arXiv:2304.00191v1 [math.RA] 1 Apr 2023

# 偏群表示及其与 Birget-Rhodes 扩张的关系

WESLEY G. LAUTENSCHLAEGER 和 THA´ISA TAMUSIUNAS

Abstract. 我们在代数 $\mathcal{A}$ 上引入有限群胚 $\mathcal{G}$ 的偏表示，并证明 $\mathcal{G}$ 的偏表示与由 $\mathcal{G}$的 Birget-Rhodes 扩张 $\mathcal{G}^{BR}$ 生成的代数的表示一一对应。

2020年AMS主题分类：主要分类：20L05，18B40。次要分类：20M30。关键词：群胚、偏表示、偏群胚代数、Birget-Rhodes 扩张。

## 1. 引言

过去几年中，许多研究探讨了群胚的作用与偏作用。例如，偏作用与整体作用之间的关系、伽罗瓦理论、经典群论定理的推广、Morita理论、交叉积和对偶定理，都是文献 [1], [2], [3], [4], [5], [9], [10]讨论的研究主题。根据整体对象来刻画偏对象的思路，有助于我们理解偏理论的行为。

有序群胚 $\mathcal{G}$ 的 Birget-Rhodes 扩张 $\mathcal{G}^{BR}$ 由 Gilbert 在 [7] 中构造，并证明它具有有序群胚结构 [7, 命题 3.1]。此外， $\mathcal{G}$ 的偏作用与 $\mathcal{G}^{BR}$的作用之间存在一一对应，这可视为通过扩展作用群胚而获得的部分到整体结果。

$\mathcal{G}^{BR}$ 的构造可用于改进 Exel、Dokuchaev 和 Piccione 在 [6], 中关于群 $G$的偏表示的研究。在该研究中，作者提出了群 $G$的部分群代数，记作 $K_{par}(G)$；这个代数的表示与 $G$ 的偏表示相对应。研究还证明，代数 $K_{par}(G)$ 是一个群胚代数 $K\Gamma(G)$，其中 $\Gamma(G)$ 是与 $G$ [6, 相关的一个确定有限群胚，见推论 2.7]。不过，群胚 $\Gamma(G)$具有非常丰富的结构。事实上，它是群 $G$的 Birget-Rhodes 扩张。其背后的依据是 Ehresmann-Schein-Nambooripad 定理（简称“ESN定理”） [8, 定理 4.1.8], ，该定理证明逆半群范畴与归纳群胚范畴同构。因此，尽管 $G$ 的 Birget-Rhodes 扩张 $G^{BR}$ 是一个逆半群，但依据 ESN定理，它也具有群胚结构。

基于此，本文的主要目的是补充并拓展 Exel、Dokuchaev 和 Piccione 的工作，建立群胚 $\mathcal{G}$ 的偏表示与由其 Birget-Rhodes 扩张 $\mathcal{G}^{BR}$生成的代数 $K\mathcal{G}^{BR}$ 的表示之间的关系。事实上，我们将证明， $\mathcal{G}$ 的偏表示与 $K\mathcal{G}^{BR}$的表示之间存在一一对应。这与

通过扩张群胚 $\mathcal{G}$ ，从而用“全局”表示来刻画偏表示这一思路相符。

本文组织如下。我们首先确定有关群胚的一些术语，并由此引入有限群胚 $\mathcal{G}$ 在代数上的偏表示概念。接着，我们介绍代数 $K_{par}(\mathcal{G})$，其表示与 $\mathcal{G}$的偏表示一一对应。最后一节旨在证明，代数 $K_{par}(\mathcal{G})$ 是由 $\mathcal{G}$的 Birget-Rhodes 扩张生成的代数。

本文中，环和代数均为结合且含单位元的。

## 2. Partial representations and the algebra $K_{par}(\mathcal{G})$

2.1. 偏表示。我们回顾一下，群胚 $\mathcal{G}$ 是一个小范畴，其中每个态射都是同构。我们用 $\mathcal{G}_0$ 表示 $\mathcal{G}$ 的对象集合。注意，$\mathrm{id}: \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}$，由 $\mathrm{id}(x) = \mathrm{id}_x$给出，是一个单射，因此我们将 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$视为同一对象。给定$g \in \mathcal{G}$， $g$ 的定义域和值域分别记为 $d(g)$ 和 $r(g)$。因此，$d(g) = g^{-1}g$ 且 $r(g) = gg^{-1}$。对于所有 $g$、$h \in G$，当乘积 $gh$ 有定义时，我们记作 $\exists gh$ 。我们约定记号 $\mathcal{G}_2 := \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : \exists gh\}$。

在本文余下部分中，设 $\mathcal{G}$ 为有限群胚， $K$ 为一个域， $\mathcal{A}$ 为一个 $K$-代数。本节首先定义 $\mathcal{A}$ 上的部分群胚表示。

定义 2.1. $\mathcal{A}$ 上 $\mathcal{G}$ 的部分群胚表示是一个映射 $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ ，满足 t:
(i) $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$, $\forall (g,h) \in \mathcal{G}_2$; (ii) $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$, $\forall (g,h) \in \mathcal{G}_2$; (iii) $\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)$, $\forall g \in \mathcal{G}$ ; (iv) $\sum_{e \in \mathcal{G}_0} \pi(e) = 1_A$和 $\pi(e)\pi(f) = 0$对 $e, f \in \mathcal{G}_0$ 满足 $e \neq f$。

注记 2.2. 注意，对于所有$g \in \mathcal{G}$， $\pi(g) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)\pi(g^{-1}g) = \pi(g)\pi(d(g))$。类似地，对于所有 $g \in \mathcal{G}$， $\pi(g) = \pi(r(g))\pi(g)$。因此，若 $(g,h) \notin \mathcal{G}_2$，则 $\pi(g)\pi(h) =\pi(g)\pi(d(g))\pi(r(h))\pi(h) = \pi(g)0\pi(h) = 0$。

引理 2.3. 设 $g \in \mathcal{G}$。由此可得:
(a) $\varepsilon(g) = \pi(g)\pi(g^{-1})$ 是 $A$ 的一个幂等元;
(b) 若 $r(g) = r(h)$，则 $\varepsilon(g)\varepsilon(h) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$。

证明。(a) 显然。

(b) If $r(g) = r(h)$,

$$\begin{aligned}\pi(h^{-1})\varepsilon(g) &= \pi(h^{-1})\pi(g)\pi(g^{-1}) = \pi(h^{-1}g)\pi(g^{-1}) = \pi(h^{-1}g)\pi(g^{-1}h)\pi(h^{-1}g)\pi(g^{-1}) \\ &= \pi(h^{-1}g)\pi(g^{-1}h)\pi(h^{-1}gg^{-1}) = \varepsilon(h^{-1}g)\pi(h^{-1}r(g)) = \varepsilon(h^{-1}g)\pi(h^{-1}r(h)) \\ &= \varepsilon(h^{-1}g)\pi(h^{-1}),\end{aligned} \tag{1}$$

由此可得

$$\varepsilon(h)\varepsilon(g) = \pi(h)\pi(h^{-1})\varepsilon(g) = \pi(h)\varepsilon(h^{-1}g)\pi(h^{-1}) = \varepsilon(r(h)g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \varepsilon(g)\varepsilon(h).$$

□

2.2. $K_{par}(\mathcal{G})$ 代数。正如群 G 的偏表示可以由定义在部分群代数 $K_{par}(G)$ 上的代数同态刻画一样，对于群胚 $\mathcal{G}$的偏表示，也可以构造一个与 $\mathcal{G}$ 相关联的代数，通过代数同态来刻画偏表示。

定义 2.4. 我们将部分群胚 $K$-代数 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$ 定义为由符号集 $\{[g]:\ g\in\mathcal{G}\}$ 及以下关系生成的带单位的泛 $K$-代数 $1_{K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})}$：

(i) $[g^{-1}][g][h]=[g^{-1}][gh]$, $\forall(g,h)\in\mathcal{G}_2$; (ii) $[g][h][h^{-1}]=[gh][h^{-1}]$, $\forall(g,h)\in\mathcal{G}_2$; (iii) $[r(g)][g]=[g]=[g][d(g)]$, $\forall g\in\mathcal{G}$; (iv) $[g][h]=0$, $\forall(g,h)\notin\mathcal{G}_2$.

注意，$\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e]=1_{K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})}$。事实上，$\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e]\right)[g]=\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e][g]=[r(g)][g]=[g]$。类似地，$[g]\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e]\right)=[g]$。

例 2.5. 设 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2$（不交并），其中 $\mathcal{G}_1=\{g,g^{-1},r(g)\ d(g)\}$ 且 $\mathcal{G}_2=\{r(h)\ h\}$，其中 $h=h^{-1}$。则 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$ 作为 $K$- 向量空间，其基为 $\{[g],[g^{-1}],[r(g)]$、$[d(g)]$、$[g][g^{-1}]$、$[g^{-1}][g]$、$[h]$、$[r(h)]$、$[h][h]\}$。容易看出，$K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})\simeq K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G}_1)\oplus K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G}_2)$。更一般地，若 $\mathcal{G}$ 是一个有限群胚，其连通分支为 $\mathcal{G}_1$、……、$\mathcal{G}_n$，则 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})\simeq K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G}_1)\oplus\cdots\oplus K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G}_n)$。

下一个定理表明，$\mathcal{G}$ 的部分表示与 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$ 的表示之间存在一一对应。

定理 2.6. 设 $\pi:\ \mathcal{G}\to\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$上的部分表示。则存在唯一的 $K$-代数同态 $\phi:\ K_{par}(\mathcal{G})\to\mathcal{A}$，使得 $\phi([g])=\pi(g)$。反之，若$\phi:\ K_{par}(\mathcal{G})\to\mathcal{A}$ 是 $K$-代数同态，则 $\pi(g)=\phi([g])$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$上的部分群胚表示。

证明. 设 $\pi:\ \mathcal{G}\to A$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$上的部分表示。定义

$$\phi: K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})\to\mathcal{A}$$
$$\sum_{i=1}^{m}k_i\prod_{j=1}^{n}[g_{i,j}]\mapsto\sum_{i=1}^{m}k_i\prod_{j=1}^{n}\pi(g_{i,j}),$$

其中，对于所有 $1\le i\le m$ 和 $1\le j\le n$，$k_i\in K$ 和 $g_{i,\ j}\in\mathcal{G}$。于是，对于所有 $g\in\mathcal{G}$，$\phi([g])=\pi(g)$。此外，若 $\exists gh$,

$$\begin{aligned}\phi([g][h])&=\phi([r(g)][g][h])=\phi([gg^{-1}][g][h])=\phi([g][g^{-1}][g][h])=\phi([g][g^{-1}][gh])\\&=\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(gh)=\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h)=\pi(g)\pi(h)=\phi([g])\phi([h]),\end{aligned}$$

并且在其他情况下，$\phi([g][h](\pi))$ () ()。

此外，$\phi(1_{K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})})=\phi\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e]\right)=\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\pi(e)=1_A$。显然，$\phi$ 是唯一的　　.

反过来，设 $\phi:\ K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})\to\mathcal{A}$ 是 $K$-代数的同态。定义 $\pi:\ \mathcal{G}\to K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$，使得对所有 $g\in\mathcal{G}$，$\pi(g)=\phi([g])$。我们将证明，$\pi$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的偏群胚表示。事实上，

(i)：若 $(g,h)\in\mathcal{G}_2$，则

$$\begin{aligned}\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})&=\phi([g])\phi([h])\phi([h^{-1}])=\phi([g][h][h^{-1}])\\&=\phi([gh][h^{-1}])=\phi([gh])\phi([h^{-1}])=\pi(gh)\pi(h^{-1}).\end{aligned}$$

(ii)：与 (i) 类似。

（iii）：$\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)=\phi([g])\phi([g^{-1}])\phi([g])=\phi([g][g^{-1}][g])=\phi([g])=\pi(g)$。

（iv）：我们有

$$\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\pi(e)=\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\phi([e])=\phi\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}[e]\right)=\phi(1_{K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})})=1_A$$

并且若 $e,f\in\mathcal{G}_0$ 与 $e\neq f$，则 $\pi(e)\pi(f)=\phi([e])\phi([f])=\phi([e][f])=\phi(0)=0$。 □

## 3. The relation with the Birget-Rhodes expansion

本节将用 $\mathcal{G}$ 的 Birget-Rhodes 扩张来描述 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$。定义 $X_g=\{h\in\mathcal{G}:\ r(h)=r(g)\}$，对所有 $g\in\mathcal{G}$ 均成立。注意到 $X_g=X_{r(g)}$。现在令 $S\subseteq X_e$ 为某个 $e\in\mathcal{G}_0$ 的子集。我们定义：

$$P_S=\prod_{h\in S}\varepsilon(h)\prod_{h\in X_e\setminus S}(\pi(e)-\varepsilon(h)). \tag{2}$$

利用 (1) 很容易看出，对所有满足 $d(\ell)=e$ 且 $S\subseteq X_e$ 的 $\ell\in\mathcal{G}$，都有 $\pi(\ell)P_S=P_{\ell S}\pi(\ell)$。

注意，若 $e\notin S$，则 $P_S=0$。此外，若 $\ell\in X_e\setminus S$，则 $P_S\pi(\ell)=0$，因为 $\varepsilon(\ell)\pi(\ell)=\pi(\ell)$，所以 $(\pi(e)-\varepsilon(\ell))\pi(\ell)=\pi(e)\pi(\ell)-\varepsilon(\ell)\pi(\ell)=\pi(r(\ell))\pi(\ell)-\pi(\ell)=\pi(\ell)-\pi(\ell)=0$。

此外，

$$\pi(e)=\sum_{S\subseteq X_e}P_S, \tag{3}$$

由于我们有组合公式

$$\begin{aligned}\pi(e)=\prod_{h\in X_e}\pi(e)&=\prod_{h\in X_e}(\pi(e)-\varepsilon(h)+\varepsilon(h))\\&=\sum_{S\subseteq X_e}\left(\left(\prod_{h\in S}\varepsilon(h)\right)\cdot\left(\prod_{h\in X_g\setminus S}(\pi(e)-\varepsilon(h))\right)\right).\end{aligned}$$

现在定义 $Y_g=\{h\in\mathcal{G}:\ r(h)=d(g)\}=X_{g^{-1}}$。我们将由 $\mathcal{G}$ 构造的有限群胚

$$\mathcal{G}^{BR}=\{(A,g):d(g),g^{-1}\in A\subseteq Y_g\}$$

定义为具有如下部分乘法的群胚：

$$(A,g)\cdot(B,h)=\begin{cases}(B,gh),\ \text{if } (g,h)\in\mathcal{G}_2 \text{ and } A=hB,\\ \text{undefined, otherwise.}\end{cases}$$

有序对 $(A,g)$ 的逆为 $(gA,g^{-1})$。此外，$d(A,g)=(A,d(g))$，且 $r(A,g)=(gA,r(g))$。该群胚是 $\mathcal{G}$ 的 Birget-Rhodes 扩张（见 [7, 命题 3.1]）。

简单计算可知，形如 $(A,e)$、$e\in\mathcal{G}_0$ 的元素是群胚代数 $K\mathcal{G}^{BR}$ 中的幂等元，即 $(A,e)^2=(A,e)$。此外，它们两两正交，且其和为 $1_{K\mathcal{G}^{BR}}$。

引理 3.1. 定义映射 $\lambda:\ \mathcal{G}\to K\mathcal{G}^{BR}$，使得 $\lambda(g)=\sum_{A\ni g^{-1}}(A,g)$。则 $\lambda$ 是 $\mathcal{G}$ 在 $K\mathcal{G}^{BR}$ 上的一个部分群胚表示。

证明。（i）给定 $(g,h) \in \mathcal{G}_2$，我们有

$$\lambda(g^{-1})\lambda(g)\lambda(h) = \sum_{\substack{A\ni g\\ C\ni g^{-1}\\ B\ni h^{-1}}} (A,g^{-1})(B,g)(C,h) = \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ hC\ni g^{-1}}} (ghC,g^{-1})(hC,g)(C,h)$$
$$= \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (C,d(g)h) = \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (C,r(h)h) = \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (C,h).$$

另一方面，

$$\lambda(g^{-1})\lambda(gh) = \sum_{\substack{A\ni g\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (A,g^{-1})(C,gh) = \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (hC,g^{-1})(C,gh) = \sum_{\substack{C\ni h^{-1}\\ C\ni h^{-1}g^{-1}}} (C,h).$$

因此，对于所有 $(g,h) \in \mathcal{G}_2$，$\lambda(g^{-1})\lambda(g)\lambda(h) = \lambda(g^{-1})\lambda(gh)$。等式 $\lambda(g)\lambda(h)\lambda(h^{-1}) = \lambda(gh)\lambda(h^{-1})$ 的证明类似。

(iii) 根据注 2.2，等式 $\lambda(g)\lambda(g^{-1})\lambda(g) = \lambda(g)$ 等价于 $\lambda(g)\lambda(d(g)) = \lambda(g)$。我们将证明第二个等式。对于 $g \in \mathcal{G}$，

$$\lambda(g)\lambda(d(g)) = \left(\sum_{A\ni g}(A,g)\right)\left(\sum_{B\ni d(g)}(B,d(g))\right) = \sum_{A\ni g}(A,g)(A,d(g)) = \sum_{A\ni g}(A,g) = \lambda(g).$$

(iv) 我们有 $\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\lambda(e) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}(A,e) = 1_{K\mathcal{G}^{BR}}$，并且若 $e,f \in \mathcal{G}_0$, $e \neq f$，

$$\lambda(e)\lambda(f) = \left(\sum_{A\ni e}(A,e)\right)\left(\sum_{B\ni f}(B,f)\right) = \sum_{\substack{A\ni e\\ B\ni f}}(A,e)(B,f) = 0. \qquad \square$$

定理3.2. $\mathcal{G}$ 的偏群胚表示与 $K\mathcal{G}^{BR}$的表示之间存在一一对应。更确切地说，若 $\mathcal{A}$是任意含幺的 $K$-代数，则 $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$ 的偏群胚表示，当且仅当存在一个代数同态 $\tilde{\pi}$ : $K\mathcal{G}^{BR} \to \mathcal{A}$ 使得 $\pi = \tilde{\pi}\circ\lambda$。此外，这样的同态 $\tilde{\pi}$ 是唯一的。

证明。若 $\tilde{\pi}$ : $K\mathcal{G}^{BR} \to \mathcal{A}$ 是 $K$-代数的同态，则显然 $\pi = \tilde{\pi}\circ\lambda$ : $\mathcal{G} \to \mathcal{A}$是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{A}$上的偏群胚表示。

反过来，设 $\pi$ : $\mathcal{G} \to \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$的偏群胚表示。对所有$g \in \mathcal{G}$，记 $\varepsilon(g) = \pi(g)\pi(g^{-1}) \in \mathcal{A}$。回顾引理 2.3和注记2.2可知，$\varepsilon(g)\varepsilon(h) = \delta_{r(g),r(h)}\varepsilon(h)\varepsilon(g)$。此外，由(1)可知，若 $d(g) = r(h)$，则 $\pi(g)\varepsilon(h) = \varepsilon(gh)\pi(g)$；若$d(g) \neq r(h)$，则 $\pi(g)\varepsilon(h) = 0$。类似地，若 $r(g) = r(h)$，则 $\varepsilon(h)\pi(g) = \pi(g)\varepsilon(g^{-1}h)$；否则，$\varepsilon(h)\pi(g) = 0$ 。

对于 $(A,g) \in \mathcal{G}^{BR}$，我们定义

$$\tilde{\pi}(A,g) = \pi(g)\left(\prod_{h\in A}\varepsilon(h)\right)\left(\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g)) - \varepsilon(h))\right).$$

对于 $(A,g),(B,h) \in \mathcal{G}^{BR}$，我们有

$$\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) = \pi(g)\cdot\prod_{k\in A}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(k))\cdot\pi(h)$$
$$\cdot\prod_{\ell\in B}\varepsilon(\ell)\cdot\prod_{\ell\in Y_h\setminus B}(\pi(d(h))-\varepsilon(\ell)).$$

若 $d(g) \neq r(h)$，则对所有 $k \in Y_g \setminus A$，由于 $\varepsilon(k) = \pi(k)\pi(k^{-1})$ 且 $d(k^{-1}) = r(k) = d(g) \neq r(h)$，因此 $\pi(d(g))\pi(h) = 0$ 且 $\varepsilon(k)\pi(h) = 0$。所以在这种情况下，$\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) = 0$。现在假设 $d(g) = r(h)$。因此

$$\begin{aligned}
&\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h)\\
&= \pi(g)\pi(h)\cdot\prod_{k\in A}\varepsilon(h^{-1}k)\cdot\prod_{k\in Y_g\setminus A}(\pi(d(h))-\varepsilon(h^{-1}k))\cdot\prod_{\ell\in B}\varepsilon(\ell)\cdot\prod_{\ell\in Y_h\setminus B}(\pi(d(h))-\varepsilon(\ell))\\
&= \pi(g)\pi(h)\cdot\prod_{k\in h^{-1}A}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_h\setminus h^{-1}A}(\pi(d(h))-\varepsilon(k))\cdot\prod_{\ell\in B}\varepsilon(\ell)\cdot\prod_{\ell\in Y_h\setminus B}(\pi(d(h))-\varepsilon(\ell)).
\end{aligned}$$

若 $h^{-1}A \neq B$，也就是说，若 $A \neq hB$，则要么存在 $k \in h^{-1}A$ 使得 $k \in Y_h \setminus B$，要么存在 $k \in B$ 使得 $k \in Y_h \setminus h^{-1}A$。在这两种情况下，因子 $\varepsilon(k)(\pi(d(h)) - \varepsilon(k)) = 0$都会出现在 $\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h)$ 的表达式中，由此可得 $\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) = 0$。另一方面，若 $h^{-1}A = B$，则

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) &= \pi(g)\pi(h)\cdot\prod_{k\in h^{-1}A}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_h\setminus h^{-1}A}(\pi(d(h)))-\varepsilon(k)\\
&= \pi(g)\pi(h)\varepsilon(h^{-1})\cdot\prod_{\substack{k\in h^{-1}A\\ k\neq h^{-1}}}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_h\setminus h^{-1}A}(\pi(d(h)))-\varepsilon(k)\\
&= \pi(gh)\varepsilon(h^{-1})\cdot\prod_{\substack{k\in h^{-1}A\\ k\neq h^{-1}}}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_h\setminus h^{-1}A}(\pi(d(h)))-\varepsilon(k)\\
&= \pi(gh)\cdot\prod_{k\in h^{-1}A}\varepsilon(k)\cdot\prod_{k\in Y_h\setminus h^{-1}A}(\pi(d(h)))-\varepsilon(k)\\
&= \tilde{\pi}(h^{-1}A,gh) = \tilde{\pi}(B,gh) = \tilde{\pi}((A,g)\cdot(B,h)).
\end{aligned}$$

因此，在所有情况下，我们都有 $\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) = \tilde{\pi}((A,g)\cdot(B,h))$。这表明，将 $\tilde{\pi}$ 从 $\mathcal{G}^{BR}$ 线性延拓到 $K\mathcal{G}^{BR}$，可得到 $K\mathcal{G}^{BR}$ 在 $\mathcal{A}$ 中的一个同态。

现在回忆一下，$1_{K\mathcal{G}^{BR}} = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}(A,e)$。于是

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(1_{K\mathcal{G}^{BR}}) &= \tilde{\pi}\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}(A,e)\right) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}\tilde{\pi}(A,e)\\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}\pi(e)\cdot\prod_{A\ni g}\varepsilon(g)\cdot\prod_{g\in Y_e\setminus A}(\pi(e)-\varepsilon(g))\\ &= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}\prod_{A\ni g}\varepsilon(g)\cdot\prod_{g\in Y_e\setminus A}(\pi(e)-\varepsilon(g))\\ &\overset{(2)}{=} \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\ni e}P_A = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{A\subseteq X_e}P_A \overset{(3)}{=} \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\pi(e) = 1_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}\circ\lambda(g) &= \tilde{\pi}\left(\sum_{A\ni g^{-1}}(A,g)\right) = \sum_{A\ni g^{-1}}\tilde{\pi}(A,g) = \pi(g)\cdot\sum_{A\ni g^{-1}}\sum_{h\in A}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\varepsilon(g^{-1})\cdot\sum_{A\ni g^{-1}}\sum_{\substack{h\in A\\ h\neq g^{-1}}}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\cdot\sum_{A\ni g^{-1}}\sum_{\substack{h\in A\\ h\neq g^{-1}}}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\cdot\sum_{A\ni g^{-1}}\pi(d(g))\sum_{\substack{h\in A\\ h\neq g^{-1}}}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\cdot\sum_{A\ni g^{-1}}(\varepsilon(g^{-1})+\pi(d(g))-\varepsilon(g^{-1}))\sum_{\substack{h\in A\\ h\neq g^{-1}}}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus A}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\cdot\sum_{B}\prod_{h\in B}\varepsilon(h)\cdot\prod_{h\in Y_g\setminus B}(\pi(d(g))-\varepsilon(h))\\ &= \pi(g)\tilde{\pi}\left(\sum_{B}(B,d(g))\right) = \pi(g)\tilde{\pi}(d(g)) = \pi(g)\cdot\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0}\tilde{\pi}(e)\right) = \pi(g)1_{K\mathcal{G}^{BR}} = \pi(g).\end{aligned}$$

现在只需证明同态 $\tilde{\pi}$ 的唯一性。为此，我们将证明 $\lambda(\mathcal{G})$ 生成 $K\mathcal{G}^{BR}$。

设 $(B,h)\in\mathcal{G}^{BR}$，其中 $B=\{b_1^{-1},b_2^{-1},\dots,b_{k-1}^{-1},h^{-1}\}$ 是 $Y_h$ 的一个子集，且包含 $d(h)$。这类二元组构成 $K\mathcal{G}^{BR}$ 的向量空间基。记由 $\lambda(\mathcal{G})$ 生成的 $K\mathcal{G}^{BR}$ 的子代数为 $\mathfrak{A}$。设 $\{g_1,\dots,g_k\}\subseteq\mathcal{G}$ 使得

$$g_1=b_1,\quad g_1g_2=b_2,\quad g_1g_2g_3=b_3,\quad \dots\quad g_1g_2\cdots g_{k-1}=b_{k-1},\quad g_1\cdots g_k=h.$$

这些元素是定义良好的。事实上，由于 $g_1=b_1$，$d(b_1^{-1})=r(b_1)=d(h)=r(b_2)$ 以及 $g_1g_2=b_2$，可得到 $g_2=b_1^{-1}b_2$。归纳地，对于所有 $2\le i\le k-1$ 和 $g_k=b_{k-1}^{-1}h$，我们得到 $g_i=b_{i-1}^{-1}b_i$。

考虑元素

$$\lambda(g_1)\cdots\lambda(g_k)=\sum_{\substack{A_1\ni g_1^{-1}\\ \vdots\\ A_k\ni g_k^{-1}}}(A_1,g_1)\cdots(A_k,g_k)=\sum_{\substack{A_k\ni g_k^{-1}\\ g_kA_k\ni g_{k-1}^{-1}\\ \vdots\\ g_2\cdots g_kA_k\ni g_1^{-1}}}(A_1,g_1\cdots g_k)=\sum_{A\supseteq B}(A,h).$$

因此，对于所有 $(B,h)\in\mathcal{G}^{BR}$, $\sum_{A\supseteq B}(A,h)\in\mathfrak{A}$。设 $Y_g\setminus B=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$。我们有

$$\sum_{A\supseteq B}(A,h)-\sum_{A\supseteq B\cup\{x_1\}}(A,h)=\sum_{\substack{A\supseteq B\\ A\not\ni x_1}}(A,h),$$

由此归纳可得

$$(B,h)=\sum_{\substack{A\supseteq B\\ A\not\ni x_1,\ldots,x_{n-1}}}(A,h)-\sum_{\substack{A\supseteq B\\ A\not\ni x_1,\ldots,x_n}}(A,h)\in\mathfrak{A},$$

证明完毕。 □

推论 3.3。群胚代数 $K\mathcal{G}^{BR}$ 同构于偏群胚代数$K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$。

证明。映射 $[\,]:\mathcal{G}\to K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$、 $g\mapsto[g]$和 $\lambda:\mathcal{G}\to K\mathcal{G}^{BR}$ 都是 $\mathcal{G}$ 的部分表示。根据定理 2.6 和 3.2，存在 $K$-代数同态 $\tilde{\pi}:K\mathcal{G}^{BR}\to K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$ 和 $\phi$: $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})\to K\mathcal{G}^{BR}$，使得 $\tilde{\pi}(\lambda(g))=[g]$ 以及 $\phi([g])=\lambda(g)$。

容易验证， $\tilde{\pi}$ 和 $\phi$ 互为逆映射，因为它们在生成元上都是恒等映射；因此， $\tilde{\pi}$ 和 $\phi$ 是同构。□

注释 3.4。关于伯努利偏作用的 $K_{\mathrm{par}}(\mathcal{G})$的结构已在 [11], 中得到广泛研究，并给出了若干示例。

## References

[1] D. Bagio、A. Paques 和 H. Pinedo。偏作用的限制与扩张。 *J. Pure Appl. Algebra*，224 10 106391，2020（）：。[2] D. Bagio、A. Sant'Ana 和 T. Tamusiunas。群胚群型偏作用的伽罗瓦对应。 *Bull. Belgian Math. Soc.-Simon Stevin*，28(5)：745–767，2022。[3] G. Beier、C. Garcia、W. G. Lautenschlaeger、J. Pedrotti 和 T. Tamusiunas。群胚的拉格朗日定理和西洛定理的推广。 *São Paulo J. Math. Sci*，第 1–20 页，2023。[4] W. Cortes 和 T. Tamusiunas。利用偏同构刻画群胚伽罗瓦扩张。 *Bull. Aust. Math. Soc.*，96(1)：59–68，2017。[5] S. Della Flora、D. Flˆores、A. Morgado 和 T. Tamusiunas。集合上的群胚作用、对偶性与莫里塔框架。 *Comm. Algebra*，51(1)：178–190，2023。[6] M. Dokuchaev、R. Exel 和 P. Piccione。偏表示与偏群代数。 *J. Algebra*，226 1 505 532，2000（）：–。[7] N. Gilbert。有序群胚的作用与扩展。 *J. Pure Appl. Algebra*，198(1-3)：175–195，2005。[8] M. V. Lawson。逆半群：偏对称理论。 *World Scientific*，1998。[9] A. Paques 和 T. Tamusiunas。群胚作用的伽罗瓦对应定理。 *J. Algebra*，509 105 123，2018：–。[10] J. Pedrotti 和 T. Tamusiunas。伽罗瓦映射的单射性。 *Bull. Brazilian Math. Soc.*，新系列，54(1)：1–11，2023。[11] W. Velasco。扩展结构代数。博士论文，*UFPR*，2021。

偏群表示及其与 Birget-Rhodes 扩张的关系9

Instituto de Matemática、 Universidade Federal do Rio Grande do Sul、 Av .
9500 Brazil 、
91509-900. Porto Alegre-RS: wesleyglautenschlaeger@gmail.com*Email address*: thaisa.tamusiunas@gmail.com