arXiv:2304.00238v4 [math.RT] 2 Feb 2024

仿射化、R 矩阵与反射函子

Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-Jin Oh 和 Euiyong Park

Abstract. 本文以 pro-objects 的语言建立了仿射化和 R 矩阵，并以此为应用，构造了任意有限型箭图 Hecke 代数局部化上的反射函子。该反射函子将量子群半部上的辫群作用和 Saito 反射范畴化。

Contents

1. 引言 3
2. 预备知识 12
2.1. 模对象 12
2.2. 分次范畴 13
2.3. 前对象 14
3. 阿贝尔范畴中的仿射化 15

日期：2024年2月2日。2020年数学主题分类：18M05、16D90、81R10。关键词与短语：仿射化、局部化、反射、R 矩阵、箭图 Hecke 代数。M. Kashiwara 的研究得到日本学术振兴会科学研究补助金（B）20H01795 的资助。M. Kim 的研究得到韩国政府（MSIP）资助的韩国国家研究基金会（NRF）基金（NRF-2022R1F1A1076214 和 NRF-2020R1A5A1016126）的资助。S.-j. Oh 的研究得到大韩民国教育部和韩国国家研究基金会（NRF-2022R1A2C1004045）的资助。E. Park 的研究得到韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）基金（RS-2023-00273425 和 NRF-2020R1A5A1016126）的资助。

3.1. Pro($\mathcal{C}$) 中的相干对象 15 3.2. 平坦性 24 4. 对偶 27 4.1. 补 27 4.2. 对偶 28 4.3. 仿射对象 30 5. 幺半范畴中的相干对象 34 5.1. 分次幺半范畴 34 5.2. 刚性情形 39 6. R 矩阵 41 6.1. 仿射对象 41 6.2. 有理中心与仿射化 43 6.3. 拟刚性公理 49 7. 箭图 Hecke 代数与施尔-韦伊对偶函子 56 7.1. 箭图 Hecke 代数 56 7.2. 万有 R 矩阵 58 7.3. R_λ-gmod 中的典范仿射化 60 7.4. 施尔-韦伊对偶 61 8. R-gmod 的局部化 66 8.1. 范畴 $\mathscr{C}_w$ 与 $\mathscr{C}_w^*$ 668.2. 局部化 67 9. 结式代数与不变量的仿射化 72 9.1. 结式代数 72 9.2. R -模的不变量仿射化 74 9.3. 仿射化示例 80 10. 通过局部化定义的 R-gmod 的 Saito 反射函子 80 10.1. $\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 与 $\mathscr{C}_{s_iw_0}^*$ 8010.2. 舒尔-外尔数据 82 11. $\mathscr{F}_i$ 99的示例 11.1. $\widetilde{\mathscr{F}_i}$: R-gmod $\to \mathscr{C}_{s_iw_0}^*$ 99

仿射化 、R 矩阵与反射函 子函子 3
$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$11.2. $\mathscr{F}_i$: 100
$\mathscr{C}_{w_0} \to \mathscr{C}_{w_0}$参考文献 102

1. Introduction

仿射化 和 R 矩阵 是箭图 Hecke 代数和仿射量子群表示论中最有力的工具之一。它们最成功的应用之一，是证明所给单对象张量积的头部具有单纯性，见[6] (参见命题 6.19)。

R 矩阵是模的张量积之间的特征同态，用于衡量张量积的交换性。模的仿射化有助于 R 矩阵发挥其作用。对仿射化和 R 矩阵的研究产生了整数不变量 Λ、 Λ 和 d，这些不变量在推导若干重要结果时发挥了关键作用，其中包括簇代数的幺半范畴化（参见 [6, 8, 9,13] 及其中的参考文献）。在量子仿射代数的表示论中，R 矩阵早已占据重要地位。广义 Schur-Weyl 对偶函子以自然的方式联系了箭图 Hecke 代数与量子仿射代数中的 R 矩阵，而且它们在各自的范畴中具有非常相似的性质。另见 [1, 4, 5, 7, 10] 及其中的参考文献。

对于对称拟群Hecke代数，存在一种函子性构造，可为一个模仿射化（[7]）。设 R 是基域 k 上的一个对称拟群Hecke代数，且 M 是一个 R-模。作为 k-向量空间， M的仿射化 M 与 $\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}] \otimes M$同构；生成元 e($\nu$) 和 τ_l 在 M 上的作用与其在 M 上的作用相同，但 x_k 的作用则由 z_{M} 扭曲（见 [7, 第 1.3]节）。不定元 z_{M} 可视为 End(M) 中的一个单态射。一旦仿射化存在，便可构造特征同态

$$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} := (z_{\mathsf{M}} - z_{\mathsf{N}})^{-s}\, \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} \in \mathrm{Hom}(\mathsf{M} \circ \mathsf{N}, \mathsf{N} \circ \mathsf{M}),$$
$$\mathbf{r}_{M,N} := \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}|_{z_{\mathsf{M}}=z_{\mathsf{N}}=0} \in \mathrm{Hom}(M \circ N, N \circ M),$$

其中 $R^{\mathrm{uni}}_{M,N}$ 是由交织算子 φ_i 定义的 泛R矩阵(见第 7.2 节），且 s 是满足 $R^{\mathrm{uni}}_{M,N}(M\circ N)\subset(z_M-z_N)^s N\circ M$ 的最大整数。重整化 R 矩阵 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 与 z_M 和 z_N可交换，而 R 矩阵 $r_{M,N}$ 永不为零。

与对称拟群Hecke代数的情形不同，非对称拟群Hecke代数上的仿射化并不一定存在，这给非对称拟群Hecke代数上的表示研究带来了巨大困难，例如非对称情形下的幺半范畴化。在 [13], 中，研究了任意箭图 Hecke 代数的仿射化和 R 矩阵概念。结果表明，若仿射化存在，则可以构造 R 矩阵，且它们具有与对称情形中非常相似的性质。仿射化和重整化 R 矩阵使我们能够在箭图 Hecke 代数的框架下考虑对偶数据（定义见 [13, 第 4 节1] ），从而给出箭图 Hecke 代数之间的广义 Schur-Weyl 对偶（[13, 第 4] 节）。这种对偶可以理解为 [7, 第 3] 节中引入的、从箭图 Hecke 代数到量子仿射代数的广义 Schur-Weyl 对偶的一个类似物。

对于箭图 Hecke 代数上模范畴的局部化情形，仿射化理论会变得更加复杂。设 R-gmod 为任意箭图 Hecke 代数上有限维分次模构成的范畴，W 为 Weyl 群。对于任意元素 $w\in W$，令 $\mathscr{C}_w$ 为 R-gmod 中由与 w 对应的对偶PBW向量生成的全子范畴（见 [8, 9]）。注意，子范畴 $\mathscr{C}_w$ 将量子幂零坐标环 $A_q(\mathfrak{n}(w))$ 范畴化，而 $\mathscr{C}_w$则将 $A_q(\mathfrak{n}(w))$ 作为量子簇代数进行幺半范畴化（[8]）。文献 [11]指出， $\mathscr{C}_w$ 可通过一个由实交换中心对象构成的族进行局部化，得到 $\mathscr{C}_w$ 。用簇代数的语言来说，这些中心对象对应于冻结变量，而局部化 $\mathscr{C}_w$ 将量子簇代数 $A_q(\mathfrak{n}(w))$ 在冻结变量处的局部化范畴化。事实证明，局部化 $\mathscr{C}_w$是一个刚性幺半范畴（[11, 12]）。

局部化的原范畴结构$\mathscr{C}_w$复杂得多。令 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R)$ 表示有限生成 R-模的范畴，并令 $\mathscr{C}_w^{\mathrm{big}}$为 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R)$ 的全子范畴，由其简单对象

的子商属于 $\mathscr{C}_w$ 的模组成。于是，我们可以类似于 $\mathscr{C}_w$ 对 $\mathscr{C}_w^{\mathrm{big}}$ 进行局部化，并得到$\widetilde{\text{局部化}}$ $\mathscr{C}_w^{\mathrm{big}}$。问题在于，$\mathscr{C}_w$ 中简单模$\widetilde{\text{的仿射化的对偶一般不属于}}$ $\mathscr{C}_w^{\mathrm{big}}$。因此，不能将仿射化和 R 矩阵的经典概念直接$\widetilde{\text{移植到局部化}}$ $\mathscr{C}_w$。为$\widetilde{\text{克服这一困难，我们必须引入范畴 Pro}}(\mathscr{C}_w)$，即

$\sim$ $\sim\mathscr{C}_w$的前对象范畴。这样，仿射化的对偶便属于 Pro($\mathscr{C}_w$)。这种关于仿射化和 R 矩阵的范畴论方法，或可为我们在各种有趣的范畴中带来新的应用，包括一种新型的广义 Schur-Weyl 对偶。

本文以 pro-objects 的语言建立仿射化与 R 矩阵理论，并作为应用，在任意有限型的箭图 Hecke 代数的局部化上构造反射函子。本文的主要结果可概括如下:

(i) 第一项主要结果是以 pro-objects 的语言研究仿射化与 R 矩阵的概念。我们在满足特定条件的范畴中定义仿射化与 R 矩阵，并研究它们的性质。随后，我们引入不变量 $\mathscr{D}$，Λ 以及 $\mathfrak{d}$，并证明它们的各种性质。因此，在纯范畴论的框架下，我们重现了箭图 Hecke 代数和量子仿射代数中出现的关键性质。接着，我们在范畴层面引入对偶数据，并通过应用 [7] 中给出的论证，在范畴框架下构造广义 Schur-Weyl 对偶。

（ii）第二项主要结果是将广义 Schur-Weyl 对偶应用于任意有限型箭图 Hecke 代数的$\widetilde{\text{局部化范畴}}$ $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$。因此，对于任意 $i \in I$，我们得到幺半范畴之间的一个等价

$$\mathscr{S}_i \colon \widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0},$$

它将辫群作用（[20, 第 37] 章）和 Saito 反射 σ_i（[24]）范畴化。

在构造过程中，我们发现了一些重要的附加结构（见第 2 节）。$\sim$

~ ~我们猜想 $\mathscr{S}_i$：$\mathscr{C}_{s_iw_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 在模范畴层面诱导出范畴等价 $\mathscr{C}_{s_iw_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$（见猜想10.12）。

对于有限 ADE 型，S. Kato ([15]) 利用几何构造了 Saito 反射函子，该函子将量子群一半上的辫群作用范畴化（另见 [16, 22]）。我们猜想，$\mathscr{S}_i$ 与 S. Kato 所构造函子诱导的函子相一致。然而，据作者所知，对于非对称型，目前尚无相关结果。

下面我们将更详细地介绍本文的主要结果。

第一个主要结果涉及一般范畴中的仿射化和 R 矩阵的概念。我们将分三部分进行说明，即范畴中的仿射化、关于 $\mathrm{k}[z]$ 的仿射化以及广义 Schur-Weyl 对偶。

范畴中的仿射化。设 $\mathcal{C}$ 是满足 (3.1) 的 k-线性范畴，且 $A := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ 是满足 (3.2) 的交换分次 k-代数。我们首先定义子范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，它由范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C})$ 中的分次相干 A-模构成；该范畴包含 $\mathcal{C}$ 的所有前对象（精确定义见定义 3.1）。在对象为 A-平坦的条件下，我们研究范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 并得到若干同调性质（见第 3 节）。我们用 $\mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$ 表示 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 的全子范畴，该子范畴由 A-平坦对象构成（定义 4.6）。对于给定的范畴反等价 D，我们证明 D 可提升到范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，记作 D_A。于是，函子 D_A 给出 $\mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$ 与其对偶范畴之间的范畴等价（见第 4.2 节）。在自然且有趣的情形下，D 可理解为范畴 $\mathcal{C}$ 中的对偶函子。

幺半范畴中的仿射化也得到了详细研究。进一步假设 $\mathcal{C}$ 是满足条件（5.1）的阿贝尔 k-线性分次幺半范畴。对于 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 中的分次A-模 M 和 N，我们根据泛性质（5.2）定义张量积 $\mathrm{M} \otimes_A \mathrm{N} \in \mathrm{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$。引理 5.4 表明，带有 $\otimes_A$的范畴 $\mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$ 构成一个幺半范畴；命题 5.6 则指出，若 $\mathcal{C}$是刚性幺半范畴，则 $\mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$ 是刚性的。

关于 $\mathbf{k}[z]$ 与 R 矩阵的仿射化。在 $A = \mathbf{k}[z]$的情形下，我们进一步深入研究。这种情形恰好出现在箭图 Hecke 代数中。假设 $\mathcal{C}$ 是满足条件（3.1）的 k-线性范畴，且 $A = \mathbf{k}[z]$，其中 z是不定元。我们将 $\mathcal{C}$ 中的一个仿射对象定义为属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$ 的一对 (M, z)，并满足定义 4.7 中的条件 (a)–(d)。随后我们研究仿射对象的性质。令 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 表示仿射对象范畴，并令 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 表示通过将态射 z 变为可逆而修改后的 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$ 范畴（精确定义见定义4.12）。我们证明存在一个典范函子

$$\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C}),$$

它是忠实且本质满的，并证明若干性质（见第4.3节）。

我们进一步假设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔$\mathbf{k}$-线性分次幺半范畴，满足（5.1）。对于（M, z_M）和（N, z_N）中属于 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 的对象，令 $M = M/z_M M$和 $N = N/z_N N$。在某些假设下（见命题6.2），我们证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M, z_N]}(M \otimes N, M \otimes N) \simeq \mathbf{k}[z_M, z_N]\,\mathrm{id}_{M\otimes N},$$

并且存在 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M,z_N]}(M \otimes N, N \otimes M)$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M, z_N]}(M \otimes N, N \otimes M) \simeq \mathbf{k}[z_M, z_N] R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$$

且 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}|_{z_M=z_N=0} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes N, N \otimes M)$ 不为零。态射 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 称为重整化 R 矩阵，而态射 $r_{M,N} := R^{\mathrm{ren}}_{M,N}|_{z_M=z_N=0}$ 称为 M 与 N 之间的 R 矩阵（见定义 6.3）。上述同构是仿射化和 R 矩阵应具有的典型性质。接着，我们利用范畴 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 在 $\mathcal{C}$ 中引入有理中心。借助仿射对象和有理中心的概念，我们最终定义了 $M \in \mathcal{C}$ 的仿射化 M（见定义 6.7）。命题 7.3 说明，这一定义是 [13, 定义 2.2]中给出的仿射化定义（见（7.6））的推广。在这一范畴框架下，作为有理中心的条件使 R 矩阵满足杨-巴克斯特方程（引理 6.23）。我们证明了仿射化和 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 的若干性质，并定义了

范畴语言中的不变量：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N}) \in \mathbf{k}[z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}] \quad \text{such that} \quad \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}} \circ \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\,\mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes\mathsf{N}},\\
&\Lambda(M,N) := \deg(\mathbf{r}_{M,N}) \in \mathbb{Z},\\
&\mathfrak{d}(M,N) := \frac{1}{2}\big(\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M)\big) = \deg(\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N}))/2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

下面我们介绍拟刚性范畴的概念。注意，箭图 Hecke 代数和量子仿射代数的模范畴是拟刚性范畴的例子（见 [6]）。拟刚性在证明张量积的简单对象的头部的单纯性时发挥着重要作用。作为拟刚性的结果，各种张量积之间的态射空间都是一维的（见命题6.19 和推论6.21），这保证了重整化 R 矩阵的存在性。据猜想，满足（5.1）的拟刚性幺半范畴可以嵌入某个刚性幺半范畴中（猜想6.18）。在 $\mathcal{C}$ 为拟刚性的附加假设下，我们证明了 R 矩阵和不变量 Λ及$\mathfrak{d}$的各种性质。因此，用纯粹的范畴语言，我们重新获得了箭图 Hecke 代数和量子仿射代数中出现的关键性质。

广义 Schur-Weyl 对偶。设 $\mathcal{C}$ 是一个满足 (6.2) 的分次准刚性幺半范畴，并设 R 是与参数多项式 $Q_{i,j}(u,v)$ 相关联的箭图 Hecke 代数。我们定义一个对偶数据 $\big(\{(\widehat{\mathrm{K}}_i, z_i)\}_{i\in I}, \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\widehat{\mathrm{K}}_j}\}_{i,j\in I}\big)$，它由 $\mathcal{C}$ 中满足 (7.7) 的仿射化族 $\{(\mathrm{K}_i, z_i)\}_{i\in I}$，以及满足 (7.8) 的重整化 R 矩阵 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\widehat{\mathrm{K}}_j}\colon \mathrm{K}_i\otimes\mathrm{K}_j \to \mathrm{K}_j\otimes\mathrm{K}_i$ 组成。将 [7, 13] 中给出的论证应用于对偶数据 $\big(\{(\widehat{\mathrm{K}}_i, z_i)\}_{i\in I}, \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\widehat{\mathrm{K}}_j}\}_{i,j\in I}\big)$，我们得到一个典范右正合幺半函子

$$\widehat{\mathscr{F}}\colon \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda) \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$$

使得

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathscr{F}}(\widetilde{L}(i)_{z_i}) \simeq \widehat{\mathrm{K}}_i \quad \text{and} \quad \widehat{\mathscr{F}}(L(i)) \simeq \mathrm{K}_i,\\
&\widehat{\mathscr{F}}(e(i,j)\varphi_1) = \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\widehat{\mathrm{K}}_j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_i,z_j]}(\widehat{\mathrm{K}}_i\otimes\widehat{\mathrm{K}}_j, \widehat{\mathrm{K}}_j\otimes\widehat{\mathrm{K}}_i),
\end{aligned}
$$

其中 φ_1 是（7.4）中给出的交织算子，并且 $L(i)$ 是次数为 0 的一维简单 $R(\alpha_i)$-模。于是我们得到限制函子

$$\mathscr{F}\colon R\text{-gmod} \to \mathcal{C},$$

并证明该函子具有与通常的广义 Schur-Weyl 对偶相同的良好性质（见第 7.4节）。

~ ~第二个主要结果是局部化上的反射函子 $\mathscr{S}_i$: $\mathscr{C}_{s_i w_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^*_{s_i w_0}$，它将量子群上的辫群作用范畴化。我们将分两部分阐述，即不变量的仿射化和反射函子。

~不变量的仿射化。我们利用仿射化，将在箭图 Hecke 代数中发挥关键作用的整数值不变量 Λ, Λ, d, wt, ε_i等提升为函数。

设 (M z_{M}) 和 (N z_{N}) 分别是简单 R模 M和 N的仿射化。为方便起见，我们假设 M 和 N 是实的。回顾一下在 [11, 第 3 节中定义的 χ_i(M)、 $\mathscr{E}_i$(M) 和$\mathscr{E}_i^*$(M)1]（精确定义见 (9.1)）。根据仿射化的性质（例如引理 4.11）， χ_i(M)、 $\mathscr{E}_i$(M) 和 $\mathscr{E}_i^*$(M) 可视为 k$[t_i, z_{\mathsf{M}}]$ 中的元素。在定义 9.3 中，我们利用重整化 R 矩阵 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$定义 $\mathscr{D}$(M, N)（见 (1.1)）和 k$[z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}]$ 中的 $\mathscr{L}$(M, N)。然后，我们根据 χ_i(M)、Q_i、$_j(t_i, t_j)$ 和 $\mathscr{L}$(M, N)，在 k$(x_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}})$/k$^\times$ 中定义 $\mathscr{L}$(M, N) 和 $\sim\!\!\mathscr{W}$t(M, N)。事实证明，这些新的不变量可以理解为以下意义下对众所周知的整数不变量的提升：

$$\begin{aligned}
\deg\big(\chi_i(\mathsf{M})\big) &= n_i(\alpha_i,\alpha_i) \quad \text{where } \mathrm{wt}(M) = -\sum\nolimits_{i\in I} n_i\alpha_i,\\
\deg\big(\mathscr{E}_i(\mathsf{M})\big) &= \varepsilon_i(M)(\alpha_i,\alpha_i) = 2\widetilde{\Lambda}(L(i),M),\\
\deg\big(\mathscr{E}_i^*(\mathsf{M})\big) &= \varepsilon_i^*(M)(\alpha_i,\alpha_i) = 2\widetilde{\Lambda}(M,L(i)),\\
\deg\big(\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\mathfrak{d}(M,N),\\
\deg\big(\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\widetilde{\Lambda}(M,N),\\
\deg\big(\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\Lambda(M,N),\\
\deg\big(\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\big(\mathrm{wt}(M),\mathrm{wt}(N)\big),
\end{aligned}$$

其中 deg 表示齐次次数。我们研究提升不变量之间的关系，并证明若干有趣的恒等式；这些恒等式也可解释为整数不变量之间恒等式的提升（见第 9.2 节）。提升不变量之间的恒等式用结式代数来描述（见第 9.1 节）。这些恒等式在反射函子的构造中起着关键作用。

反射函子。我们首先考察典范函子

$$\Phi_w \colon \mathscr{C}_w \to \widetilde{\mathscr{C}}_w \qquad (w \in \mathsf{W})$$

并证明该函子 Φ_w 是完全忠实的（定理8.3）。因此，我们证明$\widetilde{\ }$全子范畴 $\mathscr{C}_w$ 在 $\mathscr{C}_w$ 中对取子商封闭。然而， $\mathscr{C}_w$ 对$\widetilde{\ }$中的扩张 $\mathscr{C}_w$ 一般而言并不封闭（见注8.6）。

设 R 为任意有限型的箭图 Hecke 代数，并考虑范畴$\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 和 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ （见（8.1））。固定一个指标 $i \in I$。对任意 $j \in I$，我们如下取$\widetilde{\ }$中的实单$\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 对象：

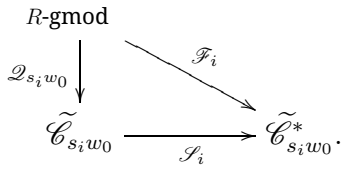
$$\mathrm{K}_j := \begin{cases} \mathscr{D}\big(\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}(\langle i \rangle)\big) & \text{if } j = i, \\ \langle i^{-\mathsf{c}_{i,j}} \rangle \nabla \langle j \rangle & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

$\widetilde{\ }$其中 $\mathscr{D}$是 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$中的右对偶函子， $\langle i^m \rangle$ 是自对偶简单 $R(m\alpha_i)$-模，$\widetilde{\ }$并且 $\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}\colon\ R\text{-gmod} \to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 是局部化函子（见第8.2节）。然后我们取$\widehat{\ }$K 的典范仿射化^j K^j （见（10.1））， 由此得到一个对偶数据

$$\big(\{(\widehat{\mathrm{K}}_j, z_j)\}_{j\in I}, \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_k}\}_{j,k\in I}\big).$$

特别地，我们利用 § 4 中构造的对偶函子 $\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}$，将 $\widehat{\ }$K$_i := \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}\big(\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}(R(\alpha_i))\big)$ 作为 K$_i$ 的仿射化。随后，我们计算不变量 Λ(Kj, K$_k$) 和 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$d(Kj, K$_k$)（命题 10.1），以及提升不变量 $\mathscr{D}$(Kj, K$_k$)（命题 10.2）。将广义 Schur-Weyl 对偶应用于这一情形，我们得到对偶函子$\widetilde{\ }$ $\mathscr{F}_i$: R-gmod $\longrightarrow \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$。考察行列式模$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$在函子 $\mathscr{F}_i$ 下的像后，我们最终构造出一个函子 $\mathscr{S}_i : \mathscr{C}_{s_iw_0} \longrightarrow \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$，使得

下图准可交换（命题 10.10）：



引理 10.6和命题 10.8 表明，函子 $\mathscr{S}_i$ 将辫群作用与 Saito 反射范畴化。定理 10.11 表明，反射函子 $\mathscr{S}_i$ 给出了范畴等价。出于技术原因，我们在注 A_2 10.13 中单独讨论类型的情形。

本文结构如下。第 2 节回顾范畴所需的数学背景。第 3 节和第 4 节在各种条件下研究阿贝尔范畴中的仿射化。第 5 节在各种条件下研究幺半范畴中的仿射化，第 6 节则阐述范畴中的 R 矩阵。第 7 节研究广义 Schur-Weyl 对偶，第 8 节证明典范函子 $\Phi_w\colon\ \mathscr{C}_w \to \mathscr{C}_w$ 是完全忠实的。第 9 节利用仿射化构造提升不变量，第 10 节专门讨论局部化上的反射函子。

致谢。作者感谢 Haruto Murata 提出的宝贵问题。第二、第三和第四作者谨此感谢他们于 2023年访问 RIMS（京都大学）期间所受到的热情款待。

约定。(i) 对于一个陈述 P， $\delta(P)$ 在 P 为真时取 1，否则取 0。

(ii) 除非另有说明，环上的模均为左模。(iii) k 表示一个基域。(iv) 对于环 A，我们用 Mod(A) 表示 A-模的范畴。我们用 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)$ 表示相干 A-模的范畴。(v) 对于域 k 和分次 k-代数 A，我们用 A-gmod 表示有限 k 维分次 A-模的范畴。

(vi) 对于分次模 $X=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}X_m$，我们记作 $X_{\geqslant m}=\bigoplus_{k\geqslant m}X_k$, $X_{\leqslant m}=\bigoplus_{k\leqslant m}X_k$和 $X_{>m}=\bigoplus_{k>m}X_k$。

(vii) 对于交换 k-代数 A and $f(z)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}a_kz^k\in A[z]$，如果 $a_m=1$，则称 $f(z)$ 为次数为 m 的首一多项式；如果 $a_m\in \mathrm{k}^\times$，则称 $f(z)$ 为次数为 m 的准首一多项式。

(viii) 对于范畴 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴。

(ix) 如果范畴 I 满足以下条件，则称其为滤过的：(a) $\mathrm{Ob}(I)\neq\emptyset$；(b) 对任意对象 i、$j\in I$，存在 $k\in I$ 以及态射 $i\to k$ 和 $j\to k$；(c) 对任意态射 $f\colon i\to j$ 和 $g\colon i\to j$，存在态射 $h\colon j\to k$，使得 $h\circ f=h\circ g$。

我们称 I 是余滤过的，当且仅当 I^{opp} 是滤过的。

2. 预备知识

2.1. 模对象。对于环 R 和加性范畴 $\mathcal{C}$，我们将R上的 R-模所构成的范畴记为 $\mathrm{Mod}(R,\mathcal{C})$，也就是说，这是由带有环同态 $R\to\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$的对象 $X\in\mathcal{C}$ 构成的范畴。R-模 X与 R-模 Y 之间的态射，是 $\mathcal{C}$ 中与 R-作用可交换的态射。

进一步假设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。我们可以定义张量函子

$$\bullet\otimes_R\bullet\colon\ \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}})\times\mathrm{Mod}(R,\mathcal{C})\to\mathcal{C},$$

它由以下泛性质刻画：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes_R X,Y)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(R^{\mathrm{opp}})}\big(M,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big)$$

关于以下变量函子性 $X\in\mathrm{Mod}(R,\ \mathcal{C})$，$M\in\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}})$ 和 $Y\in\mathcal{C}$ (参见 [14, 注释 8.5。7])。函子 $\bullet\otimes_R\bullet$ 对每个变量都是右正合的。

类似地，我们有一个函子

$$\mathcal{H}om_R(\bullet,\bullet)\colon\ \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R)^{\mathrm{opp}}\times\mathrm{Mod}(R,\mathcal{C})\to\mathcal{C}$$

由泛性质刻画

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, \mathcal{H}om_R(M,Y)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(R)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big)$$

对于 $M \in$模范畴$_{\mathrm{coh}}(R)$、 $Y \in$模范畴$(R,\mathcal{C})$、 $X \in \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{H}om_R(\bullet,\bullet)$，该函子在每个变量上都是左正合的。

假设 R^{opp} 是诺特的。若 R-模 X 在 $\mathcal{C}$ 中具有 R-平坦维数 $\leqslant m$，即对于任意 $i > m$ 和 $M \in$模范畴$_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}})$，$\mathrm{Tor}_i^R(M,X) = 0$，则称之为如此；其中，$\mathrm{Tor}_i^R(\bullet, X)$ 表示 $\bullet \otimes_R X$ 的左导出函子：模范畴 $_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}}) \to \mathcal{C}$。若 R-模 X 在 $\mathcal{C}$ 中是 R-平坦的，即其 R-平坦维数为 6 0，也就是说， $\bullet \otimes_R X$: 模范畴$_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}}) \to \mathcal{C}$ 是正合函子，则称其为 R-平坦。

2.2. 分次范畴。设 $\mathcal{C}$ 为一个加性范畴。若 $\mathcal{C}$ 配备了一个自等价 q （称为分次移位函子），则称其为分次范畴。对于加性分次范畴 $\mathcal{C}$，我们定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)_k \quad \text{with } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)_k := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(q^k M, N)$$

对于 $M,N \in \mathcal{C}$。于是， $\mathcal{C}$具有一个以 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$为态射集的范畴结构。我们称 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)_k$是一个次数为 k的态射。

对于分次环 $R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R_k$， $\mathcal{C}$ 中的分次 R-模是一个配备了分次环同态 $R \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ 的对象 X 。 $\mathcal{C}$ 中的分次 R-模范畴是一个加性分次范畴，记作 $\mathrm{Modg}(R,\mathcal{C})$。 $\mathcal{C}$ 中两个分次-R-模之间的态射，是 $\mathcal{C}$ 中与 R-作用可交换的态射。

如果 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔的，我们可以定义

$$\begin{aligned} \bullet \otimes_R \bullet &: \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R^{\mathrm{opp}}) \times \mathrm{Modg}(R,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{and} \\ \mathcal{H}om_R(\bullet,\bullet) &: \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R)^{\mathrm{opp}} \times \mathrm{Modg}(R,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}. \end{aligned}$$

这里，$\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R)$ 是相干分次 R-模的范畴。

下文中，我们有时会忽略分次平移。例如，当 $f \in \mathrm{Hom}(M,N)_k$ 时，我们有时会写 $f\colon M \to N$ 是一个态射。

2.3. 前对象。 对于范畴 $\mathcal{C}$，令 Pro($\mathcal{C}$) 为$\mathcal{C}$ 的前对象范畴（参见 [14, 第 6 节1]，其中给出了定义及其性质）。于是存在一个全忠实函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$，并且我们将 $\mathcal{C}$视为 Pro($\mathcal{C}$) 的全子范畴。范畴 Pro($\mathcal{C}$) 存在小的余滤过射影极限，我们将其记为“ lim←—”

（[14, 定理 6.1.8]）。Pro($\mathcal{C}$) 中的每个对象都同构于一个小的余滤过射影系统 $\{X_i\}_{i\in I}$在 $\mathcal{C}$中的射影极限“ lim←—” X_i。设 k 是一个域。假设$_{i\in I}$

该范畴 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴（分别地，k-线性阿贝尔范畴）。那么范畴 Pro($\mathcal{C}$) 也是阿贝尔范畴（分别地，k-线性阿贝尔范畴），且典范函子$\mathcal{C} \to$ Pro($\mathcal{C}$)是正合的。此外，函子“ lim←—”是正合的（[14, 定理 6.1.19]）。$_{i\in I}$
也就是说，对于 Pro($\mathcal{C}$) 中由小的余滤过范畴 I指标化的余滤过射影系统 $X_i \to Y_i \to Z_i$ 的任意正合列，“ lim←—” $X_i \to$“ lim←—” $Y_i \to$“ lim←—” Z_i是$_{i\in I}$ $_{i\in I}$ $_{i\in I}$

在 Pro($\mathcal{C}$) 中正合。

Pro($\mathcal{C}$) 的子范畴 $\mathcal{C}$ 对取核、余核及扩张封闭（[14,命题 8.6.11]）。

若 $\mathcal{C}$ 是本质小的阿贝尔范畴（分别地，k-线性阿贝尔范畴），则范畴 Pro($\mathcal{C}$) 等价于从 $\mathcal{C}$ 到阿贝尔群范畴（分别地，k-向量空间范畴）的左正合函子范畴的对偶范畴。

若 $\mathcal{C}$ 是具有双正合张量函子 $\otimes$的阿贝尔幺半范畴，则 Pro($\mathcal{C}$) 配备 $\otimes$的自然扩张后也具有此性质。

引理 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 为阿贝尔范畴，且 X 为 $\mathcal{C}$ 中的阿廷对象。则 Pro($\mathcal{C}$) 中 X 的任意商对象和子对象都与 $\mathcal{C}$ 中的对象同构。

证明。设 Y是 Pro($\mathcal{C}$)中的一个子对象。于是我们可以写成 $Y \simeq$“ lim←—” Y_i，其中 $_{i\in I}\{Y_i\}_{i\in I}$ 是由小型余滤过范畴I索引的 X 的子对象的射影系统。

由于 X 是阿廷的，存在 i_0 属于 I，使得对于任意 $i \to i_0$都有 $Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i_0}$。因此$Y \xrightarrow{\sim} Y_{i_0}$属于 $\mathcal{C}$。如果 Z是 Pro($\mathcal{C}$)中的 X的一个商对象，那么 Ker($X \to Z$) $\in \mathcal{C}$，因此 $Z \in \mathcal{C}$。□

设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$是一个函子。那么， F自然诱导出一个函子 Pro($\mathcal{C}$) $\to$Pro($\mathcal{C}'$)。我们用同一个字母 F表示这个函子。

3. Affinizations in abelian categories

3.1. Pro($\mathcal{C}$) 中的相干对象。设 k 为一个基域。设 $\mathcal{C}$ 是一个 k-线性范畴，使得

$\mathcal{C}$ 是阿贝尔的，是 k-线性分次的，即 $\mathcal{C}$带有一个 k-线性自等价；每个对象都具有有限
$\mathcal{C}$
q
长度；每个简单对象 S都是绝对简单的，即 k $\xrightarrow{\sim}$ End $_{\mathcal{C}}(S) :=$ Hom$_{\mathcal{C}}(S, S)$。(3.1)

由（3.1）可知 Hom$_{\mathcal{C}}(M,\ N)$ 对 k而言是有限维的， M， $N \in \mathcal{C}$并且对于任意 $S \not\simeq q^k S$ 以及任意非零的 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$， $S \in \mathcal{C}$。

由引理 2.1， $\mathcal{C}$ 属于 Pro($\mathcal{C}$) 的全子范畴对取子商封闭。分次移位函子可扩张到 Pro($\mathcal{C}$)。

设 $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ 是一个交换分次 k-代数，满足

(3.2)
$A_0 \simeq$ k 对任意 $k < 0$、
$A_k = 0$
A 都是有限生成的 k-代数。

特别 地， A 是诺特环，并且对于所有 k， $\dim_{\mathbf{k}} A_k < \infty$。对于每个 $m \in \mathbb{Z}$， s et

$$A_{\geqslant m} := \bigoplus_{k\geqslant m} A_k,$$

这是 A 的一个理想。

下文中，我们假设 $\mathcal{C}$ 满足 (3.1) 且 A 满足 (3.2)。

回顾一下，$\mathsf{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$ 表示 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 中分次 A-模的范畴（参见 §2.2）。

对于 $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$，我们定义 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_k$，其中 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_k :=$同态空间$^{\mathrm{Modg}(A,\mathrm{Pro}(\mathcal{C}))}(q^k\mathsf{M}, \mathsf{N})$。于是 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 具有分次 A-模结构。

定义 3.1。我们将 $\mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 记为 $\mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$ 的全子范畴，它由满足以下条件的 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 中的分次 A-模 M 构成：
(a) $\mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \in \mathcal{C}$，(b) $\mathsf{M} \xrightarrow{\sim}$“$\varprojlim$” $\mathsf{M}/A_{\geqslant k}\mathsf{M}$，或等价地，
“$\varprojlim$” $A_{\geqslant k}\mathsf{M} \simeq 0$。 k k

这里 $A_{\geqslant k}\mathsf{M} := \mathrm{Im}(A_{\geqslant k} \otimes_A \mathsf{M} \to A \otimes_A \mathsf{M}) \subset \mathsf{M}$。注意，对于任意 $\mathsf{M} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$ 以及任意有限生成分次A-模 X，$X \otimes_A \mathsf{M}$ 都属于 $\mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$。

引理 3.2. 设 $\mathsf{M} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$.
(i) 对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，典范态射

$$(A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_{\mathbf{k}} (\mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M}) \simeq (A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_A \mathsf{M} \to A_{\geqslant m}\mathsf{M}/A_{>m}\mathsf{M} \tag{3.3}$$

是 $\mathcal{C}$ 中的满态射。
(ii) 特别地，若 $\mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \in \mathcal{C}$，则对象 $A_{\geqslant m}\mathsf{M}/A_{>m}\mathsf{M}$ 属于 $\mathcal{C}$ 根据引理 2.1。

(iii) 若 M 是 A-平坦的，则态射 (3.3) 是同构。

证明。注意到

$$\begin{aligned}(A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_A \mathsf{M} &\simeq \big((A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_{\mathbf{k}} (A/A_{>0})\big) \otimes_A \mathsf{M} \\ &\simeq (A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_{\mathbf{k}} \big((A/A_{>0}) \otimes_A \mathsf{M}\big) \simeq (A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_{\mathbf{k}} (\mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M}).\end{aligned}$$

我们在 $\mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$ 中有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A_{>m} \otimes_A \mathsf{M} & \longrightarrow & A_{\geqslant m} \otimes_A \mathsf{M} & \longrightarrow & (A_{\geqslant m}/A_{>m}) \otimes_A \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_{>m}\mathsf{M} & \longrightarrow & A_{\geqslant m}\mathsf{M} & \longrightarrow & A_{\geqslant m}\mathsf{M}/A_{>m}\mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.4}$$

其中各行正合。由于中间的竖直箭头是满态射，右侧的竖直箭头也是满态射。

若 M 是 A-平坦，则（3.4）中的左侧和中间竖直箭头是同构，因此右侧竖直箭头也是如此。□

命题 3.3。$\mathrm{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$ 的全子范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 具有以下性质。

(i) 范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 在 $\mathrm{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$ 中对取子商和取扩张封闭。(ii) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 中的任意对象都是诺特的。(iii) 对任意 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，我们有 (a) 对任意满足 $0 \leqslant m \leqslant n$ 的 $m, n \in \mathbb{Z}$，$A_{\geqslant m}\mathrm{M}/A_{\geqslant n}\mathrm{M}$，(b) 对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 以及任意满足 $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ 的 $\mathrm{N} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，存在$n > 0$ 使得 $\mathrm{N} \cap A_{\geqslant n}\mathrm{M} \subset A_{\geqslant m}\mathrm{N}$，(c) 若 $\mathrm{M} = A_{>0}\mathrm{M}$，则 $\mathrm{M} = 0$。

证明。 (iiia) 由引理 3.2立刻得出。

取一组正次数的 k-代数 A 的齐次生成元 $\{z_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$。

（稍后会用到 l。）我们将对 r 使用归纳法证明这些结论。当$r = 0$时，结论显然。假设 $r > 0$。令 $B := \mathrm{k}[z_2, \ldots, z_r] \subset A$。根据归纳假设，将 A 替换为 B 后，(i)–(iii) 成立。令 $d_1 := \deg(z_1) \in \mathbb{Z}_{>0}$，并令 $d := \max\{\deg(z_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$。

于是 $A_{\geqslant k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} z_1^j B_{\geqslant k - d_1 j}$。特别地，我们有 $A_{>0} = z_1 A + B_{>0}$。

由于 $A_{\geqslant dk} \subset (A_{>0})^k \subset A_{\geqslant k}$ 对任意 $k \geqslant 1$，(iiic) 显然成立。此外，显然有

$$\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}) \text{ is stable by taking quotients.} \tag{3.5}$$

我们首先证明

(3.6) 设 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$，并假设存在 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $z_1^n \mathrm{M} = 0$。那么，$\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 当且仅当 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$。

假设 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$。由于在 $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 中存在满态射 $\mathrm{M}/B_{>0}\mathrm{M} \twoheadrightarrow \mathrm{M}/A_{>0}\mathrm{M}$，我们有 $\mathrm{M}/A_{>0}\mathrm{M} \in \mathcal{C}$。由于

$$A_{\geqslant k} \subset Az_1^n + B_{>k-nd_1}A \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

我们有“$\varprojlim$” $A_{\geqslant k}\mathrm{M} \subset$ “$\varprojlim$”$(B_{>k-nd_1}\mathrm{M}) \simeq 0$。因此得到 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$。

k k反过来，假设 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$。于是我们有“$\varprojlim$” $B_{\geqslant k}\mathrm{M} \subset$ “$\varprojlim$” $A_{\geqslant k}\mathrm{M} \simeq_k$ $_k0$。下面证明 $\mathrm{M}/B_{>0}\mathrm{M} \in \mathcal{C}$。注意到 $A_{\geqslant nd_1} \subset z_1^n A + B_{>0}A$。由于根据 (iiia)，$\mathrm{M}/A_{\geqslant nd_1}\mathrm{M} \in \mathcal{C}$，其商对象 $\mathrm{M}/(z_1^n A + B_{>0}A)\mathrm{M} \simeq \mathrm{M}/B_{>0}\mathrm{M}$ 属于 $\mathcal{C}$。由此完成 (3.6) 的证明。

根据（3.5）和（3.6），我们有

(3.7) 对于任意的 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 以及满足 $j \leqslant k$ 的 $j, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，有 $z_1^j\mathrm{M}/z_1^k\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$。

我们将证明

(3.8) 对于任意的 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 和 $\mathrm{N} \in \mathrm{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$，若 $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$，则存在 $c \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，都有 $\mathrm{N} \cap z_1^{k+c}\mathrm{M} \subset z_1^k\mathrm{N}$。

由于 $\mathrm{M}/z_1\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$ 是诺特的，M 的子对象递增序列 $\{(z_1^k)^{-1}\mathrm{N} + z_1\mathrm{M}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$最终稳定。因此存在 $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得对于任意 $k \geqslant k_0$，都有 $(z_1^k)^{-1}\mathrm{N}+z_1\mathrm{M} \subset (z_1^{k_0})^{-1}\mathrm{N} + z_1\mathrm{M}$。因此，$\mathrm{N}\cap z_1^k\mathrm{M} \subset z_1^{k-k_0}\mathrm{N}+z_1^{k+1}\mathrm{M}$。令 $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。于是，对于任意 $k \geqslant k_0 + l$，都有 $\mathrm{N} \cap z_1^k\mathrm{M} \subset z_1^l\mathrm{N} + \mathrm{N} \cap z_1^{k+1}\mathrm{M}$。因此，由$k$归纳法可得，对于任意 $k \geqslant k_0 + l$，都有 $\mathrm{N} \cap z_1^{k_0+l}\mathrm{M} \subset z_1^l\mathrm{N} + \mathrm{N} \cap z_1^k\mathrm{M}$。由于“$\varprojlim$” $z_1^k\mathrm{M} \simeq 0$，我们$_k$得到$\mathrm{N} \cap z_1^{k_0+l}\mathrm{M} \subset z_1^l\mathrm{N}$。这表明（3.8）。

下面我们来证明

(3.9) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ is stable by extensions.

设 $0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$ 是 $\mathrm{Mod}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$ 中的一个正合列，且 $\mathrm{M}', \mathrm{M}'' \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$。下面证明 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$。

由于我们有一个正合列

$$\mathsf{M}'/A_{>0}\mathsf{M}' \to \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \to \mathsf{M}''/A_{>0}\mathsf{M}'' \to 0$$

其中左右两项属于 $\mathcal{C}$，我们有 $\mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \in \mathcal{C}$。

我们来证明“$\lim\leftarrow$” $A_{>k}\mathsf{M} \simeq 0$。由于复合 $\mathsf{N} :=$ “$\lim\leftarrow$” $A_{>k}\mathsf{M} \rightarrowtail \mathsf{M} \to \mathsf{M}''_k$ 经由“$\lim\leftarrow$” $A_{>k}\mathsf{M}'' \simeq 0$分解，因此它是一个零态射。于是 $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}'$。因此我们有

$$0 \simeq \text{“}\varprojlim_k\text{”}\, A_{>k}\mathsf{M}' \supset \text{“}\varprojlim_k\text{”}\, A_{>k}\mathsf{N} \simeq \text{“}\varprojlim_{k,j}\text{”}\, A_{>k}A_{>j}\mathsf{M} \simeq \text{“}\varprojlim_k\text{”}\, A_{>k}\mathsf{M},$$

这意味着“$\lim_$” $A_{>k}\mathsf{M} \simeq 0$。因此我们得到（3.9）。

现在，我们可以证明

(3.10) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ is stable by taking subobjects.

设 $\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，且 $\mathsf{N} \in \mathrm{Modg}(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$，满足 $\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$。由（3.8），存在 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\mathsf{N} \cap z_1^m\mathsf{M} \subset z_1\mathsf{N}$。由于根据（3.7），$\mathsf{M}/z_1^m\mathsf{M} \in$ 属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$，根据归纳假设，其子对象 $\mathsf{N}/(\mathsf{N} \cap z_1^m\mathsf{M})$ 属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$。因此，其商对象 $\mathsf{N}' := \mathsf{N}/z_1\mathsf{N}$ 也属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(B, \mathcal{C})$。由于 $\mathsf{N}'/B_{>0}\mathsf{N}' \in \mathcal{C}$，并且我们有 $(\mathsf{N}/z_1\mathsf{N})/B_{>0}(\mathsf{N}/z_1\mathsf{N}) \simeq \mathsf{N}/(z_1\mathsf{N} + B_{>0}\mathsf{N}) \twoheadrightarrow \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N}$，我们得出 $\mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N} \in \mathcal{C}$。此外，“$\lim\leftarrow$” $A_{\geqslant k}\mathsf{N} \subset$ “$\lim\leftarrow$” $A_{\geqslant k}\mathsf{M}$ 消失。因此 $\mathsf{N} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，并得到$_k$ $_k$(3.10)。

由此，我们完成了命题（i）的证明。

下面证明（iiib）。由于“$\lim\leftarrow$”$(\mathsf{N} \cap A_{\geqslant k}\mathsf{M}) \simeq 0$，我们有 $\mathsf{N} \simeq$ “$\lim\leftarrow$” $\mathsf{N}/(\mathsf{N} \cap A_{\geqslant k}\mathsf{M})$。$_k$ $_k$另一方面，（iiia）蕴含 $\mathsf{N}/A_{\geqslant m}\mathsf{N}$ 属于 $\mathcal{C}$。因此，存在$n \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得态射 $\mathsf{N} \simeq$ “$\lim\leftarrow$” $\mathsf{N}/(\mathsf{N} \cap A_{\geqslant k}\mathsf{M}) \to \mathsf{N}/A_{\geqslant m}\mathsf{N}$ 可经由$_k\mathsf{N}/(\mathsf{N} \cap A_{\geqslant n}\mathsf{M})$ 分解。于是我们得到 $\mathsf{N} \cap A_{\geqslant n}\mathsf{M} \subset A_{\geqslant m}\mathsf{N}$。

还需证明（ii）。设 $\{\mathsf{N}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是$\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}$的一个子对象递增序列。我们将证明该序列是稳定的。

族 $\{(z_1^k)^{-1}\mathsf{N}_j + z_1\mathsf{M}\}_{j,\ k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是稳定的，因为根据归纳假设，$\mathsf{M}/z_1\mathsf{M} \in \mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(B,\mathcal{C})$ 是诺特的。因此存在 $k_0, j_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对于 $j \geqslant j_0$ 和 $k \geqslant k_0$，有 $(z_1^k)^{-1}\mathsf{N}_j + z_1\mathsf{M} = (z_1^{k_0})^{-1}\mathsf{N}_{j_0} + z_1\mathsf{M}$。因此我们有

$$\mathsf{N}_j \cap z_1^k\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_0} + z_1^{k+1}\mathsf{M} \quad \text{for } k \geqslant k_0 \text{ and } j \geqslant j_0.$$

这意味着

$$\mathsf{N}_{j_0} + \mathsf{N}_j \cap z_1^k\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_0} + \mathsf{N}_j \cap z_1^{k+1}\mathsf{M} \quad \text{for any } k \geqslant k_0.$$

因此，通过归纳法，我们得到

$$\mathsf{N}_{j_0} + \mathsf{N}_j \cap z_1^{k_0}\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_0} + \mathsf{N}_j \cap z_1^{k+1}\mathsf{M} \quad \text{for any } k \geqslant k_0.$$

取“$\varprojlim$”，我们得到$_k$

$$\mathsf{N}_{j_0} + \mathsf{N}_j \cap z_1^{k_0}\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_0}.$$

因此，对于 $j \geqslant j_0$，$\mathsf{N}_j \cap z_1^{k_0}\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_0}$。另一方面，由于 $\mathsf{M}/z_1^{k_0}\mathsf{M} \in \mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(B,\mathcal{C})$ 是诺特的，$\{\mathsf{N}_j + z_1^{k_0}\mathsf{M}\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是稳定的。因此，存在 $j_1 \geqslant j_0$，使得对于 $j \geqslant j_1$，$\mathsf{N}_j + z_1^{k_0}\mathsf{M} = \mathsf{N}_{j_1} + z_1^{k_0}\mathsf{M}$。因此，对于任意 $j \geqslant j_1$，我们有 $\mathsf{N}_j \subset \mathsf{N}_{j_1} + \mathsf{N}_j \cap z_1^{k_0}\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{j_1} + \mathsf{N}_{j_0} = \mathsf{N}_{j_1}$。□

引理 3.4. 设 $X \in \mathsf{Modg}_{\mathrm{coh}}(A)$ 且 $\mathsf{M} \in \mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$。则有：

(i) $X \otimes_A \mathsf{M} \in \mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$，(ii) 若 $\dim_{\mathbf{k}} X < \infty$，则 $X \otimes_A \mathsf{M} \in \mathcal{C}$。

证明。(i) 取一个满态射 $A^{\oplus r} \twoheadrightarrow X$，由此得出 (i)，因为 $X \otimes_A \mathsf{M}$ 是 $\mathsf{M}^{\oplus r}$ 的商对象。

(ii) 由于 $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{END}_A(X) < \infty$，存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{END}_A(X)_{\geqslant m} = 0$。于是 $A_{\geqslant m}X = 0$，这意味着 $A_{\geqslant m}\big(X \otimes_A \mathsf{M}\big) = 0$。因此 $X \otimes_A \mathsf{M} \in \mathcal{C}$ 由命题3.3 (iiia)。

□

引理 3.5。设 $f\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 是 $\mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$ 中的一个态射。

(i) 如果 $f := (A/A_{>0}) \otimes_A f\colon \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \to \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N}$ 是满态射，那么 f 是满态射。

~(ii) 如果 N 是 A-平坦的，且 f 是同构，那么 f 是同构。

~证明。 (i) 若 f 是满态射，则（$A/A_{>0})\otimes_A$余核(f) $\simeq 0$，因此由命题 f） ≃3.3 可得 0 。

(ii) 由于 N 是 A-平坦的，我们有一个正合列

$$0 \to (A/A_{>0}) \otimes_A \operatorname{Ker}(f) \to \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \to \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N} \to 0.$$

因此 Ker(f) $\simeq 0$。 □

命题 3.6. 设 M, N $\in \mathbf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，并令 $M := \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M} \in \mathcal{C}$和 $N := \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N} \in \mathcal{C}$。假设 N 是 A-平坦的。设 X 为有限生成分次 A-模，且 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$。假设 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M, N)$ 的次数为 $\geqslant \lambda$，且 X 的次数为 $\geqslant \mu$。那么我们有

(i) HOM_A(M $X \otimes_A$ N) 的次数为 $\geqslant \mu + \lambda$。(ii) HOM_A (M $X \otimes_A$ N) 是有限生成的 A-模，(iii) 存在一个整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得

$$\mathrm{HOM}_A\big(\mathsf{M}, X_{\geqslant k+m} \otimes_A \mathsf{N}\big) \subset A_{\geqslant k}\, \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, X \otimes_A \mathsf{N}) \quad \textit{for any } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

作为 HOM_A(M $X \otimes_A$ N) 的子集。

证明。令 L $= X \otimes_A$ N $\in \mathbf{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，且 $\mathsf{L}_{\geqslant m} = X_{\geqslant m} \otimes_A \mathsf{N} \subset \mathsf{L}$。由于 N 是 A-平坦的，我们有

$$\mathsf{L}_{\geqslant m}/\mathsf{L}_{>m} \simeq (X_{\geqslant m}/X_{>m}) \otimes_A \mathsf{N} \simeq X_m \otimes_{\mathbf{k}} N.$$

(i) 我们有一个包含关系

(3.11)

$$\frac{\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant m})}{\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{>m})} \rightarrowtail \mathrm{HOM}_A\big(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant m}/\mathsf{L}_{>m}\big) \xrightarrow{\sim} X_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M, N).$$

因此，HOM_A(M, $\mathsf{L}_{\geqslant m}$/$\mathsf{L}_{>m}$)的次数为 $\geqslant m + \lambda$。因此，对于任意 $s \geqslant m$，HOM_A(M, $\mathsf{L}_{\geqslant m}$/ $\mathsf{L}_{\geqslant s}$)的次数也为 $\geqslant m + \lambda$。由此我们得到

$$\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L})_k \simeq \varprojlim_s \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant \mu}/\mathsf{L}_{\geqslant s})_k \simeq 0 \quad \text{if } k < \mu + \lambda.$$

由此我们得到（i）。将（i）应用于 $X_{\geqslant m}$，我们得到

$$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant m}) \text{ has degree } \geqslant m + \lambda. \tag{3.12}$$

设 $S = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} S_m$ 为分次 A-模，且 $S_m = \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M},\mathsf{L}_{\geqslant m})/\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M},\mathsf{L}_{>m})$。由（3.11），我们得到一个单态射

$$S \rightarrowtail X \otimes_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N),$$

这意味着 S 是一个有限生成的分次 A-模。因此，存在 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant\mu}$和一个有限维分次 k-子空间 $K_j \subset \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M},\mathsf{L}_{\geqslant j})$ $(\mu \leqslant j \leqslant r)$，使得

$$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant m}) \subset \sum_{\mu\leqslant j\leqslant r} A_{\geqslant m-j} K_j + \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{>m}) \quad \text{for any } m \in \mathbb{Z}.$$

因此，由 t 上的归纳法，对于任意满足 $\mathrm{Om}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant m}) \subset \sum_{j=\mu}^{r} A_{\geqslant m-j} K_j + \mathrm{Hom}_A($ $\mathsf{M}, \mathsf{L}_{\geqslant t})$ 的 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，我们得到 $t \geqslant m$。因此（3.12）意味着 $\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{L}$ $_{\geqslant m}) \subset \sum_{j=0}^{r} A_{\geqslant m-j} K_j$ 由此可得（ii）和（iii）。□

命题 3.7。设 $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，并令 $M = \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M}$ 和 $N = \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N}$。假设 N 是 A-平坦的。令 H_0 为 $\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 的一个分次 k-子空间。

(i) 若复合 $H_0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \xrightarrow{(\ A/A_{>0}\otimes_A \bullet\ )} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ 是单射，则 $A \otimes_{\mathbf{k}} H_0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 是单射。(ii) 若 $H_0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ 是满射，则 $A \otimes_{\mathbf{k}} H_0 \to \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 是满射。

证明。令 $s \in \mathbb{Z}$。那么复合

$$g_m \colon \big((A_{\geqslant m}/A_{\geqslant m+1}) \otimes_{\mathbf{k}} H_0\big)_s \to \big((A_{\geqslant m}/A_{\geqslant m+1}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)\big)_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, A_{\geqslant m}\mathsf{N}/A_{\geqslant m+1}\mathsf{N})_s$$

在 (i)（分别为 (ii)）的假设下是单射（分别为满射）。下面我们将通过对 $f_m \colon (A_{\geqslant m} \otimes_{\mathbf{k}} H_0)$ $_s \to \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant m}\mathsf{N})_s$ 作降归纳，证明其是单射（分别为满射）。若 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。若 $m \gg 0$，则结论成立，因为 $(A_{\geqslant m} \otimes H_0)_s \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant m}\mathsf{N})_s \simeq 0$ 根据命题 3.6。

现在假设 f_{m+1} 是单射（分别地，满射）。考虑如下具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \left(A_{\geqslant m+1}\otimes H_0\right)_s & \longrightarrow & \left(A_{\geqslant m}\otimes H_0\right)_s & \longrightarrow & \left((A_{\geqslant m}/A_{\geqslant m+1})\otimes H_0\right)_s & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_m} & & \downarrow{\scriptstyle g_m} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, A_{\geqslant m+1}\mathsf{N})_s & \longrightarrow & \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, A_{\geqslant m}\mathsf{N})_s & \longrightarrow & \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, A_{\geqslant m}\mathsf{N}/A_{\geqslant m+1}\mathsf{N})_s\,. & & \end{array}$$

由于 f_{m+1} 和 g_m 是单射（分别地，满射），所以 f_m也是如此，归纳法由此继续。□

命题 3.8. 设 M、N $\in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，并令 $M = \mathsf{M}/A_{>0}\mathsf{M}$ 和 $N = \mathsf{N}/A_{>0}\mathsf{N}$。假设

(a) A 是一个整环，(b) N 是 A-平坦的，(c) $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M, N) = \mathsf{k}f$，其中存在一个非零的 f，其齐次次数为 $\lambda \in \mathbb{Z}$，(d) 存在一个非零的 $F \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$。

~那么，$\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 是一个自由的 A-模，由元素 $F \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_\lambda$ 生成，且满足 $(A/A_{>0}) \otimes_A F = f$。

证明。 首先注意到 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant m}\mathsf{N})$ 的次数为 $\geqslant m + \lambda$ 根据命题 3.6。

设 $\psi \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 是一个次数为 d 的非零同态。取 $s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得 $\psi \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant s}\mathsf{N})$ 且 $\psi \notin \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ A_{>s}\mathsf{N})$。于是，其像 $\overline{\psi} \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant s}\mathsf{N}/A_{>s}\mathsf{N})$ 非零。由于根据 (b)，$\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ A_{\geqslant s}\mathsf{N}/A_{>s}\mathsf{N}) \simeq (A_{\geqslant s}/A_{>s}) \otimes \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M, N)$，存在 $a \in A_s$ 使得 $\overline{\psi} = af$。特别地，$d = s + \lambda$。因此，我们有 $\psi \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})$。我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, a\mathsf{N})_d \longrightarrow \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})_d \longrightarrow \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, (a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})/a\mathsf{N})_d.$$

由于 $(a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})/a\mathsf{N} \simeq \left((aA + A_{>s})/aA\right) \otimes_A \mathsf{N}$ 且 $(aA + A_{>s})/aA \simeq A_{>s}/(aA \cap A_{>s})$ 的次数为 $\geqslant s + 1$，命题 3.6 表明 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, (a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})/a\mathsf{N})$ 的次数为 $\geqslant s + 1 + \lambda = d + 1$。因此，$\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, (a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})/a\mathsf{N})_d \simeq 0$，这意味着 $\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ a\mathsf{N})_d \simeq \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ a\mathsf{N} + A_{>s}\mathsf{N})_d$。因此，由于 A 是一个整环，我们有 $\psi \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}\ a\mathsf{N})_d = a\mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_\lambda$。于是存在 $\psi' \in \mathrm{HOM}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_\lambda$，使得 $\psi = a\psi'$ 且 $(A/A_{>0}) \otimes \psi' = f$。

~ ~将其应用于 $\psi = F$，存在 $a \in A$ 和 $F \in \mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_\lambda$，使得 $F = aF$。还需指出，$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)_\lambda$。因此，$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ 是 gener-

~由 F 生成，作为一个 A-模。由于 N 是 A-平坦的，对于任意 $a \in A$，$a : \mathsf{N} \to \mathsf{N}$ 都是单射。~因此，$aF = 0$ 蕴含 $a = 0$，从而 $\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M},\mathsf{N})$ 在 A 上是自由的。□

注释 3.9。在命题 3.8 中，条件 (a) 是必要的。事实上，若取 $\mathcal{C} = \mathbf{k}$-gmod、$A = \mathbf{k}[z]/\mathbf{k}[z]z^2$、$\mathsf{M} = Az$ 和 $\mathsf{N} = A$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \simeq \mathbf{k}$，$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \simeq A/Az$，且 $\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ 为零。

下面给出另一个例子，其中 M 和 N 是 A-平坦的。令 $B = \mathbf{k}[t]/\mathbf{k}[t]t^2$，其中 $\deg(t) = 1$，且 $\mathcal{C} = B$-gmod 和 $A = \mathbf{k}[z]/\mathbf{k}[z]z^2$。对于 $c \in \mathbf{k}^\times$，令 $\mathsf{X}_c = \mathbf{k}[t]/\mathbf{k}[t]t^2 \in \mathcal{C}$，其中 $z \in \mathrm{End}(\mathsf{X}_c)$ 由 $\mathsf{X}_c \ni x \mapsto ctx \in \mathsf{X}_c$ 给出。于是 X_c 是 A-平坦的。若 $\mathsf{M} = \mathsf{X}_{c_1}$、$\mathsf{N} = \mathsf{X}_{c_2}$，其中 $c_1 \neq c_2$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \simeq \mathbf{k}$，$\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \simeq Az$，且 $\mathrm{Hom}_A(\mathsf{M}, \mathsf{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ 为零。

引理 3.10。我们有如下范畴等价

$$A\text{-gmod} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(A, \mathbf{k}\text{-gmod}),$$
$$\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathbf{k}\text{-gmod}).$$

证明。第一个等价显然。我们定义函子 Φ: $\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(A) \to \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathbf{k}\text{-gmod})$，其定义为 $M \to$ “$\varprojlim$” $M/M_{\geqslant m}$；并定义 Ψ: $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathbf{k}\text{-gmod}) \to \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(A)_m$，将 $\mathsf{M} \to \mathrm{Hom}_A(\Phi(A), \mathsf{M})$ 对应起来。容易验证它们是良定义的，且互为准逆。□

3.2. 平坦性。

命题 3.11。设 A 是满足 (3.2) 的交换分次环，设 $z \in A_{>0}$是一个非零因子，并令 $B = A/Az$。假设 $\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 满足

(a) $z|_{\mathsf{M}}$ 是单态射，(b)

$\mathsf{M}/z\mathsf{M}$ 是 B-平坦的。

因此，M 是 A-平坦的。

证明。只需证明，对于任意有限生成的 A-模S，$\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。

(i) 假设 $zS = 0$。那么我们有 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq \mathrm{Tor}_1^B(S, \mathsf{M}/z\mathsf{M}) \simeq 0$。
(ii) 假设对于某个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，$z^m S = 0$。我们将通过对 m 使用归纳法来证明 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。我们有一个正合列 $0 \to$ 核$(z|_S) \to S \to zS \to 0$。由于 $z^{m-1}|_{zS} = 0$，根据归纳假设，我们有 $\mathrm{Tor}_1^A(zS, \mathsf{M}) \simeq 0$；根据 (i)，有 $\mathrm{Tor}_1^A($核$(z|_S), \mathsf{M}) \simeq 0$。因此，正合列

$$\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Ker}(z|_S), \mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(zS, \mathsf{M})$$

推出 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。
(iii) 假设 $z|_S$ 是一个单态射。那么我们有一个正合列

$$\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \xrightarrow{z} \mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(S/zS, \mathsf{M}).$$

由 (i)，我们有 $\mathrm{Tor}_1^A(S/zS, \mathsf{M}) \simeq 0$。因此，$\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M})/z\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。由于 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，命题 3.3 (iii) 蕴含 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。
(iv) 一般而言，我们有一个正合列 $0 \to S' \to S \to S'' \to 0$，使得 $z^m S' = 0$ 对某个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立，且 $z|_{S''}$ 是单态射。因此，由 (ii) 和 (iii)，我们有 $\mathrm{Tor}_1^A(S, \mathsf{M}) \simeq 0$。□

推论3.12. 设 z_k 是一个正次数齐次不定元（k =1, . . ., n），并设 $A := \mathsf{k}[z_1, \ldots, z_n]$ 是分次多项式环。假设 M ∈$\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 满足

$(z_1, \ldots, z_n)$ 是 M-正则的，即对于任意 k 使得 $1 \leqslant k \leqslant n$，
$z_k \big|_{\mathsf{M}/\sum_{j=1}^{k-1} z_j \mathsf{M}}$ 是一个单态射。

那么 M 是 A-平坦的。

证明。 由命题 3.11 对 n进行归纳法即可立即得出。 □

引理 3.13. 设 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $A = \mathsf{k}[z]/\mathsf{k}[z]z^m$，并设 M 是阿贝尔k-线性分次范畴中的一个分次 A-模。则以下条件等价：(a) M 是 A-平坦的，

(b) 对任意满足 $1 \leqslant k < m$ 的 k，z: $z^{k-1}M/z^kM \to z^kM/z^{k+1}M$ 是同构；(c) 对任意满足 $1 \leqslant k < m$ 的 k，z^k: $M/zM \to z^kM/z^{k+1}M$ 是同构；(d) 对任意满足 $1 \leqslant k < m$ 的 k，$\mathrm{Ker}(z^k|_M) \subset z^{m-k}M$ ；(e) 对某个满足 $1 \leqslant k < m$ 的 k，$\mathrm{Ker}(z^k|_M) \subset z^{m-k}M$。

证明。由以下事实可知，A 的任意分次理想都是某个满足$0 \leqslant k \leqslant m$的 $k \in \mathbb{Z}$ 的 z^kA 。□

命题 3.14. 设 A 是一个交换分次 k-代数，满足 (3.2) 并设$\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$。

(i) 若此正合列

$$0 \to X' \otimes_A \mathsf{M} \to X \otimes_A \mathsf{M} \to X'' \otimes_A \mathsf{M} \to 0$$

对 A-gmod 中的任意正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 都正合，则 M 是A-平坦的。

(ii) M 是 A-平坦的，当且仅当 $\mathrm{Tor}_1^A(A/A_{>0}, \mathsf{M}) \simeq 0$。

证明。(i) 设 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 是 $\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(A)$ 中的正合列。我们将证明 $0 \to X' \otimes_A \mathsf{M} \to X \otimes_A \mathsf{M} \to X'' \otimes_A \mathsf{M} \to 0$ 是正合的。

设 $0 \to X'_m \to X_m \to X''_m \to 0$ 是 A-模的正合列，且具有有限k-维，其中 $X_m = X/A_{\geqslant m}X$，$X''_m = X''/A_{\geqslant m}X''$ 且 $X'_m = X'/(X' \cap A_{\geqslant m}X)$。由命题 3.3 (iii b)，存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $A_{\geqslant n}X' \subset X' \cap A_{\geqslant m}X$，这意味着

$$\text{“}\varprojlim_m\text{”}\ X'/A_{\geqslant m}X' \simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\ X'_m.$$

因此

$0 \to$“ lim←—”$(X'/A_{\geqslant m}X') \otimes_A \mathsf{M} \to$“ lim←—”$(X/A_{\geqslant m}X) \otimes_A \mathsf{M} \to$“ lim←—”$(X''/A_{\geqslant m}X'') \otimes_A \mathsf{M} \to 0$ 是正合的。由于 “lim←—”$(X/A_{\geqslant m}X) \otimes_A \mathsf{M} \simeq$“ lim←—” $X \otimes_A (A/A_{\geqslant m}) \otimes_A \mathsf{M} \simeq X \otimes_A \mathsf{M}$，等等，我们得到所需结果。

(ii) 假设 $\mathrm{Tor}_1^A(A/A_{>0}, \mathsf{M}) \simeq 0$。我们将证明，对于任意$X \in A$-gmod，都有 $\mathrm{Tor}_1^A(X, \mathsf{M}) \simeq 0$。存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 使得 $A_{\geqslant m}X = 0$。我们将用归纳法证明

关于 m。由正合列 $\mathsf{Tor}_1^A(A_{>0}X, \mathsf{M}) \to \mathsf{Tor}_1^A(X, \mathsf{M}) \to \mathsf{Tor}_1^A(X/A_{>0}X, \mathsf{M})$，左项由归纳假设为零，右项为零，因为$X/A_{>0}X$ 是 $A/A_{>0}$ 的若干个副本的直和。

现在，对于 A-gmod 中的任意正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ ，我们得到正合列

$$0 \simeq \mathrm{Tor}_1^A(X'', \mathsf{M}) \longrightarrow X' \otimes_A \mathsf{M} \longrightarrow X \otimes_A \mathsf{M} \longrightarrow X'' \otimes_A \mathsf{M} \longrightarrow 0,$$

如所需。 □

4. Duality

4.1. 补。本小节中，我们给出两个引理。请注意，这些引理的分次版本仍然成立，尽管我们不再重复叙述。

引理 **4.1.** 设 B 是一个交换诺特环， $\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的一个 B-平坦模，且 M 和 N 是有限生成的 B-模。

$$\mathcal{H}om_B(N, M \otimes_B X) \simeq \mathrm{Hom}_B(N, M) \otimes_B X.$$

证明。我们有一个态射

$$\mathrm{Hom}_B(N, M) \otimes_B X \to \mathcal{H}om_B(N, M \otimes_B X).$$

存在一个 B-模的正合列

$$L \to L' \to N \to 0,$$

其中 L和 L' 是有限生成自由 B-模。于是我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L', M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L, M).$$

在具有正合行的交换图中

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(N, M) \otimes_B X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(L', M) \otimes_B X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(L, M) \otimes_B X \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_B(N, M \otimes_B X) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_B(L', M \otimes_B X) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_B(L, M \otimes_B X),
\end{array}$$

中间和右侧的垂直箭头是同构，因此左侧的箭头也是同构。□

引理 4.2. 设 B 是交换诺特环， $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是阿贝尔范畴。若 $\mathrm{D}\colon \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}'$ 是范畴等价，则有

$$\mathrm{D}(\mathcal{H}om_B(M,X)) \simeq \mathrm{D}X \otimes_B M$$

对任意 $X \in \mathsf{Mod}(B,\mathcal{A})$ 以及有限生成的 B-模 M，均成立。

证明。对任意 $Y \in \mathcal{A}'$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{D}X \otimes_B M, Y) &\simeq \mathrm{Hom}_B\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{D}X, Y)\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_B\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{D}^{-1}Y, X)\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(\mathrm{D}^{-1}Y, \mathcal{H}om_B(M,X)\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}\Big(\mathrm{D}\big(\mathcal{H}om_B(M,X)\big), Y\Big).\end{aligned}$$

□

4.2. 对偶。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathbf{k}$-线性阿贝尔范畴，且满足（3.1）。设 $\mathrm{D}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}'$ 是范畴等价。

设 A 是一个满足（$\mathbf{k}$）的交换分次 3.2代数。对于分次 A-模 X，我们有 $X^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(X, \mathbf{k})$，它是一个分次 A-模。

引理 4.3. 设 $\mathsf{M} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$ 是 A-平坦的，且 X 和 Y 是有限 $\mathbf{k}$ 维分次 A-模。那么，我们有

$$\mathrm{D}(X^* \otimes_A \mathsf{M}) \otimes_A Y \simeq \mathrm{D}\big((X \otimes_A Y)^* \otimes_A \mathsf{M}\big).$$

证明。我们有

$$\mathrm{D}(X^* \otimes_A \mathsf{M}) \otimes_A Y \simeq \mathrm{D}\big(\mathcal{H}om_A(Y, X^* \otimes_A \mathsf{M})\big) \simeq \mathrm{D}\big(\mathrm{Hom}_A(Y, X^*) \otimes_A \mathsf{M}\big).$$

还需指出，$\mathrm{Hom}_A(Y, X^*) \simeq (X \otimes_A Y)^*$。 □

定义 4.4. 对于 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$，令 $\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) := \text{“}\varprojlim\text{”}\, \mathrm{D}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathrm{M}\big) \in_m \mathrm{Modg}\big(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C}')\big)$。类似地，对于 $\mathrm{N} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}')$，令 $\mathrm{D}_A^{-1}(\mathrm{N}) = \text{“}\varprojlim\text{”}\, \mathrm{D}^{-1}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_{A^m} \mathrm{N}\big) \in \mathrm{Modg}\big(A, \mathrm{Pro}(\mathcal{C})\big)$。

命题 4.5. 假设 $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 是 A-平坦的。那么我们有 $e:$

(i) $\mathrm{D}_A(\mathrm{M})$ 属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}')$，(ii) $\mathrm{D}_A(\mathrm{M})$ 是 A-平坦的，

(iii) 对任意有限 k 维分次 A-模 X，我们有

$$\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \otimes_A X \simeq \mathrm{D}(X^* \otimes_A \mathrm{M}),$$

(iv) $\mathrm{D}_A^{-1}\, \mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{M}$。

证明. 对任意有限 k 维 A-模 X，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \otimes_A X &\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathrm{D}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathrm{M}\big) \otimes_A X \\ &\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathrm{D}\Big(\big((A/A_{\geqslant m}) \otimes_A X\big)^* \otimes_A \mathrm{M}\Big) \simeq \mathrm{D}(X^* \otimes_A \mathrm{M})\end{aligned}$$

根据引理 4.3. 因此 $\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \otimes_A X \in \mathcal{C}'$ 以及

$$\text{“}\varprojlim_m\text{”}(A/A_{\geqslant m}) \otimes_A \mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathrm{D}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathrm{M}\big) \simeq \mathrm{D}_A(\mathrm{M}).$$

因此，我们有 $\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}')$。由于由 $X \mapsto \mathrm{D}_A(\mathrm{M}) \otimes_A X \simeq \mathrm{D}(X^* \otimes_A \mathrm{M})$ 给出的函子 $A\text{-gmod} \to \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}')$ 是正合的，根据命题 3.14，对象 $\mathrm{D}_A(\mathrm{M})$ 是 A-平坦的。

最后，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_A^{-1}\mathrm{D}_A(\mathrm{M}) &\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathrm{D}^{-1}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathrm{D}_A(\mathrm{M})\big) \\ &\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathrm{D}^{-1} \circ \mathrm{D}\big((A/A_{\geqslant m}) \otimes_A \mathrm{M}\big) \simeq \mathrm{M}.\end{aligned}$$

□

定义 4.6. 我们用 $\mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$ 表示 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$ 的全子范畴，其对象由 A-平坦对象组成。

由命题 4.5函子

$$\mathrm{D}_A\colon \mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aff}_A(\mathcal{C}')$$

是范畴等价。

4.3. 仿射对象。

定义 4.7. 设 z 是一个齐次次数为 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的不定元。$\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$ 中的一个对象不过是满足以下条件的对 (M, z):
(a) $\mathrm{M} \in \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 且 $z \in \mathrm{END}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C})}(\mathrm{M})_d$;
(b) $\mathrm{M}/z\mathrm{M} \in \mathcal{C}$; (c) $\mathrm{M} \xrightarrow{\sim}$“ $\varprojlim$” $\mathrm{M}/z^n\mathrm{M}_{\cdot n}$
若 (M, z) 还满足以下条件
(d) $z \in \mathrm{END}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C})}(\mathrm{M})$ 是一个单态射,
则称 (M, z) 为仿射对象（属于 $\mathrm{M}/z\mathrm{M}$）。

注意，仿射对象 (M, z) 无非是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$ 中的一个 $\mathrm{k}[z]$-平坦对象。我们用 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 表示仿射对象范畴。

命题 4.8. 模范畴 $\mathrm{Mod}(\mathrm{k}[z], \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$ 的全子范畴 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$ 具有以下性质。

(i) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$ 在取子商和扩张下封闭；(ii) $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$ 中的任意对象都是诺特的；(iii) 对于任意 $(\mathrm{M}, z) \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$，我们有：(a) 对任意满足 $0 \leqslant m \leqslant n$ 的 $m, n \in \mathbb{Z}$，$z^m\mathrm{M}/z^n\mathrm{M} \in \mathcal{C}$；(b) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，$\mathrm{Ker}\, z^n \in \mathcal{C}$，且序列 $\{\mathrm{Ker}(z^n)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 最终稳定；(c) 对于任意满足 $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ 的 $\mathrm{N} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{k}[z], \mathrm{Pro}(\mathcal{C}))$，存在 $n > 0$ 使得 $\mathrm{N} \cap z^n\mathrm{M} \subset z\mathrm{N}$；(d) 若 $\mathrm{M} = z\mathrm{M}$，则 $\mathrm{M} = 0$。

这不过是命题 3.3 的一个特例。
对于 $\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$，我们定义

$$\mathsf{M}_{\mathrm{tor}} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathrm{Ker}(z^n|_{\mathsf{M}}) \subset \mathsf{M} \quad \text{and} \quad \mathsf{M}_{\mathrm{flat}} = \mathsf{M}/\mathsf{M}_{\mathrm{tor}}.$$

注意， 由于 M 是诺特的，因此 $\mathsf{M}_{\mathrm{tor}}$ 是良定义的；并且 $\mathsf{M}_{\mathrm{flat}}$ 是一个仿射对象 .

定义 4.9. $M \in \mathcal{C}$ at $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ （次数为 d）的截断仿射对象是一个对 $(\mathsf{M}\ z)$，由 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 M 及其自同态 z 组成，并满足
(a) z 是次数为 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$的齐次元素，(b) $z^m = 0$，(c) $\mathsf{M}/z\mathsf{M} \simeq M$，
(d) 若 $1 \leqslant k \leqslant m-1$，则 z: $z^{k-1}\mathsf{M}/z^k\mathsf{M} \longrightarrow z^k\mathsf{M}/z^{k+1}\mathsf{M}$ 是一个同构。

我们有时称 M 为一个 m-截断仿射对象。

注意， m-截断仿射对象无非是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z]/\mathbf{k}[z]z^m, \mathcal{C})$ 中的一个 $(\mathbf{k}[z]/\mathbf{k}[z]z^m)$-平坦对象，由引理 3.13 得出。
I如果 f $(\mathsf{M}\ z)$ 是一个仿射对象，那么 $\mathsf{M}/z^m\mathsf{M}$ 是一个 m-截断仿射对象。

引理 4.10。设 M 是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$ 中的一个对象，满足 $M := \mathsf{M}/z\mathsf{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个单对象。那么 $(\mathsf{M}\ z)$ 要么是一个仿射对象，要么是一个截断仿射对象。
证明。考虑满态射

$$f_k \colon \mathsf{M}/z\mathsf{M} \twoheadrightarrow z^k\mathsf{M}/z^{k+1}\mathsf{M}$$

由 z^k 给出。如果对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$， f_k 都是一个同构，那么 $(\mathsf{M}\ z)$ 是一个仿射对象。否则，存在 k 使得 f_k 不是一个同构。取这些 k 中最小的 k。于是 $f_k = 0$，从而 $\mathsf{M} = z^{k+1}\mathsf{M}$，这意味着 $z^k\mathsf{M} = 0$。此外，对于 $j < k$，$\mathsf{M}/z\mathsf{M} \to z^j\mathsf{M}/z^{j+1}\mathsf{M}$ 的 f_j: 态射是一个同构，因为它非零。因此 $(\mathsf{M}\ z)$ 是一个 k-截断仿射对象。□

引理 4.11. 如果 $(\mathsf{M}\ z)$ 是 $\mathscr{C}$ 的单对象的仿射对象，那么我们有

$$\mathrm{End}_{\mathbf{k}[z]}(\mathsf{M}) \simeq \mathbf{k}[z].$$

证明。 这直接由命题 3.8得出。 □

定义4.12. 我们将 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 记为这样一个范畴：其对象集为 $\mathrm{Ob}\big(\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})\big)$，态射定义如下。对于 $M, N \in \mathrm{Ob}\big(\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})\big)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})}(M,N) &= \varinjlim_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})}\big((z^k\mathbf{k}[z])\otimes_{\mathbf{k}[z]} M, N\big)\\ &\simeq \varinjlim_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})}(M, \mathbf{k}[z]z^{-k}\otimes_{\mathbf{k}[z]} N).\end{aligned}$$

注意到

$\mathrm{HOM}_{\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})}(M,N) \simeq \mathbf{k}[z,z^{-1}]\otimes_{\mathbf{k}[z]}\mathrm{HOM}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})}(M,N)$，其中 $M, N \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})$。因此，$\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 的任意对象都是一个 $\mathbf{k}[z,z^{-1}]$-模，即对于任意 $M \in \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$，$z \in \mathrm{End}(M)$ 都是可逆的。

引理 4.13. 对于任意 $N \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})$，$N \to N_{\mathrm{flat}}$ 是 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的一个同构。

证明。由于 $z^m N_{\mathrm{tor}} \simeq 0$ 对某个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立，典范态射

$$\varinjlim_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})}(M, \mathbf{k}[z]z^{-k}\otimes_{\mathbf{k}[z]} N) \to \varinjlim_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})}(M, \mathbf{k}[z]z^{-k}\otimes_{\mathbf{k}[z]} N_{\mathrm{flat}})$$

对于任意 $M \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})$，它都是一个同构。 □

因此，典范函子

$$\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C}) \to \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$$

是忠实的且本质满的（即，$\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的任意对象都同构于 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 中某个对象的像）。

我们将 $K(\mathcal{C})$ 记作 $\mathcal{C}$ 的格罗滕迪克群。它是一个 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-模，其中q通过 $[M] \mapsto [qM]$ 作用于 $K(\mathcal{C})$。我们将 $K(\mathcal{C})|_{q=1}$ 记作 $K(\mathcal{C})/(q-1)K(\mathcal{C})$。

由于下述引理在其他背景下属于经典结果，我们省略其证明（参见 [2, Section2.3] ）。

引理 4.14. 设 $M \in \mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$.

(i) 则， $[\mathrm{M}/z\mathrm{M}] \in K(\mathcal{C})|_{q=1}$ 仅取决于 M 在 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的同构类。(ii) 设 M′、M、M″ $\in \mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$。若在 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z], \mathcal{C})$ 中存在正合列 $0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$，则有

$$[\mathrm{M}/z\mathrm{M}] = [\mathrm{M}'/z\mathrm{M}'] + [\mathrm{M}''/z\mathrm{M}'']\quad in\ K(\mathcal{C})|_{q=1}.$$

引理 4.15. 范畴 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 满足以下性质。

(i) $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 是阿贝尔的；(ii) $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的每个对象都有有限长度。

证明. 由于 (i) 是显然的，我们省略其证明。

我们来证明 (ii)。由于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z], \mathcal{C})$ 的每个对象都是诺特的，$\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 的每个对象 M 也都是诺特的。我们来证明，M 的任意递减子对象序列 $\{\mathrm{N}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 都是稳定的。它由 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 中 M 的一个递减子对象序列 $\{\mathrm{N}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 表示。因此，递减序列 $\ell(\mathrm{N}_j/z\mathrm{N}_j)$ 是稳定的。于是，我们的断言由此得出

(4.1) 设 L′、L $\in \mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 满足 L′ $\subset$ L 在 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z], \mathcal{C})$ 中，且 $\ell(\mathrm{L}'/z\mathrm{L}') = \ell(\mathrm{L}/z\mathrm{L})$，则 L′ $\to$ L 是 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的一个同构，

这是引理 4.14 的一个推论。 □

定义 4.16。设 M 是一个仿射对象。

(i) 若 M/L 是一个仿射对象，则称 L $\subset$ M 是一个仿射对象的严格仿射子对象。换言之，$\mathrm{L} \cap z\mathrm{M} = z\mathrm{L}$。(ii) 若 M 作为 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 的一个对象是简单的，则称 M 是一个有理单仿射对象。(iii) 设 L 是一个仿射对象，并设 M $\to$ L 是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z], \mathcal{C})$ 中的一个满态射。若 L 是 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中 M 的一个头，则称 L 是 M 的一个有理头。

引理 4.17. 设 (M z) 是一个仿射对象。若 $\mathrm{M}/z\mathrm{M}$ 是一个单对象，则 M 是一个有理单仿射对象。

证明。设 N 是一个非零仿射对象，且 M $\twoheadrightarrow$ N 是 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中的满态射。我们可以假设它是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z], \mathcal{C})$ 中的满态射，因为其中任何满态射

$\mathsf{Raff}_z(\mathcal{C})$ 都可由 $\mathsf{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],\mathcal{C})$ 中的一个满态射表示。于是 $\mathsf{M}/z\mathsf{M} \twoheadrightarrow \mathsf{N}/z\mathsf{N}$是一个满态射，并且 $\mathsf{N}/z\mathsf{N}$ 由命题 3.3(iiic) 可知非零，因此它是一个同构。因此，由引理 $\mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 可知其为同构。3.5。 □

Remark 4.18. 引理 4.17 的逆命题并不成立（参见命题 6.29）.

5. Coherent objects in Monoidal categories

5.1. 分次幺半范畴。在下文中，设 $\mathcal{C}$ 为一个阿贝尔 $\mathbf{k}$-线性分次幺半范畴，它满足

$$\text{(5.1)}\quad \begin{cases} \text{(a) } \mathcal{C} \text{ 满足（3.1），(b) } \otimes \text{ 是 } \mathbf{k}\text{-双线性且双正合，(c) 单位对象 } \mathbf{1} \text{ 是简单的；} \\ \text{特别地，} \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq \mathbf{k}, \text{ (d) } \otimes \text{ 与分次移位函子可交换 } q, \text{ 即 } q(X\otimes Y) \simeq (qX) \otimes Y \simeq X \otimes (qY), \end{cases}$$

关于幺半范畴的一般知识，请参阅 [14, 第 4], [3]章。

通过将 q 与可逆中心对象 $q\mathbf{1} \in \mathcal{C}$等同，我们得到 $qX \simeq q \otimes X$。

范畴 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 也具有幺半范畴结构，其中张量积 $\otimes$是双正合的。

设 A 是一个满足条件 (k-代数3.2) 的交换分次$\mathbf{k}$-模范畴 $\ni V \mapsto V \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{1} \in \mathcal{C}$上的函子可扩张为一个全忠实幺半函子 Pro(k-模范畴) $\to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$。下文中，我们将 Pro(k-模范畴) 以及 k- 模范畴都视为 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 的全子范畴。例如， A 将与 “ $\varprojlim$”$(A/A_{\geqslant m}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{1} \in \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 等同（参见。
引理 3.10)。

对于 $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$，通过以下泛性质定义 $\mathsf{M} \otimes_A \mathsf{N} \in \mathsf{Modg}(A, \mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathrm{Modg}(A,\mathrm{Pro}(\mathcal{C}))}(\mathsf{M}\otimes_A\mathsf{N},\mathsf{L}) \\ &\simeq \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(\mathsf{M}\otimes\mathsf{N},\mathsf{L}) \mid \\ &\qquad (a\,\mathrm{id}_{\mathsf{L}})\circ f = f\circ(a\,\mathrm{id}_{\mathsf{M}}\otimes\mathrm{id}_{\mathsf{N}}) = f\circ(\mathrm{id}_{\mathsf{M}}\otimes a\,\mathrm{id}_{\mathsf{N}}) \quad \text{for any } a\in A\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

由于 A 是有限生成的 k-代数，因此该定义良好。注意，Modg(A, Pro($\mathcal{C}$)) 是一个幺半范畴，其张量积为 $\otimes_A$，单位对象为 $A \in$Modg(A, Pro($\mathcal{C}$))。还要注意，在 Pro($\mathcal{C}$) 中存在一个满态射 M $\otimes$N $\twoheadrightarrow$M $\otimes_A$N。

引理 5.1. 范畴 Pro$_{\mathrm{coh}}$(A, $\mathcal{C}$) 由 $\otimes_A$ 具有幺半范畴结构。单位对象是 $A =$“ lim←”($A/A_{\geqslant m}$) $\otimes_{\mathbf{k}}$1 $\in$Pro$_{\mathrm{coh}}$(A, $\mathcal{C}$)。m

证明。设 M, N $\in$Pro$_{\mathrm{coh}}$(A, $\mathcal{C}$)。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们有

$$\frac{\mathsf{M}\otimes_A \mathsf{N}}{A_{\geqslant m}(\mathsf{M}\otimes_A \mathsf{N})} \simeq \frac{\mathsf{M}}{A_{\geqslant m}\mathsf{M}} \otimes_A \frac{\mathsf{N}}{A_{\geqslant m}\mathsf{N}} \in \mathrm{Modg}(A, \mathcal{C}).$$

特别地，(M $\otimes_A$N)/$A_{>0}$(M $\otimes_A$N) $\in \mathcal{C}$。

由于“ lim←” 是正合的，我们有

$$\text{“}\varprojlim_m\text{”}\left(\frac{\mathsf{M}\otimes_A \mathsf{N}}{A_{\geqslant m}(\mathsf{M}\otimes_A \mathsf{N})}\right) \simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\left(\frac{\mathsf{M}}{A_{\geqslant m}\mathsf{M}} \otimes_A \frac{\mathsf{N}}{A_{\geqslant m}\mathsf{N}}\right) \simeq \mathsf{M}\otimes_A \mathsf{N}.$$

因此，M $\otimes_A$N 属于 Pro$_{\mathrm{coh}}$(A, $\mathcal{C}$)。现在显然，(Pro$_{\mathrm{coh}}$(A, $\mathcal{C}$)$\otimes_A$) 是一个幺半范畴。□

注意，$\otimes_A$是一个右正合双函子。

引理 5.2。设 dim$_{\mathbf{k}}$ $A < \infty$。令 ε 表示投影 $A \twoheadrightarrow A/A_{\geqslant 0} \simeq \mathbf{k}$。

(i)

$$A \otimes A \otimes A_{>0} \xrightarrow{g_1} A \otimes A_{>0} \xrightarrow{g_0} A \tag{5.3}$$

是 Modg(A) 中的一个正合列。这里

$$g_1(a\otimes b\otimes c) = ab\otimes c - a\otimes bc \ \ and \ g_0(a\otimes b) = ab.$$

(ii) 对于 $M, N \in$ Modg(A, $\mathcal{C}$)，该序列

$$A \otimes A_{>0} \otimes M \otimes N \xrightarrow{f_1(M,N)} A_{>0} \otimes M \otimes N \xrightarrow{f_0(M,N)} M \otimes N \tag{5.4}$$

i是一个复形，即复合为零。这里 $f_1(M,N)$ 定义为

$$A\otimes A_{>0}\ni a\otimes b\mapsto b\otimes a\,\mathsf{id}_M\otimes\mathsf{id}_N+(a-\varepsilon(a))\otimes\mathsf{id}_M\otimes b\,\mathsf{id}_N-ab\otimes\mathsf{id}_M\otimes\mathsf{id}_N\\ \in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N,A\otimes M\otimes N),$$

且 $f_0(M,N)$ 由下式给出

$$A\ni a\mapsto a\,\mathsf{id}_M\otimes\mathsf{id}_N-\mathsf{id}_M\otimes a\,\mathsf{id}_N\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N,M\otimes N).$$

(iii) 若 M 是 A-平坦的，则

$$A\otimes A_{>0}\otimes M\xrightarrow{h_1(M)}A_{>0}\otimes M\xrightarrow{h_0(M)}M \tag{5.5}$$

是正合的。这里 $h_1(M)$ 由 $A\otimes A_0\ni a\otimes b\mapsto b\otimes a\mathsf{id}_M-ab\otimes\mathsf{id}_M\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,A_{>0}\otimes M)$ 给出，而 $h_0(M)$ 是乘法。

(iv) $A_{>0}\otimes M\otimes N\xrightarrow{f_0(M,N)}M\otimes N\longrightarrow M\otimes_A N\longrightarrow 0$ 是正合的。(v) 若 M 是 A-平坦的，则(5.4) 是正合的。(vi) 若 M 是 A-平坦的，则 $M\otimes_A\bullet$: 模范畴g$(A,\mathcal{C})\to$ 模范畴g$(A,\mathcal{C})$ 是正合的。

证明。(i) 由 $a\otimes b=g_1(1\otimes a\otimes b)+1\otimes g_0(a\otimes b)$ 得出。

(ii) 显然。

(iii) 由 (i) 和 $(5.5)\simeq(5.3)\otimes_A M$.

(iv) 由 $a\mathsf{id}_M\otimes\mathsf{id}_N-\mathsf{id}_M\otimes a\mathsf{id}_N=0$ if $a\in A_0$ 这一事实可得。

(v) 对于 $M,N\in$Modg$(A,\mathcal{C})$，令 $S_2(M,N)=A\otimes A_{>0}\otimes M\otimes N$，且 $S_1(M,N)=A_{>0}\otimes M\otimes N$。

假设 M 是 A-平坦的。对于任意 $N\in$Modg$(A,\mathcal{C})$，存在 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得$A_{\geqslant m}N=0$。我们将对 m 使用归纳法证明 (5.4) 是正合的。假设 $m=1$。则有 $f_k(M,N)=h_k(M)\otimes\mathsf{id}_N$($k=0,1$)。因此，(5.4)$\simeq$(5.5)$\otimes N$ 是正合的。

现在假设 $m>1$。

对于 Modg($A, \mathcal{C}$) 中的正合列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$，我们有如下交换图，其中各行正合：

(5.6)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_2(M,N') & \longrightarrow & S_2(M,N) & \longrightarrow & S_2(M,N'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1(M,N')} & & \downarrow{\scriptstyle f_1(M,N)} & & \downarrow{\scriptstyle f_1(M,N'')} & & \\
0 & \longrightarrow & S_1(M,N') & \longrightarrow & S_1(M,N) & \longrightarrow & S_1(M,N'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_0(M,N')} & & \downarrow{\scriptstyle f_0(M,N)} & & \downarrow{\scriptstyle f_0(M,N'')} & & \\
0 & \longrightarrow & M\otimes N' & \longrightarrow & M\otimes N & \longrightarrow & M\otimes N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M\otimes_A N' & \longrightarrow & M\otimes_A N & \longrightarrow & M\otimes_A N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

设 $N' = A_{>0}N$和 $N'' = N/N'$。由归纳假设，左列和右列正合，因此中间的箭头正合。于是归纳得以继续。

(vi) 假设 M是 A-平坦的。只需证明，对于任意正合列 $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$，$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$中的态射都是单态射，其中 $A, \mathcal{C}$属于 Modg(5.6) 所示交换图的行和列均正合，这便可推出结论。

□

命题 5.3. 假设 $\mathsf{M} \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 是 A-平坦的。那么函子 $\mathsf{M} \otimes_A \bullet : \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C}) \to \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 是正合的。

证明。我们来证明

(5.7)
$$0 \to \mathsf{M} \otimes_A \mathsf{N}' \to \mathsf{M} \otimes_A \mathsf{N} \to \mathsf{M} \otimes_A \mathsf{N}'' \to 0$$

当 $0 \to \mathsf{N}' \to \mathsf{N} \to \mathsf{N}'' \to 0$ 在 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A, \mathcal{C})$ 中构成正合列时，$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是正合的。对于 A，令 $m(= A/A_{\geqslant m}$，$M_m = \mathsf{M}/A_{\geqslant m}\mathsf{M}$，$N_m = \mathsf{N}/A_{\geqslant m}\mathsf{N}$，$N''_m = \mathsf{N}''/A_{\geqslant m}\mathsf{N}''$ 和 $N'_m =$

$\mathsf{N}'/(\mathsf{N}'\cap A_{\geqslant m}\mathsf{N})$。那么 $\dim A(m)<\infty$，且 $\mathsf{Modg}(A(m)\ \mathcal{C})$ 是 $A(m)$-平坦的。由于 $0\to N'_m\to N_m\to N''_m\to 0$ 是 $\mathsf{Modg}(A(m)\ \mathcal{C})$ 中的正合列，该序列

$$0\to M_m\otimes_{A(m)}N'_m\to M_m\otimes_{A(m)}N_m\to M_m\otimes_{A(m)}N''_m\to 0$$

由引理 5.2可知是正合的。然后取“$\varprojlim_m$”，我们得出（5.7）是正合的。 □

引理 5.4。 对于 M、$\mathsf{N}\in\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$（见定义 4.6），我们有 $\mathsf{M}\otimes_A\mathsf{N}\in\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$。也就是说 $\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$ 是一个幺半范畴。

证明。 设 $X'\to X\to X''$ 是模范畴 $\mathsf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)$ 中的一个正合列。那么 $X'\otimes_A\mathsf{M}\to X\otimes_A\mathsf{M}\to X''\otimes_A\mathsf{M}$ 是正合的，因为 M 是 A-平坦的。现在，命题 5.3 推出$X'\otimes_A\mathsf{M}\otimes_A\mathsf{N}\to X\otimes_A\mathsf{M}\otimes_A\mathsf{N}\to X''\otimes_A\mathsf{M}\otimes_A\mathsf{N}$是正合的，因为 N是 A-平坦的。□

命题 5.5。 设 A' 是另一个满足条件 (3.2) 的交换分次环，并设$\mathsf{M}\in\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$，$\mathsf{M}'\in\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A',\mathcal{C})$。

(i) $A\otimes_{\mathbf{k}}A'$ 满足条件 (3.2)。(ii) $\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}'\in\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A\otimes_{\mathbf{k}}A',\mathcal{C})$。

(iii) 对于 $X\in$ 模范畴$_{\mathrm{coh}}(A)$，$X'\in$模范畴$_{\mathrm{coh}}(A')$ 以及 $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，有

$$\mathrm{Tor}_m^{A\otimes_{\mathbf{k}}A'}(X\otimes_{\mathbf{k}}X',\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}')\simeq\bigoplus_{a,b\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ a+b=m}\mathrm{Tor}_a^A(X,\mathsf{M})\otimes\mathrm{Tor}_b^{A'}(X',\mathsf{M}').$$

(iv) 如果 M 是 A-平坦的，且 M' 是 A'-平坦的，那么 $\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}'$ 是 $(A\otimes_{\mathbf{k}}A')$-平坦的。

证明。 (i)、(ii) 和 (iii) 是显然的。(iv) 由命题 3.14以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^{A\otimes_{\mathbf{k}}A'}&\big((A\otimes_{\mathbf{k}}A')/(A\otimes_{\mathbf{k}}A')_{>0},\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}'\big)\\&\simeq\mathrm{Tor}_1^A(A/A_{>0},\mathsf{M})\otimes\big((A'/A'_{>0})\otimes_A\mathsf{M}'\big)\\&\qquad\oplus\big((A/A_{>0})\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\mathrm{Tor}_1^{A'}(A'/A'_{>0},\mathsf{M}').\end{aligned}$$

□

5.2. 刚性情形。 在本小节中，我们假设 $\mathcal{C}$ 满足 (5.1)，并且 $\mathcal{C}$是一个刚性幺半范畴，即 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都有右对偶和左对偶。

我们用 $\mathscr{D}$ 表示右对偶函子。因此，它的拟逆 $\mathscr{D}^{-1}$ 是左对偶函子。令

$$\mathrm{ev}_M\colon M\otimes \mathscr{D}M\to \mathbf{1}\quad\text{and}\quad \mathrm{coev}_M\colon \mathbf{1}\to \mathscr{D}M\otimes M$$

分别为求值态射和余求值态射。回顾一下，对于 $\mathsf{M}\in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(A,\mathcal{C})$，我们在定义 4.4

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_A(\mathsf{M}) &:= \text{“}\varprojlim_m\text{”}\ \mathscr{D}\big((A/A_{\geqslant m})^*\otimes_A \mathsf{M}\big),\\ \mathscr{D}_A^{-1}(\mathsf{M}) &:= \text{“}\varprojlim_m\text{”}\ \mathscr{D}^{-1}\big((A/A_{\geqslant m})^*\otimes_A \mathsf{M}\big).\end{aligned}\tag{5.8}$$

如果 $\mathsf{M}\in \mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$，那么 $\mathscr{D}_A(\mathsf{M})$ 和 $\mathscr{D}_A^{-1}(\mathsf{M})$ 也属于 $\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$。

它们互为拟逆。

命题 5.6. 如果 $\mathcal{C}$ 是刚性的，那么幺半范畴 $\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$ 也是刚性的，并且 $\mathscr{D}_A$ 和 $\mathscr{D}_A^{-1}$ 分别是右对偶和左对偶。

证明。我们将证明，$\mathscr{D}_A(\mathsf{M})$ 是 $\mathsf{M}\in\mathsf{Aff}_A(\mathcal{C})$ 的右对偶。

我们先构造 $\mathsf{ev}:\mathsf{M}\otimes_A\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\to A\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{1}$。对于 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$，有

$$\big((A/A_{\geqslant m})^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\mathscr{D}\big((A/A_{\geqslant m})^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\to\mathbf{1}.$$

令 $L_m=A/A_{\geqslant m}$。那么 $\{L_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ 是一个射影系统。利用 $\mathbf{k}\to L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\otimes\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)&\to(L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*)\otimes_{\mathbf{k}}\mathsf{M}\otimes\mathscr{D}(L_m^*\otimes_A\mathsf{M})\\ &\to L_m\otimes_{\mathbf{k}}\big((L_m^*\otimes_A\mathsf{M})\otimes\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\\ &\to L_m\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{1}.\end{aligned}$$

由于它是 A-双线性的，我们得到

$$\mathsf{M}\otimes_A\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\longrightarrow\mathsf{M}\otimes_A\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\to L_m\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{1}.$$

取“$\varinjlim_m$”，我们得到

$$\mathrm{ev}\colon \mathsf{M}\otimes_A \mathscr{D}_A(\mathsf{M})\to A\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{1}.$$

现在来构造余求值态射

$$\mathrm{coev}\colon A\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{1}\to \mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes_A \mathsf{M}.$$

对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们有

$$f_m\colon \mathbf{1}\to \mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big).$$

它满足关系：$(a\otimes 1)\cdot f_m=(1\otimes a)\cdot f_m$ 对任意 $a\in A$ 均成立。因此 f_m 给出

$$\mathbf{1}\to \mathcal{H}om_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\Big(A,\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\Big).$$

这里，我们将 A 视为 $A\otimes_{\mathbf{k}}A$-模 $(A\otimes_{\mathbf{k}}A)/\sum_{a\in A}(A\otimes_{\mathbf{k}}A)(a\otimes_{\mathbf{k}}1-1\otimes_{\mathbf{k}}a)$，且 $\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\in\mathsf{Modg}(A\otimes_{\mathbf{k}}A,\mathcal{C})$。

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)&\simeq\big(L_m\otimes_A\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\big)\otimes(L_m^*\otimes_A\mathsf{M})\\&\simeq(L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*)\otimes_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\big(\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes\mathsf{M}\big).\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes\mathsf{M}$ 是 $(A\otimes_{\mathbf{k}}A)$-平坦的，由命题 5.5、引理 4.1 可知

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}om_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\Big(A,\mathscr{D}\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\otimes\big(L_m^*\otimes_A\mathsf{M}\big)\Big)\\&\quad\simeq\mathrm{Hom}_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}(A,L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*)\otimes_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\big(\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes\mathsf{M}\big).\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{Hom}^{A\otimes_{\mathbf{k}}A}(A,L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*)\simeq\mathsf{Hom}_A(L_m,L_m)\simeq L_m$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}(A,L_m\otimes_{\mathbf{k}}L_m^*)\otimes_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\big(\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes\mathsf{M}\big)\\&\quad\simeq L_m\otimes_{A\otimes_{\mathbf{k}}A}\big(\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes\mathsf{M}\big)\simeq L_m\otimes_A(\mathscr{D}_A(\mathsf{M})\otimes_A\mathsf{M}).\end{aligned}$$

因此我们得到 $\mathbf{1} \to L_m \otimes_A (\mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \otimes_A \mathsf{M})$。取射影极限“$\varprojlim$”，我们$_m$得到 $\mathbf{1} \to \mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \otimes_A \mathsf{M}$ in Pro($\mathcal{C}$)，由此导出一个态射

$$\mathrm{coev}\colon A \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{1} \to \mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \otimes_A \mathsf{M}$$

属于 Modg(A, Pro($\mathcal{C}$))。

根据引理 3.5，$\mathsf{M} \xrightarrow{\text{coev}} \mathsf{M} \otimes_A \mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \otimes_A \mathsf{M} \xrightarrow{\text{ev}} \mathsf{M}$ 和 $\mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \xrightarrow{\text{coev}} \mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \otimes_A \mathsf{M} \otimes_A \mathscr{D}_A(\mathsf{M}) \xrightarrow{\text{ev}} \mathscr{D}_A(\mathsf{M})$ 是同构，因为它们在进行 $(A/A_{>0}) \otimes_A \bullet$ 运算后仍是同构。因此，$\mathscr{D}_A(\mathsf{M})$ 是 M 的一个右对偶（见 [7, 引理 A.2]）。□

引理 5.7. 对于 $X \in \mathcal{C}$ and $\mathsf{M} \in \mathrm{Aff}_A(\mathcal{C})$，有

$$\mathscr{D}_A^{\pm 1}(\mathsf{M} \otimes X) \simeq \big(\mathscr{D}^{\pm 1}(X)\big) \otimes \big(\mathscr{D}_A^{\pm 1}(\mathsf{M})\big) \quad and \quad \mathscr{D}_A^{\pm 1}(X \otimes \mathsf{M}) \simeq \big(\mathscr{D}_A^{\pm 1}(\mathsf{M})\big) \otimes \big(\mathscr{D}^{\pm 1}(X)\big).$$

证明。我们只证明第一个同构，因为另一个同构的证明类似。我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_A^{\pm}(\mathsf{M} \otimes X) &\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathscr{D}^{\pm}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A (\mathsf{M} \otimes X)\big) \\
&\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, \mathscr{D}^{\pm}\Big(\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathsf{M}\big) \otimes X\Big) \\
&\simeq \text{“}\varprojlim_m\text{”}\, (\mathscr{D}^{\pm} X) \otimes \mathscr{D}^{\pm}\big((A/A_{\geqslant m})^* \otimes_A \mathsf{M}\big) \\
&\simeq (\mathscr{D}^{\pm} X) \otimes (\mathscr{D}_A^{\pm} \mathsf{M}).
\end{aligned}$$

□

6. R 矩阵

6.1. 仿射对象。 设 $\mathcal{C}$ 是一个满足（5.1）的阿贝尔分次$\mathbf{k}$-线性幺半范畴。

回忆一下，$\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 是一个幺半范畴，其张量积为 $\otimes_z$，其中我们用 $\otimes_z$ 表示 $\otimes_{\mathbf{k}[z]}$。

引理 6.1. 设 $(M\ z_M)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个仿射对象，且 $(N\ z_N) \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z_N], \mathcal{C})$。那么，对于任意关于 z_M 首一的齐次多项式 $f(z_M, z_N) \in \mathbf{k}[z_M, z_N]$，态射 $f(z_M, z_N)|_{M\otimes N}$ 是一个单态射。

证明。只需证明，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，$f(z_M, z_N)|_{M\otimes(N/z_N{}^m N)}$ 是单态射。我们对 m 使用归纳法。若 $m = 0$，则显然成立。假设 $m > 0$。那么，在具有正合行的交换图中

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes (z_N{}^{m-1}N/z_N{}^m N) & \longrightarrow & M \otimes (N/z_N{}^m N) & \longrightarrow & M \otimes (N/z_N{}^{m-1}N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f(z_M,0)} & & \downarrow{\scriptstyle f(z_M,z_N)} & & \downarrow{\scriptstyle f(z_M,z_N)} & & \\ 0 & \longrightarrow & M \otimes (z_N{}^{m-1}N/z_N{}^m N) & \longrightarrow & M \otimes (N/z_N{}^m N) & \longrightarrow & M \otimes (N/z_N{}^{m-1}N) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

左侧和右侧的箭头都是单态射，因此中间的箭头也是单态射。 □

命题 6.2。设 $(M\ z_M)$ 和 $(N\ z_N)$ 为仿射对象。令 $M = M/z_M M$ 和 $N = N/z_N N$。

(i) 假设 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes N, M \otimes N) = \mathbf{k}\,\mathrm{id}_{M\otimes N}$。则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M,z_N]}(M \otimes N, M \otimes N) = \mathbf{k}[z_M, z_N]\,\mathrm{id}_{M\otimes N}.$$

(ii) 假设 $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes N, N \otimes M) = 1$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M,z_N]}(M \otimes N, N \otimes M) \neq 0$。则存在 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M,z_N]}(M \otimes N, N \otimes M)$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[z_M,z_N]}(M \otimes N, N \otimes M) = \mathbf{k}[z_M, z_N]R^{\mathrm{ren}}_{M,N} \tag{6.1}$$

且 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}|_{z_M=z_N=0} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes N, N \otimes M)$ 不为零。我们称 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 为重整化 R 矩阵。

证明。 注意，$M \otimes N \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z_M, z_N], \mathcal{C})$. 因此，结论立即由命题3.8.
□

定义 6.3. 如果 M、$N \in \mathcal{C}$ 满足 $\dim \mathrm{Hom}(M \otimes N, N \otimes M) = 1$，那么非零态射 $r \in \mathrm{Hom}(M \otimes N, N \otimes M)$ 被称为 M 与 N 之间的 R矩阵，记作 $r_{M,N}$。它在相差一个常数倍的意义下是良定义的。

如果 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴，我们将 $\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}$ 记作 $\mathscr{D}^{\pm 1}{}_{\mathbf{k}[z]}$，其中 $\mathscr{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的右对偶函子（见定义 4.4）。因此，命题 5.6推出以下命题。

命题 6.4. 假设 $\mathcal{C}$是刚性的。那么 $\mathbf{Aff}_z(\mathcal{C})$ 是一个刚性幺半范畴，其右对偶函子和左对偶函子分别为 $\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}$ 。

6.2. 有理中心与仿射化。设 $\mathcal{C}$ 是一个满足以下条件的 k-线性分次幺半范畴：

$$(6.2)\quad \begin{cases} \mathcal{C}\text{满足 (5.1)，并满足以下附加条件：(e) } \mathcal{C}\text{具有分解 } \mathcal{C}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{C}_\lambda\text{，该分解与幺半} \\ \text{结构相容，其中 } \Lambda\text{是一个阿贝尔幺半群，并且 } \mathbf{1}\in\mathcal{C}_\lambda\text{ 满足 } \lambda=0\text{。} \end{cases}$$

设 z 是一个次数为 $d\in\mathbb{Z}_{>0}$的齐次不定元。

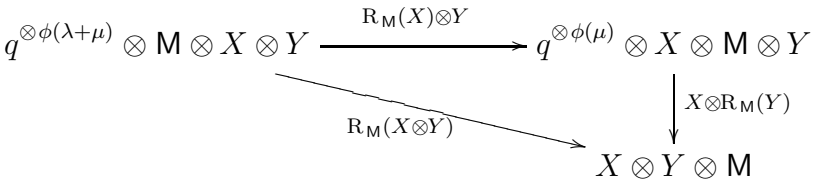
我们还有双正合双函子：

$$\otimes:\mathcal{C}\times \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})\to \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C}) \quad \text{and} \quad \otimes:\ \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})\times\mathcal{C}\to \mathrm{Raff}_z(\mathcal{C}).$$

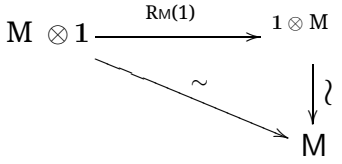
定义 6.5. $\mathcal{C}$中的有理中心是一个三元组 $(\mathsf{M},\ \phi, \mathrm{R}_{\mathsf{M}})$，其中 $\mathsf{M}\ \in\mathbf{Aff}_z(\mathcal{C})$，有一个加性映射 ϕ: $\Lambda\to\mathbb{Z}$ 和一个同构

$$\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(X):\ q^{\otimes\phi(\lambda)}\otimes\mathsf{M}\otimes X\xrightarrow{\sim} X\otimes\mathsf{M}$$

在 $\mathbf{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中关于 $X\in\mathcal{C}_\lambda$ 的函子性，使得



and



对于任意 $X \in \mathcal{C}_\lambda$ 和 $Y \in \mathcal{C}_\mu (\lambda, \mu \in \Lambda)$，在 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$ 中可交换。

注意，底部图表的交换性是顶部图表交换性的推论。下文中，我们忽略分次平移。

引理 6.6. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴。设 $(\mathsf{M}, \mathrm{R}_{\mathsf{M}})$ 是一个有理中心。那么，$(\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}(\mathsf{M}), \mathrm{R}_{\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}(\mathsf{M})})$ 是一个有理中心。这里，$\mathrm{R}_{\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}(\mathsf{M})}(X) := \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}\big(\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(\mathscr{D}^{\mp 1}(X))\big)$。

注意

$$\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(\mathscr{D}^{\mp 1}(X)) \colon \mathsf{M} \otimes \mathscr{D}^{\mp 1}(X) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{\mp 1}(X) \otimes \mathsf{M}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}\big(\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(\mathscr{D}^{\mp 1}(X))\big) \colon & \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}\big(\mathscr{D}^{\mp 1}(X) \otimes \mathsf{M}\big) & \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}\big(\mathsf{M} \otimes \mathscr{D}^{\mp 1}(X)\big) \\ & \downarrow \sim & \downarrow \sim \\ & \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}(\mathsf{M}) \otimes X & \xrightarrow{\sim} X \otimes \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{\pm 1}(\mathsf{M}), \end{array}$$

其中，竖直箭头由引理 5.7给出。

定义6.7. $M \in \mathcal{C}$ 的一个仿射化 M 是一个仿射对象 $(\mathsf{M}\ z_{\mathsf{M}})$，它带有一个有理中心 $(\mathsf{M}, \mathrm{R}_{\mathsf{M}})$ 和一个同构 $\mathsf{M}/z_{\mathsf{M}}\mathsf{M} \simeq M$。

如果不会引起混淆，我们有时简单地将 M 记作仿射化。下面的引理是引理 4.14 的直接推论。

引理 6.8. 设 M 和 N 是 $\mathcal{C}$的对象。假设 M 存在仿射化。那么我们有

$$[M] \cdot [N] \equiv [N] \cdot [M] \mod (q-1)K(\mathcal{C}).$$

命题 6.9. 设 $(\mathsf{M}, \mathrm{R}_{\mathsf{M}})$ 是 $\mathcal{C}$中的一个有理中心，并设 $L \in \mathcal{C}$。假设 M 和 L 均非零。那么存在 $m \in \mathbb{Z}$ 以及一个态射 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},L} \colon \mathsf{M} \otimes L \to L \otimes \mathsf{M}$，属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathsf{k}[z], \mathcal{C})$，使得

(a) $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},L}$等于 $z^m \mathrm{R}_{\mathsf{M}}(L) : \mathsf{M} \otimes L \to L \otimes \mathsf{M}$ 属于 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$,
(b) $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},L}|_{z=0} \colon (\mathsf{M}/z\mathsf{M}) \otimes L \to L \otimes (\mathsf{M}/z\mathsf{M})$ 不为零。

此外，这样的整数 m 和 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},L}$ 是唯一的。

类似地，存在 $m\in\mathbb{Z}$ 以及一个态射 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{L,\mathrm{M}}\colon L\otimes\mathrm{M}\to\mathrm{M}\otimes L$ in $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z],\mathcal{C})$，使得

(c) $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{L,\mathrm{M}}$给出 $z^m\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(L)^{-1}\colon L\otimes\mathrm{M}\to\mathrm{M}\otimes L$ in $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$,
(d) $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{L,\mathrm{M}}|_{z=0}\colon L\otimes(\mathrm{M}/z\mathrm{M})\to(\mathrm{M}/z\mathrm{M})\otimes L$ 不为零。

证明。断言 (a) 和 (b) 可通过取满足以下条件的最小整数 m 得出：$\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(L)$ 可由 $f\in\mathrm{HOM}_{\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})}\big(\mathrm{M}\otimes L,\mathrm{k}[z]z^{-m}\otimes_{\mathbf{k}[z]}(L\otimes\mathrm{M})\big)$ 表示。(c) 和 (d) 的证明类似。□

定理 6.10. 设 $(\mathrm{M},\mathrm{R}_{\mathrm{M}})$ 是 $M\in\mathcal{C}$ 的仿射化，且 $(\mathrm{N}\ z_{\mathrm{N}})$ 是 $N\in\mathcal{C}$ 的仿射对象。假设 $\dim\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M\otimes N,N\otimes M)=1$。则存在一个齐次的 $f(z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}})\in\big(\mathrm{k}[z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{M}}{}^{-1}]\big)[[z_{\mathrm{N}}]]$ 以及一个态射 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\colon\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\to\mathrm{N}\otimes\mathrm{M}$，属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{k}[z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}}],\mathcal{C})$，使得

(a) $\mathrm{H}^{\mathrm{OM}_{\mathbf{k}[z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}}]}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N},\mathrm{N}\otimes\mathrm{M})=\mathrm{k}[z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}}]\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$；(b) 作为 $\mathrm{HOM}_{\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})}\big(\mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}/z_{\mathrm{N}}{}^k\mathrm{N}),(\mathrm{N}/z_{\mathrm{N}}{}^k\mathrm{N})\otimes\mathrm{M}\big)$ 中的一个元素，对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，都有 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}|_{\mathrm{N}/z_{\mathrm{N}}{}^k\mathrm{N}}=f(z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}})\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}/z_{\mathrm{N}}{}^k\mathrm{N})$；(c) $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}\big|_{z_{\mathrm{M}}=z_{\mathrm{N}}=0}$ 不为零；(d) $f(z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}})|_{z_{\mathrm{N}}=0}$ 是 z_{M} 的一个单项式。

此外，这样的 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ 以及 $f(z_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{N}})$ 是唯一的。

证明。取 r 使得 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(M\otimes N,N\otimes M)=\mathrm{k}\,\mathrm{r}$。设 $\lambda=\deg(\mathrm{r})$。将 R_{M} 替换为 $cz_{\mathrm{M}}^m\mathrm{R}_{\mathrm{M}}$，其中 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $c\in\mathrm{k}^\times$，我们可以从一开始就假设 $\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(N)$ 属于 $\mathrm{H}^{\mathrm{OM}_{\mathbf{k}[z_{\mathrm{M}}]}}(\mathrm{M}\otimes N,N\otimes\mathrm{M})$，且 $\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(N)|_{z_{\mathrm{M}}=0}=\mathrm{r}$。特别地，$\mathrm{R}_{\mathrm{M}}(N)$ 的次数为 λ。

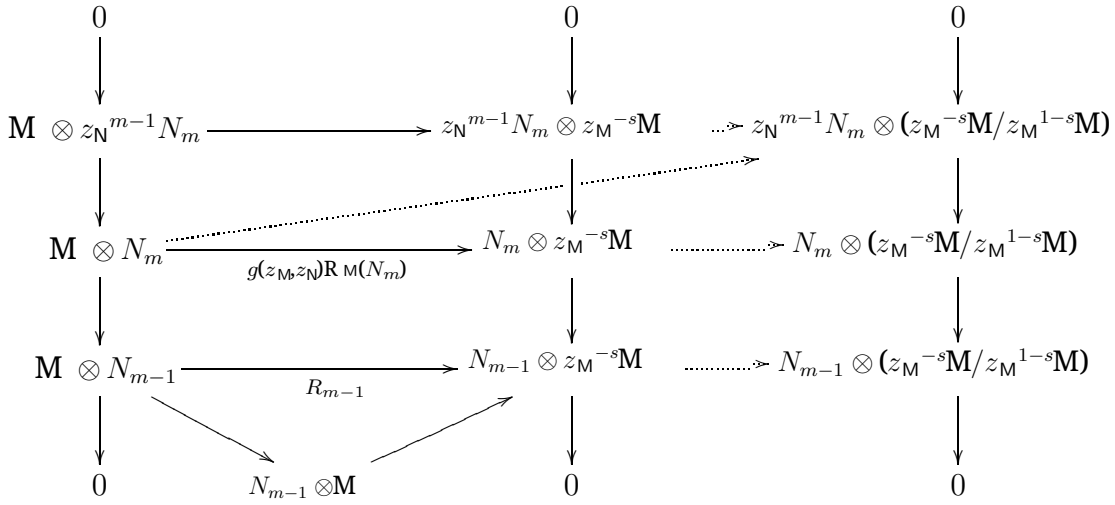
令 $d=\deg(z_{\mathrm{M}})$ 和 $d_{\mathrm{N}}=\deg(z_{\mathrm{N}})$。令 C 为 $\mathrm{k}[z_{\mathrm{M}}{}^{-1},z_{\mathrm{N}}]$ 中次数为 0 的齐次函数环。对于 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，令 $C(k)$ 为 $=\mathrm{k}\cdot(z_{\mathrm{N}}{}^k/z_{\mathrm{M}}{}^{kd_{\mathrm{N}}/d})$ 或 0，具体取决于kd_{N}/d 是否为整数。于是有 $C=\bigoplus_{k\geqslant 0}C(k)$。令 $C(\leqslant k)$ 为 $=\bigoplus_{0\leqslant j\leqslant k}C(j)$。

对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，令 $N_m = \mathsf{N}/z_{\mathsf{N}}{}^m\mathsf{N} \in \mathrm{Mod}(\mathsf{k}[z_{\mathsf{N}}], \mathcal{C})$。我们用对 m的归纳法证明以下命题。

(6.3) 对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，存在 $f_m(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}) \in C(\leqslant m-1)$，使得$f_m(z_{\mathsf{M}}, 0) = 1$且 $R_m := f_m(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}})\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(N_m)$ 是一个态射 $R_m : \mathsf{M} \otimes N_m \to N_m \otimes \mathsf{M}$，属于 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}], \mathcal{C})$。

由于对于 $m = 1$这是显然的，故假设 $m > 1$。根据归纳假设，我们有 $f_{m-1}(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}})$ 以及 R_{m-1}如 (6.3) 中所示。于是， $f_{m-1}(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}})\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(N_m)$ 是 $\mathrm{Raff}_{\mathsf{z}}(\mathcal{C})$ 中的一个态射。取满足以下条件的最小整数 $s \geqslant 0$：存在 $a \in C(m-1)$，使得 $g(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}})\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(N_m) : \mathsf{M} \otimes N_m \to N_m \otimes z_{\mathsf{M}}{}^{-s}\mathsf{M}$ 是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}], \mathcal{C})$ 中的一个态射，其中 $g(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}) = f_{m-1}(z_{\mathsf{M}}, z_{\mathsf{N}}) + a$。

于是我们在 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}], \mathcal{C})$ 中得到一个交换图



MH （图中省略了 cr）

假设 $s > 0$。那么复合

$$\mathsf{M} \otimes N_m \xrightarrow{g\,\mathrm{R}_{\mathsf{M}}(N_m)} N_m \otimes z_{\mathsf{M}}{}^{-s}\mathsf{M} \to N_m \otimes (z_{\mathsf{M}}{}^{-s}\mathsf{M}/z_{\mathsf{M}}{}^{1-s}\mathsf{M})$$

经由 $z_{\mathsf{N}}{}^{m-1}N_m \otimes (z_{\mathsf{M}}{}^{-s}\mathsf{M}/z_{\mathsf{M}}{}^{1-s}\mathsf{M})$ 分解。因此，所得态射 $\mathsf{M} \otimes N_m \to z_{\mathsf{N}}{}^{m-1}N_m \otimes (z_{\mathsf{M}}{}^{-s}\mathsf{M}/z_{\mathsf{M}}{}^{1-s}\mathsf{M})$ 诱导出一个非零态射 φ: $M \otimes N \to$

$q^{(m-1)d_N-ds}N\otimes M$次数为 λ。由于 $\mathrm{Hom}(M\otimes N,N\otimes M)$ 集中在次数λ，我们有 $s=(m-1)d_N/d$。取 $c\in\mathbf{k}$ 使得 $\varphi=c\mathrm{r}$，那么 $R_m:=(g-cz_N{}^{m-1}/z_M{}^s)\mathrm{R}_M(N_m)$ 将 $M\otimes N_m$ 映到 $N_m\otimes z_M{}^{1-s}M$。这与 s 的选择矛盾。

因此我们有 $s=0$，并且通过设定 6.3，条件（ $f_m=g$.

由于 f_m 在（6.3）中由命题 3.7唯一确定，因此我们有 $f_m\equiv f_{m-1}$ 模 $z_N{}^{m-1}$，从而得到所需结果。□

注 6.11。在定理 6.10中，$f(z_M,z_N)\in\big(\mathbf{k}[z_M,z_M{}^{-1}]\big)[[z_N]]$ 不能通过 $f(z_M,z_N)\in\big(\mathbf{k}[z_M,z_M{}^{-1}]\big)[z_N]$来弱化。我们将给出两个例子。

(i) 令 $\mathfrak{g}=\mathbf{k}t$ 为一维分次李代数，其中 $\deg(t)=1$。令 $\mathcal{C}$ 为有限维分次 $\mathfrak{g}$-模的幺半范畴。取带有 t平凡作用的 $M=\mathbf{k}[z]$，即 $t|_M=0$。对于 $X\in\mathcal{C}$，定义 $R_M(X):\mathbf{k}[z]\otimes X\to X\otimes\mathbf{k}[z]$ 为 $a\otimes b\mapsto e^{t/z}(b\otimes a)$。于是 (M,R_M) 是一个有理中心。令 $N=\mathbf{k}[t]$，其中 $z_N=t$。那么，$f(z_M,z_N)=e^{-t/z}$，且 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}(a\otimes b)=b\otimes a$。

(ii) 令 R 为一个箭图 Hecke 代数（定义和记号见 §7.1 ）。令$\mathcal{C}=R$-gmod、$i\in I$，以及次数为 (α_i,α_i) 的齐次不定元 z，并令 $\varphi(w)\in\mathbf{k}[[w]]$，其中 $\varphi(0)\in\mathbf{k}^\times$。令 $M=\mathbf{k}[z]\in\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$。对于满足$n=\mathrm{ht}(\beta)$ 的 Q_+以及 $X\in R(\beta)$-gmod，令 $R_M(X):M\otimes X\to X\otimes M$ 为态射 $M\otimes X\simeq\mathbf{k}[z]\otimes_{\mathbf{k}}X\longrightarrow X\otimes M\simeq\mathbf{k}[z]\otimes_{\mathbf{k}}X$，它属于 $\mathrm{Raff}_z(\mathcal{C})$，定义如下：

$$\sum_{\nu\in I^\beta}\ \prod_{1\leqslant k\leqslant n\,;\,\nu_k=i}\varphi\big(z^{-1}x_ke(\nu)\big)\,.$$

注意，$R_M(X)\in Z\big(R(\beta)\big)[[z^{-1}]]$。因此，$(M,R_M)$ 是一个有理中心，而 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}=\mathrm{id}_{\mathbf{k}[z]\otimes N}$。

当 $\deg(z_M)=\deg(z_N)$ 时，由于 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 与 z_M 和 z_N可交换，它在 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 中诱导出一个态射

$$M\otimes_z N\xrightarrow{\overline{R}^{\mathrm{ren}}_{M,N}}N\otimes_z M\,,\tag{6.4}$$

which 记作 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}$ 这里，z 分别通过 z_M 和 z_N作用于 M 和 N .

回顾一下，幺半群阿贝尔范畴中的单对象 M 称为实的，如果 $M\otimes M$是单的。

定义 6.12. 我们称单对象 $M \in \mathcal{C}$ 为仿实的，如果 M 是实的，并且存在 M的一个仿射化 (M z)。若 deg(z) $= d$，则称 M为次数为 d的仿实对象。

命题 6.13. 设 (M z) 是一个实单对象 $M \in \mathcal{C}$ 的仿射化。那么，存在 $c \in \mathbf{k}^\times$ 和 $T \in \mathrm{H}^{\mathrm{OM}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}}$(M $\otimes$ M, M $\otimes$ M)，使得

$$c\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{M}} - \mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}} = (z \otimes \mathsf{id}_{\mathsf{M}} - \mathsf{id}_{\mathsf{M}} \otimes z)T.$$

证明. 根据引理 5.4，M$\otimes_z$M 是一个仿射对象，满足 (M$\otimes_z$M)/z(M$\otimes_z$M) $\simeq M\otimes M$。由于 $M \otimes M$ 是简单的，根据引理 4.11，$\mathrm{End}_{\mathbf{k}[z]}$(M $\otimes_z$ M) $=\mathbf{k}[z]\mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes\mathsf{M}}$。注意，$_z\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}$ M,M $\in \overline{\mathrm{E}^{\mathrm{ND}}}^{\mathbf{k}[z]}$(M $\otimes_z$ M)，因此对于某个 $a \in \overline{\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$，有 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}$ M,M $= cz^a$，且 $c \in \mathbf{k}^\times$。由定理 6.10 (c)，我们有 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}$ M,M$|_{z=0} \neq 0$，因而 $a = 0$。于是 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}$ M,M $- c\,\mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{M}} = 0$，由此得证。□

定义 6.14. 设 M 和 N 是 $\mathcal{C}$中的单对象。

(i) 假设 dim $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N\otimes M, M\otimes N) = 1$。则定义（见定义6.3）

$$\Lambda(M,N) := \deg(\mathbf{r}_{M,N}) \in \mathbb{Z}, \tag{6.5}$$

$$\mathfrak{d}(M,N) := \frac{1}{2}\big(\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M)\big) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{6.6}$$

(ii) 设 (M, R M) 和 (N, R$_\mathsf{N}$) 分别是 M和 N的仿射化，并假设 dim $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M\otimes N)$ $= 1$。则定义 $\mathscr{D}$(M, N) $\in \mathbf{k}[z_\mathsf{M}, z_\mathsf{N}]$如下

$$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}} \circ \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\,\mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes\mathsf{N}}. \tag{6.7}$$

注意到 $\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})$ 由命题 6.2保证存在，并且在 $\mathbf{k}^\times$中相差一个常数倍的意义下是良定义的。

此外，若 dim $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(N\otimes M) = 1$，由于 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} \circ \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}} \circ \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathscr{D}(M, N)\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathscr{D}(N, M)\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$，我们有 $\mathscr{D}$(M, N) $= \mathscr{D}$(N, M)。

注意，$\mathfrak{d}(M, N)$ 在箭图 Hecke 代数的情形下是一个整数（参见 [13, 命题 2。5]）。关于同态空间维数为 1 的判据，见下文命题 6.19 和推论 6.21。

6.3. 拟刚性公理。

定义 6.15. 设 $\mathcal{A}$ 是一个幺半范畴。若 $\mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为拟刚性范畴:

(a) $\mathcal{A}$ 是阿贝尔的，且 $\otimes$是双正合的；(b) 对任意 L、M、$N \in \mathcal{A}$、$X \subset L \otimes M$和 $Y \subset M \otimes N$，若满足 $X \otimes N \subset L \otimes Y \subset L \otimes M \otimes N$，则存在 $K \subset M$，使得 $X \subset L \otimes K$和 $K \otimes N \subset Y$；(c) 对任意 L、M、$N \in \mathcal{A}$、$X \subset M \otimes N$和 $Y \subset L \otimes M$，若满足 $L \otimes X \subset Y \otimes N$，则存在 $K \subset M$，使得 $X \subset K \otimes N$和 $L \otimes K \subset Y$。

引理 6.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个拟刚性幺半范畴，且 $\mathbf{1}$ 是简单对象。设 M和 N 是 $\mathcal{C}$的对象。若 $M \otimes N \simeq 0$，则 $M \simeq 0$ 或 $N \simeq 0$。

证明. 假设 $M \otimes N \simeq 0$。令 $X := M \otimes \mathbf{1} \subset M \otimes \mathbf{1}$ 和 $Y := 0 \subset \mathbf{1} \otimes N$。于是我们有 $X \otimes N \subset M \otimes Y \subset M \otimes \mathbf{1} \otimes N$。因此，存在 $K \subset \mathbf{1}$ 使得$X \subset M \otimes K$和 $K \otimes N \subset Y$。由于 $\mathbf{1}$ 是简单对象，$K \simeq 0$ 或 $K \simeq \mathbf{1}$。若 $K \simeq 0$，则$X \subset M \otimes K$ 推出 $M \simeq 0$。若 $K \simeq \mathbf{1}$，则 $K \otimes N \subset Y$推出 $N \simeq 0$。□

引理 6.17. 具有双正合张量积的阿贝尔刚性幺半范畴是准刚性的。

证明。 这是一个众所周知的结果，且证明与下文引理 6.24的证明类似，因此略去证明。□

猜想 6.18. 满足 (5.1) 的准刚性幺半范畴可嵌入刚性幺半范畴中。

回忆一下，阿贝尔幺半范畴中的单对象 M 称为实的，如果$M \otimes M$ 是简单的。本小节中，我们沿用如下假设： $\mathcal{C}$ 是满足 (6.2) 的幺半群阿贝尔范畴。

回忆一下，对于 M、$N \in \mathcal{C}$，我们用 $M \nabla N$ 表示 $M \otimes N$ 的头，用 $M \Delta N$ 表示 $M \otimes N$ 的底。

命题 6.19. 假设 $\mathcal{C}$ 是准刚性的。令 M 为 $\mathcal{C}$ 的仿实对象，N 为 $\mathcal{C}$ 的简单对象。那么，$M \otimes N$ 和 $N \otimes M$ 都有简单的头和底。

M此外，$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N\otimes M, M\otimes N) = 1$ 且

$$M \nabla N \simeq \mathrm{Im}(\mathbf{r}_{M,N}) \simeq N \Delta M \quad and \quad N \nabla M \simeq \mathrm{Im}(\mathbf{r}_{N,M}) \simeq M \Delta N$$

相差一个分次平移。

回忆一下，$\mathbf{r}_{M,N}$是 M 与 N 之间的一个 R矩阵，即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M)$ 的一个生成元。

证明。 由于 [6, 定理 3。2] 和 [8, 命题 3.2。9] 中的证明同样适用，我们略去证明。 □

命题 6.20. 设 M 是 $\mathcal{C}$ 的一个仿实对象， N 是 $\mathcal{C}$ 的一个简单对象。那么我们有

(i) $\Lambda(M, M\nabla N) = \Lambda(M,N)$ 且 $\Lambda(N\nabla M, M) = \Lambda(N,M)$，(ii) 对于根基 $\mathrm{Ker}(M\otimes N \to M\nabla N)$ 的任意单子商 S，我们有$\Lambda(M,S) < \Lambda(M,N)$，(iii) 对于 $(M\otimes N)/(M\Delta N)$ 的任意单子商 S，我们有 $\Lambda(S,M) < \Lambda(N,M)$，(iv) 对于根基 $\mathrm{Ker}(N\otimes M \to N\nabla M)$ 的任意单子商 S，我们有$\Lambda(S,M) < \Lambda(N,M)$，(v) 对于 $(N\otimes M)/(N\Delta M)$ 的任意单子商 S，我们有 $\Lambda(M,S) < \Lambda(M,N)$。特别地， $M\nabla N$ 在 $M\otimes N$ 的合成列中仅出现一次（相差一个分次平移）。

证明。证明与 [8, 定理 4.1]类似。 □

推论 6.21。假设 $M\in\mathcal{C}$ 是仿实的，且 $N\in\mathcal{C}$ 是简单的。那么我们有 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M\otimes N) = \mathbf{k}\,\mathrm{id}_{M\otimes N}$ 以及 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(N\otimes M) = \mathbf{k}\,\mathrm{id}_{N\otimes M}$。

证明。我们只需证明 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M\otimes N) = \mathbf{k}\,\mathrm{id}_{M\otimes N}$，因为另一断言也可用类似方法证明。设 $f\in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M\otimes N)$。由于 $M\otimes N$有一个简单的头，复合 $M\otimes N \xrightarrow{f} M\otimes N \to M\nabla N$可经由 $M\nabla N$分解。因此， $M\nabla N$ 的所得自同态应为某个 $c\in\mathbf{k}$ 的 $c\mathrm{id}_{M\nabla N}$。用 $f - c\mathrm{id}_{M\otimes N}$替换 f 后，我们可以假设 $f(M\otimes N)\subset \mathrm{Ker}(M\otimes N \to M\nabla N)$。如果 $f(M\otimes N)$ 是

非零，那么 S的一个简单商 $f(M\otimes N)$ 应与 $M\nabla N$同构。因此$\Lambda(M,\ S)=\Lambda(M,\ M\nabla N)=\Lambda(M,\ N)$，这与命题 6.20(ii) 矛盾。□

引理 6.22. 设 $\mathcal{C}$是一个拟刚性幺半群范畴。设 (M, R_M) 是实单 $M\in\mathcal{C}$ 的一个仿射化，且 $(N\ z_N)$ 是简单 $N\in\mathcal{C}$ 的一个仿射对象。那么存在一个齐次 $f(z_M, z_N)$ $g(z_M, z_N)\in\left(k[z_M, z_M{}^{-1}]\right)[[z_N]]$ 以及态射 $\widetilde{R}^{ren}_{M,\ N}: M\otimes N\to N\otimes M$，属于 $Pro_{coh}(k[z_M, z_N], \mathcal{C})$，以及 $R^{ren}_{N,\ M}: N\otimes M\to M\otimes N$，属于 $Pro_{coh}(k[z_M, z_N], \mathcal{C})$，使得

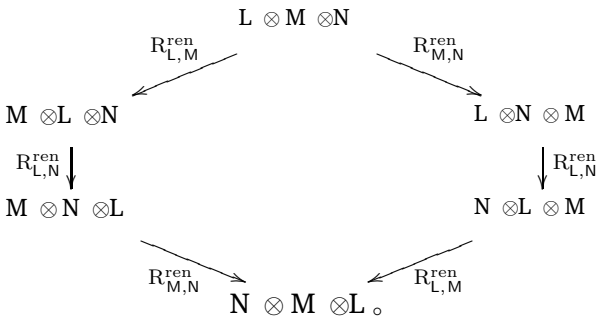
(a) $f(z_M, z_N)|_{z_N=0}$和 $g(z_M, z_N)|_{z_N=0}$是 z_M的单项式；(b) 对任意 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，有

$$R^{ren}_{M,N}|_{N/z_N{}^kN}=f(z_M, z_N)R_M(N/z_N{}^kN)\ and\ \widetilde{R}^{ren}_{N,M}|_{N/z_N{}^kN}=g(z_M, z_N)R_M(N/z_N{}^kN)^{-1},$$

(c) $\widetilde{R}^{ren}_{M,N}|_{z_M=z_N=0}\in Hom_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M)$ 和 $\widetilde{R}^{ren}_{N,M}|_{z_M=z_N=0}\in Hom_{\mathcal{C}}(N\otimes M, M\otimes N)$ 均不为零。

证明。由命题 6.19可知 $\dim Hom_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M)=1$，因此由定理6.10 可得，存在满足 (a) 和 (b) 中性质的 $R^{ren}_{M,N}$和 $f(z_M, z_N)$。关于 $R^{ren}_{N,M}$ 的陈述的证明类似。□

引理 6.23. 假设 $\mathcal{C}$是一个拟刚性幺半范畴。设 (L, R_L)、(M, R_M) 和 (N, R_N) 是 $\mathcal{C}$ 中实单对象的仿射化。则 $(R^{ren}_{L,\ M}, R^{ren}_{M,\ N}, R^{ren}_{L\ N,\ })$ 满足杨-巴克斯特方程，即 $Pro_{coh}(k[z_L, z_M, z_N], \mathcal{C})$ 中的下图可交换：



证明。由命题 6.19可得

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\otimes M, M\otimes L) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\otimes N, N\otimes L) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M\otimes N, N\otimes M) = 1.$$

于是由定理 6.10，可得非零态射 $R_{L,M}^{ren}$、$R_{M,N}^{ren}$ 和 $R_{L,N}^{ren}$。由于三元组 $(R_L(M), R_M(N), R_L(N))$ 满足杨-巴克斯特方程，且它们分别与 $R_{L,M}^{ren}$、$R_{M,N}^{ren}$、$R_{L,N}^{ren}$ 成比例，故断言成立。□

以下两个陈述是 [6] 在仿射化情形下结果的类似版本。

引理 6.24。假设 $\mathcal{C}$ 是满足 (5.1) 的阿贝尔刚性幺半范畴。令 (L, z)、(M, z)、(N, z) 为 $\mathcal{C}$ 中的仿射对象。设 $X \subset L \otimes_z M$ 和 $Y \subset M \otimes_z N$ 是仿射对象。若 $X \otimes_z N \subset L \otimes_z Y$，则存在一个仿射对象 $Z \subset M$，使得

$$X \subset L \otimes_z Z \quad and \quad Z \otimes_z N \subset Y.$$

如果我们进一步假设 Y 是 $M \otimes_z N$ 的严格仿射子对象，那么可以假设 Z 是 M 的严格仿射子对象。

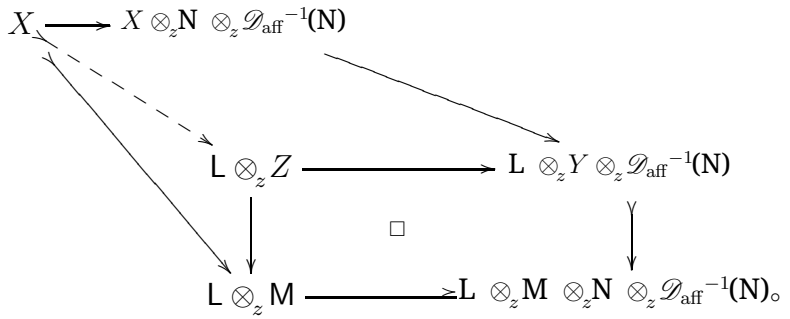
证明。设 Z 是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$ 中的一个对象，使得图表

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y \otimes_z \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{-1}(N) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M \otimes_z N \otimes_z \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{-1}(N) \end{array}$$

是 Pro 中的一个笛卡尔方块$_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$。由命题 4.5 和命题 5.3，$\bullet \otimes_z \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}{}^{-1}(N)$ 是正合的，因此右侧的垂直箭头是单态射，这意味着左侧的垂直箭头也是单态射。因此 Z 是一个仿射对象。

由于 $Z \otimes_z N \rightarrowtail M \otimes_z N$ 分解为 $Z \otimes_z N \to Y \to M \otimes_z N$，我们得到 $Z \otimes_z N \subset Y$。

应用 $\mathsf{L}\otimes_z\bullet$（由命题 5.3可知其为正合）到上述方块，我们得到如下交换图，其中底部的方块是笛卡尔的：



因此，我们得到 $X\rightarrowtail\mathsf{L}\otimes_z Z$ 属于 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$，如所需。

进一步假设 Y 是 $\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}$ 的一个严格仿射子对象。取 $Z':=\mathrm{Ker}(\mathsf{M}\to(\mathsf{M}/Z)_{\mathrm{flat}})$。那么 $Z\subset Z'\subset\mathsf{M}$ 和 $\mathsf{M}/Z'\simeq(\mathsf{M}/Z)_{\mathrm{flat}}\in\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$。因此，$X\subset\mathsf{L}\otimes_z Z'$ 且 Z' 是 M 的一个严格仿射子对象。我们有一个态射

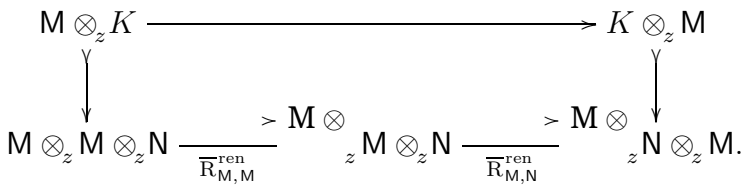
$$\big((\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N})/(Z\otimes_z\mathsf{N})\big)_{\mathrm{flat}}\to\big((\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N})/Y\big)_{\mathrm{flat}}.$$

由于左边是 $(\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N})/(Z'\otimes_z\mathsf{N})$，右边是 $(\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N})/Y$，我们得到 $Z'\otimes_z\mathsf{N}\subset Y$。□

命题 6.25。假设 $\mathcal{C}$ 是一个满足 (6.2) 的阿贝尔刚性幺半范畴。设 (M,z) 是一个仿射化，(N,z) 是一个仿射对象。假设 $\mathsf{M}/z\mathsf{M}$ 是实单的，且 $\mathsf{N}/z\mathsf{N}$ 是简单的。令 $\mathsf{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}:\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}\to\mathsf{N}\otimes_z\mathsf{M}$ 为 (6.4) 中的重整化R-矩阵。那么 $\mathrm{Im}\big(\mathsf{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}\big)$ 是 $\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}$ 的唯一有理简单商仿射对象。

证明。设 $K\subset\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}$ 是一个严格仿射子对象，且 $K\neq\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}$。只需证明 $\mathsf{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}(K)=0$。事实上，这样一来，$\mathrm{Ker}\big(\mathsf{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}\big)$ 便是 $\mathsf{M}\overline{\otimes}_z\mathsf{N}$ 的唯一极大严格仿射子对象。接下来只需说明，仿射对象除以极大严格仿射子对象所得的商对象是有理简单的。

考虑以下交换图



由于 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{M}} = \mathrm{id}_{\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{M}}$ 根据命题 3.8相差一个常数倍，因此有 $\mathsf{M}\otimes_z\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}}(K) \subset K\otimes_z\mathsf{M}$。因此，引理 6.24 表明存在 N 的一个严格仿射子对象 Z，使得 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}}(K) \subset Z\otimes_z\mathsf{M}$ 且 $\mathsf{M}\otimes_z Z \subset K$。由于 $K \neq \mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N}$，因此有 $Z \neq \mathsf{N}$。由于 N 是有理简单的，因此有 $Z = 0$。因此 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}}(K) = 0$。□

定义 6.26。设 $(\mathsf{M}\ z)$ 和 $(\mathsf{N}\ z)$ 是实单对象的仿射化。若 $\mathrm{Im}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}})$ 是 $(\mathsf{M}/z\mathsf{M}) \nabla (\mathsf{N}/z\mathsf{N})$ 的仿射化，则将 $\mathrm{Im}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}})$ 记作 $\mathsf{M}\ \nabla_z\mathsf{N}$。

引理 6.27. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个满足 (6.2) 的阿贝尔刚性幺半范畴。设$(\mathsf{M}\ z)$ 和 $(\mathsf{N}\ z)$ 分别是实单模 M和 N的仿射化，并设 $(\mathsf{L}\ z)$ 是 $M \nabla N$的仿射化。假设存在一个满态射

$$\mathsf{M}\otimes_z\mathsf{N} \twoheadrightarrow \mathsf{L}$$

在 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$ 中。那么，我们有 $\mathrm{Im}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}{}_{\mathsf{M},\,\mathsf{N}}) \simeq \mathsf{L}$。

证明。 由命题 6.25 可得。 □

命题 6.28. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个满足 (6.2) 的阿贝尔刚性幺半范畴。设 $(\mathsf{M}\ z)$ 是实单对象 M的仿射化。则 $\mathsf{M}\otimes_z\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}(\mathsf{M}) \to \mathbf{k}[z]$ 是 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z], \mathcal{C})$中的一个满态射。

证明。 由命题 3.3 (iiic) 以及 $M \otimes \mathscr{D}M \to \mathbf{1}$ 是一个满态射这一事实可得。 □

命题 6.29. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔刚性幺半范畴，满足 (6.2)。设 $(\mathsf{M}\ z)$、$(\mathsf{N}\ z)$ 和 $(\mathsf{L}\ z)$ 是一个仿射化，其中 $\deg(z) = d$ 属于一个实单 M， N并且 L 分别属于 $\mathcal{C}$。假设

(a) $\mathrm{d}(M,N) > 0$, (b) 在 $\mathrm{Aff}_z(\mathcal{C})$ 中存在一个满态射 $M \otimes_z N \twoheadrightarrow L$。

于是我们有

(i) $\mathrm{Im}(R^{\mathrm{ren}}_{M,N}) \simeq L$, (ii) $\mathscr{D}(M,N) \in k[z_M, z_N](z_M - z_N)$。

这里 $z_M = z|_M$ 和 $z_N = z|_N$。

证明。 (i) 由引理 6.27得出。

(ii) 令 $z = z_M, w = z_N$ 和 $f(z,w) = \mathscr{D}(M,N)$。假设 $f(z,w)$ 是关于 z,w 的次数为 r 的齐次函数（将 z,w 的次数均计为一），即 $\mathrm{d}(M,N) = dr/2$。于是我们有 $R^{\mathrm{ren}}_{M,N}: M \otimes N \to N \otimes M$ 和 $R^{\mathrm{ren}}_{N,M}: N \otimes M \to M \otimes N$，使得

$$R^{\mathrm{ren}}_{N,M} \circ R^{\mathrm{ren}}_{M,N} = f(z,w)\,\mathrm{id}_{M\otimes N}.$$

因此，复合

$$M \otimes_z N \xrightarrow{R^{\mathrm{ren}}_{M,N}|_{z=w}} N \otimes_z M \xrightarrow{R^{\mathrm{ren}}_{N,M}|_{z=w}} M \otimes_z N$$

是 $z^r f(1,1)$。因此，若 $f(1,1) \neq 0$，则 $M \otimes_z N \to N \otimes_z M$ 是一个单态射，因而 $M \otimes_z N \to L$ 是一个同构，这意味着 $M \otimes N \simeq L$ 是一个单对象。因此 $M \otimes N \simeq N \otimes M$，这与 $\mathrm{d}(M,N) > 0$ 相矛盾。由此我们得到 $f(1,1) = 0$，这意味着 $z - w$ 是 $f(z,w)$ 的一个因子。□

引理 6.30。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔刚性幺半范畴，满足 (6.2)。令M, N 为 $\mathcal{C}$ 中的单对象，且其中一个是仿实的。则

$$\Lambda(M, \mathscr{D}N) = \Lambda(N, M).$$

证明。这可直接由

$$\mathrm{Hom}(N \otimes M, M \otimes N) \simeq \mathrm{Hom}(M \otimes \mathscr{D}N, \mathscr{D}N \otimes M).$$

□

7. Quiver Hecke algebras and Schur-Weyl duality functors

7.1. 箭图 Hecke 代数。设 $\mathbf{k}$ 为域，C 为可对称化广义 Cartan 矩阵。我们固定一个 Cartan 数据 $(C, P, \Pi, \Pi^\vee, (\cdot,\cdot))$，由 C（称为广义 Cartan 矩阵）、P（称为权格的自由阿贝尔群）、$\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset P$（称为单根集）、$\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\} \subset P^\vee := \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Z})$（称为单余根集）以及 $(\cdot,\cdot)$（P 上取值于 $\mathbb{Q}$ 的对称双线性型）组成，并满足以下条件：

(a) $C = (\langle h_i, \alpha_j\rangle)_{i,j\in I}$, (b) $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ 对于 $i \in I$, (c) $\langle h_i, \lambda\rangle = \frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)}(\alpha_i, \lambda)$ 对于 $i \in I$ 和 $\lambda \in P$, (d) 对于每个 $i \in I$，存在 $\Lambda_i \in P$，使得 $\langle h_j, \Lambda_i\rangle = \delta_{ij}$ 对于~~任意~~ $j \in I$。

我们用 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(C)$ 表示相应的可对称化卡克-穆迪代数，并令 $P_+ := \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda\rangle \geqslant 0$ 对于任意 $i \in I\}$，表示支配积分权的集合。

对于 $i, j \in I$，我们选取形式如下的多项式 $Q_{i,j}(u, v) \in \mathbf{k}[u, v]$

$$Q_{i,j}(u,v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p(\alpha_i,\alpha_i)+q(\alpha_j,\alpha_j)=-2(\alpha_i,\alpha_j)} t_{i,j;p,q}u^p v^q & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{if } i = j, \end{cases} \tag{7.1}$$

使得 $t_{i,j;-\langle h_i,\alpha_j\rangle,0} \in \mathbf{k}^\times$ 和

$$Q_{i,j}(u,v) = Q_{j,i}(v,u) \quad \text{for all } i, j \in I.$$

令 $Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ 和 $Q_+ := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\alpha_i$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的根格和正根格。对于 $\beta \in Q_+$，定义

$$I^\beta := \Big\{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in I^n \Big| \sum_{k=1}^n \alpha_{\nu_k} = \beta\Big\}.$$

对称群 $\mathfrak{S}_n = \langle s_k \mid k = 1, \ldots, n-1\rangle$ 通过位置置换作用于 I^β。

对于 $\beta = \sum_{i\in I} b_i\alpha_i \in Q$，令 $\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{i\in I} |b_i|$。

定义 7.1. 对于 $\beta \in \mathsf{Q}^+$，其中 $\mathrm{ht}(\beta) = n$，与 $\big(\mathsf{C}\ \Pi、\mathsf{P}\ \Pi^\vee、(\cdot,\cdot)\big)$ 以及 $(Q_{i,\ j}(u,v))_{i,\ j\in I}$ 相关联的箭图 Hecke 代数 $R(\beta)$ 是由以下元素生成的 $\mathbf{k}$-代数：

$$\{e(\nu) \mid \nu \in I^\beta\},\ \{x_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\},\ \{\tau_l \mid 1 \leqslant l \leqslant n-1\}$$

满足以下定义关系：

$$e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu,\nu'}e(\nu),\ \sum_{\nu\in I^\beta} e(\nu) = 1,\ x_k e(\nu) = e(\nu)x_k,\ x_k x_l = x_l x_k,$$

$$\tau_l e(\nu) = e(s_l(\nu))\tau_l,\ \tau_k\tau_l = \tau_l\tau_k \ \textit{if}\ |k-l| > 1,$$

$$\tau_k^2 = \sum_{\nu\in I^\beta} Q_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})e(\nu),$$

$$\tau_k x_l - x_{s_k(l)}\tau_k = \big(\delta(l = k+1) - \delta(l = k)\big) \sum_{\nu\in I^\beta,\ \nu_k=\nu_{k+1}} e(\nu),$$

$$\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k = \sum_{\nu\in I^\beta,\ \nu_k=\nu_{k+2}} \overline{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})e(\nu),$$

其中

$$\overline{Q}_{i,j}(u,v,w) := \frac{Q_{i,j}(u,v) - Q_{i,j}(w,v)}{u-w} \in \mathbf{k}[u,v,w].$$

现在，设 $\lambda\colon \mathsf{Q} \times \mathsf{Q} \to \mathbb{Z}$ 是一个双线性型，满足

$$\lambda(\alpha,\beta) + \lambda(\beta,\alpha) = -2(\alpha,\beta) \quad \text{for any } \alpha,\ \beta \in \mathsf{Q}. \tag{7.2}$$

那么，代数 $R(\beta)$ 按照以下方式成为 $\mathbb{Z}$-分次代数：

$$\deg(e(\nu)) = 0, \quad \deg(x_k e(\nu)) = (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k}), \quad \deg(\tau_l e(\nu)) = \lambda(\alpha_{\nu_l}, \alpha_{\nu_{l+1}}). \tag{7.3}$$

我们将 $R_\lambda(\beta)$记作分次代数 $R(\beta)$，其分次结构由（7.3）给出。我们也将$R(\beta)$视为分次代数，其中取 $\lambda = -(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$。

我们用 $\mathrm{Modg}(R_\lambda(\beta))$ 表示分次阿贝尔范畴，即由分次 $R_\lambda(\beta)$-模构成的范畴，并令 $\mathrm{Modg}(R_\lambda) = \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}^+}\mathrm{Modg}(R_\lambda(\beta))$。

对于 $M \in \mathrm{Modg}(R_\lambda(\beta))$，我们定义 $\mathrm{wt}(M) := -\beta$。

我们用 $\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\beta))$ 表示 $\mathrm{Modg}(R_\lambda(\beta))$ 中由有限生成的分次 $R_\lambda(\beta)$-模构成的全子范畴，并定义 $\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda) = \bigoplus_{\beta\in\mathbb{Q}_+}\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\beta))$。

我们将 $R_\lambda(\beta)$-gmod 记为 $\mathrm{Modg}(R_\lambda(\beta))$ 的全子范畴，它由有限 k 维的 $\mathbb{Z}$-分次 $R_\lambda(\beta)$-模组成。设 R_λ-gmod $:= \bigoplus_{\beta\in\mathbb{Q}_+} R_\lambda(\beta)$-gmod。

注意， $R_\lambda(\beta)$-gmod 在添加 λ 后作为分次范畴与之无关 $q^{1/2}$（见 [13, 引理 15]）。我们将 $\mathrm{Modg}(R)$、 R-gmod 等简记为 $\mathrm{Modg}(R_\lambda)$、 R_λ-gmod 等，其中 $\lambda = -(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$。

对于 $M \in R$-gmod，设 $M^\star := \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M, \mathbf{k})$。则 $M^\star$ 通过 $R(\beta)$ 的保分次反自同构成为一个 $R(\beta)$-模，该反自同构固定生成元 $e(\nu)$、 x_k 和 τ_k。若 M 属于 R-gmod，则称其为自对偶模。对于 R-gmod 中的每个简单模 M，都存在 $m \in \mathbb{Z}$，使得 $q^m M$ 是自对偶的。

对于每个 $i \in I$ 和 $n \geqslant 1$， $R(n\alpha_i)$ 都有一个唯一的自对偶简单模，记为 $L(i^n)$。有时我们将其记为 $\langle i^n\rangle$。我们有 $\dim(\langle i^n\rangle) = n!$ 。

7.2. 万有 R 矩阵。 范畴 $\mathrm{Modg}(R_\lambda)$ 具有幺半范畴结构，其卷积积为 $\circ$ (例如，详情参见 [17, 18, 23])。此外，根据 [6, 引理 3。1]，它是准刚性的。范畴 R_λ-gmod 是满足 (5.1) 的分次幺半范畴。我们有一个全忠实幺半函子

$$\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda) \to \mathrm{Pro}(R_\lambda\text{-gmod})$$

by

$$M \longmapsto \text{“}\varprojlim_m\text{”}\ M/\big(R_\lambda(R_\lambda)_{\geqslant m}M\big).$$

此后，我们将 $\mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda)$ 视为 $\mathrm{Pro}(R_\lambda$-gmod) 的一个全子范畴。

注意， R_λ-gmod 中的仿射对象等价于一对 (M z)，其中 M 是一个分次R_λ-模， z M 上有一个正次数的单射自同态，且 $\mathrm{M}/z\mathrm{M} \in R_\lambda$-gmod，并且对 $k \ll 0$， $\mathrm{M}_k = 0$。

设 $\beta \in \mathsf{Q}_+$，其中 $m = \mathrm{ht}(\beta)$。对于 $k = 1, \ldots, m-1$ 和 $\nu \in I^\beta$，交织算子 $\varphi_k \in R(\beta)$ 定义为

$$\varphi_k e(\nu) = \begin{cases} \big(\tau_k(x_k - x_{k+1}) + 1\big) e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+1}, \\ \tau_k e(\nu) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.4}$$

引理 7.2 ([7,引理 1。5])。交织算子具有以下性质。

(i) $\varphi_k^2 e(\nu) = \big(Q_{\nu_k,\ \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) + \delta_{\nu_k,\ \nu_{k+1}}\big)\, e(\nu)$。(ii) $\{\varphi_k\}_{k=1,\ \ldots,\ m-1}$ 满足辫关系。(iii) 对于一个约化表达式 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t} \in \mathfrak{S}_m$，记 $\varphi_w := \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_t}$。则 φ_w不依赖于 w的约化表达式的选择。(iv) 对于 $w \in \mathfrak{S}_m$ 和 $1 \leqslant k \leqslant m$，有 $\varphi_w x_k = x_{w(k)} \varphi_w$。(v) 对于 $w \in \mathfrak{S}_m$ 和 $1 \leqslant k < m$，如果 $w(k+1) = w(k) + 1$，则 $\varphi_w \tau_k = \tau_{w(k)} \varphi_w$。

对于 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们令 $w[m,n]$ 为满足以下条件的 $\mathfrak{S}_{m+n}$ 中的元素

$$w[m,n](k) := \begin{cases} k+n & \text{if } 1 \leqslant k \leqslant m, \\ k-m & \text{if } m < k \leqslant m+n. \end{cases}$$

对于一个 $R(\beta)$-模 M和一个 $R(\gamma)$-模 N，由以下方式定义的 $R(\beta) \otimes R(\gamma)$-线性映射 $M \otimes N \to N \circ M$

$$u \otimes v \mapsto \varphi_{w[\mathrm{ht}(\gamma), \mathrm{ht}(\beta)]}(v \otimes u)$$

ext得到一个 $R(\beta+\gamma)$-模同态（忽略分次平移）

$$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{M,N} \colon M \circ N \longrightarrow N \circ M.$$

我们称 $\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{M,N}$ 为 M 与 N之间的万有 R 矩阵。由于交织算子满足辫关系，万有 R 矩阵 $\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{M,N}$ 满足杨-巴克斯特方程（[7, (1.9)]）。

设 $(\mathrm{M},\ z)$ 是 R_λ-gmod 中的一个仿射对象。令 $\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathrm{M}}(X) = \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathrm{M},\ X} \colon \mathrm{M} \circ X \to X \circ \mathrm{M}$（忽略分次平移）。若 $(\mathrm{M}, \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathrm{M}})$ 是 R_λ-gmod 中的有理中心，则称 $(\mathrm{M}, \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathrm{M}})$ 是 $\mathrm{M}/z\mathrm{M} \in R_\lambda$-gmod 的典范仿射化。

7.3. R_λ-gmod中的典范仿射化。 我们回顾一下文献R中引入的 [13]-模的仿射化概念。对于 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ 和 $i \in I$，令

$$\mathfrak{p}_{i,\beta} := \sum_{\nu \in I^\beta} \Big(\prod_{a \in \{1,\dots,\mathrm{ht}(\beta)\},\ \nu_a = i} x_a \Big) e(\nu) \in R(\beta). \tag{7.5}$$

那么，$\mathfrak{p}_{i,\beta}$ 属于 $R(\beta)$的中心。

设 M 是 $R_\lambda(\beta)$-gmod中的一个简单模。假设存在一个分次$R_\lambda(\beta)$-模 M，其上有一个次数为 $d_{\mathsf{M}} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的自同态 z_{M}，满足

(7.6) (i) $\mathsf{M}/z_{\mathsf{M}}\mathsf{M} \simeq M$；(ii) M 是多项式环 $\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}]$ 上的有限生成自由模；
(iii) $\mathfrak{p}_{i,\beta}\mathsf{M} \neq 0$，对所有 $i \in I$均成立。

注意，条件 (i) 和 (ii) 等价于如下陈述：$(\mathsf{M}\ z_{\mathsf{M}})$ 是一个仿射对象。

对于不定元 z 和非零齐次 $w \in \mathsf{k}[z]$，记 $\mathsf{M}|_{z_{\mathsf{M}}=w} := \mathsf{k}[z] \otimes_{\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}]} \mathsf{M}$ 为 $\mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathsf{k}[z], R_\lambda\text{-gmod})$ 中的对象。这里，$\mathsf{k}[z]$ 通过代数同态 $z_{\mathsf{M}} \mapsto w \in \mathsf{k}[z]$成为一个 $\mathsf{k}[z_{\mathsf{M}}]$-代数。若对某个 $c \in \mathsf{k}^\times$，有 $w = cz^a$ $a \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\deg(z_{\mathsf{M}}) = a\deg(z)$，则 $\mathsf{M}|_{z_{\mathsf{M}}=w}$ 是一个仿射对象（[13, 例 2.5 (ii)]）。有时我们会简写为 $\mathsf{M}|_{z_{\mathsf{M}}=w} = \mathsf{M}_w$。

命题 7.3（[13,引理 2.9]）。设 M 是 $R_\lambda(\beta)$-gmod 中的一个简单模。假设一个 $R_\lambda(\beta)$-模（M z）满足条件（7.6）。那么（$\mathsf{M}, \mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M}}$）是 R_λ-gmod 中的一个有理中心。

证明。只需证明，对于任意 $X \in R_\lambda$-gmod，R矩阵 $\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},X} \colon \mathsf{M} \circ X \to X \circ \mathsf{M}$ 是 $\mathrm{Raff}_z(R_\lambda\text{-gmod})$ 中的一个同构。

复合 $\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},X} \circ \mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{X,\mathsf{M}} \colon X \circ \mathsf{M} \to \mathsf{M} \circ X \to X \circ \mathsf{M}$ 定义为

$$f(z) := \prod_{i \neq j} \chi_i(\mathsf{M})(t_i) \underset{t_i}{\star} Q_{i,j}(t_i, t_j) \underset{t_j}{\star} \chi_j(X)$$

（见下文（9.3）；关于记号 χ_i 和 $\overset{\star}{t}$，参见 § 9.1、§9.2）。由引理 4.11，$\mathrm{END}\,\mathsf{k}_{[z]}(\mathsf{M}) \simeq \mathsf{k}[z]$，齐次多项式 $\chi_i(\mathsf{M})(t_i, z) \in \mathsf{k}[t_i, z]$ 根据假设 (iii)（7.6），关于 t_i 是首一的，并且关于 z 是准首一的。

因此，$f(z)$ 的形式为（相差一个常数因子）$f(z) = z^m - a$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $a \in \mathrm{END}(X)_{>0}[z]$。由于 $a^s = 0$ 对某个 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立，若令 $g(z) = (z^m)^{s-1} + az(z^m)^{s-2} + \cdots + a^{s-1}$，则有

$$f(z)g(z) = g(z)f(z) = z^{ms} - a^s = z^{ms}.$$

因此，$\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\,X} \circ \big(\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{X,\,\mathsf{M}}g(z)\big) = z^{ms}\mathrm{id}_{X\otimes\mathsf{M}}$ 在 $\mathrm{Raff}_z(R_\lambda\text{-gmod})$ 中可逆，因此 $\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\,X}$ 有一个右逆。

类似地，$\mathsf{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\,X}$ 有一个左逆。 □

注7.4。设（M, z）是一个简单 $M \in R_\lambda$-gmod 中的仿射对象。即使（M, $\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M}}$）是 R_λ-gmod 中的有理中心，（M, z）也未必满足（7.6）。例如，若（$\mathsf{M} \circ C$, $\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M}} \circ R_C$）是一个有理中心，且（$C$, R_C）是 R_λ-gmod 中的中心对象。

在 下文中，我们按照定义 6.7 的含义使用术语“仿射化”.

7.4. 施尔-韦伊对偶。设 $\mathcal{C}$ 是一个满足（6.2）的分次 k-线性幺半范畴。进一步假设 $\mathcal{C}$ 是准刚性的。设 R 是与 Cartan 矩阵 C 和多项式集 $\{Q_{i,j}(u, v)\}$ 相关联的箭图 Hecke 代数，如（7.1）所示。

设 $\{(\mathsf{K}_i, z_i)\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个仿射化族，满足

$$(7.7)\quad \begin{cases} \text{(a) } \deg(z_i) = 2(\alpha_i, \alpha_i), \\ \text{(b) } \mathrm{K}_i := \widehat{\mathrm{K}}_i/z_i\widehat{\mathrm{K}}_i \text{ is real simple in } \mathcal{C} \text{ for any } i \in I, \\ \text{(c) } \mathscr{D}(\widehat{\mathrm{K}}_i, \widehat{\mathrm{K}}_j) = Q_{i,j}(z_i, z_j) \text{ for } i \neq j. \end{cases}$$

我们定义双线性型 $\lambda\colon \mathsf{Q} \times \mathsf{Q} \to \mathbb{Z}$ 为

$$\lambda(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} \Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) & \text{for } i, j \in I \text{ such that } i \neq j. \\ -(\alpha_i, \alpha_j) & \text{if } i = j \in I. \end{cases}$$

那么，对于任意 $\alpha, \beta \in \mathsf{Q}$，有 $\lambda(\alpha, \beta) + \lambda(\beta, \alpha) = -2(\alpha, \beta)$。

设 $R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\colon K_i\otimes K_j\to K_j\otimes K_i$ 是一个重整化 R 矩阵。它在一个常数倍的意义下唯一确定。我们将其归一化，使得

$$\text{(7.8)}\quad \begin{cases} \text{(a) } R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_j,\widehat{K}_i}\circ R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}=Q_{i,j}(z_i,z_j)\,\mathrm{id}_{\widehat{K}_i\otimes\widehat{K}_j} \text{ for } i\neq j,\\ \text{(b) for any } i\in I, \text{ there exists } T_i\in \mathrm{END}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(\widehat{K}_i\otimes\widehat{K}_i) \text{ such that}\\ \qquad\qquad R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_i}-\mathrm{id}_{\widehat{K}_i\otimes\widehat{K}_i}=(z_i\otimes 1-1\otimes z_i)\circ T_i. \end{cases}$$

根据命题 6.13，可以进行此类归一化。

我们称 $\big(\{(\widehat{K}_i,z_i)\}_{i\in I},\{R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\}_{i,j\in I}\big)$ 为一个对偶数据。

注记 7.5. 给定 $\{(\widehat{K}_i,z_i)\}_{i\in I}$ 后，存在一个对偶数据 $\big(\{(\widehat{K}_i,z_i)\}_{i\in I},\{R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\}_{i,j\in I}\big)$，且其在相差一个常数倍的意义下唯一。

更确切地说，若 $\big(\{(\widehat{K}_i,z_i)\}_{i\in I},\{R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\}_{i,j\in I}\big)$ 是另一个对偶数据，则存在 $\widetilde{c}_{i,j}\in k^\times (i,j\in I)$，使得 $R^{\mathrm{ren}}{}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}=c_{i,j}R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}$ 和 $c_{i,j}c_{j,i}=1$，$c_{i,i}=1$。

命题 7.6（参见 [7, § 3.1, § 3.2]）。设 $\big(\{(\widehat{K}_i,z_i)\}_{i\in I},\{R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\}_{i,j\in I}\big)$ 是一个对偶数据。

(i) 存在一个右正合幺半函子

$$\widehat{\mathscr{F}}\colon \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda)\to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$$

使得

$$\text{(7.9)}\qquad \widehat{\mathscr{F}}(\widetilde{L}(i)_{z_i})\simeq \widehat{K}_i \quad \textit{and} \quad \widehat{\mathscr{F}}(L(i))\simeq K_i,$$

$$\text{(7.10)}\qquad \widehat{\mathscr{F}}(e(i,j)\varphi_1)=R^{\mathrm{ren}}_{\widehat{K}_i,\widehat{K}_j}\in \mathrm{HOM}_{\mathbf{k}[z_i,z_j]}(\widehat{K}_i\otimes\widehat{K}_j,\widehat{K}_j\otimes\widehat{K}_i).$$

这里 $\widetilde{L}(i)_{z_i}$ 是 $\big(R(\alpha_i)z_i\big)=(k[x_1],x_1)$ 的仿射化，$L(i)=R(\alpha_i)/R(\alpha_i)x_1$ 在 (7.4) 中给出，而 $e(i,j)\varphi_1\colon R_\lambda(\alpha_i+\alpha_j)e(i,j)\to R_\lambda(\alpha_i+\alpha_j)e(j,i)$ 是由右乘法给出的态射。

此外，这样的右正合幺半函子 $\widehat{\mathscr{F}}$ 在同构意义下是唯一的。

(ii) 函子 $\mathscr{F}$ 可以限制为一个幺半函子

$$\mathscr{F}\colon R_\lambda\text{-gmod} \to \mathcal{C}.$$

(iii) 进一步假设 C 为有限型。则函子 $\mathscr{F}$ 是正合的，并且具有以下性质。

(a) $\mathscr{F}$ 将 R_λ-gmod 中的简单模映为 $\mathcal{C}$ 中的单对象或 0。 (b) 若 (M z_{M}) 是 R_λ-gmod 中 M的仿射对象，则 ($\mathscr{F}$(M) $\mathscr{F}(z_{\mathrm{M}})$) 是 $\mathscr{F}(M) \in \mathcal{C}$的仿射对象。

证明。 首先注意到 $\{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\ \widehat{\mathrm{K}}_j}\}_{i,\ j\in I}$由引理 6.23可知满足杨-巴克斯特方程。对于每个 $\beta \in \mathrm{Q}_+$和 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in I^\beta$，定义 Pro($\mathcal{C}$) 中的对象如下：

$$\widehat{\mathrm{K}}(\nu) := \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_m} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathrm{K}}(\beta) := \bigoplus\nolimits_{\nu\in I^\beta} \widehat{\mathrm{K}}(\nu).$$

设 $T_{i,\ j} = \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_i,\ \widehat{\mathrm{K}}_j}$若 $i \neq j$ 且 $T_{i,\ j} = T_i$ 若 $i = j$。这里， T_i 由（7.8）.

于是，我们可以如下在 Pro($\mathcal{C}$) 中赋予 K(β) $\in$ Pro($\mathcal{C}$) 一个分次 $R_\lambda(\beta)^{\mathrm{opp}}$-模结构（参见 [7, § 3]）：

(1) $e(\nu)$ 是投影 K(β) $\to$ K(ν) $\subset$ K(β)；(2) x_k 通过以下方式作用于 K(ν)：

(3) τ_k: K(ν) $\to$ K$(s_k\nu)$ 由下式给出：

$$\widehat{\mathrm{K}}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_{k-1}} \otimes z_{\nu_k} \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_m},$$

$$\widehat{\mathrm{K}}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_{k-1}} \otimes T_{\nu_k,\nu_{k+1}} \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_{k+2}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\mathrm{K}}_{\nu_m}.$$

由于 $R(\beta)$ 是左诺特的（[17, 推论 2.11]），存在一个右正合函子

$$\widehat{\mathscr{F}_\beta}\colon \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\beta)) \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$$

由下式给出

$$M \mapsto \widehat{\mathrm{K}}(\beta) \otimes_{R_\lambda(\beta)} M.$$

注意，对于每个 $i \in I$， $\widehat{\mathscr{F}_{\alpha_i}}(L(i)_{z_i}) \simeq \widehat{\mathscr{F}_{\alpha_i}}(R_\lambda(\alpha_i)) \simeq \mathrm{K}_i$。

由于 $\widehat{\mathscr{F}_\beta}$ 是右正合的，且 $\widehat{\mathscr{F}_{\alpha_i}}(z_i) = z_i$，我们有 $\widehat{\mathscr{F}_{\alpha_i}}(L(i)) \simeq \mathrm{K}_i$.

Set

$$\widehat{\mathscr{F}} := \bigoplus_{\beta\in \mathsf{Q}_+} \widehat{\mathscr{F}_\beta} \colon \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda) \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C}).$$

那么， $\widehat{\mathscr{F}}$ 是一个幺半函子。事实上，对于任意的 $M \in$ 模范畴$_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\beta))$ 和 $N \in$模范畴$_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\gamma))$，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{F}}(M \circ N) :=& \widehat{\mathrm{K}}(\beta+\gamma) \otimes_{R_\lambda(\beta+\gamma)} \Big(R_\lambda(\beta+\gamma) e(\beta+\gamma) \otimes_{R_\lambda(\beta)\otimes R_\lambda(\gamma)} (M \otimes N) \Big) \\
&\simeq \widehat{\mathrm{K}}(\beta+\gamma) e(\beta+\gamma) \otimes_{R_\lambda(\beta)\otimes R_\lambda(\gamma)} (M \otimes N) \\
&\simeq \Big(\widehat{\mathrm{K}}(\beta) \otimes \widehat{\mathrm{K}}(\gamma) \Big) \otimes_{R_\lambda(\beta)\otimes R_\lambda(\gamma)} (M \otimes N) \\
&\simeq \Big(\widehat{\mathrm{K}}(\beta) \otimes_{R_\lambda(\beta)} M \Big) \otimes \Big(\widehat{\mathrm{K}}(\gamma) \otimes_{R_\lambda(\gamma)} N \Big) \\
&\simeq \widehat{\mathscr{F}}(M) \otimes \widehat{\mathscr{F}}(N).
\end{aligned}$$

关于 $\widehat{\mathscr{F}}$ 的唯一性，见下文引理 7.7 。

设 $\mathrm{Pol}(\beta) = \bigoplus_{\nu\in I^\beta} \mathbf{k}[x_1, \dots, x_{\mathrm{ht}(\beta)}] e(\nu)$。则 $\mathrm{Pol}(\beta)$ 是一个交换子代数$\widehat{}$，它属于 $R(\beta)$。由于 $\mathrm{K}(\beta) \in \mathrm{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathrm{Pol}(\beta)\ \mathcal{C})$，引理 3.4 推出

$$\widehat{\mathrm{K}}(\beta) \otimes_{\mathrm{Pol}(\beta)} M \in \mathcal{C} \quad \text{for any } M \in R_\lambda\text{-gmod}.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$由于 $\mathrm{K}(\beta) \otimes_{R_\lambda(\beta)} M$是 $\mathrm{K}(\beta) \otimes_{\mathrm{Pol}(\beta)} M$的商对象，因此根据引理 $\mathscr{F}(M) \in \mathcal{C}$，我们有2.1。由于 $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ 是完全忠实的，我们得到如下限制

$$\mathscr{F} := \widehat{\mathscr{F}}|_{R_\lambda\text{-gmod}} \colon R_\lambda\text{-gmod} \to \mathcal{C}.$$

我们来证明 (iii)。假设 C 是有限型的。则 $R(\beta)$ 根据 [15, 21] 具有有限整体维数。因此， [7, 命题 3.7] 推出 $R(\beta)^{\mathrm{opp}}$-模 在 $R(\beta)^{\mathrm{opp}}$ 上平坦，只要它在 $\mathrm{Pol}(\beta)$ 上平坦。

$\widehat{}$ $\widehat{}$由于 K_i 是仿射对象，根据命题 5.5 (iv)，$\mathrm{K}(\beta)$ 在 $\mathrm{Pol}(\beta)$ 上是平坦的。因此，$\widehat{}$ $\widehat{}$$\mathrm{K}(\beta)$ 是 $R^{\mathrm{opp}}(\beta)$-平坦的，这意味着 $\mathscr{F}_\beta$ 是正合的。

假设 M 在 $R_\lambda(\beta)$-gmod 中是简单的。我们通过对 $\mathrm{ht}(\beta)$ 归纳来证明 $\mathscr{F}(M)$ 是简单的或为零。不妨设 $\beta \neq 0$。于是存在 $i \in I$

以及一个简单的 $\beta-\alpha_i$(N)-模 R_λ，使得 $M \simeq N \nabla L(i)$。那么 $M \simeq$ Im(r)，其中 r 是一个 R矩阵 r: $N \circ L(i) \to L(i) \circ N$。由于 $\mathscr{F}$ 是正合的，我们有 $\mathscr{F}(M) \simeq \mathscr{F}$(Im(r)) $\simeq$Im $\mathscr{F}$(r)。不妨设 $\mathscr{F}$(r) 非零。因此 $\mathscr{F}(N) \neq 0$。由归纳假设， $\mathscr{F}(N)$ 是简单的。于是命题 6.19 表明 Im $\mathscr{F}$(r) 同构于单顶 $\mathscr{F}(N) \nabla \mathscr{F}(L(i))$，因为假设 $\mathcal{C}$ 是准刚性的，并且 $\mathscr{F}(L(i)) \simeq \mathrm{K}_i$ 是仿实的。因此得到 (a)。

$\widehat{\ }$(b) 是 $\mathscr{F}$ 正合性的直接推论。 □

引理 7.7. 设 $\big(\{(\widehat{\ }\mathrm{K}_i, z_i)\}_{i\in I}, \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\hat{\mathrm{K}}_i,\ \widehat{\ }\mathrm{K}_j}\}_{i,\ j\in I}\big)$ 是一个对偶数据，且 l

$$\widehat{\mathscr{F}}\colon \mathrm{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda) \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$$

是一个满足 (7.9) 和 (7.10) 的右正合幺半函子。则它在同构意义下唯一。

证明。 由于 $R(\beta)e(\nu) \simeq L(\nu_1)_{z_{\nu_1}} \circ \cdots \circ L(\nu_r)^{z_{\nu_r}}$ 属于 $\mathbf{Modg}_{\mathrm{coh}}(R_\lambda)$，由 (7.9) 可得

$$\widehat{\mathscr{F}}(R(\beta)e(\nu)) \simeq \widehat{\mathrm{K}}(\nu) \quad \text{and} \quad \widehat{\mathscr{F}}(R(\beta)) \simeq \widehat{\mathrm{K}}(\beta)$$

对任意 $\beta \in \mathrm{Q}_+$ 和 $\nu \in I^\beta$。注意 $\widehat{\mathscr{F}}(R(\beta)) \simeq \widehat{\ }\mathrm{K}(\beta)$ 具有一个 $R(\beta)^{\mathrm{opp}}$-模结构，由 (7.9) 和 (7.10) 唯一确定，因为 $\widehat{x_k - x_{k+1}}$ 在 K 上ν 且 $\nu_k = \nu_{k+1}$ 是一个单态射。

因此，对于每个 $M \in$Modg$_{\mathrm{coh}}(R_\lambda(\beta))$，都存在一个函子性态射

$$\widehat{\mathrm{K}}(\beta) \otimes_{R(\beta)} M \longrightarrow \widehat{\mathscr{F}}(M) \tag{7.11}$$

由此诱导

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}\big(\widehat{\mathrm{K}}_\beta \otimes_{R(\beta)} M, \widehat{\mathscr{F}}(M)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{R(\beta)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(\widehat{\mathrm{K}}_\beta, \widehat{\mathscr{F}}(M))\big)$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{R(\beta)}\big(\mathrm{Hom}_{R(\beta)}(R(\beta), M), \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(\widehat{\mathscr{F}}(R(\beta)), \widehat{\mathscr{F}}(M))\big).$$

$\widehat{\ }$注意到，当7.11是同构，当且仅当 M 是一个自由 $R(\beta)$-模。由于 $\mathscr{F}$ 是右正合的，取 M 的一个自由表示，即可得出 (7.11) 对一般的 M也是同构。 □

8. Localizations of R-gmod

8.1. 范畴 $\mathscr{C}_w$ 与 $\mathscr{C}_w^*$。设 R 为第7节中的箭图 Hecke 代数。对于α，$\beta \in \mathsf{Q}_+$，我们定义

$$e(\alpha,\beta) = \sum_{\substack{\nu\in I^{\alpha+\beta}\\ \sum_{k=1}^{\mathrm{ht}(\alpha)}\alpha_{\nu_k}=\alpha,\ \sum_{k=1}^{\mathrm{ht}(\beta)}\alpha_{\nu_{k+\mathrm{ht}(\alpha)}}=\beta}} e(\nu) \ \in R(\alpha+\beta).$$

对于 $M \in R(\beta)$-gmod，我们定义

$$\mathsf{W}(M) := \{\gamma \in \mathsf{Q}_+ \cap (\beta - \mathsf{Q}_+) \mid e(\gamma,\beta-\gamma)M \neq 0\},$$
$$\mathsf{W}^*(M) := \{\gamma \in \mathsf{Q}_+ \cap (\beta - \mathsf{Q}_+) \mid e(\beta-\gamma,\gamma)M \neq 0\}.$$

令 W 为 Weyl 群，即由 $\{s_i\}_{i\in I}$ where$s_i(\lambda) = \lambda - \langle h_i, \lambda\rangle\alpha_i$ 生成的 Aut(P) 的子群。记 W 上的 Bruhat 序为 $>$。

对于 $w \in$W，定义 R-gmod 的满幺半子范畴为

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_w &:= \{M \in R\text{-gmod} \,\big|\, \mathsf{W}(M) \subset \mathsf{Q}_+ \cap w\mathsf{Q}_-\},\\ \mathscr{C}_w^* &:= \{M \in R\text{-gmod} \,\big|\, \mathsf{W}^*(M) \subset \mathsf{Q}_+ \cap w\mathsf{Q}_-\}.\end{aligned} \tag{8.1}$$

回忆一下，存在一个 $R(\beta)$ 的对合 k-代数自同构 ψ，其定义如下

$$e(\nu_1,\dots,\nu_n) \mapsto e(\nu_n,\dots,\nu_1), \quad x_k \mapsto x_{n+1-k}, \quad \tau_k \mapsto -\tau_{n-k}, \tag{8.2}$$

其中 $n =$ht(β)。于是 ψ 诱导出幺半范畴之间的一个等价：

$$\psi_*\colon R\text{-gmod} \simeq (R\text{-gmod})^{\mathrm{rev}}.$$

这里，对于幺半范畴 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}_{\mathrm{rev}}$ 表示赋有反向张量积 $\otimes_{\mathrm{rev}}$ 的幺半范畴，其中该反向张量积由 $M \otimes_{\mathrm{rev}} N := N \otimes M$定义。

由于对于 $\beta,\gamma \in \mathsf{Q}_+$，在 $\beta - \gamma \in \mathsf{Q}_+$ 的条件下，我们有 $\psi(e(\gamma,\beta-\gamma)) = e(\beta-\gamma,\gamma)$，自同构 ψ 诱导出幺半范畴的等价

$$\mathscr{C}_w^* \simeq (\mathscr{C}_w)^{\mathrm{rev}}.$$

对于 $\lambda,\mu \in \mathsf{P}$，如果存在一列实正根 $\beta_k (1 \leqslant k \leqslant \ell)$，使得 $\lambda = s_{\beta_\ell} \cdots s_{\beta_1}\mu$ 且 $(\beta_k, s_{\beta_{k-1}} \cdots s_{\beta_1}\mu) \geqslant 0$（对$1 \leqslant k \leqslant \ell$），则定义偏序 $\lambda \preccurlyeq \mu$。这里 $s_\beta(\lambda) = \lambda - (\beta^\vee, \lambda)\beta$，其中 $\beta^\vee = {}^{2}{}_{(\beta,\ \beta)}\ \beta$。

设 $\lambda,\ \mu \in \mathsf{W}\Lambda$ 对于某个 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$，并且 $\lambda \preccurlyeq \mu$。那么存在一个模 $\mathsf{M}(\lambda,\ \mu)$ 属于 $R(\mu-\lambda)$-gmod，称为行列式模。定义及其性质参见 [11, 第 3 节 3]。特别地，$\mathsf{M}(\lambda,\ \mu)$ 存在一个仿射化（[11, 定理 326]）。

~8.2. 局部化。本小节回顾幺半范畴 $\mathscr{C}_w$ 在 [11] 中引入的局部化 $\mathscr{C}_w$。在本小节中，$w \in \mathsf{W}$ 是 Weyl 群的一个元素，并且我们假设 $I_w = I$，其中 $I_w := \{i_1, \ldots, i_r\}$ 对于约化表达式 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$。

对于每个 $i \in I$，令 $\mathsf{C}_i := \mathsf{M}(w\Lambda_i, \Lambda_i)$。那么对于每个 $X \in R(\beta)$-gmod，存在一个态射 $R_{\mathsf{C}_i}(X) : \mathsf{C}_i \circ X \to q^{\phi_i(\beta)} X \circ \mathsf{C}_i$，其中

$$\phi_i(\beta) = -(w\Lambda_i + \Lambda_i, \beta) \qquad \text{for any } \beta \in \mathsf{Q}.$$

此外，族 $(\mathsf{C}_i, R_{\mathsf{C}_i}, \phi_i)_{i\in I}$ 构成了 R-gmod 中非退化分次（左）辫子结构的实交换族（[11, 命题 5.1]）。注意，$(\mathsf{C}_i, R_{\mathsf{C}_i}|_{\mathscr{C}_w})$ 是 $\mathscr{C}_w$ 的中心对象（[11, 定理 5.2]），这意味着对所有 $X \in \mathscr{C}_w$，$R_{\mathsf{C}_i}(X)$ 都是一个同构。

因此，根据 [11, 定理 2.12],，存在由族 $(\mathsf{C}_i, R_{\mathsf{C}_i}|_{\mathscr{C}_w})$ 局部化得到的 $\mathscr{C}_w$，以及一个典范函子

$$\Phi_w : \mathscr{C}_w \to \widetilde{\mathscr{C}_w} := \mathscr{C}_w[\mathsf{C}_i^{\circ -1} \mid i \in I].$$

我们有以下性质（[11, 12]）：

~(i) 范畴 $\mathscr{C}_w$ 是一个 k-线性阿贝尔刚性幺半范畴，其张量积是 $\circ$ 在 $\mathscr{C}_w$上的自然延拓；(ii) 分次移位函子 q 和逆变函子 $M \mapsto M^\star$ 在 $\mathscr{C}_w$ 上~延拓到 $\mathscr{C}_w$；~(iii) 对任意简单模 $M \in \mathscr{C}_w$，存在唯一的 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $q^n M$ 是自对偶；

(iv) 对象 $\Phi_w(\mathsf{C}_i)$ 在 $\mathscr{C}_w$中可逆，也就是说，函子 $\Phi_w(\mathsf{C}_i)\circ\bullet$ 和 $\bullet\circ\Phi_w(\mathsf{C}_i)$ 是等价，

(v) 对每个 $\Lambda\in\mathsf{P}$，都存在一个可逆对象 $\mathsf{C}_\Lambda\in\mathscr{C}_w$，使得 $\mathsf{C}_\Lambda\circ\mathsf{C}_{\Lambda'}\simeq q^{\mathrm{H}(\Lambda,\Lambda')}\mathsf{C}_{\Lambda+\Lambda'}$ 对于 $\Lambda,\Lambda'\in\mathsf{P}$，以及 $\mathsf{C}_\Lambda=\Phi_w(\mathsf{M}(w\Lambda,\Lambda))$ 对于 $\Lambda\in\mathsf{P}_+$，其中 $\mathrm{H}(\bullet,\bullet)$ 是定义在 Γ 上的 $\mathbb{Z}$-双线性映射，由 $\mathrm{H}(\Lambda_i,\Lambda_j)=(\Lambda_i,w\Lambda_j-\Lambda_j)$ 确定，

(vi) 对于 $\mathscr{C}_w$ 中任意简单对象 S，对象 $\Phi_w(S)$ 在 $\mathscr{C}_w$ 中是单对象，

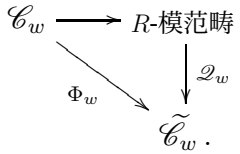
(vii) 每个简单对象 M 属于某个形如 $\mathsf{C}_\Lambda\circ\Phi_w(S)$ 的简单对象，其中该简单对象属于 $\mathscr{C}_w$，且 $\Lambda\in\mathsf{P}$，因此 $\mathrm{H}^{\mathrm{OM}_{\mathscr{C}_w}}(M,M)=\mathsf{k}\,\mathrm{id}_M$，

(viii) $\mathscr{C}_w$ 中的每个对象都有有限长度；(ix) 对于 $\mathscr{C}_w$ 和 Λ中的两个单对象 S 和 S'，$\Lambda'\in\mathsf{P}$，$\mathsf{C}_\Lambda\circ\Phi_w(S)\simeq\mathsf{C}_{\Lambda'}\circ\Phi_w(S')$ 在 $\widetilde{\mathscr{C}_w}$ 中成立，当且仅当存在某个 $\mu\in\mathsf{P}$，使得 $\Lambda+\mu$，$\Lambda'+\mu\in\mathsf{P}_+$，且 $q^{\mathrm{H}(\Lambda,\mu)}\mathsf{C}_{\Lambda+\mu}\circ S\simeq q^{\mathrm{H}(\Lambda',\mu)}\mathsf{C}_{\Lambda'+\mu}\circ S'$ 属于 $\mathscr{C}_w$。

若通过同一族（R-gmod 对范畴 C_i、R_{C_i}、ϕ_i）$_{i\in I}$进行局部化，那么所得范畴将等价于范畴 $\mathscr{C}_w$（[11, 定理 5。9]）。记 $\mathscr{Q}_w$ 为该等价与从R-gmod 到局部化的典范函子的复合，则有

$$\mathscr{Q}_w\colon R\text{-gmod}\to\widetilde{\mathscr{C}_w},$$

并且下图是拟交换的：



类似地，族 $(\psi_*(\mathsf{C}_i)\ \psi_*\circ R_{\mathsf{C}_i}\circ\psi_*,\phi_i)_{i\in I}$ 构成 R-gmod 中由个右编织子组成的实交换族，因此存在一个由该族得到的 $\mathscr{C}_w^*$ 和 R-gmod 的局部化 $\mathscr{C}_w^*$，其满足

然后，局部化函子也满足

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_w^* & \longrightarrow & R\text{-gmod} \\ & \searrow^{\Phi_w^*} & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{Q}_w^*} \\ & & \widetilde{\mathscr{C}}_w^*. \end{array}$$

注意，函子 $\mathscr{Q}_w^*$ 是复合

$$\mathscr{Q}_w^*\colon R\text{-gmod} \xrightarrow{\psi_*} (R\text{-gmod})^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\mathscr{Q}_w} (\widetilde{\mathscr{C}}_w)^{\mathrm{rev}} \xrightarrow{\psi_*} \widetilde{\mathscr{C}}_w^*.$$

注意，函子 Φ_w 是一个忠实正合幺半函子。特别地，态射 f in $\mathscr{C}_w$ isa 单态射（分别为满态射、同构）当且仅当 $\Phi_w(f)$ 也是如此。

~现在我们来证明 $\mathscr{C}_w \to \mathscr{C}_w$ 是完全忠实的。为此，我们从下面的命题开始。

命题 8.1. 设 C 是 R-gmod 中的一个实单模，且具有一个仿射化 (C z)。设 $X \in R$-gmod，并假设 $\mathbf{r}_{C,\ X} := \mathbf{R}_{\mathbf{C}}^{\mathrm{ren}},\ _X|_{z=0}\colon C \circ X \to X \circ C$在分次平移后是一个同构。那么对任意子模 $Y \subset C \circ X$，存在 $X' \subset X$ 使得 $Y = C \circ X'$。

证明。令 $\mathbf{r} := \mathbf{r}_{C,\ X}$。

考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} C \circ Y & & \longrightarrow & & Y \circ C \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C \circ C \circ X & \xrightarrow{\mathsf{id}} & C \circ C \circ X & \xrightarrow{C \circ \mathbf{r}} & C \circ X \circ C\ . \end{array}$$

因此我们有 $C \circ \mathbf{r}(Y) \subset Y \circ C \subset C \circ X \circ C$。根据拟刚性性质，存在 $X' \subset X$ 使得

$$\mathbf{r}(Y) \subset X' \circ C \quad \text{and} \quad C \circ X' \subset Y.$$

因此我们有

$$\dim(Y) = \dim(\mathbf{r}(Y)) \leqslant \dim(X' \circ C) = \dim(C \circ X') \leqslant \dim(Y).$$

由于 $\dim(C \circ X') = \dim(Y)$，我们得到 $Y = C \circ X'$，如所需。 □

推论 8.2。设 $M \in \mathscr{C}_w$。对于任意 $X \subset \Phi_w(M)$，存在 $X' \subset M$ 使得$X = \Phi_w(X')$。

~定理 8.3。 Φ_w: $\mathscr{C}_w \to \mathscr{C}_w$ 是完全忠实的。

证明。只需证明

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-gmod}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-gmod}}(\mathsf{C} \circ M, \mathsf{C} \circ N) \tag{8.3}$$

对于任意 $M, N \in \mathscr{C}_w$ 和 $\mathsf{C} = \mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)$，它是双射。单射性显然。下面证明任意 $f \in \mathrm{Hom}_{R\text{-gmod}}(\mathsf{C} \circ M, \mathsf{C} \circ N)$ 都属于 $\mathrm{Hom}_{R\text{-gmod}}(M, N)$ 的像。

令 $\varphi: \mathsf{C} \circ M \to (\mathsf{C} \circ M) \oplus (\mathsf{C} \circ N)$ 为 f 的图像，并令 $Z \subset (\mathsf{C} \circ M) \oplus (\mathsf{C} \circ N) \simeq \mathsf{C} \circ (M \oplus N)$ 为 φ 的像。于是，命题 8.1 表明存在$K \subset M \oplus N$使得 $Z = \mathsf{C} \circ K$。令 p_1: $K \to M$ 和 p_2: $K \to N$ 为投影。由于复合 $\mathsf{C} \circ M \xrightarrow{\sim} \mathsf{C} \circ K \xrightarrow{p_1} \mathsf{C} \circ M$ 是恒等映射，Φ_w 的忠实性表明 p_1 是同构。由于复合 $\mathsf{C} \circ M \xrightarrow{\sim} \mathsf{C} \circ K \xrightarrow{p_2} \mathsf{C} \circ N$ 等于 f，我们得到 $f = \mathsf{C} \circ (p_2\, p_1^{-1})$。□

Cor ~论 8.4. $\mathscr{C}_w$ 的全子范畴 $\mathscr{C}_w$ 在取子商时保持稳定 .

~证明。设 $Y \in \mathscr{C}_w$ 是 $X \in \mathscr{C}_w$的一个子对象。则存在 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$ 使得$\mathsf{C}_\Lambda \circ Y \subset \mathsf{C}_\Lambda \circ X$ 属于 $\mathscr{C}_w$。于是命题 8.1 推出 $Y \in \mathscr{C}_w$。 □

~注释 8.5。由于 $\mathscr{C}_w$ 是 $\mathscr{C}_w$的全子范畴，我们有时将 $\sim\mathscr{C}_w$ 中的对象视为 $\mathscr{C}_w$中的对象，即对 $M \in \mathscr{C}_w$，将 $\Phi_w(M)$与 M 视为同一对象。

~注 8.6。一般而言，全子范畴 $\mathscr{C}_w$ 在 $\mathscr{C}_w$ 中对扩张并不封闭。事实上，取一个中心 $C = \mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)$，我们得到一个 1 的扩张：

$$0 \to C \circ C^{-1} \longrightarrow (\widetilde{C}/z^2\widetilde{C}) \circ C^{-1} \longrightarrow C \circ C^{-1} \longrightarrow 0,$$

~其中 (C, z) 是 C 的一个仿射化。

~注意，$\mathscr{C}_w$ 是满足 (6.2) 且带有 $\Lambda = \mathsf{Q}$.~回顾一下，$\mathscr{C}_w$ 的实单对象若存在仿射化（见定义 6.7），则称其为仿实对象。由命题 6.19和推论6.21可立即得到以下命题。

~命题 8.7. 设 $X, Y \in \mathscr{C}_w$ 为单对象。假设其中一个是仿实的。那么，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}_w}}(X \circ Y, X \circ Y) = \mathbf{k}\,\mathsf{id}_{X\circ Y},$$
$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}_w}}(X \circ Y, Y \circ X) = \mathbf{k}\,\mathbf{r}_{X,Y}$$

对于某个非零的 $\mathbf{r}_{X,Y}$。

回顾一下，$\mathbf{r}_{X,Y}$ 是 X 与 Y 之间的 R矩阵，并用 $\Lambda(X, Y)$ 表示 $\mathbf{r}_{X,Y}$ 的次数。若存在某个 $X' \in \mathscr{C}_w$, $\lambda \in \mathsf{P}$ 和 $Y \in \mathscr{C}_w$，使得 $X \simeq X' \circ \mathsf{C}_\lambda$，则我们有

$$\Lambda(X, Y) = \Lambda(X', Y) + \Lambda(\mathsf{C}_\lambda, Y).$$

注意，$\Lambda(\mathsf{C}_\lambda, Y) = -\big(w\lambda + \lambda,\ \mathsf{wt}(Y)\big)$。

~引理 8.8。设 $\mathcal{C}$ 是 R-gmod 或 $\mathscr{C}_w$，并设 $Q\colon \mathcal{C} \to \mathscr{C}_w$ 为局部化函子。若 $(\mathsf{M}\ R_{\mathsf{M}})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的有理中心，则在 $\mathscr{C}_w$ 中存在一个有理中心~$(Q(\mathsf{M})\ R_{Q(\mathsf{M})})$，使得对于任意 $X \in \mathcal{C}$，$R_{Q(\mathsf{M})}(Q(X)) = Q\big(R_{\mathsf{M}}(X)\big)$。

~证明。令 $\mathcal{A}$ 为一个范畴，其对象是满足以下条件的对 (X, R)：$X \in \mathscr{C}_w$ 和 $_\sim R\colon Q(\mathsf{M}) \circ X \to X \circ Q(\mathsf{M})$ 是 $\mathrm{Raff}_z(\mathscr{C}_w)$ 中的一个同构。$_\sim\mathcal{A}$ 的态射以显然的方式定义，使得我们有一个忠实函子 $\mathcal{A} \to \mathscr{C}_w$。于是，

$\mathcal{A}$ 是一个阿贝尔范畴。它具有如下幺半结构：$(X,R)\otimes(Y\otimes S)=(Z,T)$，其中 $Z=X\circ Y$ 和 T 是复合

$$T\colon\ Q(\mathsf{M})\circ Z=Q(\mathsf{M})\circ X\circ Y\xrightarrow{R}X\circ Q(\mathsf{M})\circ Y\xrightarrow{S}X\circ Y\circ Q(\mathsf{M})=Z\circ Q(\mathsf{M}).$$

现在我们有一个幺半函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{A}$，它由 by 定义

$$F(X)=\big(Q(X),Q(R_{\mathsf{M}}(X))\big)\quad\text{for } X\in\mathcal{C}.$$

那么容易看出，对于任意 $i\in I$，$F(\mathsf{C}_i)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个可逆对象；并且对于任意 $X\in\mathcal{C}$，$F(R_{\mathsf{C}_i}(X))\widetilde{\ }$ 是一个同构。因此，由 $\mathcal{C}\to\mathscr{C}_w$ 的泛性质，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{A}$ 可扩张为 $F\colon\ \mathscr{C}_w\to\mathcal{A}$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$现在，对于任意 $X\in\mathscr{C}_w$，定义 $R_{Q(\mathsf{M})}(X)$ 为 $R_{Q(\mathsf{M})}(X)=R$，其中 $F(X)=(X,R)\in\mathcal{A}$。那么 $\big(Q(\mathsf{M})R_{Q(\mathsf{M})}\big)$ 是 $\widetilde{\mathscr{C}_w}$ 中的一个有理中心。□

9. Resultant algebra and Affinization of Invariants

9.1. 结式代数。设 A 是一个交换 k-代数。设 z 是一个不定元。回忆一下，若多项式 $f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n-k}\in A[z]$ 的次数为 n，且满足 $a_k\in A$和 $a_0\in\mathbf{k}^\times$（分别为 $a_0=1$），则称其为准首一（分别为首一）多项式。对于次数为 m 的准首一多项式 $f(z)$ 和次数为 n 的准首一多项式 $g(z)$，我们将它们的结式 $f\star g$ 记作

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(x_j-y_k)\equiv\prod_{j=1}^{m}g(x_j)\equiv\prod_{k=1}^{n}f(y_k)\mod\mathbf{k}^\times,$$

形式地写作 $f(z)=a\prod_{j=1}^{m}(z-x_j)$ 和 $g(z)=b\prod_{k=1}^{n}(z-y_k)$，其中 $a,b\in\mathbf{k}^\times$。这里，$B\equiv C\bmod\mathbf{k}^\times$ 表示对于某个 $c\in\mathbf{k}^\times$，有 $B=cC$。它是良定义的，因为 $\{x_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ 的任意对称多项式都可由 $f(z)$ 的系数表示。

我们将 $f\star g$ 视为 $A/\mathbf{k}^\times$ 的一个元素。

结式乘积满足：

$$f(z)\star g(z)\equiv g(z)\star f(z),$$
$$\big(f_1(z)\cdot f_2(z)\big)\star g(z)\equiv\big(f_1(z)\star g(z)\big)\big(f_2(z)\star g(z)\big).$$

系数属于 A 的准首一有理函数，是准首一齐次多项式 $f(z)$和$/g(z)$的商，其中这些多项式的系数属于 A。我们可以将它们视为 $A((z^{-1}))$中的元素；这是以 z^{-1} 为变量、系数属于 A的洛朗级数环。

当我们想强调 z时，记作$\overset{\star}{z}$。

在 z 和 z' 中，系数属于 A的准首一有理齐次函数，是准首一齐次多项式 $f(z,z')$和$/g(z,z')$的商；这两个多项式属于 z 和 z'，且系数属于 A。

设 A 是一个交换分次 k-代数，且 $A_{\leqslant 0}=\mathbf{k}$。对于正次数齐次不定元 $z_k(k=1,\dots,r)$，记 $\mathcal{M}(z_1,\dots,z_r)$为 $\subset A[z_1,\dots,z_r]/\mathbf{k}^\times$，它表示由系数属于 A、关于每个 $z_1,\dots z_k$均为准首一的 $z_1,\dots z_r$中的齐次多项式模 $\mathbf{k}^\times$所得的集合。于是我们可以定义

$$\overset{\star}{z_k}:\mathcal{M}(z_1,z_2,\dots,z_k)\times\mathcal{M}(z_k,\dots,z_r)\to\mathcal{M}(z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},\dots,z_r).$$

$f\overset{\star}{z_k}g$关于 $f\in\mathcal{M}(z_1,z_2,\dots,z_k)$ 和 $g\in\mathcal{M}(z_k,\dots,z_r)$ 的齐次次数由 $\deg(f)$ $\deg(g)$ $\deg(z_k)$ 给出，其中 $\deg(z_k)$、$\deg(f)$ 和 $\deg(g)$ 分别表示 z_k、f 和 g 的齐次度。

特别地，若 z 和 w 是次数相同的不定元，则 $\mathcal{M}(z,w)$ 具有半环结构（不要求存在加法逆元）：$\mathcal{M}(z,w)$ 中的加法是 $\mathbf{k}[z,w]$ 中的乘法，而 $\mathcal{M}(z,w)$ 中的乘法定义如下：$f(z,w)$ 与 $g(z,w)$ 的乘积 $h(z,w)$ 定义为 $h(z_1,z_3)\equiv f(z_1,z_2)\overset{\star}{z_2}g(z_2,z_3)$。我们称 $\mathcal{M}(z,w)$ 为结式代数。$\mathcal{M}(z,w)$ 中的乘法是交换的。记

$$\deg\colon\mathcal{M}(z,w)\to\mathbb{Z}$$

为取齐次次数的映射。那么 $f \mapsto \deg(f)/\deg(z)$ 是一个半环同态。

9.2. 不变量的仿射化，针对 R-模。设 R 是第 7 节中的箭图 Hecke 代数。对于 $i \in I$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $P(i^n)$ 为不可分解投射$R(n\alpha_i)$-模，其头同构于 $L(i^n)$。于是，对于一个 $R(\beta)$-模 M，我们定义

$$\begin{aligned} E_i^{(n)}M &:= \mathrm{Hom}_{R(n\alpha_i)}\big(P(i^n),\, e(n\alpha_i, \beta - n\alpha_i)M\big) \in \mathrm{Mod}(R(\beta - n\alpha_i)), \\ F_i^{(n)}M &:= P(i^n) \circ M \in \mathrm{Mod}(R(\beta + n\alpha_i)). \end{aligned}$$

函子 $E_i^{(1)}$ 和 $F_i^{(1)}$ 记作 E_i 和 F_i。

对于 $i \in I$ 和一个非零的 $R(\beta)$-模 M，我们定义

$$\mathrm{wt}(M) = -\beta, \quad \varepsilon_i(M) = \max\{k \geqslant 0 \mid E_i^k M \not\simeq 0\}, \quad \varphi_i(M) = \varepsilon_i(M) + \langle h_i, \mathrm{wt}(M)\rangle.$$

我们还以与上文相同的方式定义 E_i^*、F_i^*、ε_i^* 等，即将 $e(n\alpha_i, \beta - n\alpha_i)$、$P(i^n) \circ -$ 等替换为 $e(\beta - n\alpha_i, n\alpha_i)$、$- \circ P(i^n)$ 等。

定义 9.1. 设 $i \in I$，并令 M 为一个 $R(\beta)$-模。令 $m = \varepsilon_i(M)$、$m' = \varepsilon_i^*(M)$、$n = \mathrm{ht}(\beta)$。我们定义

$$(9.1) \qquad \begin{cases} \chi_i(M)\big(t_i\big) = \Big(\sum_{\nu \in I^\beta} \prod_{\nu_k = i} (t_i - x_k) e(\nu)\Big)\ \big|_M \in \mathrm{End}_R(M)[t_i], \\ \mathscr{E}_i(M)\big(t_i\big) = (t_i - x_1) \cdots (t_i - x_m)\ \big|_{E_i{}^{(m)}M} \in \mathrm{End}_R(E_i{}^{(m)}M)[t_i], \\ \mathscr{E}_i^*(M)\big(t_i\big) = (t_i - x_{n-m'+1}) \cdots (t_i - x_n)\ \big|_{E_i^{*\,(m')}M} \in \mathrm{End}_R(E_i^{*\,(m')}M)[t_i]. \end{cases}$$

注意，按照赋值 $\deg(t_i) = (\alpha_i, \alpha_i)$，首一多项式 $\chi_i(M)$、$\mathscr{E}_i(M)$ 和 $\mathscr{E}_i^*(M)$ 是齐次的。

对于实单模的一个仿射对象 $(\mathsf{M},\ z_{\mathsf{M}})$，我们有

$$\chi_i(\mathsf{M}), \mathscr{E}_i(\mathsf{M}), \mathscr{E}_i^*(\mathsf{M}) \in \mathbf{k}[t_i, z_{\mathsf{M}}],$$

并且它们满足

$$\chi_i(\mathsf{M}) \equiv \mathscr{E}_i(\mathsf{M}) \cdot \chi_i\big(E_i{}^{(m)}\mathsf{M}\big) \equiv \mathscr{E}_i^*(\mathsf{M}) \cdot \chi_i\big(E_i^{*\,(m')}\mathsf{M}\big),$$

其中 $m=\varepsilon_i(\mathsf{M})$ 和 $m'=\varepsilon_i^*(\mathsf{M})$（见 [13, 引理 2.7 (i)] 和 [11, 引理 3.3]）。回顾一下，对于准首一多项式 f 和 g，“$f\equiv g$”表示“$f\equiv g$ 模 $\mathbf{k}^\times$”。

引理 9.2. 设 $M\in$ 模范畴$(R(\beta))$、$N\in$ 模范畴$(R(\gamma))$，其中 $\beta,\gamma\in\mathsf{Q}_+$，$m=\mathsf{ht}(\beta)$,$n=\mathsf{ht}(\gamma)$。那么对于 $u\in M$ 和 $v\in N$，有

$$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{M,N}(u\boxtimes v)\in\tau_{w[n,m]}\prod_{i\in I}\chi_i(N)\underset{t_i}{\star}\chi_i(M)\big(v\boxtimes u\big)+\sum_{w<w[n,m]}\tau_w(N\boxtimes M).$$

证明。由 [7, (1.17)], 可得

$$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{M,N}(u\boxtimes v)\in\tau_{w[n,m]}\sum_{\nu\in I^{\beta+\gamma}}\prod_{\substack{1\leqslant a\leqslant n<b\leqslant n+m,\\ \nu_a=\nu_b}}(x_a-x_b)e(\nu)\big(v\boxtimes u\big)+\sum_{w<w[n,m]}\tau_w(N\boxtimes M).$$

□

定义 9.3. 设 $(\mathsf{M},z_{\mathsf{M}})$ 是实单模 M 的仿射化，且 $(\mathsf{N},z_{\mathsf{N}})$ 是实单 N 的仿射化。

(a) 回忆 $\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\in\mathbf{k}[z_{\mathsf{M}},z_{\mathsf{N}}]$ 是由下式给出的准首一多项式

$$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}}\circ\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}=\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\,\mathsf{id}_{\mathsf{M}\circ\mathsf{N}}.$$

(b) 记 $\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\in\mathbf{k}[z_{\mathsf{M}},z_{\mathsf{N}}]$ 为由下式给出的准首一多项式

$$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}(u\boxtimes v)\in\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\tau_{w[n,m]}(v\boxtimes u)+\sum_{w<w[n,m]}\tau_w(\mathsf{N}\boxtimes\mathsf{M})$$

对于 $u\in\mathsf{M}$ 和 $v\in\mathsf{N}$。注意，根据命题 6.2，$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$ 与 R 成比例$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$ 因此，根据引理 9.2，这样的准首一多项式 $\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})$ 存在。(c) 我们设

$$\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N}):=\frac{\prod_{i\in I}\big(\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}\chi_i(\mathsf{N})\big)^2}{\prod_{i\neq j}\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{N})}\in\mathbf{k}(z_{\mathsf{M}},z_{\mathsf{N}})/\mathbf{k}^\times,$$

$$\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N}):=\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})^2/\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N})\in\mathbf{k}(z_{\mathsf{M}},z_{\mathsf{N}})/\mathbf{k}^\times.$$

注意， $\mathscr{W}\mathsf{t}(\mathsf{M},\mathsf{N}) \equiv \mathscr{W}\mathsf{t}(\mathsf{N},\mathsf{M})$。

对于 R-gmod 中的简单对象 M、N，且其中一个为仿实对象，定义

$$\widetilde{\Lambda}(M,N) := \frac{1}{2}\big(\Lambda(M,N) + (\mathrm{wt}(M),\mathrm{wt}(N))\big).$$

这些不变量的齐次度如下：

$$\begin{aligned}
\deg\big(\chi_i(\mathsf{M})\big) &= n_i(\alpha_i,\alpha_i) \quad \text{where } \mathrm{wt}(M) = -\sum\nolimits_{i\in I} n_i\alpha_i,\\
\deg\big(\mathscr{E}_i(\mathsf{M})\big) &= \varepsilon_i(M)(\alpha_i,\alpha_i) = 2\widetilde{\Lambda}(L(i),M),\\
\deg\big(\mathscr{E}_i^*(\mathsf{M})\big) &= \varepsilon_i^*(M)(\alpha_i,\alpha_i) = 2\widetilde{\Lambda}(M,L(i)),\\
\deg\big(\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\mathfrak{d}(M,N),\\
\deg\big(\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\widetilde{\Lambda}(M,N),\\
\deg\big(\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\Lambda(M,N),\\
\deg\big(\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N})\big) &= 2\big(\mathrm{wt}(M),\mathrm{wt}(N)\big).
\end{aligned}$$

事实上，第五个等式见[11, 引理 3。11]对于最后一个等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\deg(\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N}))\\
&= \sum_{i\in I}(2\deg(\chi_i(\mathsf{M}))\deg(\chi_i(\mathsf{N}))/\deg(t_i)) - \sum_{i\neq j}\left(\deg(\chi_i(\mathsf{M}))\deg(\chi_j(\mathsf{N}))\frac{\deg(Q_{i,j}(t_i,t_j))}{\deg(t_i)\deg(t_j)}\right)\\
&= 2\sum_{i,j\in I}\left(\frac{\deg(\chi_i(\mathsf{M}))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\frac{\deg(\chi_j(\mathsf{N}))}{(\alpha_j,\alpha_j)}(\alpha_i,\alpha_j)\right) = 2\big(\mathrm{wt}(\mathsf{M}),\mathrm{wt}(\mathsf{N})\big).
\end{aligned}$$

其余等式可直接由定义得到。另见 [9, 推论 3.8] ，其中给出了第二个和第三个等式。

因此，这些不变量是 wt、d 的仿射化，$\widetilde{\Lambda}$，等等。

由引理 9.2 和定义 9.3 (b，可得

$$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \frac{\prod_{i\in I}\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}\chi_i(\mathsf{N})}{\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})}\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}. \tag{9.2}$$

引理 9.4。我们有

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{N},\mathsf{M})\equiv\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N}),$$
$$\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})^2\equiv\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\mathscr{L}(\mathsf{N},\mathsf{M}).$$

证明。 根据 [7, 命题 1.10 (iv)] 对于 $u\in\mathsf{M}$ 和 $v\in\mathsf{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}}\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}(u\boxtimes v)&=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant m<b\leqslant m+n,\\ \nu\in I^{\beta+\gamma},\,\nu_a\neq\nu_b}}Q_{\nu_a,\nu_b}(x_a,x_b)e(\nu)\big(u\boxtimes v\big)\\&=\Big(\prod_{i\neq j}\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{N})\Big)(u\boxtimes v).\end{aligned}\tag{9.3}$$

另一方面，(9.2) 可推出

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}}\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}(u\boxtimes v)&=\frac{\prod_{i\in I}\big(\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}\chi_i(\mathsf{N})\big)^2}{\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{N},\mathsf{M})}\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}}\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}(u\boxtimes v)\\&=\frac{\prod_{i\in I}\big(\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}\chi_i(\mathsf{N})\big)^2}{\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{N},\mathsf{M})}\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})(u\boxtimes v).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\prod_{i\neq j}\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{N})=\frac{\prod_{i\in I}\big(\chi_i(\mathsf{M})\underset{t_i}{\star}\chi_i(\mathsf{N})\big)^2}{\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{N},\mathsf{M})}\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N}),$$

这就推出了所需的结论。 □

引理 9.5. 设 (L w)、(M z)、(N z)、(X z) 分别是简单对象 L、M、N、X 在 R-gmod 中的仿射化，并假设 L 是实的。若在 $\mathbf{Pro}_{\mathrm{coh}}(\mathbf{k}[z],R\text{-gmod})$ 中存在满态射 $\mathsf{M}\overset{\circ}{z}\mathsf{N}\twoheadrightarrow\mathsf{X}$，则存在 $a\in\mathbf{k}[z,w]\setminus\{0\}$，使得下图

交换。

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{L}\circ\mathsf{M}\circ\mathsf{N} & \xrightarrow[\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{L},\mathsf{M}}]{} & \mathsf{M}\circ\mathsf{L}\circ\mathsf{N} & \xrightarrow[\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{L},\mathsf{N}}]{} & \mathsf{M}\circ\mathsf{N}\circ\mathsf{L} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathsf{L}\circ\mathsf{X} & & \xrightarrow{a\,\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{L},\mathsf{X}}} & & \mathsf{X}\circ\mathsf{L}. \end{array}$$

特别地，我们有 $\mathscr{L}(\mathsf{L},\mathsf{M})\mathscr{L}(\mathsf{L},\mathsf{N}) = a\mathscr{L}(\mathsf{L},\mathsf{X})$。若进一步假设 $\Lambda(L,X) = \Lambda(L,M) + \Lambda(L,N)$，则 $a \equiv 1$ in $\mathbf{k}[z,w]$。

证明。由于 $\mathrm{H}^{\mathrm{OM}_{\mathbf{k}[z,w]}}(\mathsf{L}\circ\mathsf{X},\mathsf{X}\circ\mathsf{L}) = \mathbf{k}[z,w]\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{L},\mathsf{X}}$ 由命题 6.2，这样的 $a \in \mathbf{k}[z,w]$ 存在。其他断言显然成立。□

引理 9.6. 设 $i \in I$，$M \in R(m\alpha_i)$-gmod，且 $N \in R(n\alpha_i)$-gmod。假设 $(\mathsf{M}\ z_{\mathsf{M}})$ 和 $(\mathsf{N}\ z_{\mathsf{N}})$ 分别是 M 和 N 的仿射化。则 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$ 且 $\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N}) \equiv \chi_i(\mathsf{M}) \overset{\star}{}_{t_i} \chi_i(\mathsf{N})$。

证明。由（9.3），$\mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} \circ \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{N},\mathsf{M}} = \mathrm{id}$ 因此我们有 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}} = \mathrm{R}^{\mathrm{uni}}_{\mathsf{M},\mathsf{N}}$。由（9.2），我们有 $\mathscr{L}(\mathsf{M},\mathsf{N}) \equiv \chi_i(\mathsf{M}) \overset{\star}{}_{t_i} \chi_i(\mathsf{N})$。□

命题 9.7. 设 M 是 R-gmod 中简单模 M 的一个仿射化。那么对于每个 $i \in I$，我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_i(\mathsf{M}) &\equiv \widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{L}(i)_{t_i},\mathsf{M}), \\ \mathscr{E}_i^*(\mathsf{M}) &\equiv \widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\widetilde{L}(i)_{t_i}), \\ \mathscr{W}t(\widetilde{L}(i)_{t_i},\mathsf{M}) &\equiv \frac{\chi_i(\mathsf{M})^2}{\prod_{j\neq i} Q_{i,j}(t_i,t_j) \overset{\star}{}_{t_j} \chi_j(\mathsf{M})}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

这里，$L(i)_{t_i}$ 是由 $R(\alpha_i)$ 给出的 $L(i)$ 的仿射化，其中 $t_i = x_1$。

证明。设 $m := \varepsilon_i(M)$、$M_0 := E_i^{(m)}M$，且 $\mathsf{M}_0 := E_i^{(m)}\mathsf{M}$，使得 M_0 是 M_0 的仿射化。由 [11]，存在 $L(i^m)$ 的一个仿射化 L，使得 $\chi_i(\mathsf{L}) = \mathscr{E}_i(\mathsf{M})$

命题 3。6]。于是我们有一个满态射 $\mathsf{L}\circ\mathsf{M}_0 \twoheadrightarrow \mathsf{M}$ 这是由于 L 在 [11,注 3。8]。因此我们有

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\langle i\rangle_{t_i},\mathsf{M})\equiv\widetilde{\mathscr{L}}(\langle i\rangle_{t_i},\mathsf{L})\,\widetilde{\mathscr{L}}(\langle i\rangle_{t_i},\mathsf{M}_0)\equiv\widetilde{\mathscr{L}}(\langle i\rangle_{t_i},\mathsf{L})=\chi_i(\mathsf{L})=\mathscr{E}_i(\mathsf{M}).$$

这里，第一个等式由 [12, 推论 212] 和引理 9.5 以及 $\langle i\rangle$ 和 M_0 都是无混合的这一事实得出。第二个等式由引理 9.10得出，第三个等式则由引理 9.6得出。

第二个断言可以用类似的方法证明，最后一个断言则是显然的。□

命题 9.8。设 $i\in I$，并设 $(\mathsf{M}\ z_{\mathsf{M}})$ 是简单模 M 的一个仿射化。令 $m=\varepsilon_i(M)$ 且 $\mathsf{M}_0=E_i^{(m)}\,\mathsf{M}$。于是有

$$\mathscr{D}\big(\mathsf{M},\widetilde{L}(i)_{t_i}\big)\chi_i(\mathsf{M})\chi_i(\mathsf{M}_0)\equiv\mathscr{E}_i^*(\mathsf{M})\prod_{j\neq i}Q_{ij}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{M}_0).$$

~证明。 令 $\mathsf{N}=L(i)_{t_i}$。那么引理 9.4 推出

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\widetilde{\mathscr{L}}(\mathsf{N},\mathsf{M})\equiv\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\mathscr{W}t(\mathsf{M},\mathsf{N}),$$

这可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_i(\mathsf{M})\mathscr{E}_i^*(\mathsf{M})&\equiv\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\frac{\chi_i(\mathsf{M})^2}{\prod_{j\neq i}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{M})}\\&\equiv\mathscr{D}(\mathsf{M},\mathsf{N})\cdot\frac{\chi_i(\mathsf{M})\mathscr{E}_i(\mathsf{M})\chi_i(\mathsf{M}_0)}{\prod_{j\neq i}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{M}_0)}\ .\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

推论 9.9. 设 $i\in I$，并设 $(\mathsf{M}\ z_{\mathsf{M}})$ 是简单模 M 的仿射化。令 $m=\varepsilon_i(M)$ 和 $\mathsf{M}_0=E_i^{(m)}\mathsf{M}$。我们进一步假设 $\mathsf{d}_i(M)=0$，即 $M\mathrm{and}L(i)$ 可交换。（注意，$\mathsf{d}_i(M):=\varepsilon_i(M)+\varepsilon_i^*(M)+\langle h_i,\ \mathsf{wt}(M)\rangle$。）于是有

$$\chi_i(\mathsf{M})\chi_i(\mathsf{M}_0)\equiv\mathscr{E}_i^*(\mathsf{M})\prod_{j\neq i}Q_{ij}(t_i,t_j)\underset{t_j}{\star}\chi_j(\mathsf{M}_0).$$

~证明。由 d(M, L(i)) = 0 可得，这意味着 $\mathscr{D}$(M L(i)t_i) ≡ 1。 □

若M-模的有序对 (N, R) 满足

$$\mathsf{W}^*(M) \cap \mathsf{W}(N) \subset \{0\}.$$

引理 9.10。设 M 和 N 分别是 R-gmod 中实单模 M 和$\sim N$的仿射化。若 (M, N) 是无混合的，则 $\mathscr{L}$(M, N) ≡ 1。

~ ~证明。由[12, 推论 2。12], 可得 $\Lambda(M, N) = 0$，因此 $\mathscr{L}$(M, N) ≡ 1。 □

9.3. 仿射化的例子。以下结果将在后文中用到。

引理 9.11。设 $c \in \mathbb{Z}_{>0}$。假设 $Q_{i,j}(u, v) = v - u^c$，其中 $\langle h_i, \alpha_j \rangle = -c$和$\langle h_j, \alpha_i \rangle = -1$。

对于满足 $0 \leqslant m \leqslant c$ 的 $m \in \mathbb{Z}$，令 $L = \langle i^m \rangle$。设 (L z) 是 L 的仿射化，其 deg(z) = (α_i, α_i)，并满足 χ_i(L)(t_i) = f(t_i, z)；其中 f(t_i, z) 在 t_i 中是次数为 m 的准首一元，在 z 中也是如此（见命题 3.6] [11, ）。

(i) $M := L \nabla \langle j \rangle \simeq L \otimes \langle j \rangle$ 作为一个 $R(m\alpha_i) \boxtimes R(\alpha_j)$-模。此外，$\tau_m$ 在 $L \nabla \langle j \rangle$ 上作用为 0。(ii) 若 $f(t_i, z)$ 整除 $Q_{i,j}(t_i, z^c)$，则 M :=L$\otimes_{\mathbf{k}[z]} \langle j \rangle_{z^c}$ 具有 R($m\alpha_i + \alpha_j$)-模结构，其中 $\tau_m = 0$。此外，M 是 M 的仿射化。

证明。（i）我们可以很容易地在 M 上验证 $R(m\alpha_i + \alpha_j)$ 的定义关系。特别地，关系 $\tau_m^2 = Q_{i,j}(x_m, x_{m+1})$ 可由 $x_m^m|_L = 0$ 得出。
（ii）我们可以很容易地在 M 上验证 $R(m\alpha_i + \alpha_j)$ 的定义关系。特别地，关系 $\tau_m^2 = Q_{i,j}(x_m, x_{m+1})$ 是 $Q_{i,j}(x_m, x_{m+1})|_{\mathsf{M}} = 0$ 的推论，而后者由 $f(x_m, z)|_{\mathsf{L}} = 0$ 和在 M 上的 $Q_{i,j}(x_m, x_{m+1}) = Q_{i,j}(x_m, z^c)$ 得出。

□

10. Saito Reflection functors for R-g模范畴 via localization

10.1. $\mathscr{C}_{s_i w_0}$ 和 $\mathscr{C}^*_{s_i w_0}$。在下文中，我们假设 C = $\{c_{i,j}\}_{i,j \in I}$ 是有限型 Cartan 矩阵，且 C 不属于类型 A_1。

设 w_0 为 Weyl 群 W 的最长元素。设 $i \mapsto i^*$ 为由 $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$确定的$I$ 上的对合。

在本节中，我们固定 $i \in I$。

我们有

$$\mathscr{C}_{s_i w_0} = \{M \in R\text{-gmod} \mid E_i M \simeq 0\},$$
$$\mathscr{C}^*_{s_i w_0} = \{M \in R\text{-gmod} \mid E_i^* M \simeq 0\},$$

其中， E_i 和 E_i^* 分别表示由 $M \mapsto e(\alpha_i, \beta - \alpha_i)M$和 $M \mapsto e(\beta - \alpha_i, \alpha_i)M$给出的函子 $R(\beta)$-gmod $\to R(\beta - \alpha_i)$-gmod。

注意，在 C 为 A_1 型的情况下， $\mathscr{C}_{s_i w_0} \simeq \mathscr{C}^*_{s_i w_0} \simeq 0$ 。

那么， $\{\mathsf{M}(s_i w_0\Lambda, \Lambda)\}_{\Lambda \in \mathsf{P}_+}$是 $\mathscr{C}_{s_i w_0}$中的一族中心对象，而 $\{\mathsf{M}(w_0\Lambda, s_i\Lambda)\}_{\Lambda \in \mathsf{P}_+}$是 $\mathscr{C}^*_{s_i w_0}$中的一族中心对象。注意

$$\mathsf{M}(s_i w_0\Lambda, \Lambda) = E_i^{(\langle h_{i^*}, \Lambda\rangle)}\mathsf{M}(w_0\Lambda, \Lambda) \quad \text{and} \quad \mathsf{M}(w_0\Lambda, s_i\Lambda) = E_i^{*(\langle h_i, \Lambda\rangle)}\mathsf{M}(w_0\Lambda, \Lambda).$$

令 $\mathsf{C}_\Lambda := \mathsf{M}(s_i w_0\Lambda, \Lambda)$，且 $\mathsf{C}^*_\Lambda := \mathsf{M}(w_0\Lambda, s_i\Lambda)$，其中 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$。我们令 $\mathsf{C}_j = \mathsf{C}^{\Lambda_j}$和 $\mathsf{C}^*_j = \mathsf{C}^*_{\Lambda_j}$。由于我们有

$$\psi_*\big(\mathsf{M}(v\Lambda, v'\Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(-v'\Lambda, -v\Lambda)$$

对于任意 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$ 以及任意 v， $v' \in \mathsf{W}$ 使得 $v \geqslant v'$ ([12, 引理 2。23])，我们有

$$\psi_*(\mathsf{C}_j) \simeq \mathsf{C}^*_{j^*} \quad \text{for any } j \in I.$$

(关于 ψ，参见 (8.2)。) 那么我们有（参见 [11, §5。1] 和 [9, 推论 3。8]）

$$\Lambda(\mathsf{C}_\Lambda, \langle j\rangle) = (s_i w_0\Lambda + \Lambda, \alpha_j),$$
$$\Lambda(\langle j\rangle, \mathsf{C}^*_\Lambda) = -(w_0\Lambda + s_i\Lambda, \alpha_j), \qquad \text{for any } j \in I.$$

我们有

$$\mathscr{Q}_{s_i w_0}\big(\langle i\rangle\big) \simeq \mathsf{C}_{i^*}^{\circ -1} \circ \big(\mathsf{C}_{i^*} \nabla \langle i\rangle\big),$$
$$\mathscr{Q}^*_{s_i w_0}\big(\langle i\rangle\big) \simeq \big(\langle i\rangle \nabla \mathsf{C}^*_i\big) \circ \mathsf{C}_i^{*\circ -1}.$$

~10.2. 舒尔-外尔数据。对于任意 $j \in I$，定义一个 $\mathscr{C}^*_{s_i w_0}$ 的对象：

$$\mathrm{K}_j := \begin{cases} \mathscr{D}\big(\mathscr{Q}^*_{s_i w_0}(\langle i \rangle)\big) \simeq (E_i \mathsf{C}^*_{i^*}) \circ \mathsf{C}^{*\,\circ -1}_{i^*} & \text{if } j = i, \\ \mathsf{M}(s_i s_j \Lambda_j, \Lambda_j) \simeq \langle i^{-\mathsf{c}_{i,j}} \rangle \nabla \langle j \rangle & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

回忆一下，$\mathscr{D}$是右对偶函子。注意，作为向量空间，$\mathrm{K}_j \simeq \langle i^{-\mathsf{c}_{i,\,j}} \rangle \otimes \langle j \rangle$，对于任意 $k \in I \setminus \{j\}$，有 $j \neq i$，因为 $E^*_k(\mathrm{K}j) \simeq 0$。

由于 $\langle i \rangle = L(i) = R(\alpha_i)/R(\alpha_i)x_1$ 且 $\langle i^{-\mathsf{c}_{i,\,j}} \rangle \nabla \langle j \rangle \simeq \mathsf{M}(s_i s_j \Lambda_j,\ \Lambda_j)$ 通过 [11, 定理 326], 具有典范仿射化，因此由引理6.6和引理8.8，我们得到 K 的如下仿射化。

$$\widehat{\mathrm{K}}_j := \begin{cases} \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}\big(\mathscr{Q}^*_{s_i w_0}(\langle i \rangle_{z_i})\big) & \text{if } j = i, \\ \big(\langle i^{-\mathsf{c}_{i,j}} \rangle \nabla \langle j \rangle\big)_{z_j} & \text{if } j \neq i. \end{cases} \tag{10.1}$$

~这里，函子 $\mathscr{Q}^*_{s_i w_0} : \mathsf{Pro}(R\text{-gmod}) \to \mathsf{Pro}(\mathscr{C}^*_{s_i w_0})$ 由 $\mathscr{Q}^*_{s_i w_0} : R\text{-gmod} \to \mathscr{C}^*_{s_i w_0}$ 诱导。注意，对于任意 $j \in I$，有 $\deg z_j = (\alpha_j, \alpha_j)$。对于 $j \in I \setminus \{i\}$，我们有

$$\chi_k\big(\widehat{\mathrm{K}}_j\big)(t_k) \equiv \begin{cases} t_j - z_j & \text{if } k = j, \\ Q_{i,j}(t_i, z_j) & \text{if } k = i, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10.2}$$

^注意到 $\chi_i(\mathrm{K}j) \equiv Q_{i,j}(t_i, z_j)$ 也可由推论 9.9得出。

我们有

$$E_i \mathsf{C}^*_{i^*} \simeq \mathsf{M}(s_i w_0 \Lambda_{i^*}, s_i \Lambda_{i^*}).$$

（注意，由于 $s_i \leqslant s_i w_0$，所以 $\mathfrak{g} \neq A_1$。）

注意到

$$\Lambda\big(\langle j \rangle, \langle k \rangle\big) = -(\alpha_j, \alpha_k)\delta(j \neq k) \quad \text{for any } j, k \in I.$$

命题 10.1. 对任意 j、$k \in I$，我们有

$$\Lambda(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_k) = \Lambda\big(\langle j \rangle, \langle k \rangle\big)$$

但 C 为 A_2 型和 $j \neq k = i$ 型的情形除外。在最后一种情形中，我们有 $\Lambda\big(\mathrm{K}_j,\ \mathrm{K}_k\big) = -1$。特别地，我们有

$$\mathfrak{b}(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_k) = \mathfrak{b}\big(\langle j\rangle, \langle k\rangle\big)$$

除非 C 属于类型 A_2。

证明。当 C 属于类型 A_2 时，我们可以直接证明。因此，我们假设 C 不属于类型 A_2。

(i) 设 $j, j' \in I \setminus \{i\}$ 满足 $j \neq j'$。令 $a = -\langle h_i, \alpha_j\rangle$ 和 $a' = -\langle h_i, \alpha_{j'}\rangle$。于是有

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_{j'}) &= \Lambda\big(\langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle, \langle i^{a'}\rangle \nabla \langle j'\rangle\big) \\
&\underset{(1)}{=} \Lambda\big(\langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle, \langle i^{a'}\rangle\big) + \Lambda\big(\langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle, \langle j'\rangle\big) \\
&\underset{(2)}{=} -\Lambda\big(\langle i^{a'}\rangle, \langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle\big) + \Lambda\big(\langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle, \langle j'\rangle\big) \\
&\underset{(3)}{=} -\Lambda\big(\langle i^{a'}\rangle, \langle j\rangle\big) + \Lambda\big(\langle i^a\rangle, \langle j'\rangle\big) + \Lambda\big(\langle j\rangle, \langle j'\rangle\big) \\
&= a'(\alpha_i, \alpha_j) - a(\alpha_i, \alpha_{j'}) + \Lambda\big(\langle j\rangle, \langle j'\rangle\big) \\
&= \Lambda\big(\langle j\rangle, \langle j'\rangle\big).
\end{aligned}$$

这里，$=_{(1)}$ 以及 $=_{(2)}$ 由以下事实可得：$\langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle$ 以及 $\langle i^{a'}\rangle$ 可交换。等式 $=_{(3)}$ 由以下事实可得：$\big(\langle i^a\rangle,\ \langle j'\rangle\big)$ 是无混合的，且 [12, 推论 2.3、推论 2.12]。

(ii) 对于 $j \in I \setminus \{i\}$，我们来证明 $\Lambda(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_i) = \Lambda(\langle j\rangle, \langle i\rangle)$。令 $a = -\langle h_i, \alpha_j\rangle$。由于 $\langle i\rangle$ 与 K_j 可交换，因此有

$$\Lambda(\mathrm{K}_j, \mathsf{C}^*_{i^*}) = \Lambda(\mathrm{K}_j, \langle i\rangle \nabla E_i \mathsf{C}^*_{i^*}) = \Lambda(\mathrm{K}_j, \langle i\rangle) + \Lambda(\mathrm{K}_j, E_i \mathsf{C}^*_{i^*}).$$

因此

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_i) &= \Lambda(\mathrm{K}_j, E_i \mathsf{C}^*_{i^*}) - \Lambda(\mathrm{K}_j, \mathsf{C}^*_{i^*}) \\
&= -\Lambda(\mathrm{K}_j, \langle i\rangle) = \Lambda(\langle i\rangle, \mathrm{K}_j) \\
&= \Lambda(\langle i\rangle, \langle i^a\rangle \nabla \langle j\rangle) = \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle) = -(\alpha_i, \alpha_j) = \Lambda(\langle j\rangle, \langle i\rangle).
\end{aligned}$$

（iii）对于 $j \in I \setminus \{i\}$，我们来证明 $\Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) = \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle)$。

令 $C = \mathsf{C}^*_{i*\circ}$。我们有

$$\big(\mathrm{wt}(E_iC), \mathrm{wt}(\mathrm{K}_j)\big) - \big(\mathrm{wt}(C), \mathrm{wt}(\mathrm{K}_j)\big) = (\alpha_i, -s_i\alpha_j) = (\alpha_i, \alpha_j).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) - \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle)\\
&\quad = \Lambda(E_iC, \mathrm{K}_j) - \Lambda(C, \mathrm{K}_j) + (\alpha_i, \alpha_j)\\
&\quad = \Big(\Lambda(E_iC, \mathrm{K}_j) + \big(\mathrm{wt}(E_iC), \mathrm{wt}(\mathrm{K}_j)\big)\Big) - \Big(\Lambda(C, \mathrm{K}_j) + \big(\mathrm{wt}(C), \mathrm{wt}(\mathrm{K}_j)\big)\Big)\\
&\quad = 2\widetilde{\Lambda}(E_iC, \mathrm{K}_j) - 2\widetilde{\Lambda}(C, \mathrm{K}_j)\\
&\quad = 2\widetilde{\Lambda}(E_iC, \mathrm{K}_j) - 2\widetilde{\Lambda}(L(i) \nabla (E_iC), \mathrm{K}_j)\\
&\quad \leqslant 0.
\end{aligned}$$

这里最后一个不等式由[12, 定理 2。11]得出。因此，我们得到

$$\Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) \leqslant \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle).$$

因此，只需证明

$$\text{if } \Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) < \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle), \text{ then } \mathsf{C} \text{ is of type } A_2. \tag{10.3}$$

假设 $\Lambda(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) < \Lambda(\langle i\rangle, \langle j\rangle)$。那么 (ii) 意味着

$$\mathfrak{d}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) < \mathfrak{d}(\langle i\rangle, \langle j\rangle) = \delta\big((\alpha_i, \alpha_j) < 0\big) \max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j).$$

此处 $\mathsf{d}_k = (\alpha_k, \alpha_k)/2$。因此我们有 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$。由于 K_i 和 C 是次数为 $2\mathsf{d}_i$ 的仿实对象，而 K_j 是次数为 $2\mathsf{d}_j$ 的仿实对象，我们有 $\mathsf{d}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) \in \mathbb{Z}\max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j)$。从而得到 $\mathsf{d}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) = 0$。因此我们有 $\mathsf{d}(E_iC, K_j) = 0$。于是，$\mathrm{K}_j \circ (E_iC)$ 是简单的。

令 $c = -\langle h_i, \alpha_j\rangle > 0$。于是我们有 $\mathrm{K}_j = \langle i^c\rangle \nabla \langle j\rangle$。复合

$$(\langle i^c\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ (E_iC) \rightarrowtail (\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ \langle i\rangle \circ (E_iC) \twoheadrightarrow (\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ C$$

根据 [8, 引理 3.1.5]，它不为零。由于 $(\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ C$ 也是简单的，我们得到

$$(\langle i^c\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ (E_iC) \simeq (\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle) \circ C.$$

比较它们的维数，我们得到

$$c!\cdot\dim(E_iC)\cdot\frac{(c+s)!}{(c+1)!\,(s-1)!}=(c-1)!\cdot\dim(C)\cdot\frac{(c+s)!}{c!\;s!}\,.$$

这里，$s:=\mathsf{ht}(\mathsf{wt}(C))\;=\mathsf{ht}(\Lambda_{i^*}-w_0\Lambda_{i^*})-\delta_{i,i^*}$。注意，如果 $0\leqslant a\leqslant-\langle h_i,\alpha_j\rangle$，则 $\langle i^a\rangle\otimes\langle j\rangle\to\langle i^a\rangle\nabla\langle j\rangle$ 是双射。

由于对于任意 $j\in I\setminus\{i\}$，$E_jC\simeq0$，我们得到 $\mathsf{dim}(E_iC)\;=\mathsf{dim}\;C$。因此我们得到

$$s=\frac{c+1}{c}\,.$$

因此我们得到 $c=1$ 和 $s=2$。注意 $\mathsf{rank}\,\mathfrak{g}\leqslant s+1=3$。然后容易验证，如果 $2\leqslant\mathsf{rank}(\mathfrak{g})\leqslant3$ 且 $c=1$，那么除非 $\mathfrak{g}=A_2$，否则 $s\geqslant3$。□

命题 10.2. 对于任意满足 $j\neq k$ 的 $j,k\in I$，我们有

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_k)\equiv Q_{j,k}(z_j,z_k)$$

除非 C 是 A_2 型。在后一种情况下，我们有 $\mathscr{D}\big(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_k\big)\equiv1$。

证明。当 C 是 A_2 型时，我们可以直接证明。因此，假设 C 不是 A_2 型。

(i) 令 $j,\;j'\in I\setminus\{i\}$ 满足 $j\neq j'$。由于 $(\mathrm{K}_j,\mathrm{K}_{j'})$ 和 $(\mathrm{K}_{j'},\mathrm{K}_j)$ 是无混合的，根据引理 9.10，我们有

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\equiv\widetilde{\mathscr{L}}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'},\widehat{\mathrm{K}}_j)\equiv1.$$

根据引理 9.4，我们得到

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\equiv\widetilde{\mathscr{L}}(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\cdot\widetilde{\mathscr{L}}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'},\widehat{\mathrm{K}}_j)\cdot\mathscr{W}t(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})^{-1}\equiv\mathscr{W}t(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})^{-1}.$$

由（（10.2）可得

$$\mathscr{W}t(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})=\frac{\Big(\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_i}{\star}\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\Big)^2}{A},$$

其中

$$A=\big(\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_i}{\star}Q_{i,j'}(t_i,t_{j'})\underset{t_{j'}}{\star}\chi_{j'}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\big)\cdot\big(\chi_j(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_j}{\star}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_i}{\star}\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\big)\\ \cdot\big(\chi_j(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_j}{\star}Q_{j,j'}(t_j,t_{j'})\underset{t_{j'}}{\star}\chi_{j'}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\big).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}Q_{i,j}(t_i,z_j)\underset{t_i}{\star}Q_{i,j'}(t_i,z_{j'})&=\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_i}{\star}\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\\&=\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_i}{\star}Q_{i,j'}(t_i,t_{j'})\underset{t_{j'}}{\star}\chi_{j'}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\\&=\chi_j(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_j}{\star}Q_{i,j}(t_i,t_j)\underset{t_i}{\star}\chi_i(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})\end{aligned}$$

and

$$\chi_j(\widehat{\mathrm{K}}_j)\underset{t_j}{\star}Q_{j,j'}(t_j,t_{j'})\underset{t_{j'}}{\star}\chi_{j'}(\widehat{\mathrm{K}}_{j'})=Q_{j,j'}(z_j,z_{j'}).$$

因此，我们有

$$\mathscr{W}t(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})=Q_{j,j'}(z_j,z_{j'})^{-1}$$

and

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathrm{K}}_j,\widehat{\mathrm{K}}_{j'})=Q_{j,j'}(z_j,z_{j'}).$$

(ii) 这是显然的 $\mathscr{D}(\mathrm{K}_i,\mathrm{K}_j)\equiv 1$ 使得 $j\in I$ 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$，因为 $\mathrm{d}(\mathrm{K}_i,\mathrm{K}_j)=0$。

(iii) 让我们证明 $\mathscr{D}(\mathrm{K}_i,\mathrm{K}_j)\equiv Q_{i,j}(z_i,z_j)$，其中 $j\in I$ 满足 $\langle h_i,\alpha_j\rangle=-1$。

在这种情况下，我们有 $c:=\mathrm{d}_i/\mathrm{d}_j=-\langle h_j,\alpha_i\rangle\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 并且可以假设 $Q_{i,j}(z_i,z_j)=z_i-z_j^c$。令 $f(z_i,z_j):=\mathscr{D}(\mathrm{K}_i,\mathrm{K}_j)$。那么由命题 10.1，$\deg f(z_i,z_j)=\deg Q_{i,j}(z_i,z_j)$。

注意 $\mathrm{K}_j\simeq\langle i\rangle_{z_j^c}^{\wedge}\otimes_{\mathbf{k}[z_j]}\langle j\rangle_{z_j}$ 作为一个 $\mathbf{k}[z_j]$-模，且 τ_1 的作用为零。因此它是 $\langle i\rangle_{z_j^c}\underset{z_j}{\circ}\langle j\rangle_{z_j}$ 的一个商对象，因此由引理 6.27，我们有 $\mathrm{K}_j\simeq\langle i\rangle_{z_j^c}\nabla_{z_j}\langle j\rangle_{z_j}\rightarrowtail\langle j\rangle_{z_j}\underset{z_j}{\circ}\langle i\rangle_{z_j^c}$。

我们有

$$\widehat{\mathrm{K}}_j\underset{z_j}{\circ}\big(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=z_j^c}\big)\rightarrowtail\langle j\rangle_{z_j}\underset{z_j}{\circ}\langle i\rangle_{z_j^c}\underset{z_j}{\circ}\big(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=z_j^c}\big)\twoheadrightarrow\langle j\rangle_{z_j},$$

这意味着存在一个满态射

$$\widehat{\mathrm{K}}_j \underset{z_j}{\circ} \left(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=z_j^c}\right) \twoheadrightarrow \langle j\rangle_{z_j}, \tag{10.4}$$

因为对 $(\mathbf{k}[z_j]/z_j\mathbf{k}[z_j]) \otimes_{\mathbf{k}[z_j]} \bullet$ 进行运算后仍然如此。

因此命题 6.29 说明 $z_j - w$ 整除 $f(w^c, z_j)$，即 $f(w^c, w) = 0$。因此 $Q_{i,\ j}(z_i, z_j) = z_i - z_j^c$ 整除 $f(z_i, z_j)$。比较它们的次数可知，$f(z_i, z_j) = Q_{i,\ j}(z_i, z_j)$ 相差一个常数因子。

(iv) 现在证明，对于满足 $-\langle h_i, \alpha_j\rangle > 1$ 的 $j \in I$，有 $\mathscr{D}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j) \equiv Q_{i,j}(z_i, z_j)$。

在这种情况下，我们有 $c := \mathrm{d}_j/\mathrm{d}_i = -\langle h_i, \alpha_j\rangle \in \mathbb{Z}_{>1}$，并且可以假设 $\prec \prec Q_{i,j}(z_i, z_j) = z_j - z_i^c$。令 $f(z_i, z_j) := \mathscr{D}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j)$。根据命题 10.1，我们有 $\deg f(z_i, z_j) = \deg Q_{i,j}(z_i, z_j)$。

设 $\mathrm{M}|_{z_j=w^c}$ 的次数为 $\deg(w) = \mathrm{d}_i$。将 $\mathbf{k}$ 替换为其代数闭包后，我们可以假设 $\mathbf{k}$ 是代数闭的。令 ω 为 c 次本原单位根。于是有 $\mathsf{M} = \mathsf{L} \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}$，其中

$$\mathsf{L} = \langle i\rangle_w \underset{w}{\circ} \langle i\rangle_{\omega w} \underset{w}{\circ} \cdots \underset{w}{\circ} \langle i\rangle_{\omega^{c-1}w} \simeq \langle i\rangle_w \underset{w}{\circ} \mathsf{L}' \quad \text{and} \quad \mathsf{L}' = \langle i\rangle_{\omega w} \underset{w}{\circ} \cdots \underset{w}{\circ} \langle i\rangle_{\omega^{c-1}w}. \tag{10.5}$$

于是有 $\mathsf{M} = \langle i\rangle_w \nabla_w \left(\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}\right) \rightarrowtail \left(\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}\right) \underset{w}{\circ} \langle i\rangle_w$。

因此我们有

$$\mathsf{M} \underset{w}{\circ} \left(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=w}\right) \rightarrowtail \left(\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}\right) \underset{w}{\circ} \langle i\rangle_w \underset{w}{\circ} \left(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=w}\right) \twoheadrightarrow \mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}.$$

于是该复合是一个满态射

$$\left(\widehat{\mathrm{K}}_j|_{z_j=w^c}\right) \underset{w}{\circ} \left(\widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=w}\right) \twoheadrightarrow \mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}, \tag{10.6}$$

因为在作用于 $(\mathbf{k}[w]/w\mathbf{k}[w]) \otimes_{\mathbf{k}[w]} \bullet$ 后它仍然如此。

根据引理 9.11，$\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}$ 是 $\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle$ 的仿射化，而根据下文的引理 10.4，$\langle i^{c-1}\rangle \nabla \langle j\rangle$ 是实单。因此，命题 6.29 表明，$Q_{i,\ j}(z_i, z_j) = z_j - z_i^c$ 整除 $f(z_i, z_j)$。比较它们的次数可得，$f(z_i, z_j) = Q_{i,\ j}(z_i, z_j)$。□

因此，我们已经证明数据 $\{\mathrm{K}_j\}_{j\in I}$ 满足 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 中的条件（7.7）。选取对偶数据 $\big(\{(\widehat{\mathrm{K}}j, z_j)\}_{j\in I}, \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathrm{K}}_j,\ \widehat{\mathrm{K}}_k}\}_{j,\ k\in I}\big)$，我们可以定义正合幺半函子

$$\widehat{\mathscr{F}_i}\colon \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R)\to \mathrm{Pro}(\widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0}) \quad\text{and}\quad \mathscr{F}_i\colon R\text{-gmod}\to \widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0}$$

将 $\langle j\rangle_{z_j}$ 映至 $\widehat{\mathrm{K}}j$，除 A_2-情形外。参见注 10.13 中的 A_2-情形。

注意到

$$\mathrm{wt}(\widehat{\mathscr{F}_i}(X)) = s_i\big(\mathrm{wt}(X)\big) \quad \text{for any } X\in \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(R). \tag{10.7}$$

引理10.3. 设 $M, N \in R$-gmod是简单模。假设 $\mathscr{F}_i(M)$和$\mathscr{F}_i(N)$是 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$中的简单模。此外，假设 M和 $\mathscr{F}_i(M)$是仿实的，或者 N 和 $\mathscr{F}_i(N)$是仿实的。

(i) 有 $\Lambda(\mathscr{F}_i(M)\ \mathscr{F}_i(N)) \leqslant \Lambda(M, N)$。

(ii) 以下条件等价。(a) $\Lambda(\mathscr{F}_i(M)\ \mathscr{F}_i(N)) = \Lambda(M, N)$，(b) $\mathscr{F}_i(M\nabla N)\neq 0$。

(iii) 此外，如果条件（iib）成立，那么 $\mathscr{F}_i(\mathrm{r}_{M,N}) \neq 0$ 且

$$\mathscr{F}_i(M\nabla N)\simeq \mathscr{F}_i(M)\nabla \mathscr{F}_i(N).$$

证明。假设 M和 $\mathscr{F}_i(M)$ 是仿实的。设 $(\mathsf{M}\ z)$ 是 M 的仿射化。由于

$$\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{N,\mathsf{M}}\circ \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N} = z^d\ \mathsf{id}_{\mathsf{M}\otimes N},$$

我们有一个交换图

$$\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M})\circ\widehat{\mathscr{F}_i}(N) \xrightarrow{\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N})} \widehat{\mathscr{F}_i}(N)\circ\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M}) \xrightarrow{\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{N,\mathsf{M}})} \widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M})\circ\widehat{\mathscr{F}_i}(N).$$
$$\widehat{\mathscr{F}_i}(z)^d$$

由于 $\mathscr{F}_i(z)$ 是单态射，$\mathscr{F}_i(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M}_z,N})$ 和 $\mathscr{F}_i(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{N,\mathsf{M}_z})$ 均非零。另注意，$\dim \mathrm{Hom}\big(\mathscr{F}_i(M)\circ\mathscr{F}_i(N)\ \mathscr{F}_i(N)\circ\mathscr{F}_i(M)\big) = 1$ 根据命题 8.7。由此可得

that

$$\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N}) = z^a \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M}),\widehat{\mathscr{F}_i}(N)} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{N,\mathsf{M}}) = z^b \mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathscr{F}_i}(N),\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M})}$$

对于某个 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 根据命题 6.2 (ii)，相差一个常数倍。

另请注意，$\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M})$ 是 $\mathscr{F}_i(M)$ 中的一个仿射对象。因此，我们有

$$\Lambda(M,N) = \deg(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N}) = \deg(\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N})) \geqslant \deg(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M}),\widehat{\mathscr{F}_i}(N)}) = \Lambda(\widehat{\mathscr{F}_i}(M), \widehat{\mathscr{F}_i}(N)),$$

并且等式 $\deg(\mathscr{F}_i(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N})) = \deg(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathsf{M}),\widehat{\mathscr{F}_i}(N)})$ 成立当且仅当 $\deg(z^a) = 0$；即，$a = 0$。在这种情况下，我们有

$$\mathscr{F}_i(\mathbf{r}_{M,N}) = \widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N}|_{z=0}) = (\widehat{\mathscr{F}_i}(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathsf{M},N}))|_{\widehat{\mathscr{F}_i}(z)=0} = \mathbf{r}_{\mathscr{F}_i(M),\mathscr{F}_i(N)} \neq 0$$

因此

$$M \nabla N \simeq \operatorname{Im} \mathscr{F}_i(\mathbf{r}_{M,N}) = \operatorname{Im} \mathbf{r}_{\mathscr{F}_i(M),\mathscr{F}_i(N)} \simeq \mathscr{F}_i(M) \nabla \mathscr{F}_i(N),$$

这就完成了证明。 □

引理 10.4。设 m、$n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $j \in I \setminus \{i\}$，并设 $S = \langle j^n \rangle \nabla \langle i^m \rangle$。令 $\lambda = n\Lambda_j - m\Lambda_i$。那么我们有（忽略次数移位）：

(i) $s_j\lambda \preccurlyeq \lambda \preccurlyeq s_i\lambda$ 和 $S \simeq \mathsf{M}(s_j\lambda, s_i\lambda)$，(ii) $\varepsilon_i(S) = \max\big(0, m + n\langle h_i, \alpha_j\rangle\big)$，(iii) 若 $m \geqslant -n\langle h_i, \alpha_j\rangle$，则 $\langle i \rangle$ 与 S 和 $\langle j^n \rangle \nabla \langle i^m \rangle \simeq \big(\langle j^n \rangle \nabla \langle i^{-n\langle h_i,\ \alpha_j\rangle} \rangle\big) \circ \langle i^{m+n\langle h_i,\ \alpha_j\rangle} \rangle$ 可交换，(iv) 若 $\langle h_i, s_j\lambda\rangle = -n\langle h_i, \alpha_j\rangle - m \geqslant 0$，则 $\mathscr{F}_i(S) \simeq \mathsf{M}(s_is_j\lambda, \lambda) \simeq \langle i^{-m-n\langle h_i,\ \alpha_j\rangle} \rangle \nabla \langle j^n \rangle$。

证明。(i) 我们有 $\langle h_i, s_i\lambda\rangle = m$，$\langle h_j, \lambda\rangle = n$ 和 $s_j\lambda = (s_js_i)(s_i\lambda)$。因此我们有 $S \simeq \mathsf{M}(s_j\lambda, s_i\lambda)$。

(ii) 由 [12, 命题 2.16 (iii)] 得出。

(iii) 可由以下事实推出：$\psi_*\big(\mathsf{M}(s_is_jn\Lambda_j, n\Lambda_j)\big) \simeq \langle j^n \rangle \nabla \langle i^{-n\langle h_i, \alpha_j\rangle} \rangle$ 与 $\langle i \rangle$ 可交换，这由 [12, 命题 2.16 (ii)] 得出。

(iv) 我们对 m进行归纳法论证。若 $m = 0$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i(S) = \mathscr{F}_i(\langle j\rangle^{\circ n}) &\simeq \mathsf{M}(s_i s_j \Lambda_j, \Lambda_j)^{\circ n} \\ &\simeq \mathsf{M}(s_i s_j n\Lambda_j, n\Lambda_j) \simeq \langle i^{-n\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle.\end{aligned}$$

假设 $m > 0$。令 $c = -\langle h_i, \alpha_j\rangle$。那么我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i(S) &\simeq \mathscr{F}_i\big((\langle j^n\rangle \nabla \langle i^{m-1}\rangle) \nabla \langle i\rangle\big) \\ &\underset{*}{\simeq} \mathscr{F}_i(\langle j^n\rangle \nabla \langle i^{m-1}\rangle) \nabla \mathscr{F}_i(\langle i\rangle) \\ &\simeq \big(\langle i^{1-m+nc}\rangle \nabla \langle j^n\rangle\big) \nabla \mathscr{D}\langle i\rangle \\ &\simeq \big(\langle i\rangle \nabla (\langle i^{-m+nc}\rangle \nabla \langle j^n\rangle)\big) \nabla \mathscr{D}\langle i\rangle \\ &\simeq \langle i^{-m+nc}\rangle \nabla \langle j^n\rangle.\end{aligned}$$

Her第二个同构 $\underset{*}{\simeq}$ 由引理 10.3 以及以下事实可得

$$\Lambda\big(\langle j^n\rangle \nabla \langle i^{m-1}\rangle, \langle i\rangle\big) = \Lambda\big(\langle j^n\rangle, \langle i\rangle\big) = -n(\alpha_j, \alpha_i)$$

等于

$$\begin{aligned}\Lambda\big(\mathscr{F}_i(\langle j^n\rangle \nabla \langle i^{m-1}\rangle), \mathscr{F}_i(\langle i\rangle)\big) = \Lambda\big(\langle i^{1-m+nc}\rangle \nabla \langle j^n\rangle, \mathscr{D}\langle i\rangle\big) &\underset{(1)}{=} \Lambda\big(\langle i\rangle, \langle i^{1-m+nc}\rangle \nabla \langle j^n\rangle\big) \\ = \Lambda(\langle i\rangle, \langle j^n\rangle) = -n(\alpha_i, \alpha_j),&\end{aligned}$$

其中 $=_{(1)}$ 由引理 6.30可得。 □

引理 10.5. 对于满足 $s_i w > w$ 的 $w \in \mathsf{W}$，我们有

$$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i\Lambda) \quad \textit{for any } \Lambda \in \mathsf{P}_+.$$

特别地，我们有

$$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{C}_\Lambda\big) \simeq \mathsf{C}^*_\Lambda \quad \textit{for any } \Lambda \in \mathsf{P}_+.$$

证明。我们对 $\ell(w)$ 进行归纳法。若 $\ell(w) \leqslant 1$，结论显然。假设 $\ell(w) > 1$。取 $j \in I \setminus \{i\}$ 使得 $s_j w < w$。

(i) 首先假设 $s_is_jw > s_jw_\circ$。令 $v = s_jw$和 $n = \langle h_j, v\Lambda\rangle \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$和 $m = \langle h_i, v\Lambda\rangle \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。于是我们有 $w\Lambda = v\Lambda - n\alpha_j$，因此 $\langle h_i, w\Lambda\rangle = m - n\langle h_i, \alpha_j\rangle \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。于是我们有 $\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda) \simeq \langle j^n\rangle$和 $\mathsf{M}(s_iw\Lambda, v\Lambda) \simeq \langle i^{m-n\langle h_i,\ \alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle$。我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_iv\Lambda) \nabla \mathsf{M}(s_iv\Lambda, v\Lambda) &\simeq \mathsf{M}(s_iw\Lambda, v\Lambda)\\ &\simeq \langle i^{m-n\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle \underset{*}{\simeq} \big(\langle i^{-n\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle\big) \circ \langle i^m\rangle\\ &\simeq \big(\langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j\rangle\big)^{\circ n} \circ \mathsf{M}(s_iv\Lambda, v\Lambda),\end{aligned}$$

其中 $\underset{*}{\simeq}$由引理 10.4可得。因此，我们有 $\mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_iv\Lambda) \simeq \big(\langle i^{-\langle h_i,\ \alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j\rangle\big)^{\circ n}$，这意味着

$$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_iv\Lambda).$$

另一方面，[9, 命题 4.6] 表明，$\Lambda\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda), \mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big)$和 $\Lambda\big(\mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_iv\Lambda), \mathsf{M}(s_iv\Lambda, s_i\Lambda)\big)$ 均等于 $-(w\Lambda - v\Lambda, v\Lambda - \Lambda)$。因此，根据引理10.3，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)\big) &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda) \nabla \mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big)\\ &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \nabla \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big)\\ &\simeq \mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_iv\Lambda) \nabla \mathsf{M}(s_iv\Lambda, s_i\Lambda)\\ &\simeq \mathsf{M}(s_iw\Lambda, s_i\Lambda).\end{aligned}$$

(ii) 假设 $s_is_jw < s_jw_\circ$。令 $v = s_is_jw_\circ$。于是我们有 $s_iv > v$, $\ell(v) < \ell(w)$，因此根据归纳假设，$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(s_iv\Lambda, s_i\Lambda)$。注意，$\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda) \simeq \langle j^n\rangle \nabla \langle i^m\rangle$，其中 $n = \langle h_j, s_iv\Lambda\rangle$, $m = \langle h_i, v\Lambda\rangle$。

由于 $\Lambda(\langle j^n\rangle, \langle i^m\rangle) = -nm(\alpha_j, \alpha_i)$ 且

$$\Lambda\big((\langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j\rangle)^{\circ n}, \mathscr{D}(\langle i^m\rangle)\big) = \Lambda\big(\langle i^m\rangle, (\langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j\rangle)^{\circ n}\big) = -nm(\alpha_j, \alpha_i)$$

相等，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)) &\simeq \big(\langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j\rangle\big)^{\circ n} \nabla \mathscr{D}\langle i^m\rangle \\ &\simeq \Big(\langle i^m\rangle \nabla \big(\langle i^{-m-n\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle\big)\Big) \nabla \mathscr{D}\langle i^m\rangle \\ &\simeq \langle i^{-m-n\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle \nabla \langle j^n\rangle \simeq \mathsf{M}(s_i w\lambda, s_i v\Lambda).\end{aligned}$$

注意，$\langle h_i, w\Lambda\rangle = -m - n\langle h_i, \alpha_j\rangle \geqslant 0$。

由于 $\Lambda\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda), \mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big)$ 和 $\Lambda\big(\mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i v\Lambda), \mathsf{M}(s_i v\Lambda, s_i\lambda)\big)$ 等于 $-(w\Lambda - v\Lambda, v\Lambda - \Lambda)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)\big) &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda) \nabla \mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big) \\ &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \nabla \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big) \\ &\simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i v\Lambda) \nabla \mathsf{M}(s_i v\Lambda, s_i\Lambda) \\ &\simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i\Lambda).\end{aligned}$$

□

引理 10.6. 设 $w, v \in \mathsf{W}$ 满足 $v \leqslant w$ 和 $s_i v > v$, $s_i w > w$。那么，我们有

$$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i v\Lambda) \quad \textit{for any } \Lambda \in \mathsf{P}_+.$$

证明。根据前述引理，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i v\Lambda) \nabla \mathsf{M}(s_i v\Lambda, s_i\Lambda) &\simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i\Lambda) \\ &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, \Lambda)\big) \simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda) \nabla \mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big) \\ &\underset{*}{\simeq} \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \nabla \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(v\Lambda, \Lambda)\big) \\ &\simeq \mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \nabla \mathsf{M}(s_i v\Lambda, s_i\Lambda),\end{aligned}$$

其中 $\underset{*}{\simeq}$ 由引理 10.3成立。因此我们有

$$\mathscr{F}_i\big(\mathsf{M}(w\Lambda, v\Lambda)\big) \simeq \mathsf{M}(s_i w\Lambda, s_i v\Lambda).$$

□

命题 10.7. 如果 M是 $\mathscr{C}_{s_iw_0}$中的简单模，那么 $\mathscr{F}_i(M)$ 是 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$中的简单模。此外，函子 $\mathscr{F}_i$ 在 $\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 中简单模的同构类集合与 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$的同构类集合之间诱导出一个双射。

证明。设 $\underline{w_0} = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{l-1}}s_{i_l}$ 是 w_0 的一个约化表达式，满足 $i_1 = i$。令

$$
\begin{aligned}
&V_k := \mathsf{M}(s_{i_2}\cdots s_{i_k}\Lambda_{i_k}, s_{i_2}\cdots s_{i_{k-1}}\Lambda_{i_k}) \quad \text{for} \quad 2 \leqslant k \leqslant l \quad \text{and}\\
&S_k := \mathsf{M}(s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}\Lambda_{i_k}, s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{k-1}}\Lambda_{i_k}) \quad \text{for} \quad 1 \leqslant k \leqslant l.
\end{aligned} \tag{10.8}
$$

于是由引理 10.6，可得

$$\mathscr{F}_i(V_k) = S_k \quad \text{for} \quad 2 \leqslant k \leqslant l.$$

注意，$K(\mathscr{C}_{s_iw_0})|_{q=1}$ 是多项式环 $\mathbb{Z}[\,[V_2],\ldots,[V_l]\,]$，而 $K(\mathscr{C}_{w_0})|_{q=1}$ 是多项式环 $\mathbb{Z}[\,[S_1],[S_2],\ldots,[S_l]\,]$，其中 $K(\mathscr{C}_{w_0})$ 表示阿贝尔幺半范畴 $\mathscr{C}_{w_0}$ 的格罗滕迪克环，且 $K(\mathscr{C}_{w_0})|_{q=1} := K(\mathscr{C}_{w_0})/(q-1)K(\mathscr{C}_{w_0})$。

回忆一下，对于 $\mathscr{C}_{w_0} = R$-gmod 中任意简单模 M，存在唯一的 $(a_1,\ldots,a_l) \in \mathbb{Z}^l_{\geqslant 0}$，使得 $S_l^{\circ a_l} \circ S_{l-1}^{\circ a_{l-1}} \circ \cdots \circ S_1^{\circ a_1}$ 的头在分次平移意义下同构于 M。由于对 $2 \leqslant k \leqslant l$ 和 $S_1 = L(i)$，$E_i^*(S_k) = 0$，简单模 M 属于 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 当且仅当 $a_1 = 0$。因此，环 $K(\mathscr{C}^*_{s_iw_0})|_{q=1}$ 是多项式环 $\mathbb{Z}[\,[S_2],\ldots,[S_l]\,]$。

由此可知，$K(\mathscr{C}^*_{s_iw_0})|_{q=1}$ 同态同构于 $K(\mathscr{C}_{w_0})|_{q=1}$。特别地，对于任意非零模 M，$\mathscr{F}_i(M)$ 均非零，并且 $[\mathscr{F}_i]$在 $\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 中的简单模集合与 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$的简单模集合之间诱导出一个双射。□

对于一个简单的 $R(\beta)$-模 M，令

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{wt}(M) = -\beta,\\
&\widetilde{F}_i(M) = L(i) \nabla M, \qquad \widetilde{E}_i(M) = \mathrm{hd}(E_i(M)),\\
&\varepsilon_i(M) = \max\{k \geqslant 0 \mid {E_i}^k M \neq 0\}, \quad \varphi_i(M) = \varepsilon_i(M) + \langle h_i, \mathrm{wt}(M)\rangle,\\
&\widetilde{F}_i^*(M) = M \nabla L(i), \qquad \widetilde{E}_i^*(M) = \mathrm{hd}(E_i^*(M)),\\
&\varepsilon_i^*(M) = \max\{k \geqslant 0 \mid {E_i^*}^k M \neq 0\}, \quad \varphi_i^*(M) = \varepsilon_i^*(M) + \langle h_i, \mathrm{wt}(M)\rangle.
\end{aligned}
$$

这里我们用 M 表示其同构类（作为非分次模），以简化记号。则 R-gmod 中自对偶简单模的同构类集合与$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }(\mathrm{wt}\ E_i,\ F_i,\ \varepsilon_i,\ \varphi_i)$ 一起构成一个 $\mathfrak{g}$-晶体，它与 $B(\infty)$ 的晶体基$U_q^-(\mathfrak{g})$（[19]）。

另一方面，Yoshihisa Saito（[24]）定义了同构

$$\{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = 0\} \xrightarrow{\sim} \{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i^*(b) = 0\}$$

由 $b \mapsto \widetilde{f}^{\varphi_i^*}(\ b\ \widetilde{e}^{*\varepsilon_i^*})\ (b)_i$ b 给出。因此，对于一个满足 $\varepsilon_i(M) = 0$ 的简单 $M \in R$-分次模范畴对象，我们可以关联一个简单模

$$\sigma_i(M) := \widetilde{F}_i^{\varphi_i^*(M)} \widetilde{E}_i^{*\varepsilon_i^*(M)} M$$

它满足 $\varepsilon_i^*\big(\sigma_i(M)\big) = 0$。我们称其为 M 关于 i 的 Saito 反射（参见 [24, 15, 16]）。

命题 10.8。设 M 是 $\mathscr{C}_{s_i w_0}$ 中的一个简单模。那么

$$\mathscr{F}_i(M) \simeq \sigma_i(M)$$

作为非分次模。

证明。根据 [25, 推论 2。26]，只需证明 $\mathscr{F}_i(V_k) \simeq S_k \simeq \sigma_i(V_k)$，其中$2 \leqslant k \leqslant l$，这里 V_k 和 S_k 是（10.8）中的模。

设 M 是 R-gmod 中的一个简单模，且 $\varepsilon_i(M) = 0$。那么，我们有

$$\sigma_i(M) = \widetilde{F}_i^{\varphi_i^*(M)} \widetilde{E}_i^{*\varepsilon_i^*(M)} M \simeq \widetilde{E}_i^{*\,s-\langle h_i, \mathrm{wt}(M)\rangle} \widetilde{F}_i^s M$$

对任意 $s \geqslant \varphi_i^*(M)$，由 [12, 命题 2.16、定理 2.17] 可得。设 $2 \leqslant k \leqslant l$ 和 $\lambda = s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}} \Lambda_{i_k}$, $\mu = s_{i_2} \cdots s_{i_k} \Lambda_{i_k}$，使得 $V_k = \mathrm{M}(\lambda, \mu)$。那么 $\langle h_i, \lambda\rangle \geqslant 0$, $\langle h_i, \mu\rangle \geqslant 0$和

$$\varphi_i^*(V_k) = \varepsilon_i^*(V_k) + \langle h_i, \mathrm{wt}(V_k)\rangle \leqslant \langle h_i, \mu\rangle + \langle h_i, \lambda - \mu\rangle = \langle h_i, \lambda\rangle,$$

其中，中间的不等式由 [8,引理 9.1.5]得出。

因此，取 $s = \langle h_i、\ \lambda\rangle$，我们得到

$$\sigma_i(V_k) \simeq \widetilde{E}_i^{*\,s-\langle h_i,\mathrm{wt}(V_k)\rangle}\widetilde{F}_i^{s}\mathsf{M}(\lambda,\mu) = \widetilde{E}_i^{*\,\langle h_i,\mu\rangle}\widetilde{F}_i^{\langle h_i,\lambda\rangle}\mathsf{M}(\lambda,\mu)$$
$$\simeq \widetilde{E}_i^{*\,\langle h_i,\mu\rangle}\mathsf{M}(s_i\lambda,\mu) \simeq \mathsf{M}(s_i\lambda,s_i\mu) \simeq S_k,$$

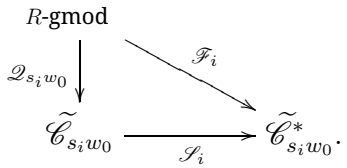
如所需。 □

引理 10.9. 对任意 $j \in I$，我们有

$$\Lambda(\mathsf{M}(s_iw_0\Lambda,\Lambda),\langle j\rangle) = \Lambda(\mathsf{M}(w_0\Lambda,s_i\Lambda),\mathrm{K}_j).$$

证明. 根据 [11, (5.1)]，我们有 $\Lambda(\mathsf{M}(s_iw_0\Lambda,\Lambda)\ \langle j\rangle) = (s_iw_0\Lambda+\Lambda,\alpha_j)$；根据命题 [11, Proposition 3.27]，我们有 $\Lambda(\mathsf{M}(w_0\Lambda,s_i\Lambda),\mathrm{K}j) = (w_0\Lambda + s_i\Lambda, s_i\alpha_j)$。 □

Pro ~命题 10.10. 函子 $\mathscr{F}_i$: R-gmod $\to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 可经由 $\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 分解:



证明。由引理 10.6，对于任意 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$，我们有 $\mathscr{F}_i(\mathsf{C}_\Lambda) \simeq \mathsf{C}^*_\Lambda$。根据局部化的泛性质（[11, 定理 2.7]），只需证明对于任意 $X \in R$-gmod 和 $\Lambda \in \mathsf{P}_+$，$\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(X)) : \mathscr{F}_i(\mathsf{C}_\Lambda) \circ \mathscr{F}_i(X) \to \mathscr{F}_i(X) \circ \mathscr{F}_i(\mathsf{C}_\Lambda)$ 是一个同构。

注意,

(a) 若 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(M))$ 和 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(N))$ 对 $M, N \in R$-gmod 是同构，则 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(M \circ N))$ 也是同构。(b) 对于一个态射 $f: M \to N$，若 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(M))$、$\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(N))$ 是同构，则 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(\text{余核}(f)))$ 也是同构。(c) 对于一个正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$，若 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(L))$ 和 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(N))$ 是同构，则 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(M))$ 也是同构。

因此，只需证明 $\mathscr{F}_i(R_{\mathsf{C}_\Lambda}(\langle j\rangle))$ 对任意 $j \in I$ 都是同构，而这由引理10.3 和引理10.9即可推出。 □

定理 10.11. 幺半函子 $\mathscr{S}_i\colon \mathscr{C}_{s_iw_0} \to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 是范畴的等价。

证明。我们可以通过舒尔-外尔数据 $\{\mathrm{K}^*_j\}_{j\in I}$ 定义 $\mathscr{F}^*_i\colon R\text{-gmod} \to \mathscr{C}_{s_iw_0}$，其中

$$\mathrm{K}^*_j = \psi_*(\mathrm{K}_j) \simeq \begin{cases} \mathscr{D}^{-1}\big(\mathscr{Q}_{s_iw_0}(\langle i\rangle)\big) \simeq \mathsf{C}_i^{-1} \circ (E_i^*\mathsf{C}_i) & \text{if } j = i, \\ \langle j\rangle \nabla \langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

and

$$\widehat{\mathrm{K}}^*_j = \psi_*(\widehat{\mathrm{K}}_j) \simeq \begin{cases} {\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}}^{-1}\big(\mathscr{Q}_{s_iw_0}(\langle i\rangle_{z_i})\big) & \text{if } j = i, \\ \big(\langle j\rangle \nabla \langle i^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle}\rangle\big)_{z_j} & \text{if } j \neq i. \end{cases}$$

这里，函子 $\mathscr{Q}_{s_iw_0}\colon \mathrm{Pro}(R\text{-gmod}) \to \mathrm{Pro}(\mathscr{C}_{s_iw_0})$ 由 $\mathscr{Q}_{s_iw_0}\colon R\text{-gmod} \to \mathscr{C}_{s_iw_0}$ 诱导。于是，函子 $\mathscr{F}^*_i\colon R\text{-gmod} \to \mathscr{C}_{s_iw_0}$ 可经由 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 分解:

$$\begin{array}{ccc} \text{-gmod} & & \\ {\scriptstyle \mathscr{Q}^*_{s_iw_0}}\downarrow & \searrow^{\mathscr{F}^*_i} & \\ \widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0} & \xrightarrow[\mathscr{S}^*_i]{} & \widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0}. \end{array}$$

注意到 $\mathscr{F}^*_i$ 同构于复合

$$R\text{-gmod} \xrightarrow{\psi_*} R\text{-gmod} \xrightarrow{\mathscr{F}_i} \widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0} \xrightarrow{\psi_*} \widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0}.$$

我们断言，复合

$$\mathsf{Modg}_{\mathrm{coh}}(R) \longrightarrow \mathsf{Pro}\ (R\text{-gmod}) \xrightarrow{\mathrm{Pro}(\mathscr{Q}^*_{s_iw_0})} \mathrm{Pro}(\widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0}) \xrightarrow{\mathrm{Pro}(\mathscr{S}^*_i)} \mathrm{Pro}(\widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0}) \xrightarrow{\mathrm{Pro}(\mathscr{S}_i)} \mathrm{Pro}(\widetilde{\mathscr{C}}^*_{s_iw_0})$$

同构于与该对偶数据相关联的函子

$$\big(\{\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}(\langle j\rangle_{z_j})\}_{j\in I},\ \{\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}(\langle j\rangle_{z_j}),\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}(\langle k\rangle_{z_k})}\}_{j,k\in I}\big)$$

其为 C 型。因此，限制到 R-gmod 后，我们有

$$\mathscr{S}_i \circ \mathscr{S}^*_i \circ \mathscr{Q}^*_{s_iw_0} \simeq \mathscr{Q}^*_{s_iw_0},$$

根据函子 $\mathscr{Q}^*_{s_iw_0}$ 的泛性质，我们得到 $\mathscr{S}_i \circ \mathscr{S}^*_i \simeq \mathrm{id}_{\widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0}}$，这正是所需。

根据引理 7.7，只需证明

$$(\mathscr{S}_i \circ \mathscr{S}_i^* \circ \mathscr{Q}^*_{s_i w_0})(\langle j\rangle_{z_j}) \simeq \mathscr{Q}^*_{s_i w_0}(\langle j\rangle_z) \quad \text{for all } j \in I.$$

由于（ $\mathscr{S}_i \circ \mathscr{S}_i^* \circ \mathscr{Q}^*_{s_i w_0})(\langle j\rangle_{z_j}) \simeq (\mathscr{S}_i \circ \mathscr{F}_i^*)(\langle j\rangle_{z_j}) \simeq \mathscr{S}_i(\mathrm{K}_j^*)$，只需证明

$$\mathscr{S}_i(\widehat{\mathrm{K}}_j^*) \simeq \mathscr{Q}^*_{s_i w_0}(\langle j\rangle_{z_j}) \quad \text{for all } j \in I \quad \text{up to a grading shift.} \tag{10.9}$$

若 $j = i$，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_i(\widehat{\mathrm{K}}_i^*) = \mathscr{S}_i({\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}}^{-1}(\mathscr{Q}_{s_i w_0}(\langle i\rangle_{z_i}))) &\simeq {\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}}^{-1}(\mathscr{S}_i(\mathscr{Q}_{s_i w_0}(\langle i\rangle_{z_i})))\\ &\simeq {\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}}^{-1}(\mathscr{F}_i(\langle i\rangle_{z_i})) \simeq {\mathscr{D}_{\mathrm{aff}}}^{-1}(\widehat{\mathrm{K}}_i) \simeq \mathscr{Q}^*_{s_i w_0}(\langle i\rangle_{z_i}).\end{aligned}$$

当 $\langle h_i,\ \alpha_j\rangle = 0$，（10.9）是平凡的。

若 $\langle h_i, \alpha_j\rangle = -1$，则有

$$\widehat{\mathrm{K}}_j^* \simeq \langle j\rangle_{z_j} \nabla_{z_j} \langle i\rangle_{z_j^c},$$

其中 $c = -\langle h_j, \alpha_i\rangle \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$。因此我们有一个满态射

$$\mathscr{S}_i(\langle j\rangle_{z_j} \underset{z_j}{\circ} \langle i\rangle_{z_j^c}) \twoheadrightarrow \mathscr{S}_i(\widehat{\mathrm{K}}_j^*).$$

另一方面，我们有

$$\mathscr{S}_i(\langle j\rangle_{z_j} \underset{z_j}{\circ} \langle i\rangle_{z_j^c}) \simeq \mathscr{S}_i(\langle j\rangle_{z_j}) \underset{z_j}{\circ} \mathscr{S}_i(\langle i\rangle_{z_j^c}) \simeq \widehat{\mathrm{K}}_j \underset{z_j}{\circ} \widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i = z_j^c} \twoheadrightarrow \langle j\rangle_{z_j},$$

其中最后一个满态射是（10.4）中的那个。因此，根据命题 6.25，$\mathscr{S}_i(\mathrm{K}_j^*) \simeq \langle j\rangle_{z_j}$。

如果 $\langle h_i, \alpha_j\rangle > 1$，那么那么我们有

$$\widehat{\mathrm{K}}_j^*|_{z_j = w^c} \simeq \langle j\rangle_{w^c} \nabla_w \mathsf{L} \simeq \langle j\rangle_{w^c} \nabla_w (\langle i\rangle_w \underset{w}{\circ} \mathsf{L}'),$$

其中 $c = -\langle h_i,\ \alpha_j\rangle$ 且 L、L' 是式（10.5）中的对应对象。因此存在一个满态射

$$\mathscr{S}_i(\langle j\rangle_{w^c}) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\langle i\rangle_w) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\mathsf{L}') \twoheadrightarrow \mathscr{S}(\widehat{\mathrm{K}}_j^*|_{z_j = w^c}).$$

另一方面，由式（10.6）可得

$$\mathscr{S}_i(\langle j\rangle_{w^c}) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\langle i\rangle_w) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\mathsf{L}') \simeq (\widehat{\mathrm{K}}_j|_{z_j=w^c} \underset{w}{\circ} \widehat{\mathrm{K}}_i|_{z_i=w}) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\mathsf{L}')$$

$$\xrightarrow{(10.6)} (\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}) \underset{w}{\circ} \mathscr{S}_i(\mathsf{L}') \twoheadrightarrow (\mathsf{L}' \nabla_w \langle j\rangle_{w^c}) \nabla_w \mathscr{S}_i(\mathsf{L}') \simeq \langle j\rangle_{w^c},$$

其中，最后一个同构由 $\mathscr{S}_i(\mathsf{L}') \simeq \mathscr{D}_{\mathrm{aff}}(\mathsf{L}')$ 得出。因此我们有 $\widetilde{\mathscr{S}}_i(\mathrm{K}_j^*) \simeq \langle j\rangle_{z_j}$ 根据命题 6.25，如所求。□

猜想 10.12. 幺半函子 $\widetilde{\mathscr{S}}_i\colon \mathscr{C}_{s_iw_0} \to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 诱导出范畴等价 $\widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0} \to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$。

我们已经知道 $\mathscr{S}_i$ 将 $\mathscr{C}_{s_iw_0}$ 中的简单对象映到 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 中的简单对象。然而，我们不知道 $\widetilde{\mathscr{S}}_i(\mathscr{C}_{s_iw_0}) \subset \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$。注意，$\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 在 $\mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 中不对扩张封闭（参见注8.6）。

注 10.13. 在 A_2 情形下，我们有 $\mathsf{d}(\mathrm{K}_j, \mathrm{K}_k) = 0 \neq \mathsf{d}(\langle j\rangle, \langle k\rangle)$。我们如下定义 $\mathscr{F}_i$。取 $I = \{1, 2\}$, $Q_{1,2}(t_1.t_2) = t_1 - t_2$ 和 $i = 1$。则 $s_iw_0 = s_2s_1$。

重整化 R 矩阵 $\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{j,k}$：$\langle j\rangle_{z_j} \circ \langle k\rangle_{z_k} \to \langle k\rangle_{z_k} \circ \langle j\rangle_{z_k}$ 由 $\langle j\rangle_{z_j} \boxtimes \langle k\rangle_{z_k} \mapsto \tau_1\big(\langle k\rangle_{z_k} \boxtimes \langle j\rangle_{z_k}\big)$ 给出，其中 $j \neq k$。由于 $\mathsf{d}(K_1, K_2) = 0$，我们可以选取 $\mathrm{R}_{j,k}\colon \widehat{\mathrm{K}}_j \circ \widehat{\mathrm{K}}_k \to \widetilde{\mathrm{K}}_k \circ \mathrm{K}j($ $j \neq k)$，使得 $\mathrm{R}_{j,k} \circ \mathrm{R}_{k,j} = \mathsf{id}_{\widetilde{\mathrm{K}}_k \circ \widehat{\mathrm{K}}_j}$。然后，我们定义 $\mathscr{F}_1$：R-模范畴 $\to \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$ 如下：

$$\mathscr{F}_1(\langle j\rangle_{z_j}) = \widehat{\mathrm{K}}_j \ (j = 1, 2),\ \mathscr{F}_1(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{1,2}) = Q_{1,2}(z_1, z_2)\mathrm{R}_{1,2} \text{ and } \mathscr{F}_1(\mathrm{R}^{\mathrm{ren}}_{2,1}) = \mathrm{R}_{2,1}.$$

于是，它诱导出一个等价 $\widetilde{\mathscr{S}}_1\colon \widetilde{\mathscr{C}}_{s_iw_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^*_{s_iw_0}$。

设 $\langle 12\rangle := \langle 1\rangle \nabla \langle 2\rangle$ 且 $\langle 21\rangle := \langle 2\rangle \nabla \langle 1\rangle$。注意，$\mathscr{Q}_{s_iw_0}(\langle 1\rangle) \simeq \langle 2\rangle \circ \langle 21\rangle^{-1}$，$\mathscr{Q}_{s_iw_0}(\langle 12\rangle) \simeq 0$。函子 $\mathscr{F}_1$ 将：

$$\langle 1\rangle \longmapsto \langle 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-1}, \quad \langle 12\rangle \longmapsto 0,$$
$$\langle 2\rangle \longmapsto \langle 12\rangle, \qquad\qquad \langle 21\rangle \longmapsto \langle 2\rangle.$$

11. Examples of $\mathscr{F}_i$

下面给出 $\mathscr{F}_i$ 的例子。我们忽略分次平移。

~11.1. $\mathscr{F}_i$: R-g模范畴 $\to \mathscr{C}^*_{s_i w_0}$

11.1.1. $A_{2\circ}$ $i=1$

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-1} \quad \langle 12\rangle \mapsto 0$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 12\rangle \qquad \langle 21\rangle \mapsto \langle 2\rangle$$

11.1.2. $A_{3\circ}$

(i) $i=1_\circ$

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 23\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1} \quad \langle 12\rangle \mapsto \langle 2312\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1} \quad \langle 132\rangle \mapsto \langle 3\rangle \circ \langle 2132\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1}$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 12\rangle \quad \langle 21\rangle \mapsto \langle 2\rangle \quad \langle 213\rangle \mapsto \langle 23\rangle$$
$$\langle 3\rangle \mapsto \langle 3\rangle \quad \langle 23\rangle \mapsto \langle 123\rangle \quad \langle 123\rangle \mapsto 0$$
$$\langle 32\rangle \mapsto \langle 132\rangle \quad \langle 321\rangle \mapsto \langle 32\rangle$$
$$\langle 321\rangle^{-1} \circ \langle 32\rangle \mapsto \langle 1\rangle \quad \langle 2132\rangle \mapsto \langle 2132\rangle$$

(ii) $i=2_\circ$

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 21\rangle \quad \langle 12\rangle \mapsto \langle 1\rangle \quad \langle 132\rangle \mapsto \langle 213\rangle$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 13\rangle \circ \langle 213\rangle^{-1} \quad \langle 21\rangle \mapsto \langle 1\rangle \circ \langle 321\rangle \circ \langle 213\rangle^{-1} \quad \langle 213\rangle \mapsto \langle 123\rangle \circ \langle 321\rangle \circ \langle 213\rangle^{-1}$$
$$\langle 3\rangle \mapsto \langle 23\rangle \quad \langle 23\rangle \mapsto \langle 3\rangle \circ \langle 123\rangle \circ \langle 213\rangle^{-1} \quad \langle 123\rangle \mapsto \langle 123\rangle$$
$$\langle 32\rangle \mapsto \langle 3\rangle \quad \langle 321\rangle \mapsto \langle 321\rangle$$
$$\langle 2132\rangle \mapsto 0$$

11.1.3. $C_{2\circ}$ $\circ \Longleftarrow \circ$1 2

(i) $i = 1_\circ$

$$\begin{aligned}
&\langle 1\rangle \mapsto \langle 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-1} && \langle 1^2 2\rangle \mapsto \langle 2\rangle \circ \langle 21^2 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-2}\\
&\langle 2\rangle \mapsto \langle 1^2 2\rangle && \langle 21^2\rangle \mapsto \langle 2\rangle\\
&\langle 12\rangle \mapsto \langle 21^2 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-1} && \langle 121\rangle \mapsto 0\\
&\langle 21\rangle \mapsto \langle 12\rangle && \langle 21^2 2\rangle \mapsto \langle 21^2 2\rangle
\end{aligned}$$

(ii) $i = 2_\circ$

$$\begin{aligned}
&\langle 1\rangle \mapsto \langle 21\rangle && \langle 1^2 2\rangle \mapsto \langle 21^2\rangle\\
&\langle 2\rangle \mapsto \langle 1^2\rangle \circ \langle 21^2\rangle^{-1} && \langle 21^2\rangle \mapsto \langle 121\rangle^2 \circ \langle 21^2\rangle^{-1}\\
&\langle 12\rangle \mapsto \langle 1\rangle && \langle 121\rangle \mapsto \langle 121\rangle\\
&\langle 21\rangle \mapsto \langle 1\rangle \circ \langle 121\rangle \circ \langle 21^2\rangle^{-1} && \langle 21^2 2\rangle \mapsto 0
\end{aligned}$$

~ ~11.2. $\mathscr{F}_i$:
$\mathscr{C}_{w_0} \to \mathscr{C}_{w_0\circ}$

11.2.1. $A_{2\circ}$ $i = 12$, 即 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$:

$$\begin{aligned}
&\langle 1\rangle \mapsto \mathscr{D}\langle 2\rangle = \langle 1\rangle \circ \langle 21\rangle^{-1} && \langle 12\rangle \mapsto \langle 21\rangle^{-1}\\
&\langle 2\rangle \mapsto \mathscr{D}\langle 1\rangle = \langle 2\rangle \circ \langle 12\rangle^{-1} && \langle 21\rangle \mapsto \langle 12\rangle^{-1}
\end{aligned}$$

11.2.2. $A_{3\circ}$

(i) $i = 2$.

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 21\rangle \qquad \langle 12\rangle \mapsto \langle 1\rangle \qquad \langle 132\rangle \mapsto \langle 213\rangle$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 132\rangle \circ \langle 2132\rangle^{-1} \qquad \langle 21\rangle \mapsto \langle 12\rangle \circ \langle 321\rangle \circ \langle 2132\rangle^{-1} \qquad \langle 213\rangle \mapsto \langle 2\rangle \circ \langle 123\rangle \circ \langle 321\rangle \circ \langle 2132\rangle^{-1}$$
$$\langle 3\rangle \mapsto \langle 23\rangle \qquad \langle 23\rangle \mapsto \langle 32\rangle \circ \langle 123\rangle \circ \langle 2132\rangle^{-1} \qquad \langle 123\rangle \mapsto \langle 123\rangle$$
$$\langle 32\rangle \mapsto \langle 3\rangle \qquad \langle 321\rangle \mapsto \langle 321\rangle$$
$$\langle 2132\rangle \mapsto \langle 123\rangle \circ \langle 321\rangle \circ \langle 2132\rangle^{-1}$$

(ii) $i = 13$

$$\langle 1\rangle \mapsto \mathscr{D}1 = \langle 23\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1} \qquad \langle 12\rangle \mapsto \langle 3\rangle \circ \langle 2132\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1} \qquad \langle 132\rangle \mapsto \langle 213\rangle \circ \langle 2132\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1} \circ \langle 321\rangle^{-1}$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 132\rangle \qquad \langle 21\rangle \mapsto \langle 32\rangle \qquad \langle 213\rangle \mapsto \langle 2\rangle$$
$$\langle 3\rangle \mapsto \mathscr{D}3 = \langle 21\rangle \circ \langle 321\rangle^{-1} \qquad \langle 23\rangle \mapsto \langle 12\rangle \qquad \langle 123\rangle \mapsto \langle 2132\rangle \circ \langle 123\rangle^{-1}$$
$$\langle 32\rangle \mapsto \langle 1\rangle \circ \langle 2132\rangle \circ \langle 321\rangle^{-1} \qquad \langle 321\rangle \mapsto \langle 2132\rangle \circ \langle 321\rangle^{-1}$$
$$\langle 2132\rangle \mapsto \langle 2132\rangle$$

11.2.3. C_2. ∘ ⟸ ∘1 2

(i) $i = 1_\circ$

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 21\rangle \circ \langle 121\rangle^{-1} \qquad \langle 1^2 2\rangle \mapsto \langle 21^2\rangle \circ \langle 21^2 2\rangle \circ \langle 121\rangle^{-2}$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 1^2 2\rangle \qquad \langle 21^2\rangle \mapsto \langle 2\rangle$$
$$\langle 12\rangle \mapsto \langle 1\rangle \circ \langle 21^2 2\rangle \circ \langle 121\rangle^{-1} \qquad \langle 121\rangle \mapsto \langle 21^2 2\rangle \circ \langle 121\rangle^{-1}$$
$$\langle 21\rangle \mapsto \langle 12\rangle \qquad \langle 21^2 2\rangle \mapsto \langle 21^2 2\rangle$$

(ii) $i = 2$.

$$\langle 1\rangle \mapsto \langle 21\rangle \qquad \langle 1^2 2\rangle \mapsto \langle 21^2\rangle$$
$$\langle 2\rangle \mapsto \langle 1^2 2\rangle \circ \langle 21^2 2\rangle^{-1} \qquad \langle 21^2\rangle \mapsto \langle 2\rangle \circ \langle 121\rangle^2 \circ \langle 21^2 2\rangle^{-1}$$
$$\langle 12\rangle \mapsto \langle 1\rangle \qquad \langle 121\rangle \mapsto \langle 121\rangle$$
$$\langle 21\rangle \mapsto \langle 12\rangle \circ \langle 121\rangle \circ \langle 21^2 2\rangle^{-1} \qquad \langle 21^2 2\rangle \mapsto \langle 121\rangle^2 \circ \langle 21^2 2\rangle^{-1} (\mathscr{S}_1 \circ \mathscr{S}_2)$$
$$^2 \simeq (\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1)^2.$$

References

[1] V. Chari 和 A. Pressley，《量子群指南》，剑桥大学出版社，剑桥，1994 年。[2] N. Chriss 和 V. Ginzburg，《表示论与复几何》，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1997 年。[3] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，《数学调查与专著》，205，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015 年。xvi+343 页。[4] P. Etingof 和 A. A. Moura，量子仿射代数有限维表示的椭圆中心特征与块，《表示论》7（2003），346–373。[5] M. Kashiwara，量子仿射代数的零级表示，《杜克数学杂志》112（2002），117–175。[6] S.-J. Kang、M. Kashiwara、M. Kim 和 S.-j. Oh，张量积的头部与余底的单纯性，《组合数学》151（2015），第 2 期，377–396。[7] S.-J. Kang、M. Kashiwara 和 M. Kim，对称拟群Hecke代数与量子仿射代数的 R 矩阵，《数学发明》211（2018），591–685，arXiv:1304.0323 v3。[8] ———，簇代数的幺半范畴化，《美国数学会杂志》31（2018），第 2 期，349–426。[9] M. Kashiwara、M. Kim、S.-j. Oh 和 E. Park，与旗流形层相关的幺半范畴，《数学进展》328（2018），959–1009。[10] ———，幺半范畴化与量子仿射代数，《组合数学》156（2020），第 5 期，1039–1077。[11] ———，箭图 Hecke 代数的局部化，《纯粹与应用数学季刊》17（2021），第 4 期，1465–1548。[12] ———，箭图 Hecke 代数的局部化 II，《伦敦数学会会刊》（第 4 辑）127（2023），1134–1184。

[13] M. Kashiwara 和 E. Park，箭图 Hecke 代数的仿射化与 R 矩阵，《欧洲数学会杂志》20（2018），1161–1193。[14] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《范畴与层》，《数学基础丛书》，第 332 卷，施普林格出版社，柏林（2006）。[15] S. Kato，Poincar´e-Birkhoff-Witt 基与 Khovanov-Lauda-Rouquier代数，《杜克数学杂志》163（2014），第 3 期，619–663。[16] ———, Saito 反射函子的幺半性，《国际数学研究通知》2020 年，第 22 期，8600–8623。[17] M. Khovanov 和 A. Lauda，量子群范畴化的图解方法 I，《表示论》13（2009），309–347。[18] ———, 量子群范畴化的图解方法 II，《美国数学会汇刊》363（2011），2685–2700。[19] A. Lauda 和 M. Vazirani，由量子群范畴化得到的晶体，《数学进展》228（2011），第 2 期，803–861。[20] G. Lusztig，《量子群导论》，《数学进展丛书》110，Birkh¨auser，1993。[21] P. J. McNamara，Khovanov-Lauda-Rouquier代数的有限维表示 I：有限型，《纯粹与应用数学杂志》707（2015），103–124。[22] ———, Kato反射函子的幺半性，arXiv:1712.00173v1。[23] R. Rouquier，2-Kac–Moody代数，arXiv:0812.5023v1。[24] Y. Saito，量子化泛包络代数的 PBW基，《数学科学研究所刊物》30（1994），第 2 期，209–232。[25] P. Tingley 和 B. Webster，Mirkovi´c-Vilonen 多面体与 Khovanov-Lauda-Rouquier代数，《组合数学》152（2016），第 8 期，1648–1696。

(M. KASHIWARA) Kyoto University Institute for Advanced Study, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan & Korea Institute for Advanced Study, Seoul 02455, Korea
电子邮箱，M. Kashiwara：masaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

(M. Kim) Department of Mathematics, Kyung Hee University, Seoul 02447, Korea
电子邮箱，M. Kim：mkim@khu.ac.kr

(S.-j. 吴) Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419 ,Korea

电子邮箱，S.-j. 吴：sejin092@gmail.com

(E. PARK) Department of Mathematics, University of Seoul, Seoul 02504, Korea电子邮箱，E. PARK：epark@uos.ac.kr