022年）。自适应II型渐进混合删失下Gompertz分布的统计推断。《应用统计学杂志》，0，1–30。

Merovci, F.，& Elbatal, I.（2014年）。威布尔-瑞利分布：理论与应用。《应用数学》&《信息科学》，*5*。Metropolis, N.，Rosenbluth, A. W.，Rosenbluth, M. N.，Teller, A. H.，& Teller, E.（1953年）。利用快速计算机进行状态方程计算。《化学物理学杂志》，*21*，1087–1092。Mohan, R.，& Chacko, M.（2020年）。基于自适应II型渐进删失方案的Kumaraswamy-指数分布参数估计。《统计计算与模拟》，*91*，81–107。Mohan, R.，& Chacko, M.（2021年）。基于自适应II型渐进删失方案的Kumaraswamy-指数分布参数估计。《统计计算与模拟》，*91*，81–107。Nassar, M.，& Abo-Kasem, O.（2017年）。自适应II型渐进混合删失方案下逆威布尔分布参数的估计。《计算与应用数学杂志》，*315*，228–239。Nelson, W.（1998年）。可靠性数据的统计方法。纽约（NY）：Wiley。Ng, H. K. T.，Kundu, D.，& Chan, P. S.（2009年）。自适应II型渐进删失方案下指数寿命的统计分析。《海军研究后勤学》（*NRL*），*56*，687–698。Oguntunde, P. E.，Adejumo, A. O.，& Owoloko, E. A.（2017年）。Kumaraswamy逆指数分布在实际寿命数据中的应用。《国际应用数学与统计学杂志》，*56*，34–47。Panahi, H.，& Moradi, N.（2020年）。基于自适应II型渐进混合删失样本的反指数化瑞利分布估计。《计算与应用数学杂志》，*364*，112345。Tomer, S. K.，& Panwar, M. S.（2015年）。I型渐进混合删失方案下麦克斯韦分布的估计程序。《统计计算与模拟》，*85*，339–356。Yan, W.，Li, P.，& Yu, Y.（2021年）。改进的自适应II型渐进删失下Burr-XII分布可靠性的统计推断。《应用数学建模》，*95*，38–52。

Ye, Z.-S.， Chan, P.-S.， Xie, M.， &Ng, H. K. T.（2014年）。自适应II型渐进删失方案下极值分布的统计推断。《统计计算与模拟》， *84*， 1099–1114。

Zhang, Y., & Gui, W. (2020年). 基于累积风险函数的帕累托分布 II 型逐步删失数据拟合优度检验。《计算与应用数学杂志》, *368*, 112557.

Zhang, Z., & Gui, W. (2019). II型渐进删失下广义瑞利分布可靠性的统计推断。《计算与应用数学杂志》, *361*, 295–312.