基于集总扰动分离与估计的空中协同运输力协调控制

Lidan Xu、Hao Lu、Jianliang Wang、Xianggui Guo 和 Lei Guo,

arXiv:2304.00193v1 [cs.RO] 1 Apr 2023

摘要

本文研究了两架四旋翼飞行器协同运输缆绳悬挂管道的问题。本文提出了一种力协调控制方案，其中引入力一致性项，以均衡两架四旋翼飞行器之间的载荷分布。由于推力不确定性与缆绳力在加速度通道中相互耦合，扰动观测器只能获得集总扰动估计值。在准静态条件下，本文提出一种扰动分离策略，以消除推力不确定性估计值，从而实现精确的缆绳力估计。本文利用李雅普诺夫理论分析了整个系统的稳定性。数值仿真和采用异构四旋翼无人机开展的室内实验均验证了推力不确定性分离策略和力一致性算法的有效性。

索引词

协同运输、力协调、编队控制、扰动分离。

I. 引言

RECENT 年来，无人机配送的应用日益广泛。空中运输面临的瓶颈问题在于有效载荷能力受限。尽管使用更大型的飞行器或许可以解决这一问题，但普遍认为这样成本更高、效率更低。正如 [1], 所述，当旋翼飞行器的尺寸增大到一定程度时，相对生产率的提升便微乎其微。

多无人机协同是提高运输能力的一种很有前景的方案。此外，还可带来额外的任务冗余、更低的成本，以及对飞行器故障的鲁棒性 [2]–[5]。通常，无人机-载荷连接类型包括主动连接和被动连接 [6]。主动连接是指在飞行器上安装夹持器，以刚性抓取并固定载荷 [7], ；而被动连接则是指通过缆绳悬挂载荷 [8] ，或通过万向节连接载荷 [9]。夹持器连接会显著增加系统的质量与惯量，从而使系统响应变慢。相比之下，缆绳悬挂机构因成本低、系统结构灵活而更具吸引力。因此，本研究采用缆绳悬挂机构进行协同运输。

目前，缆绳悬挂式协同运输的控制策略可分为两类 [10]: 基于载荷的设计和基于编队的设计。基于载荷的设计侧重于载荷的轨迹，例如 [11]–[13]。尽管可以实现对载荷的精确姿态与位置控制，但实时反馈控制需要载荷的动力学信息，而在工程实践中很难获得这些信息。相比之下，在基于编队的设计中，只需要飞行器的状态信息。当飞行器群到达目的地时，载荷也应到达目标区域。此类方法的有效性和可行性已通过仿真 [14]和实验 [15], 得到验证，但该方法忽略了作用于四旋翼飞行器的缆绳力。

为实现基于编队的鲁棒协同运输，已有多种控制算法被提出。 [16], 提出了一种用于多架四旋翼飞行器协同运输重物体的基于距离的编队控制算法，该算法利用增量非线性动态逆控制测量并抵抗扰动引起的加速度及绳索张力。在[17] 和 [18], 中，提出了一种基于无源性的编队控制策略，通过自适应补偿项消除风扰动和缆绳张力。在 [19], 中，建立了四旋翼飞行器-载荷系统的能量无源性，并采用自适应阻尼项耗散突发扰动注入的能量。

上述研究均基于刚性编队设计。事实上，负载运输并不需要保持固定编队；采用柔性编队更为合适，因为它能够使车辆适应复杂且不确定的环境和任务 [20]。基于力控制的方法已应用于协同负载

稿件收到日期：XXX，202X；修订日期：XXXX，202X。本研究得到国家自然科学基金项目（62173024、62273024）、浙江省自然科学基金项目（LD21F030001、LZ22F030012）以及长江学者和创新团队发展计划项目（IRT 16R03）的资助。Lidan Xu 和 Lei Guo 任职于北京航空航天大学网络空间科学与技术学院（中国北京，100191）。Hao Lu（*通信作者，电子邮箱：luhaojiqi@126.com）和 Jianliang Wang 任职于北京航空航天大学杭州创新研究院（中国浙江，310052）。Xianggui Guo 任职于北京科技大学自动化与电气工程学院（中国北京，100083）。

运输中的柔性编队，例如力放大 [21] 和接触力调节 [22]。文献 [21] 提出了所谓的力放大多机器人运输系统（Force-ANTS）控制框架，以实现一组地面机器人之间的力协调。跟随机器人只需在本地测量物体的运动，即可感知领导者施加的力，进而强化这一意图，因此无需通信网络，也能协同运输各种尺寸的重物体。文献 [22], 提出了一种新的自适应力一致性算法，利用力/加速度传感器保证车辆之间的平均载荷分配。这项工作能够均衡无人机的能耗，从而延长整个团队的续航时间。文献 [23], 研究了两架飞行器协同操作缆绳悬吊载荷的情况，并首次深入探讨和分析了内力的作用。尽管仿真结果已验证文献 [22] 和 [23], 中方法的有效性，但由于这些方法未考虑模型不确定性，因此无法直接应用于实践。

本文提出了一种用于缆绳悬吊协同运输的力协调控制策略。这里，力协调是指负载与飞行器之间的缆绳力协同收敛至期望值；这一概念被认为是更具挑战性的空中协同载荷操控（例如摆动载荷 [24]）的基础。实施基于力协调的控制，最关键的一步是准确测量接触力。在 [25] 和 [26], 中，安装了力传感器以测量缆绳张力。然而，除了成本高昂之外，力传感器还会使飞行器结构更加复杂，并增加整个系统的重量；相比之下，力估计成本较低且更为便捷。现有的外力估计方法，例如扰动观测器（DO） [27], 、扩张状态观测器（ESO） [28], 和无迹卡尔曼滤波器（UKF） [29], , 只能估计等效集总扰动，而无法区分同一通道中的不同扰动。在加速度通道中，缆绳张力总是与多种扰动耦合，例如推力不确定性、风力和质心偏移。因此，精确估计缆绳力并非易事。文献 [9]尝试估计刚性连接载荷的接触力，以用于导纳控制。为避免风和模型不确定性导致估计力出现不期望的偏差，该方法采用有限状态机监测力的大小，并据此决定是否舍弃或采用该估计值进行轨迹生成。这一策略因其对扰动的鲁棒性而颇具吸引力且实用，但本质上它只评估估计质量，并未提高力估计精度。

本文研究由两架飞行器协同搬运一根由缆绳悬吊的长管道的协同运输系统。缆绳长度各不相同且未知，因此可将该系统视为异构协同系统。对于四旋翼动力学，在与缆绳力混合的多种扰动中，推力不确定性是主要因素，它综合反映了整个推进系统中的不确定性。推进系统中的不确定性包括气动不确定性和硬件不确定性。此处的气动不确定性指推力系数；对于相同的桨叶，推力系数一致。然而，硬件不确定性因个体而异，包括电机性能退化、桨叶损坏、电池磨损、电子调速器效率损失等。因此，要获得准确的缆绳力估计，就必须消除推力不确定性。本文的主要贡献概括如下：

1）针对协同运输系统提出一种力协调控制方案。不同于位置协调控制方法 [17]–[19], , 该方案采用缆绳力而非位置来调节协同运载车辆的编队和运动。当应用于缆绳长度不同的异构四旋翼无人机时，在满足力一致性条件的情况下，管道可与地面平行对齐，这也意味着载荷质量由各飞行器均等分担。

2）提出了一种基于扰动观测器（DO）的无传感器集总扰动分离与估计策略。这里，DO 用于估计四旋翼飞行器标称动力学模型的集总力扰动。在准静态条件下，首先引入一种分离机制，从集总力扰动估计值中分离出显著的推力不确定性，从而能够获得更精确的缆绳力估计值，用于力协调控制。

3）开展了真实飞行测试，以验证所提出的力协调控制算法的有效性。据我们所知，此前的研究尚未报告过这种不使用力传感器的力协调测试。测试结果表明，推力不确定性分离达到了预期效果，且管道在平衡点附近的 1° 至 3° 小范围内保持稳定。

II. Problem Formulation and Notations

A. 数学预备知识

特殊正交群记为

$$\mathsf{SO}(3) = \left\{ \boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top = \boldsymbol{I}_3, \det(\boldsymbol{\mathcal{A}}) = 1 \right\}$$

其中， $\boldsymbol{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 为单位矩阵。

3×3 阶斜对称矩阵集合记为

$$\mathfrak{so}(3) = \{ \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \boldsymbol{\mathcal{B}}^\top = -\boldsymbol{\mathcal{B}} \}$$

这对应于 SO(3) 的李代数。

二维球面 S^2 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中所有单位向量的集合，即，

$$S^2 = \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{h} = 1\}.$$

矩阵 $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的欧几里得范数定义为

$$\|\boldsymbol{C}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{C})}$$

其中，$\lambda_{\max}$ 表示该矩阵的最大特征值。

对于向量 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^\top$，我们定义映射 $(\cdot)^\times : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ 为

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

并将投影映射 $(\cdot)_{xy} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 和 $(\cdot)_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\boldsymbol{\omega}_{xy} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix}^\top, \quad \boldsymbol{\omega}_z = \omega_3.$$

B. 构型描述

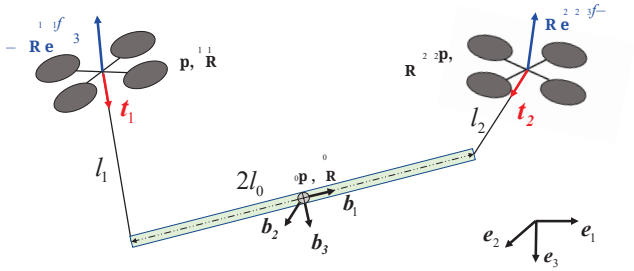


图 1. 协同运输系统示意图。

图 1 展示了由无质量缆绳相连的四旋翼-负载结构，其中假设载荷为圆管，缆绳连接到四旋翼飞行器的质心（CoM），且不会对四旋翼飞行器产生额外力矩。选取北-东-地（NED）坐标系作为惯性坐标系 $\mathcal{F}_\mathcal{I} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，其中 $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,0]^\top$、$\boldsymbol{e}_2 = [0,1,0]^\top$ $\boldsymbol{e}_3 = [0,0,1]^\top$ $\mathcal{F}_{\mathcal{B}0} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ 和 。载荷的体坐标系为，其原点位于载荷的质心；$\boldsymbol{b}_1$ 轴沿管道指向第二根缆绳的悬挂点；$\boldsymbol{b}_3$ 轴垂直于$\boldsymbol{b}_1$，位于竖直平面内并指向下方；$\boldsymbol{b}_2$ 轴构成右手坐标系。管道的半长记为 l_0。假设管道的质量分布均匀，因此管道的质心位置与其几何中心重合于 $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{R}^3$，其姿态由旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_0 \in SO(3)$ 描述。此外，第 i 个四旋翼飞行器的质心位置和姿态分别记为 $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^3$ 和 $\boldsymbol{R}_i \in SO(3)$。假设缆绳始终绷紧，且第 i 根缆绳的长度 l_i 固定。

C. 系统动力学

载荷的动力学模型推导如下： [12]

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{p}}_0 &= g\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{m_0}\boldsymbol{t}_1 - \frac{1}{m_0}\boldsymbol{t}_2 \\ \dot{\boldsymbol{R}}_0 &= \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{\Omega}_0^\times \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_0 &= \boldsymbol{J}_0^{-1}\left[-\boldsymbol{\Omega}_0^\times \boldsymbol{J}_0 \boldsymbol{\Omega}_0 + l_0 \boldsymbol{e}_1^\times \boldsymbol{R}_0^\top (\boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_1)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$g \in \mathbb{R}^+$ 为重力常数；$m_0 \in \mathbb{R}^+$ 和 $\boldsymbol{J}_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 分别为载荷的质量和惯性矩阵；$\boldsymbol{t}_i \in \mathbb{R}^3$ 为作用于第 i个四旋翼飞行器的缆绳力；$\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ 为载荷的机体角速度。

我们将缆绳力 $\boldsymbol{t}_i$ 和推力不确定性 $\Delta f_i \in \mathbb{R}$ 视为四旋翼飞行器的力扰动。第 i架四旋翼飞行器的实际推力和指令推力分别记为 $f_i \in \mathbb{R}^+$ 和 $f_{ic} \in \mathbb{R}^+$，且满足关系$f_i = f_{ic} + \Delta f_i$。因此，第 i架四旋翼飞行器的动力学模型表示为

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = g\boldsymbol{e}_3 - \frac{f_{ic} + \Delta f_i}{m_i}\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{m_i}\boldsymbol{t}_i \tag{2a}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}}_i = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{\Omega}_i^{\times} \tag{2b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_i = \boldsymbol{J}_i^{-1}\left(-\boldsymbol{\Omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\Omega}_i + \boldsymbol{\tau}_i\right) \tag{2c}$$

其中， $m_i \in \mathbb{R}^+$ 和 $\boldsymbol{J}_i \in \mathbb{R}^{3\times3}$ 分别为第 i架四旋翼飞行器的质量和惯性矩阵；$\Omega_i \in \mathbb{R}^3$ 为第 i架四旋翼飞行器的机体角速度；$\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^3$ 为第 i架四旋翼飞行器的转矩输入。

假设内环动力学控制足够快速且准确，能够跟踪期望姿态指令。因此，可以类似于 [17]，分别考虑外环和内环。为此，将外环动力学（2a）的控制输入 $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^3$定义为

$$\boldsymbol{u}_i \triangleq -\frac{f_{ic}}{m_i}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{e}_3, \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

该输入可视为后续为第 i 个四旋翼飞行器设计的期望平动加速度。此外，将缆绳力 $\boldsymbol{t}_i$ 和推力不确定性 Δf_i 视为集总扰动 $\boldsymbol{d}_i = [d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}]^{\top} \in \mathbb{R}^3$，即

$$\boldsymbol{d}_i \triangleq -\frac{\Delta f_i}{m_i}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{m_i}\boldsymbol{t}_i, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

平动模型（2a）可改写为:

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_i = g\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{d}_i, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

根据定义（3），可得第 i 个四旋翼飞行器的指令推力大小为

$$f_{ic} = -m_i\boldsymbol{u}_i^{\top}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{e}_3, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

D. 内环控制

我们采用 [30] 中的方法，为单个四旋翼飞行器设计内环姿态控制器，以确保实际推力的方向以指数形式收敛到期望加速度 $\boldsymbol{u}_i$ 的方向。

对于期望平动加速度 $\boldsymbol{u}_i$，其方向由下式给出

$$\boldsymbol{h}_{id} = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\|\boldsymbol{u}_i\|} \in \mathsf{S}^2 \tag{7}$$

注意到 $\|\boldsymbol{u}_i\| \neq 0$ 适用于四旋翼飞行器。对于转动动力学 (2b)，期望机体角速度 $\Omega_{i\boldsymbol{d}} \in \mathbb{R}^3$ 设计如下 as

$$\boldsymbol{\Omega}_{i\boldsymbol{d}} = \left(k_z + \frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i}\right)\boldsymbol{e}_3^{\times}\boldsymbol{R}_i^{\top}\boldsymbol{h}_{i\boldsymbol{d}} + \left(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3^{\top}\right)\boldsymbol{R}_i^{\top}\boldsymbol{h}_{i\boldsymbol{d}}^{\times}\dot{\boldsymbol{h}}_{i\boldsymbol{d}} \tag{8}$$

其中 $\gamma_i = \sqrt{c + \|m_i\boldsymbol{u}_i\|^2} \in \mathbb{R}^+$为一个较小的常数， $k_z \in \mathbb{R}^+$ 为姿态跟踪的控制增益。角速度跟踪的转矩输入随后给出如下

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\Omega}_i^{\times}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\Omega}_i - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\Omega}}\left(\boldsymbol{\Omega}_i - \boldsymbol{\Omega}_{i\boldsymbol{d}}\right) \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\Omega}} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ 为控制增益。关于指数收敛的详细证明可参见 [30]。

III. Position-Coordination Control

为将载荷运输至期望位置，我们首先采用 [31],中的领导者-跟随者编队控制结构，其中四旋翼飞行器1为领导者并知晓期望位置，而四旋翼飞行器2为跟随者，负责保持编队。

将四旋翼飞行器1的期望轨迹记为 $\boldsymbol{p}_{1d}(t) = [p_{1dx}(t)\ p_{1dy}(t)\ p_{1dz}(t)]^{\top} \in \mathbb{R}^3$，将期望相对位置记为 $\boldsymbol{p}_{12d}(t) = [p_{12dx}(t)\ p_{12dy}(t)\ p_{12dz}(t)]^{\top} \in \mathbb{R}^3$；它们由上层运动规划算法生成。本文始终假设 $\dot{\boldsymbol{p}}_{12d}(t) = \ddot{\boldsymbol{p}}_{12d}(t) = \boldsymbol{0}_{3\times1}$，即期望空间编队不随时间变化。为简化记法，本文其余部分通常不显式写出变量对 t 的依赖关系。

A. 控制目标

此处的控制目标是为两辆车辆设计控制律，使其实现以下行为:

- 四旋翼飞行器1实现期望轨迹

$$\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_{1d}(t) \to \boldsymbol{0}_{3\times1}. \tag{10}$$

- 两架四旋翼飞行器保持空间编队

$$\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_2(t) \to \boldsymbol{p}_{12d}. \tag{11}$$

B. 集总扰动估计

假设1. 存在一个未知正常数 d ，使得式（5）中 $\boldsymbol{d}_i$ 的时间导数有界，即. $\|\dot{\boldsymbol{d}}_i(t)\| \leq d$。

备注1. 姿态角、推力不确定性和缆绳力的变化速率在物理上受到限制 *[32],* ，这表明假设1符合通常的实际情况。

为估计式（5）中的集总扰动 $\boldsymbol{d}_i(t)$，设计扰动观测器如下： [32]

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_i &= -\iota\left(\boldsymbol{z}_i + \iota\dot{\boldsymbol{p}}_i + g\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{u}_i\right) \\ \hat{\boldsymbol{d}}_i &= \boldsymbol{z}_i + \iota\dot{\boldsymbol{p}}_i \end{aligned} \tag{12}$$

其中， $\boldsymbol{z}_i \in \mathbb{R}^3$ 为辅助状态， $\iota \in \mathbb{R}^+$ 为观测器增益，且 $\hat{\boldsymbol{d}}_i = [\hat{d}_{ix}, \hat{d}_{iy}, \hat{d}_{iz}]^\top \in \mathbb{R}^3$ 表示扰动估计值。定义扰动估计误差为

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_i = \hat{\boldsymbol{d}}_i - \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^3 \tag{13}$$

由此可推导出误差动力学:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{d}}}_i = -\iota\tilde{\boldsymbol{d}}_i - \dot{\boldsymbol{d}}_i. \tag{14}$$

根据假设1，t 的有界性可以建立，其中 d 为未知正常数

$$\|\tilde{\boldsymbol{d}}_i(t)\| \leq \bar{\tilde{d}}. \tag{15}$$

C. 基于位置协调的刚性编队控制

两架四旋翼飞行器的领导者-跟随者控制器设计为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= -k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} - k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} + \boldsymbol{\pi}_1 - g\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{d}}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \quad k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} + k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - g\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{d}}_2 \end{aligned} \tag{16}$$

其中， $k_1 \in \mathbb{R}^+$ 和 $k_2 \in \mathbb{R}^+$ 为用于队形保持的控制器增益； $\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} \in \mathbb{R}^3$ 为编队误差

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{12d} \tag{17}$$

且 $\boldsymbol{\pi}_1 \in \mathbb{R}^3$ 为外部输入

$$\boldsymbol{\pi}_1 = -k_3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{1d}) - k_4(\dot{\boldsymbol{p}}_1 - \dot{\boldsymbol{p}}_{1d}) \tag{18}$$

其中 $k_3 \in \mathbb{R}^+$ 和 $k_4 \in \mathbb{R}^+$ 为用于参考轨迹跟踪的控制器增益。

D. 稳定性分析

分别用 $\tilde{\boldsymbol{p}}_1$ 和$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1$ 表示四旋翼飞行器1的位置跟踪误差和速度跟踪误差，即 $\tilde{\boldsymbol{p}}_1 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_{1d}$和$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1 = \dot{\boldsymbol{p}}_1 - \dot{\boldsymbol{p}}_{1d}$。

定理1. 考虑两个携带悬挂载荷的四旋翼飞行器，其模型如式(5)所示，采用控制律(16)，并按照式(12)更新扰动估计值。假设假设1成立，则整体闭环系统 $(\tilde{\boldsymbol{p}}_1, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1, \tilde{\boldsymbol{p}}_{12}, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2)$的信号一致最终有界。

证明. 由于式(15)已证明估计误差 $\boldsymbol{d}_i$ 有界，且该有界性独立于跟踪 误差和编队误差的有界性，因此我们只关注信号$(\tilde{\boldsymbol{p}}_1, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1, \tilde{\boldsymbol{p}}_{12}, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12})$的稳定性。

将（16）代入（5）可得

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{p}}_1 &= -k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} - k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - k_3\tilde{\boldsymbol{p}}_1 - k_4\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1 - \tilde{\boldsymbol{d}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{p}}_2 &= \quad k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} + k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - \tilde{\boldsymbol{d}}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

然后，跟踪误差 $\tilde{\boldsymbol{p}}_1$ 的动力学推导为

$$\dddot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1 = -k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} - k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - k_3\tilde{\boldsymbol{p}}_1 - k_4\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1 - \tilde{\boldsymbol{d}}_1 - \ddot{\boldsymbol{p}}_{1d} \tag{20}$$

编队误差 $\tilde{\boldsymbol{p}}_{12}$ 的动力学计算为

$$\begin{aligned} \dddot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} &= \ddot{\boldsymbol{p}}_1 - \ddot{\boldsymbol{p}}_2 \\ &= -2k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} - 2k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - k_3\tilde{\boldsymbol{p}}_1 - k_4\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1 - \tilde{\boldsymbol{d}}_1 + \tilde{\boldsymbol{d}}_2. \end{aligned} \tag{21}$$

定义向量 $\boldsymbol{\zeta} = [\tilde{\boldsymbol{p}}_1^\top, \tilde{\boldsymbol{p}}_{12}^\top, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_1^\top, \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{12}$ 和向量 $\tilde{\boldsymbol{d}} = [\tilde{\boldsymbol{d}}_1^\top, \tilde{\boldsymbol{d}}_2^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$，得到

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{B}_1\tilde{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{B}_2\ddot{\boldsymbol{p}}_{1d} \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_3 \\ -k_3\boldsymbol{I}_3 & -k_1\boldsymbol{I}_3 & -k_4\boldsymbol{I}_3 & -k_2\boldsymbol{I}_3 \\ -k_3\boldsymbol{I}_3 & -2k_1\boldsymbol{I}_3 & -k_4\boldsymbol{I}_3 & -2k_2\boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12\times12} \\ \boldsymbol{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{I}_3 & -\boldsymbol{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{12\times6} \\ \boldsymbol{B}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{12\times3}. \end{aligned} \tag{23}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) = s^4 &+ (2k_2 + k_4)s^3 + (2k_1 + k_3 + k_2k_4)s^2 \\ &+ (k_1k_4 + k_2k_3)s + k_1k_3. \end{aligned} \tag{24}$$

根据劳斯-赫尔维茨稳定性判据选择控制器增益 k_1、 k_2、 k_3 和 k_4 ，使特征多项式的所有根都位于左半平面，这意味着矩阵 $\boldsymbol{A}$为负定矩阵。根据李雅普诺夫方程，对于任意给定的 $\boldsymbol{Q} > 0$，存在唯一的 $\boldsymbol{P} > 0$ 满足 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$。

接下来，定义李雅普诺夫函数为

$$V = \boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}. \tag{25}$$

则 V的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\zeta} + 2\boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1\tilde{\boldsymbol{d}} + 2\boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_2\ddot{\boldsymbol{p}}_{1d} \\ &\le -\boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\zeta} + 2\|\boldsymbol{\zeta}\|\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{B}_1\|\|\tilde{\boldsymbol{d}}\| + 2\|\boldsymbol{\zeta}\|\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{B}_2\|\|\ddot{\boldsymbol{p}}_{1d}\| \\ &\le -\boldsymbol{\zeta}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\zeta} + (\sqrt{10} + \sqrt{2})\bar{\tilde{d}}\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{\zeta}\| + 2\|\ddot{\boldsymbol{p}}_{1d}\|\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{\zeta}\| \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\|\tilde{\boldsymbol{d}}\| \le \sqrt{2}$ ，$\|\boldsymbol{B}_1\| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，以及 $\|\boldsymbol{B}_2\| = 1$；根据预设的轨迹规划， $\ddot{\boldsymbol{p}}_{1d}$ 始终有界。

最后，根据李雅普诺夫有界性理论， [33]， $\boldsymbol{\zeta}$一致最终有界，这意味着($\tilde{\boldsymbol{p}}_1$， $\tilde{\boldsymbol{p}}_1$， $\tilde{\boldsymbol{p}}_{12}$， $\tilde{\boldsymbol{p}}_{12}$)有界。 □

IV. Force-Coordination Control

不同于位置协调控制律(16)，我们进一步提出了基于力协调的柔性编队控制律。在本研究中，在满足力一致性条件的情况下，两架四旋翼飞行器平均分担负载的重量，同时保持编队处于水平面内。

A. 控制目标

在本节中，我们将力协调项纳入飞行器控制律，以实现以下行为:

- 四旋翼飞行器1到达期望位置

$$\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_{1d} \to \mathbf{0}_{3\times1}. \tag{27}$$

Her本节假设四旋翼飞行器1的期望位置固定，即 $\dot{\boldsymbol{p}}_{1d} = \ddot{\boldsymbol{p}}_{1d} = \mathbf{0}_{3\times}$ $_1$.

- 两架四旋翼飞行器在水平面内保持编队

$$\boldsymbol{p}_{1xy}(t) - \boldsymbol{p}_{2xy}(t) \to \boldsymbol{p}_{12dxy}. \tag{28}$$

- 两架四旋翼飞行器在未知缆绳长度的情况下实现相等缆绳力

$$t_{2z} - t_{1z} \to 0. \tag{29}$$

B. 平衡分析

本小节旨在分析垂直方向缆绳力相等时载荷的平衡态，并解释负载内力的作用。

命题1. 考虑图1所示由两架四旋翼飞行器和一个管状悬加载荷组成的系统。在垂直方向实现力一致性且达到期望的水平编队的条件下，若内力非零，则管道的平衡构型与地面平行。

证明。当管道处于其平衡点（$\ddot{\boldsymbol{p}}_0 = \mathbf{0}_{3\times1}$ 且 $\Omega_0 = \mathbf{0}_{3\times1}$）时，由动力学方程 (1) 可得

$$\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2 - m_0g\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}_{3\times1} \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{e}_1^\times\boldsymbol{R}_0^\top(\boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_1) = \mathbf{0}_{3\times1}. \tag{30b}$$

求解 (30b) 得

$$\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 = t_0 \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{e}_1 \tag{31}$$

其中， $t_0 \in \mathbb{R}$ 是所谓的负载内力 [23]。

当四旋翼飞行器和载荷处于稳定静态平衡时，整个系统可建模为平面 [34]中的四杆机构。不失一般性，假设整个系统位于NED坐标系的XZ平面内。若垂直方向上的力一致性条件成立，即 $t_{1z} = t_{2z}$，则可以推知

$$t_0 = 0 \tag{32}$$

or

$$\begin{cases} t_0 \neq 0 \\ \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{e}_1 = \pm \boldsymbol{e}_1. \end{cases} \tag{33}$$

此处，表达式（33）对应管道与地面平行的情况。证明完毕。 □

尽管条件（32）和（33）都能实现力一致性，但在条件（32）下，管道的平衡姿态并不唯一。具体而言，将 $t_0 = 0$ 代入（31）并结合（30a），可得$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2 = -\frac{m_0 g}{2}\boldsymbol{e}_3$，这意味着，当两根缆绳力均沿重力方向时，理论上管道在任意姿态下都能保持稳定。显然，图2所示的平衡构型并不理想。

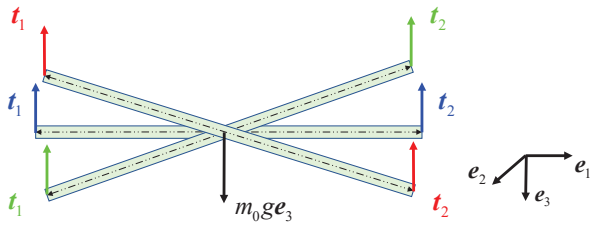


图 2. $t_0 = 0$的多重平衡。

内力 $t_0 < 0$ 对应于两架四旋翼飞行器向管道中部靠近的情况，由于存在无人机碰撞的风险，这种情况相当危险。因此，我们选择图 3 所示的 $t_0 > 0$ 作为期望内力，并通过水平编队设置保证 t_0 的唯一性。

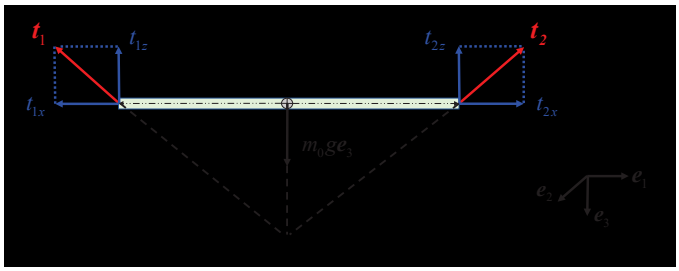


图 3. $t_0 > 0$的唯一平衡点。

备注 2. 在图 3 中，由于载荷处于平衡点，作用于载荷上的所有力都交于同一点（平面力束 *[35]*），构成三分量力平衡。

C. 力协调编队控制框架

如果已知缆绳长度，我们就可以规划四旋翼飞行器的期望轨迹，使管道保持与地面平行。然而，如果不知道缆绳长度，预设构型规划就无法实现平均载荷分配。因此，本文提出一种力协调编队控制框架，以克服这一局限。控制器结构如图 4 所示。

对于这两架四旋翼飞行器，控制器可分解为两部分：一部分用于保持水平编队，另一部分用于实现垂直方向上的力一致性。

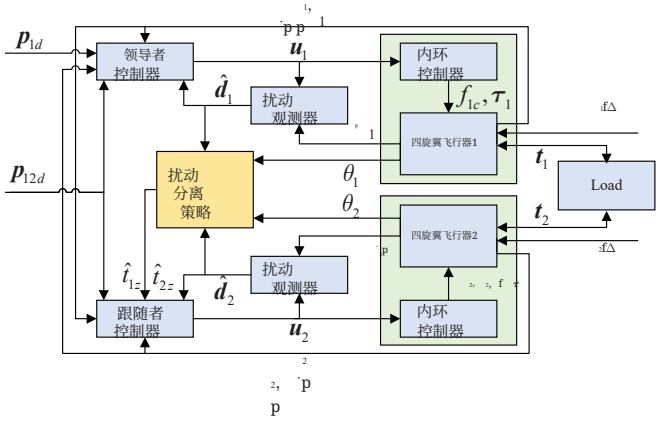


图4. 力协调控制器结构。

1）水平面内的队形保持：

基于式（16）设计了用于保持水平面内编队的领导者-跟随者控制律，如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{1xy} &= \boldsymbol{G}(-k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} - k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} + \boldsymbol{\pi}_1 - g\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{d}}_1)\\ \boldsymbol{u}_{2xy} &= \boldsymbol{G}(\quad k_1\tilde{\boldsymbol{p}}_{12} + k_2\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}_{12} - g\boldsymbol{e}_3 - \hat{\boldsymbol{d}}_2)\end{aligned} \tag{34}$$

其中， $\boldsymbol{u}_{ixy}$ 是式（16）中控制器 $\boldsymbol{u}_i$ 在水平面内的投影，且 $\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]^\top \in \mathbb{R}^{2\times 3}$。2）垂直方向的力一致性：

根据定义（4），垂直力一致误差 $t_{2z} - t_{1z}$ 可计算为

$$t_{2z} - t_{1z} = \boldsymbol{e}_3^\top(m_2\boldsymbol{d}_2 - m_1\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{\Xi}) \tag{35}$$

其中， $\boldsymbol{\Xi} = \Delta f_2\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{e}_3 - \Delta f_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ 是两个四旋翼飞行器的推力不确定性之差。利用集总扰动估计值，垂直力一致误差的估计值可表示为

$$\hat{t}_{2z} - \hat{t}_{1z} = \boldsymbol{e}_3^\top(m_2\hat{\boldsymbol{d}}_2 - m_1\hat{\boldsymbol{d}}_1 + \hat{\boldsymbol{\Xi}}) \tag{36}$$

其中，$\hat{}\, t_{iz} \in \mathbb{R}$ 是垂直方向上第 i根缆绳力的估计值，$\hat{}\, \boldsymbol{\Xi} = [\hat{}\,\Xi_x,\ \hat{}\,\Xi_y,\ \hat{}\,\Xi_z] \in \mathbb{R}^3$ 是 $\boldsymbol{\Xi}$的估计值。对于四旋翼飞行器1，垂直方向的控制器仅针对高度保持进行设计，如下所示

$$u_{1z} = -k_3(p_{1z} - p_{1dz}) - k_4\dot{p}_{1z} - g - \hat{d}_{1z}. \tag{37}$$

对于四旋翼飞行器2，设计其垂直方向的控制器，以实现两架四旋翼飞行器之间的垂直方向力一致性 as

$$\begin{aligned}u_{2z} =& -k_4\dot{p}_{2z} - g - \hat{d}_{2z} + k_f(\hat{t}_{2z} - \hat{t}_{1z})\\ =& -k_4\dot{p}_{2z} - g - \hat{d}_{2z} + k_f(m_2\hat{d}_{2z} - m_1\hat{d}_{1z} + \hat{\Xi}_z)\end{aligned} \tag{38}$$

其中， $k_f \in \mathbb{R}^+$ 为力一致增益。

综上，第 i架四旋翼飞行器的整个主从控制器表示为

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{ixy}^\top & u_{iz}\end{bmatrix}^\top \tag{39}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 其中， u_{2z} 中的 Ξ_z 无法通过扰动估计直接获得，而 Ξ_z 的详细估计方法将在下一小节中给出。

注3. 通过为车辆预先规划力轨迹，可以利用所提出的力协调控制框架实现对管道进行更复杂的操作，而不仅限于通过力一致性实现载荷分布均衡；这一方法与 *[23]*中的方法类似。

D. 准静态条件下的扰动分离

四旋翼飞行器属于欠驱动系统，需要通过旋转来调整其推力方向。因此，我们可以在准静态条件下引入水平力平衡方程，得到 Δf_i，然后将其与集总扰动估计值 $\boldsymbol{d}_i$ 分离，以精确估计缆绳力 $\boldsymbol{t}_i$。根据公式（36），对 Ξ_z 的估计越准确，力一致性误差就越小。准静态条件是指载荷的速度变化缓慢，即，

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_0 \approx \boldsymbol{0}_{3\times 1} \tag{40}$$

这在运输过程中是合理的。

在不失一般性的前提下，假设在此场景的准静态条件下，四旋翼-负载结构保持在NED坐标系的XZ平面内。将 $\ddot{\boldsymbol{p}}_0 = \mathbf{0}_{3\times1}$ 代入负载动力学(1)，可得

$$\begin{aligned} t_{1x} + t_{2x} &= 0 \\ t_{1z} + t_{2z} &= m_0 g. \end{aligned} \tag{41}$$

ˆ 明确地，根据(4)和(13)中的定义，扰动估计值 $\boldsymbol{d}_i$ 满足以下关系：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{d}}_i &= \boldsymbol{d}_i + \tilde{\boldsymbol{d}}_i \\ &= -\frac{\Delta f_i}{m_i}\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{e}_3 + \frac{1}{m_i}\boldsymbol{t}_i + \tilde{\boldsymbol{d}}_i. \end{aligned} \tag{42}$$

第 i个四旋翼飞行器的姿态可　以欧拉角$(\phi_i, \theta_i, \psi_i)$表示，旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 可表示为 as

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_i &= \boldsymbol{R}_z(0)\boldsymbol{R}_y(\theta_i)\boldsymbol{R}_x(\phi_i) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\phi_i \sin\theta_i & \cos\phi_i \sin\theta_i \\ 0 & \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ -\sin\theta_i & \sin\phi_i \cos\theta_i & \cos\phi_i \cos\theta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{43}$$

其中，　ψ_i 设为零。展开(42)可得

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{ix} \\ \hat{d}_{iz} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_i}\begin{bmatrix} -\Delta f_i \sin\theta_i \cos\phi_i + t_{ix} + m_i \tilde{d}_{ix} \\ -\Delta f_i \cos\theta_i \cos\phi_i + t_{iz} + m_i \tilde{d}_{iz} \end{bmatrix}. \tag{44}$$

为简化记号，采用以下代换

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_x &= m_1 \hat{d}_{1x} + m_2 \hat{d}_{2x} \\ \hat{\Delta}_z &= m_1 \hat{d}_{1z} + m_2 \hat{d}_{2z} - m_0 g \\ \tilde{\Delta}_x &= m_1 \tilde{d}_{1x} + m_2 \tilde{d}_{2x} \\ \tilde{\Delta}_z &= m_1 \tilde{d}_{1z} + m_2 \tilde{d}_{2z} \end{aligned} \tag{45}$$

ˆ ˆ ˜　　˜其中，　Δ_x 和　Δ_z 表示估计结果，　Δ_x 和　Δ_z 表示估计误差。

结合　　式（41）和（44），可得准静态条件下的推力不确定性：

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{\hat{\Delta}_x - \hat{\Delta}_z \tan\theta_2 - \tilde{\Delta}_x + \tilde{\Delta}_z \tan\theta_2}{(\cos\theta_1 \tan\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\phi_1} \\ \Delta f_2 &= \frac{\hat{\Delta}_x - \hat{\Delta}_z \tan\theta_1 - \tilde{\Delta}_x + \tilde{\Delta}_z \tan\theta_1}{(\cos\theta_2 \tan\theta_1 - \sin\theta_2)\cos\phi_2} \end{aligned} \tag{46}$$

从而可得 Ξ_z：

$$\Xi_z = \frac{\left(\hat{\Delta}_z - \tilde{\Delta}_z\right)(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) - 2\left(\hat{\Delta}_x - \tilde{\Delta}_x\right)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}. \tag{47}$$

˜　　˜然后，从式（46）中减去估计误差 Δ_x 和 Δ_z，即可得到推力不确定性 Δf_1 和 Δf_2 的估计值：

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}_1 &= \frac{\hat{\Delta}_x - \hat{\Delta}_z \tan\theta_2}{(\cos\theta_1 \tan\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\phi_1} \\ \Delta \hat{f}_2 &= \frac{\hat{\Delta}_x - \hat{\Delta}_z \tan\theta_1}{(\cos\theta_2 \tan\theta_1 - \sin\theta_2)\cos\phi_2}. \end{aligned} \tag{48}$$

ˆ ˜根据式（47），估计值 Ξ_z 和估计误差 Ξ_z 可分别表示为：

$$\hat{\Xi}_z = \frac{(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)\hat{\Delta}_z - 2\hat{\Delta}_x}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} \tag{49}$$

and

$$\tilde{\Xi}_z = \frac{(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)\tilde{\Delta}_z - 2\tilde{\Delta}_x}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}. \tag{50}$$

垂直缆索力估计 ˆ t_{iz} 可根据公式（44）计算得出

$$\hat{t}_{iz} = m_i \hat{d}_{iz} + \Delta \hat{f}_i \cos\theta_i \cos\phi_i \tag{51}$$

˜当估计误差 d_{iz} 收敛至零时，该值等于实际垂直缆绳力 t_{iz}。最后

因此，准静态条件下，垂直方向的力一致性控制器（38）是可行的 准静态条件 .

˜注4. 假设已实现精确的扰动估计，即 $\boldsymbol{d}_i \approx \mathbf{0}_{3\times1}$，则存在六个未知变量 Δf_i,t_{ix} 和 t_{iz}, $i = 1, 2$。结合方程（41）和方程（44），可通过六个方程求解这些变量。

E. 稳定性分析

四旋翼飞行器1的稳定性 在垂直方向上，将（37）代入（5），跟踪误差动力学满足

$$\ddot{\tilde{p}}_{1z} = -k_4\dot{\tilde{p}}_{1z} - k_3\tilde{p}_{1z} - \tilde{d}_{1z} \tag{52}$$

˜由此可得，当扰动估计误差 $d_{1z} \approx 0$ 时， $\tilde{p}_{1z}$ 指数收敛。因此，四旋翼飞行器1的高度可以保持不变。

如图5所示，管道的俯仰角记为 θ_0，四旋翼飞行器2的期望位置记为 p_{2d}，对应于管道俯仰角为零的情况。当四旋翼飞行器1的高度和期望水平相对位置固定时，根据第IV-B节的分析， p_{2d} 是唯一的平衡点，因此，四旋翼飞行器2的期望垂直位置可以视为固定，即 $\dot{p}_{2dz} = \ddot{p}_{2dz} = 0$。

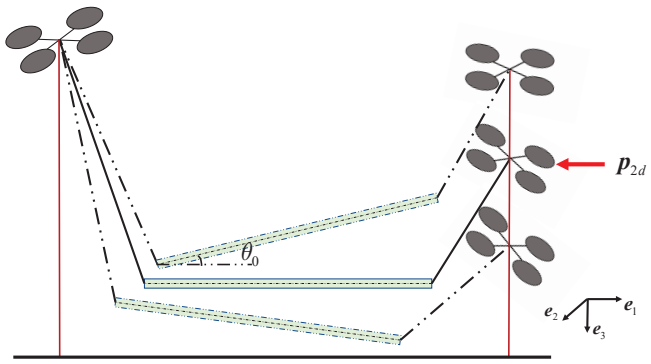


图5。 垂直方向上的力一致性调节。

我们要求两架四旋翼飞行器之间的期望水平相对位置满足

$$\|\boldsymbol{p}_{12dxy}\| > 2l_0 \tag{53}$$

从而使管道中的内力始终为正（$t_0 > 0$）。该编队构型还保证两架四旋翼飞行器的俯仰角 θ_1 和 θ_2 均有上下界，即

$$\begin{aligned} 0 < &\underline{\theta}_1 \le \theta_1 \le \overline{\theta}_1 < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < &\underline{\theta}_2 \le \theta_2 \le \overline{\theta}_2 < 0. \end{aligned} \tag{54}$$

在准静态条件下，缆绳力可计算为 [23]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_1 &= \left[\frac{t_0\cos\theta_0}{2}, 0, \frac{-t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{2}\right]^\top \\ \boldsymbol{t}_2 &= \left[-\frac{t_0\cos\theta_0}{2}, 0, \frac{t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{2}\right]^\top. \end{aligned} \tag{55}$$

在垂直方向上可得到以下方程

$$t_{2z} - t_{1z} = t_0\sin\theta_0. \tag{56}$$

Then 利用式（35）、（36）和（50），垂直方向上的力一致性误差可估计为

$$\begin{aligned} \hat{t}_{2z} - \hat{t}_{1z} &= t_{2z} - t_{1z} + m_2\tilde{d}_{2z} - m_1\tilde{d}_{1z} + \tilde{\Xi}_z \\ &= t_0\sin\theta_0 + \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{d}} \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{-2m_1}{\theta_2-}\tan\tan\theta_1、0、 & \frac{2m_1}{}\tan\theta_1\tan\theta_2-\tan\theta_1、 \\ -2m_2\tan\theta_2-\tan\theta_1、0、 & \frac{}{2m_2\text{正切}\theta_2\text{正切}\theta_2-\text{正切}\theta_1} \end{bmatrix}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{d}}$ 记为式（22）。

四旋翼飞行器2的垂直位置和垂直速度跟踪误差分别用符号（$\tilde{p}_{2z}$，$\dot{\tilde{p}}_{2z}$）表示。结合式（5）、（38）和（57），四旋翼飞行器2在垂直方向上的跟踪误差动力学为

$$\ddot{\tilde{p}}_{2z} = -k_4\dot{\tilde{p}}_{2z} - \tilde{d}_{2z} + k_f t_0 \sin\theta_0 + k_f \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{d}}. \tag{58}$$

引理1. $t_0 \sin\theta_0$ 和 $\tilde{p}_{2z}$ 负相关，并满足以下方程

$$t_0 \sin\theta_0 = -\sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) \tag{59}$$

*wh*其中，$\sigma(x)$是严格递增函数，且 $\sigma(0) = 0$。此外，$\sigma(x)$的斜率满足 *es*

$$0 < \underline{\sigma} < \frac{d\sigma(x)}{dx} < \overline{\sigma} \tag{60}$$

其中，$\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^+$ 和 $\overline{\sigma} \in \mathbb{R}^+$ 分别为常数下界和上界。

证明。详细证明见补充材料。 □

根据引理1，方程（58）可转化为

$$\ddot{\tilde{p}}_{2z} = -k_4\dot{\tilde{p}}_{2z} - k_f t_0 \sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) + \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{d}} \tag{61}$$

其中，$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{-2k_f m_1}{\theta_2 - \theta_1}\tan\tan\theta_1, & 0, & \frac{2k_f m_1}{\tan\theta_1\tan\theta_2 - \tan\theta_1}, & \frac{-2k_f m_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}, & 0, \\ \frac{(2k_f m_2 - 1)\tan\theta_2 + \tan\theta_1}{\theta_1} \end{bmatrix}$ 根据（54），存在未知正常数 $\bar{D}$ 满足

$$\|\boldsymbol{D}\| \le \bar{D}. \tag{62}$$

此处可以推出 $\|\boldsymbol{D}\|$ 有界，因为分母 $|\tan\theta_2 - \tan\theta_1|$ 的绝对值以下界 $|\tan\theta_2 - \tan\underline{\theta}_1|$这个正常数为界。

假设2. 存在正常数 ε_1、γ、k_4和 k_f，满足

$$\begin{aligned} k_4 &> \varepsilon_1 + \frac{\overline{t}_0}{4\gamma} \\ k_f &< \frac{\varepsilon_1 \underline{\sigma}}{\gamma \overline{\sigma}^2} \end{aligned} \tag{63}$$

有关 $\overline{t}_0$、$\overline{\sigma}$ 和 $\underline{\sigma}$ 的详细信息可参见补充材料。

定理 2. 考虑准静态条件下两架携带悬挂载荷的四旋翼飞行器，其模型如式（5）所示，采用控制律（39），扰动估计值按式（12）更新，且推力不确定性之间的不一致性估计值按式（49）计算。假设假设 1-3成立，则整体闭环系统的信号（$\tilde{\boldsymbol{p}}_{1xy}$、$\tilde{\boldsymbol{p}}_{1xy}$、$\tilde{\boldsymbol{p}}_{12xy}$、$\tilde{\boldsymbol{p}}_{12xy}$）、（$\tilde{p}_{1z}$、$\tilde{p}_{1z}$、$\tilde{p}_{2z}$、$\tilde{p}_{2z}$）和（$\boldsymbol{d}_1$、$\boldsymbol{d}_2$）一致最终有界。

证明。$\boldsymbol{d}_i$ 的有界性已在式（15）中得到证明。水平控制器（34）与垂直控制器（37）（38）是独立设计的。由于水平控制器（34）与位置协调控制方案中的控制器相同，因此可以证明水平面内状态（$\tilde{\boldsymbol{p}}_{1xy}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_{1xy}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_{12xy}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_{12xy}$）的有界性。此外，($\tilde{p}_{1z}$，$\dot{\tilde{p}}_{1z}$)的有界性已在式（52）之后得到证明。

我们着重研究四旋翼飞行器2在垂直方向上的稳定性。定义李雅普诺夫函数如下：

$$V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\tilde{p}_{2z} & \dot{\tilde{p}}_{2z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_4\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{p}_{2z} \\ \dot{\tilde{p}}_{2z}\end{bmatrix} \tag{64}$$

其中，$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ 在假设2中有定义。

对式（64）关于时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{V} =& \begin{bmatrix}\tilde{p}_{2z} & \dot{\tilde{p}}_{2z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_4\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{p}}_{2z} \\ \ddot{\tilde{p}}_{2z}\end{bmatrix} \\ =& k_4\varepsilon_1\tilde{p}_{2z}\dot{\tilde{p}}_{2z} + \varepsilon_1\tilde{p}_{2z}\ddot{\tilde{p}}_{2z} + \varepsilon_1\dot{\tilde{p}}_{2z}^2 + \dot{\tilde{p}}_{2z}\ddot{\tilde{p}}_{2z} \\ =& -k_f t_0\varepsilon_1\tilde{p}_{2z}\sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) - \left(k_4 - \varepsilon_1\right)\dot{\tilde{p}}_{2z}^2 \\ & - k_f t_0\dot{\tilde{p}}_{2z}\sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) + \dot{\tilde{p}}_{2z}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{d}} + \varepsilon_1\tilde{p}_{2z}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{d}} \\ \le& -k_f t_0\varepsilon_1\underline{\sigma}\tilde{p}_{2z}^2 - \left(k_4 - \varepsilon_1\right)\dot{\tilde{p}}_{2z}^2 \\ & - k_f t_0\dot{\tilde{p}}_{2z}\sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) + \dot{\tilde{p}}_{2z}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{d}} + \varepsilon_1\tilde{p}_{2z}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{d}}. \end{aligned} \tag{65}$$

利用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} -k_f t_0 \dot{\tilde{p}}_{2z} \sigma\left(\tilde{p}_{2z}\right) \leq & \frac{t_0}{4\gamma} \dot{\tilde{p}}_{2z}^2 + \gamma k_f^2 t_0 \sigma^2\left(\tilde{p}_{2z}\right) \\ \leq & \frac{t_0}{4\gamma} \dot{\tilde{p}}_{2z}^2 + \gamma k_f^2 t_0 \overline{\sigma}^2 \tilde{p}_{2z}^2 \end{aligned} \tag{66}$$

其中，$\gamma \in \mathbb{R}^+$ 为调节参数。

因此，V 满足

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left(k_f t_0 \varepsilon_1 \underline{\sigma} - \gamma k_f^2 t_0 \overline{\sigma}^2\right) \tilde{p}_{2z}^2 - \left(k_4 - \varepsilon_1 - \frac{t_0}{4\gamma}\right) \dot{\tilde{p}}_{2z}^2 \\ & + \|\dot{\tilde{p}}_{2z}\| \|\boldsymbol{D}\| \|\tilde{\boldsymbol{d}}\| + \varepsilon_1 \|\tilde{p}_{2z}\| \|\boldsymbol{D}\| \|\tilde{\boldsymbol{d}}\| \\ \leq & -k_f t_0 \left(\varepsilon_1 \underline{\sigma} - \gamma k_f \overline{\sigma}^2\right) \tilde{p}_{2z}^2 - \left(k_4 - \varepsilon_1 - \frac{t_0}{4\gamma}\right) \dot{\tilde{p}}_{2z}^2 \\ & + \sqrt{2} \bar{D} \bar{\tilde{d}} \|\dot{\tilde{p}}_{2z}\| + \sqrt{2} \varepsilon_1 \bar{D} \bar{\tilde{d}} \|\tilde{p}_{2z}\| \end{aligned} \tag{67}$$

其中，采用 $\|\tilde{\boldsymbol{d}}\| \leq \sqrt{2}\bar{\tilde{d}}$。根据 Lyapunov 有界理论，[33], 误差变量 $\left(\tilde{p}_{2z}、\ \dot{\tilde{p}}_{2z}\right)$ 在满足式（63）时一致最终有界。

□

V. 数值仿真

首先进行数值仿真，以验证所提出的力协调控制策略。具体而言，为两架四旋翼飞行器配置长度不同且未知的缆绳，并设置不同的推力不确定性，以展示扰动分离和力一致性的效果。在仿真中，假设缆绳为无质量连杆，并按照 [13] 对缆绳力进行建模。系统与控制参数列于表I。两架四旋翼飞行器的推力不确定性分别设为 $\Delta f_1 = -0.2 f_{1c}$ 和 $\Delta f_2 = -0.4 f_{2c}$。仿真时间设为30秒。四旋翼飞行器2可自由调整其高度以实现力一致性。根据第IV-B节的平衡分析，管道最终将与地面平行。

表 I 仿真中使用的参数

系统参数		
m_i	i = 0	0.44, 千克
	i = 1	0.87, 千克
	i = 2	0.88, 千克
$\boldsymbol{J}_i$	i = 0	diag$\{0.0035, 0.15, 0.15\}$, 千克 $\cdot$ m^2
	i = 1	diag$\{0.003, 0.003, 0.004\}$, 千克 $\cdot$ m^2
	i = 2	diag$\{0.003, 0.003, 0.004\}$, 千克 $\cdot$ m^2
l_i	i = 0	1.0, m
	i = 1	0.8, 米
	i = 2	0.4, m
控制参数		
k_1, k_2, k_3, k_4		4, 4, 5, 8
k_f		0.5
ι		5
初始条件		
$\boldsymbol{p}_0(0)$		$[0,0,0]^\top$, m
$\boldsymbol{p}_1(0)$		$[1.4, 0.12, -0.68]^\top$, m
$\boldsymbol{p}_2(0)$		$[-1.14, 0, -0.38]^\top$, m
$\dot{\boldsymbol{p}}_i(0),\ i=0,\ 1,\ 2$		$[0,0,0]^\top$, m/s
$\boldsymbol{R}_i(0),\ i=0,\ 1,\ 2$		$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$
$\Omega_i(0),\ i=0,\ 1,\ 2$		$[0,0,0]^\top$, rad/s
$\boldsymbol{z}_i(0),\ i=1,\ 2$		$[0,0,0]^\top$
期望轨迹		
$\boldsymbol{p}_{1d}$		$[1,0,-1]^\top$, m
$\boldsymbol{p}_{12dxy}$		$[2.5,0]^\top$, 米

为测试该平衡点的稳定性，空中运输系统在前10秒处于位置协调控制模式，因此最终管道倾斜约 -10°，如图7所示。随后，控制器切换至力协调模式。由于四旋翼飞行器2的缆绳较短，在位置一致性条件下，它承担的管道重量比四旋翼飞行器1更多。进入力协调模式后，四旋翼飞行器2缓慢下降，使管道最终与地面平行，如图6所示，这表明该平衡点具有稳定性。

垂直缆绳力的估计误差如图8所示，表现出有界收敛特性。受扰动估计误差 $\boldsymbol{d}_i$ 的影响，图8中的缆绳力估计误差和图7中的俯仰角都只能收敛到零附近的一个小邻域。

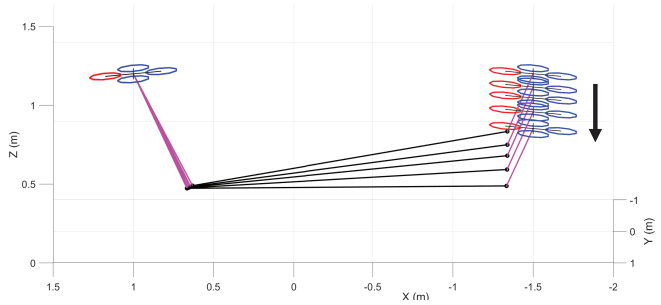


图6. 力一致性仿真的运动快照。

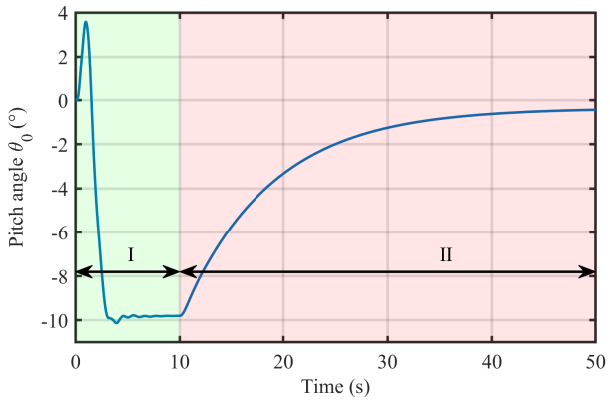


图7. 管道的俯仰角 θ_0 管道。阶段 I 表示位置协调阶段，阶段 II 表示力协调阶段。

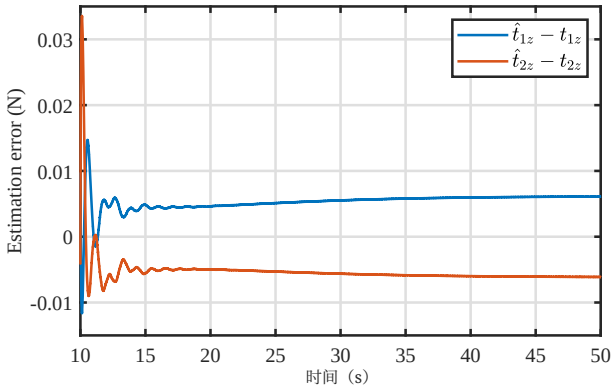


图8. 垂直缆绳力的估计误差。

VI. 实验验证

为验证所提出的力协调算法在实际应用中的有效性，我们在室内飞行测试环境中进行了真实飞行测试。测试设施包括OptiTrack动作捕捉系统、地面站和四旋翼平台，如图9所示；该设施已用于支持多个研究项目（详情参见[36]–[38]）。首先进行一项测试，以说明两架四旋翼飞行器之间推力不确定性的显著不一致性，随后开展空中运输系统的主要测试。

系统与控制参数列于表II中。由于存在测量噪声，扰动观测器增益 ι 不能选得过大。否则，扰动估计值中会产生较大的抖振，可能导致四旋翼飞行器突然大幅摆动。力一致增益 k_f 同样选取得较小。

A. 悬停实验

要求两架四旋翼飞行器携带重量相近的物体，并在相同高度悬停。具体而言，四旋翼飞行器1携带0.248千克的载荷，四旋翼飞行器2携带0.252千克的载荷。我们为两架四旋翼飞行器采用基于扰动观测器的位置控制器

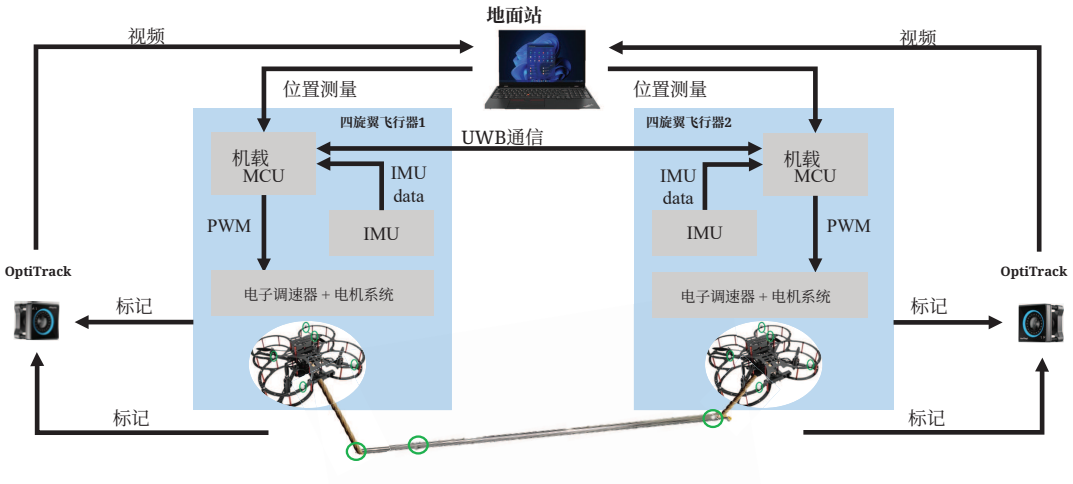


图9. 实验平台结构。

表II 实验中使用的参数

系统参数		
m_i	i = 0	0.745, 千克
	i = 1	0.831 千克
	i = 2	0.832 千克
$\boldsymbol{J}_i$	i = 1	diag{0.003, 0.003, 0.004}, 千克 · m^2
	i = 2	对角线{0.003, 0.003, 0.004}, 千克 · 米^2
l_i	i = 0	1.0, m
	i = 1	0.7, 米
	i = 2	0.3, m
控制参数		
k_1, k_2, k_3, k_4		4, 4, 5, 8
k_f		0.1
ι		1.2
期望轨迹		
$\boldsymbol{p}_{1d}$		$[1.5, 0, -1.2]^\top$, 米
$\boldsymbol{p}_{12dxy}$		$[2.5, 0]^\top$, 米

。两架四旋翼飞行器的期望高度均设为1.2米。

根据定义（3）和模型（5），在 $\ddot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{0}_{3\times1}$的悬停条件下，两架四旋翼飞行器在垂直方向上的集总扰动实际值可近似计算为 $m_i d_{iz} = -m_i g + f_{ic}$。从图10可以看出，扰动估计值 $m_i d_{iz}$ 收敛至实际值 $m_i d_{iz}$附近的一个小邻域，这表明扰动观测器是有效的。尽管两个四旋翼-载荷系统的总重量几乎相同，但 $m_2 d_{2z}$ 几乎比 $m_1 d_{1z}$大1N。由此可以推断，两架四旋翼飞行器之间推力不确定性的不一致程度约为总重力的10%和载荷重力的40%（四旋翼飞行器1与载荷的总重量为1.079千克，载荷为0.248千克），这说明即使是同型号的无人机，不确定性也可能存在严重的不一致。根据实验经验，这种不一致性可能会因电池电量的差异而加剧。在这种情况下，无法采用 [22] 或 [23]中提出的力控制方法。因此，我们必须从集总扰动中分离出缆绳力，以实现力协调控制。

B. 基于力一致性的实验

实验配置如图9所示。四旋翼飞行器1需要悬停在期望位置 $\boldsymbol{p}_{1d}$，同时指令四旋翼飞行器2保持期望的水平相对位置 $\boldsymbol{p}_{12dxy}$，并在垂直方向实现力一致性。 $\boldsymbol{p}_{12d}$ 的选择基于以下要求：如式（ 53 ）所述， $\|\boldsymbol{p}_{12dxy}\|$ 必须大于管道的长度，并且小于缆绳长度与管道长度之和，即 $2l_0 < \|\boldsymbol{p}_{12dxy}\| < 2l_0 + l_1 + l_2$。

与仿真研究相同，实验也从位置协调控制模式开始，并在10秒时切换到力协调控制模式。四旋翼飞行器1和四旋翼飞行器2的位置跟踪误差分别如图12和图13所示。可以看出，位置跟踪误差大致在0.02米范围内波动。因此，结合图10所示的估计结果，充分证明了基于扰动观测器的控制器对集总扰动具有鲁棒性。

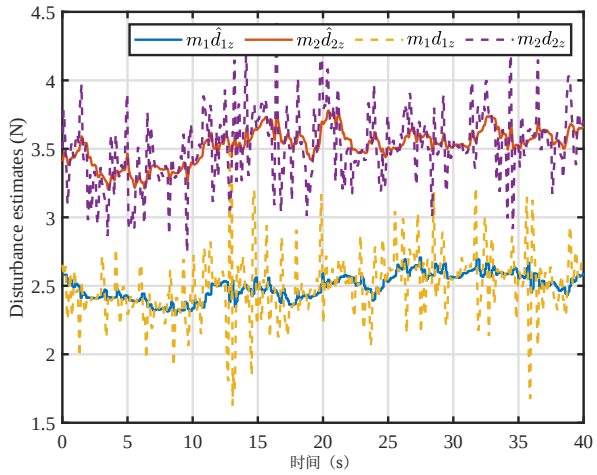


图10. 垂直方向的扰动估计 .

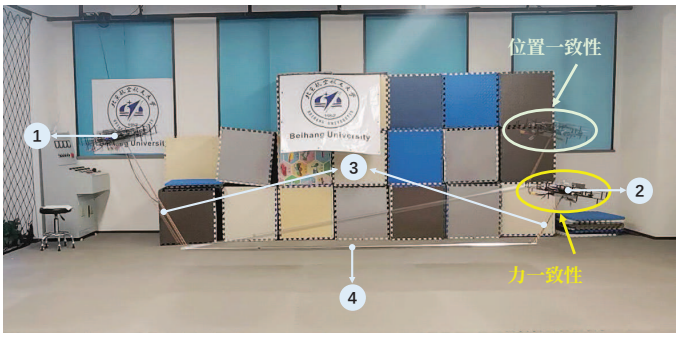


图11. 1) 四 旋翼飞行器1作为领导者；2) 四旋翼飞行器2作为跟随者；3) 长度不同的缆绳；4) 钢管 e

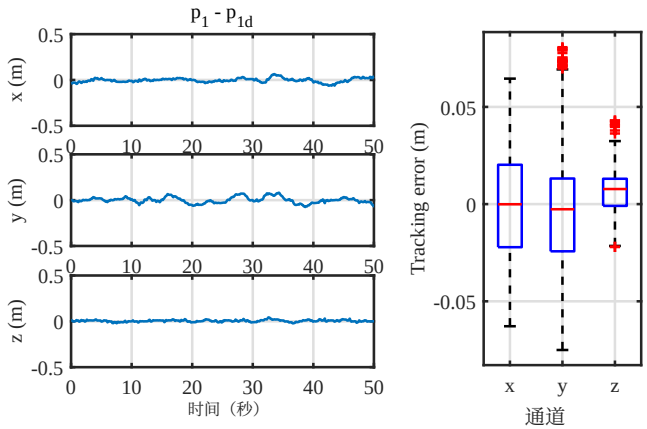


图12。四旋翼飞行器1的跟踪性能。

推力不确定性的估计值 Δf_1 和 Δf_2 如图14所示。可以看出，四旋翼飞行器2的推力不确定性估计值ˆ ˆ Δf_2 大于四旋翼飞行器1的 Δf_1 ，这与悬停实验中的比较结果一致。管道俯仰角 θ_0 的变化如图15所示。在前10秒内，管道保持静止，处于 $\theta_0 \approx -14°$的倾斜姿态。在随后的力协调控制模式下，随着四旋翼飞行器2在20秒内缓慢下降，管道逐渐趋近平衡状态下的水平姿态。实际上，尽管主导推力不确定性已从集总力扰动估计值中消除，残余扰动估计值中仍存在一些额外的微小不确定性，其被视为垂直缆索力估计值 t_{iz}。因此，管道的最终俯仰角 θ_0 只能保持在 1° 和 3°之间。这里所说的额外模型不确定性包括缆绳质量、四旋翼飞行器质心偏差、管道加速度以及测试区域内的湍流，这些

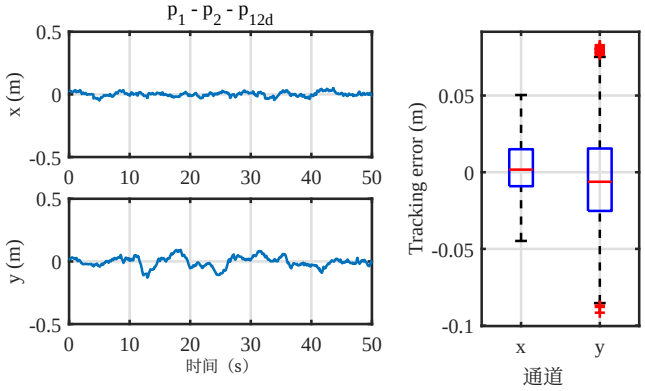


图13. 四旋翼飞行器2的队形保持性能。

与推力不确定性相比，它们通常较小，因此本研究中忽略了它们。

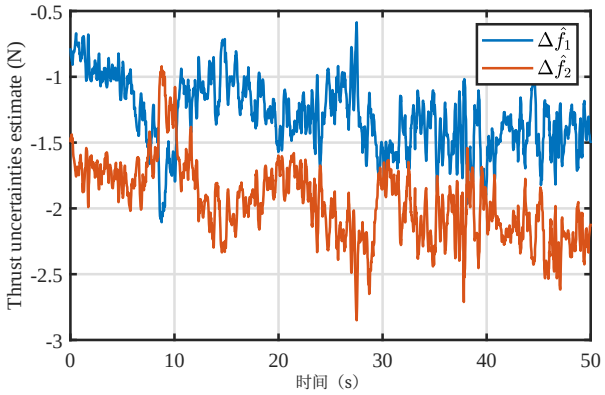


图14. 推力不确定性的估计值。

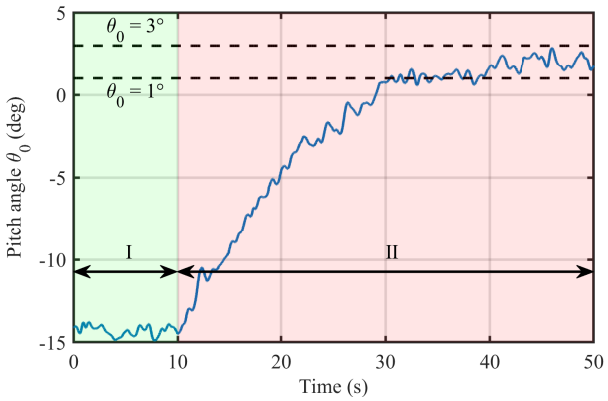


图15. 管道俯仰角 θ_0 o 阶段 I 表示位置协调阶段，阶段 II 表示力协调阶段 .

VII. 结论

本文提出了一种结合扰动分离与估计的力协调控制方案，并以协同运输系统为例进行了验证。与位置协调控制相比，力协调控制能够对载荷进行更复杂的操控，而不只是使其沿预定义轨迹移动。在准静态条件下，力一致性目标能够确保各车辆共同分担载荷重量，从而延长整个运输任务的续航时间。通过利用协作四旋翼飞行器固有的力平衡条件，可以将推力

不确定性与集总力扰动分别估计。因此，去除推力不确定性后，可以获得更准确的缆绳力估计。这克服了现有扰动估计方法无法区分同一通道中不同扰动的问题。仿真结果验证了所提方法的有效性，实验进一步表明，该方法在使用异构四旋翼无人机进行载荷运输的实际应用中能够取得良好性能。未来的研究方向包括通过力协调实现载荷姿态控制，以及分离其他不利的力扰动，例如风。

参考文献

[1] E. S. Carter，“重型起重直升机尺寸效应趋势及多重起重方案对满足需求的启示”，载于《第八届欧洲旋翼机论坛》，法国艾克斯-普罗旺斯，1982年9月。[2] D. Mellinger、M. Shomin、N. Michael 和 V. Kumar，“使用多架四旋翼飞行器进行协同抓取与运输”，载于《分布式自主机器人系统：第十届国际研讨会》。Springer，2013年，第545–558页。[3] X. Dong、B. Yu、Z. Shi 和 Y. Zhong，“无人驾驶飞行器的时变编队控制：理论与应用”，IEEE控制系统技术汇刊，第23卷第1期，第340–348页，2015年。[4] D. K. Villa、A. S. Brandao 和 M. Sarcinelli-Filho，“多旋翼无人机负载运输综述”，《智能与机器人系统杂志》，第98卷，第267–296页，2020年。[5] J. Geng 和 J. W. Langelaan，“采用负载主导控制的吊挂负载协同运输”，《制导、控制与动力学杂志》，第43卷第7期，第1313–1331页，2020年。[6] J. Zeng、P. Kotaru、M. W. Mueller 和 K. Sreenath，“面向带缆绳悬吊载荷四旋翼飞行器的微分平坦路径规划与混合模式直接配点法”，《IEEE机器人与自动化快报》，第5卷第2期，第3074–3081页，2020年。[7] G. Muscio、F. Pierri、M. A. Trujillo、E. Cataldi、G. Antonelli、F. Caccavale、A. Viguria、S. Chiaverini 和 A. Ollero，“空中机器人机械臂的协调控制：理论与实验”，IEEE控制系统技术汇刊，第26卷第4期，第1406–1413页，2017年。[8] M. Arcak，“将无源性作为群体协调的设计工具”，IEEE自动控制汇刊，第52卷第8期，第1380–1390页，2007年。[9] A. Tagliabue、M. Kamel、R. Siegwart 和 J. Nieto，“使用多架微型飞行器实现稳健的协同物体运输”，《国际机器人研究杂志》，第38卷第9期，第1020–1044页，2019年。[10] L. Qian 和 H. H. T. Liu，“使用多架四旋翼飞行器进行系留载荷运输的鲁棒控制研究”，《制导、控制与动力学杂志》，第45卷第3期，第434–452页，2022年。[11] F. A. Goodarzi 和 T. Lee，“ 使用多架协作四旋翼飞行器稳定刚体载荷 ”，《动态系统、测量与控制杂志》，第 138 卷第 12 期，2016 年。[12] K. Sreenath 和 V. R. Kumar，“多架四旋翼机器人通过缆绳悬吊载荷的动力学、控制与规划”，载于《机器人学：科学与系统》，德国柏林，2013年6月。[13] T. Lee，“运输缆绳悬吊刚体的四旋翼无人机几何控制”，IEEE控制系统技术汇刊，第26卷第1期，第255–264页，2018年。[14] B. Shirani、M. Najafi 和 I. Izadi，“使用多架无人机进行协同负载运输”，《航空航天科学与技术》，第84卷，第169页，2019年158pp. – 。[15] T. Bacelar、J. Madeiras、R. Melicio、C. Cardeira 和 P. Oliveira，“多架无人机协同运输负载的机载实现与实验验证”，《航空航天科学与技术》，第107卷，第106284页，2020年。[16] H. G. de Marina 和 E. Smeur，“旋翼飞行器团队的柔性协同运输”，载于《2019年国际机器人与自动化会议（ICRA）》，2019年，第1074–1080页。[17] K. Klausen、C. Meissen、T. I. Fossen、M. Arcak 和 T. A. Johansen，“在环境扰动下多旋翼飞行器运输未知悬挂负载的协同控制”，IEEE控制系统技术汇刊，第28卷第2期，第653–660页，2018年。[18] C. Meissen、K. Klausen、M. Arcak、T. I. Fossen 和 A. Packard，“带悬挂负载无人机的基于无源性的编队控制”，IFAC论文集，第50卷第1期，第13 150–13 155页，2017年。[19] K. Mohammadi、S. Sirouspour 和 A. Grivani，“运输缆绳悬吊载荷的多架四旋翼飞行器无源性控制”，《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，第27卷第4期，第2390–2400页，2022年。[20] M. Doakhan、M. Kabganian 和 A. Azimi，“多架四旋翼飞行器柔性编队控制下的协同载荷运输”，SSRN预印本： https://ssrn.com/abstract=*4222094*。[21] Z. Wang 和 M. Schwager，“Force-ANTS：无需通信的协同平面操作力放大 N 机器人运输系统”，《国际机器人研究杂志》，第35卷第13期，第1564–1586页，2016年。[22] S. Thapa、H. Bai 和 J. Acosta，“采用分散式自适应力一致性控制的协同空中操作”，《智能与机器人系统杂志》，第97卷，第171–183页，2020年。[23] M. Tognon、C. Gabellieri、L. Pallottino 和 A. Franchi，“带缆绳的空中协同操作：内力在平衡态、稳定性与无源性中的作用”，《IEEE机器人与自动化快报》，第3卷第3期，第2577–2583页，2018年。[24] P. Donner 和 M. Buss，“复杂摆式物体的协同摆动：实验评估”，《IEEE机器人汇刊》，第32卷第3期，第744–753页，2016年。[25] Q. L. Weng、G. J. Liu、P. Zhou、H. R. Shi 和 K. W. Zhang，“Co-TS：双无人机协同运输系统的设计与实现”，《微型飞行器国际期刊》，第15卷，第17568293231158443页，2023年。[26] Y. Chai、X. Liang、Z. Yang 和 J. Han，“两架协同旋翼无人飞行器张力重新分配的优化方案：实验研究”，《机械系统与信号处理》，第167卷，第108545页，2022年。[27] Y. Cui、J. Qiao、Y. Zhu、X. Yu 和 L. Guo，“基于精细化扰动观测器的多扰动云台伺服系统速度跟踪控制”，《IEEE工业电子汇刊》，第69卷第10期，第10 311–10 321页，2022年。[28] J. Li、L. Zhang、L. Luo 和 S. Li，“存在扰动时永磁同步电机系统的基于扩张状态观测器的电流约束控制器：设计、分析与实验”，《控制工程实践》，第132卷，第105412页，2023年。[29] J.-H. Park 和 D. E. Chang，“用于欧几里得空间中流形系统的简单、精确且计算高效的状态估计的稳定嵌入无迹卡尔曼滤波器”，《国际鲁棒与非线性控制杂志》，第33卷第3期，第1479–1492页，2023年。[30] D. Pucci、T. Hamel、P. Morin 和 C. Samson，“轴对称飞行器的非线性反馈控制”，《自动化》，第53卷，第72–78页，2015年。[31] F. Chen 和 D. V. Dimarogonas，“具有预设性能保证的领航者-跟随者编队控制”，IEEE网络控制系统汇刊，第8卷第1期，第450–461页，2021年。[32] W.-H. Chen、J. Yang、L. Guo 和 S. Li，“基于扰动观测器的控制及相关方法综述”，《IEEE工业电子汇刊》，第63卷第2期，第1083–1095页，2015年。[33] H. K. Khalil，《非线性系统》第三版。Prentice Hall，2002年，第115卷。[34] N. Michael 、 S. Kim 、 J. Fink 和 V. Kumar，“ 带缆绳的协同多机器人空中操作的运动学与静力学 ”，载于《国际设计工程技术会议暨计算机与信息工程会议》，第49040卷，2009年，第83–91页。

[35] J. Seo、M. Yim 和 V. Kumar，“利用具有曲面接触表面的效应器抓取物体的理论及其在全臂抓取中的应用”，《国际机器人研究杂志》，第35卷第9期，第1080–1102页，2016年。[36] J. Jia、K. Guo、X. Yu、W. Zhao 和 L. Guo，“四旋翼飞行器的高机动轨迹精确跟踪：一种阻力利用方法”，《IEEE机器人与自动化快报》，第7卷第3期，第6966–6973页，2022年。[37] K. Guo、C. Liu、X. Zhang、X. Yu、Y. Zhang、L. Xie 和 L. Guo，“受限环境下带扰动无人机的仿生安全控制系统”，《IEEE控制论汇刊》，第1–13页，2022年。[38] W. Zhang、J. Jia、S. Zhou、K. Guo、X. Yu 和 Y. Zhang，“ 应用于四旋翼飞行器自动驾驶仪的安全规划与控制架构 ”，《 IEEE 机器人与自动化快报》，第 8 卷第 2 期，第 680–687 页，2022 年。

补充材料：缆索悬挂载荷运输系统中垂直缆绳力误差的扇区界

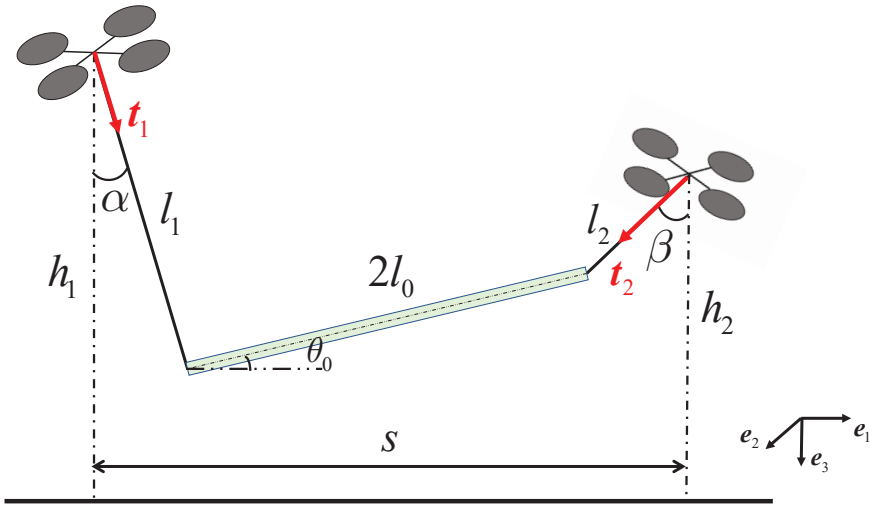


图16. 四旋翼飞行器2的高度调节。

A. 引理1的证明

证明。首先，考虑以下情形： 图16中内力 $t_0 > 0$、缆绳角 α、β 和负载角 θ_0 满足

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{68}$$

在准静态条件下，由于载荷位于 NED坐标系的 XZ平面内，缆绳力可计算为 [23]

$$\boldsymbol{t}_1 = \left[\frac{t_0\cos\theta_0}{2}, 0, \frac{-t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{2}\right]^\top, \quad \boldsymbol{t}_2 = \left[-\frac{t_0\cos\theta_0}{2}, 0, \frac{t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{2}\right]^\top \tag{69}$$

其中， θ_0 是图 16 中标注的管道俯仰角。

根据式 (69)， α 和 β 的三角函数可计算为

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{-t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{\sqrt{(t_0\cos\theta_0)^2 + (-t_0\sin\theta_0 + m_0 g)^2}} &&= \frac{k - \sin\theta_0}{g_1} \\
\cos\beta &= \frac{t_0\sin\theta_0 + m_0 g}{\sqrt{(t_0\cos\theta_0)^2 + (t_0\sin\theta_0 + m_0 g)^2}} &&= \frac{k + \sin\theta_0}{g_2} \\
\sin\alpha &= \frac{t_0\cos\theta_0}{\sqrt{(t_0\cos\theta_0)^2 + (-t_0\sin\theta_0 + m_0 g)^2}} &&= \frac{\cos\theta_0}{g_1} \\
\sin\beta &= \frac{t_0\cos\theta_0}{\sqrt{(t_0\cos\theta_0)^2 + (t_0\sin\theta_0 + m_0 g)^2}} &&= \frac{\cos\theta_0}{g_2}
\end{aligned} \tag{70}$$

其中，使用了 $k = \frac{m_0 g}{t_0}$、$g_1 = \sqrt{k^2 - 2k\sin\theta_0 + 1}$ 和 $g_2 = \sqrt{k^2 + 2k\sin\theta_0 + 1}$ 进行代换。这里，g_1 和 g_2 关于 θ_0 的导数可计算为

$$\frac{dg_1}{d\theta_0} = \frac{1}{g_1}\left[(k - \sin\theta_0)\frac{dk}{d\theta_0} - k\cos\theta_0\right], \quad \frac{dg_2}{d\theta_0} = \frac{1}{g_2}\left[(k + \sin\theta_0)\frac{dk}{d\theta_0} + k\cos\theta_0\right]. \tag{71}$$

内力 t_0 满足以下约束方程

$$l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta + 2l_0\cos\theta_0 = s. \tag{72}$$

将（70）中的代换代入可得

$$l_1\frac{\cos\theta_0}{g_1} + l_2\frac{\cos\theta_0}{g_2} + 2l_0\cos\theta_0 = s. \tag{73}$$

约束方程（73）是关于 k 的高阶方程，因此很难将变量 k 表示为 θ_0 的解析函数。对 θ_0 求（73）的导数可得

$$\frac{l_1}{g_1^3}[(k-\sin\theta_0)\frac{dk}{d\theta_0}-k\cos\theta_0]+\frac{l_2}{g_2^3}[(k+\sin\theta_0)\frac{dk}{d\theta_0}+k\cos\theta_0]=-\frac{s\cdot\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0}. \tag{74}$$

结合式(73)，计算 k 相对于 θ_0 的导数，得

$$\frac{dk}{d\theta_0}=-\frac{\frac{l_1}{g_1^3}(k-\sin\theta_0)(k\sin\theta_0-1)+\frac{l_2}{g_2^3}(k+\sin\theta_0)(k\sin\theta_0+1)+2l_0\sin\theta_0}{\left[\frac{l_1(k-\sin\theta_0)}{g_1^3}+\frac{l_2(k+\sin\theta_0)}{g_2^3}\right]\cos\theta_0} \tag{75}$$

接下来，计算四旋翼飞行器2的高度，得

$$\begin{aligned}h_2&=l_2\cos\beta+2l_0\sin\theta_0-l_1\cos\alpha+h_1\\&=l_2\frac{k+\sin\theta_0}{g_2}+2l_0\sin\theta_0-l_1\frac{k-\sin\theta_0}{g_1}+h_1\end{aligned} \tag{76}$$

其中，假设 $h_1=-p_{1z}$ 在稳态时保持静止。缆绳 l_1、 l_2 的长度以及管道 $2l_0$ 的长度也保持不变。因此， h_2 可视为 θ_0的连续函数。对 h_2 关于 θ_0 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{dh_2}{d\theta_0}&=l_2\frac{(\frac{dk}{d\theta_0}+\cos\theta_0)g_2-(k+\sin\theta_0)\frac{dg_2}{d\theta_0}}{g_2^2}-l_1\frac{(\frac{dk}{d\theta_0}-\cos\theta_0)g_1-(k-\sin\theta_0)\frac{dg_1}{d\theta_0}}{g_1^2}+2l_0\cos\theta_0\\&=(\frac{l_2}{g_2^3}-\frac{l_1}{g_1^3})\frac{dk}{d\theta_0}\cos^2\theta_0+\frac{l_2\cos\theta_0(k\sin\theta_0+1)}{g_2^3}+\frac{l_1\cos\theta_0(1-k\sin\theta_0)}{g_1^3}+2l_0\cos\theta_0\\&=k\cos\theta_0\frac{\frac{4l_1l_2}{g_1^3g_2^3}+2l_0(\frac{l_2}{g_2^3}+\frac{l_1}{g_1^3})}{\frac{l_1(k-\sin\theta_0)}{g_1^3}+\frac{l_2(k+\sin\theta_0)}{g_2^3}}.\end{aligned} \tag{77}$$

由于 p_{1dz} 和 p_{12d} 固定，根据文中的平衡分析， p_{2dz} 也固定，即 $\dot{p}_{2dz}=0$。因此，可得下式

$$\frac{d\tilde{p}_{2z}}{d\theta_0}=\frac{d\left(-h_2-p_{2dz}\right)}{d\theta_0}=-\frac{dh_2}{d\theta_0} \tag{78}$$

其中使用了 $p_{2z}=-h_2$ 。反函数的导数满足

$$\frac{d\theta_0}{d\tilde{p}_{2z}}=-\frac{\frac{l_1(k-\sin\theta_0)}{g_1^3}+\frac{l_2(k+\sin\theta_0)}{g_2^3}}{k\cos\theta_0\left[\frac{4l_1l_2}{g_1^3g_2^3}+2l_0(\frac{l_2}{g_2^3}+\frac{l_1}{g_1^3})\right]}. \tag{79}$$

最后，对 $t_0\sin\theta_0$ 关于 $\tilde{p}_{2z}$ 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{d(t_0\sin\theta_0)}{d\tilde{p}_{2z}}&=\frac{dt_0}{d\theta_0}\frac{d\theta_0}{d\tilde{p}_{2z}}\sin\theta_0+\frac{d\sin\theta_0}{d\tilde{p}_{2z}}t_0\\&=-\frac{dk}{d\theta_0}\frac{d\theta_0}{d\tilde{p}_{2z}}\frac{m_0g\sin\theta_0}{k^2}+\frac{d\theta_0}{d\tilde{p}_{2z}}\frac{m_0g\cos\theta_0}{k}\\&=-\frac{m_0g}{k^3\cos^2\theta_0}\frac{\frac{l_1}{g_1^3}(k-\sin\theta_0)^2+\frac{l_2}{g_2^3}(k+\sin\theta_0)^2+2l_0\sin^2\theta_0}{\frac{4l_1l_2}{g_1^3g_2^3}+2l_0(\frac{l_1}{g_1^3}+\frac{l_2}{g_2^3})}<0.\end{aligned} \tag{80}$$

由此可证明函数 $\sigma(\cdot)$ 严格递增。基于约束函数（73），可推导出以下不等式

$$\begin{aligned}\frac{s}{\cos\theta_0}-2l_0&=\frac{l_1}{\sqrt{(k-\sin\theta_0)^2+\cos^2\theta_0}}+\frac{l_2}{\sqrt{(k+\sin\theta_0)^2+\cos^2\theta_0}}\\&\geq\frac{2\sqrt{2l_1l_2}}{\sqrt{(k-\sin\theta_0)^2+(k+\sin\theta_0)^2+2\cos^2\theta_0}}\\&=\frac{2\sqrt{l_1l_2}}{\sqrt{k^2+1}}\end{aligned} \tag{81}$$

这意味着

$$k^2\geq\frac{4l_1l_2}{\left(\frac{s}{\cos\theta_0}-2l_0\right)^2}-1. \tag{82}$$

假设3：考虑由两架四旋翼飞行器通过缆绳悬吊在 NED 坐标系的 XZ平面内的管道，如图16所示，假设管道的俯仰角 θ_0 满足以下有界条件

$$-\frac{\pi}{2} < -\theta^* \le \theta_0 \le \theta^* < \frac{\pi}{2} \tag{83}$$

且缆绳角 α 和 β 的上界为 κ，即，

$$0 < \alpha \le \kappa < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \beta \le \kappa < \frac{\pi}{2}, \tag{84}$$

其中， θ^* 和 κ 为正常数。

根据 不等式（82），可以调整水平距离 s 以设定 k的下界，即 .,

$$k \ge \underline{k} = \sqrt{\frac{4l_1 l_2}{\left(\frac{s}{\cos\theta^*} - 2l_0\right)^2} - 1} > 0 \tag{85}$$

其中，下界 $\underline{k}$ 对应于内力 $\bar{t}_0$的上界。

对于 $\frac{d\sigma}{dx}(x)$的上界 $\overline{\sigma}$ ，

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(x)}{dx} = -\frac{d(t_0\sin\theta_0)}{d\tilde{p}_{2z}} &= \frac{m_0 g}{k^3\cos^3\theta_0}\frac{l_1\sin\alpha\cos^2\alpha + l_2\sin\beta\cos^2\beta + 2l_0\cos\theta_0\sin^2\theta_0}{\frac{4l_1l_2}{g_1^3 g_2^3} + 2l_0\left(\frac{l_1}{g_1^3}+\frac{l_2}{g_2^3}\right)} \\
&\le \frac{m_0 g}{k^3\cos^2\theta_0}\frac{(l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta + 2l_0\cos\theta_0)\cdot\max\{\cos^2\alpha,\cos^2\beta,\sin^2\theta_0\}}{2l_0\left(\frac{l_1\sin\alpha}{g_1^2}+\frac{l_2\sin\beta}{g_2^2}\right)} \\
&\le \frac{m_0 g}{k^3\cos^2\theta_0}\frac{s}{2l_0\cdot\frac{l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta}{k^2+2k+1}} \\
&\le \frac{m_0 g}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\frac{\frac{s}{\cos^2\theta_0}}{2l_0(s-2l_0\cos\theta_0)} \\
&\le \frac{m_0 g}{\underline{k}}\left(1+\frac{1}{\underline{k}}\right)^2\frac{s}{2l_0\cos^2\theta^*(s-2l_0)} = \overline{\sigma}
\end{aligned} \tag{86}$$

其中使用了 $g_1^2 \le k^2+2k+1$ 和 $g_2^2 \le k^2+2k+1$ 。

对于 $\frac{d\sigma}{dx}(x)$ 的下界$\underline{\sigma}$ ，

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(x)}{dx} = -\frac{d(t_0\sin\theta_0)}{d\tilde{p}_{2z}} &= \frac{m_0 g}{k^3\cos^3\theta_0}\frac{l_1\sin\alpha\cos^2\alpha + l_2\sin\beta\cos^2\beta + 2l_0\cos\theta_0\sin^2\theta_0}{\frac{4l_1l_2}{g_1^3 g_2^3} + 2l_0\left(\frac{l_1}{g_1^3}+\frac{l_2}{g_2^3}\right)} \\
&\ge m_0 g\frac{l_1\sin\alpha\cos^2\alpha + l_2\sin\beta\cos^2\beta}{\frac{4l_1l_2k^3\cos^3\theta_0}{g_1^3 g_2^3} + 2l_0\left(\frac{l_1k^3\cos^3\theta_0}{g_1^3}+\frac{l_2k^3\cos^3\theta_0}{g_2^3}\right)} \\
&\ge m_0 g\frac{(l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta)\cos^2\max\{\alpha,\beta\}}{\frac{4l_1l_2}{\cos^3\theta_0} + 2l_0l_1 + 2l_0l_2} \\
&\ge m_0 g\frac{(s-2l_0)\cos^2\kappa}{\frac{4l_1l_2}{\cos^3\theta^*} + 2l_0l_1 + 2l_0l_2} = \underline{\sigma} > 0
\end{aligned} \tag{87}$$

其中使用了 $g_1 \ge k\cos\theta_0$和 $g_2 \ge k\cos\theta_0$。

这样， $t_0\sin\theta_0$可以描述为 $\tilde{p}_{2z}$的单调函数，即

$$\sin\theta_0 = -\sigma(\tilde{p}_{2z}) \tag{88}$$

其中 $\sigma(\cdot)$： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个严格递增函数，且 $\sigma(0)=0$，并满足

$$0 < \underline{\sigma} < \frac{d\sigma(x)}{dx} < \overline{\sigma}. \tag{89}$$

这里 $\underline{\sigma} = m_0 g(\quad s-2l_0 \quad {}^2\kappa)\cos\cos^3\theta^* + 2l_0l_1 + 2l_0l_2$和 $\overline{\sigma} = \frac{m_0 g}{\underline{k}}\left(1+\frac{4l_1l_2}{\underline{k}}\right)\frac{s}{2l_0 \quad {}^2\theta^*\cos(s-2l_0)}$。 □