具有非退化奇点的全纯叶状结构上的热扩散

FRANC.OIS BACHER

摘要。设紧复流形上存在一个具有非退化奇点的 Brody双曲叶状结构。我们证明，沿叶的热扩散与抽象热扩散相一致。特别地，这将意味着抽象热扩散是唯一的。

arXiv:2304.00239v2 [math.DS] 9 Nov 2023

1. 引言

近年来，黎曼曲面层叠的整体动力学受到了广泛关注。大量研究致力于发展与之相适应的遍历理论。这可能是理解黎曼曲面层叠整体行为的有力工具。射影空间的情形或许最具典型性，因为多项式向量场可以自然地紧化为 $\mathbb{P}^n$上的叶状结构。Lins Neto 和 Soares 在 [17]中，以及 Jouanolou 在 [14] 中证明，给定次数 $d \geqslant 2$的叶状结构 $\mathscr{F}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 上只有非退化奇点。根据 Lins Neto [15] 和 Glutsyuk [12], 的一个结果，只具有非退化奇点的叶状结构必然是双曲的，甚至按照 [7]的定义是 Brody双曲的。因此，许多作者研究了具有奇点的双曲黎曼曲面层叠，尤其是双曲奇异全纯叶状结构。我们简要介绍近期一些工作的成果；关于更多细节，请参阅综述 [9, 10, 19, 20] 。

要建立遍历理论，至少需要一些关于时间、时间平均、空间平均（即 测度）、不变测度和遍历测度的概念。事实证明，对于叶状结构，使用流代替测度、使用微分形式代替函数也很方便。对于双曲叶状结构，普遍覆盖空间中的庞加莱距离可以视为一种典范的时间。作为不变测度的类比，自然会考虑定向闭流。这带来了许多结果和动力学方法（例如参见 Rebelo [22]），但有很大一类叶状结构并不存在任何这类流。因此，Garnett 在 [11] 中考虑了较弱的调和流和调和测度概念。这一方法取得了重要成果，例如参见 Fornæss 和 Sibony 的综述 [10] ，或 Dinh、Nguyˆen、Sibony 在 [8] 中关于唯一遍历性的结果。Nguyˆen 还在 [18] 中引入了准调和测度的概念，以便为层叠建立奥塞莱德乘法遍历定理。于是，在叶（即轨道）上对函数取平均的自然过程便是热扩散

里尔大学，保罗·潘勒韦数学实验室，法国国家科学研究中心 U.M.R. 8524，59655 阿斯克新城 CEDEX，法国。电子邮箱：francois.bacher@univ-lille.fr。日期：2023年4月1日。关键词与短语。奇异全纯叶状结构；沿叶的庞加莱度量；热扩散；定向正调和流；调和测度。ORCiD：0000-0001-8212-7109。

。人们尝试了两种定义这类扩散的方法，两者都得出了一系列遍历定理。自然会令人疑惑的是，这两种方法是否导向同一个对象，也就是说，两种热扩散是否一致。尽管它们所满足的方程看起来相似，但这一点是否普遍成立尚不明确，也未得到证明。Nguyˆen 在其综述 [20]，中探讨了这个问题。他的结果如下。

定理 1.1 ([20, 推论 5.23])。设 $\mathscr{F} = (M, \mathscr{L}, E)$ 是 *Brody*双曲紧奇异全纯叶层。假设 $\mathscr{F}$ 的所有奇点都是可线性化且双曲的。那么，对于任何不给任意叶赋予质量的调和测度，抽象热扩散与沿叶的热扩散一致。特别地，抽象热扩散是唯一的，即，它们不依赖于所考虑的调和测度。

他将寻找使两种热扩散一致的更好充分条件作为一个问题提出（见 [20, 问题 5.24]）。我们的主要结果改进了定理 1.1。

定理 1.2。设 $\mathscr{F} = (M, \mathscr{L}, E)$ 是 *Brody*双曲紧奇异全纯叶层。假设 $\mathscr{F}$ 的所有奇点都是非退化的。那么，对于每个调和测度，抽象热扩散与沿叶的热扩散一致。特别地，抽象热扩散是唯一的，即，它们独立于调和测度。

下面说明我们证明所采用的方法。当研究非退化奇点时，我们会遇到比线性化的弱双曲奇点情形更为奇异的对象。在我们的语境中，与调和测度相关的流在奇点处可能具有非零的勒隆数。事实上，Chen 已在 [5] 中证明，非双曲奇点上的定向调和流的勒隆数可能为正。另一方面，Nguyˆen 已在 [21] 中证明，如果奇点是线性化且弱双曲的，则该数不可能为正。为处理这一新困难，我们必须控制奇点附近的热扩散。更确切地说，给定一个远离奇异集的初始热分布，我们证明它在有限时间内基本不会到达非退化奇点的邻域（见引理 6.3）。这一结果依赖于奇点附近的 Poincar´e 度量估计。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍沿叶的 Poincar´e 度量 g_P。我们说明将要考虑的奇点类型。对于同时赋予黎曼度量 g_M的叶状结构 $\mathscr{F} = (M, \mathscr{L}, E)$，我们定义函数 η。它以定量方式比较 g_P 和 g_M，从而使得 $\eta^2 g_P = 4g_M$。这是我们用来估计奇点附近扩散的主要工具。第 3 节描述热核和沿叶的热扩散，以及它们相对于叶的一致化的行为。第 4 节解释调和测度与调和流之间的联系。在我们的情形下，我们证明定向调和流的 Poincar´e 质量是有限的。第 5 节回顾抽象热扩散的构造。我们陈述一些关于 [6] 的中间引理，以证明其存在性，因为证明中需要用到这些引理。第 6 节用于证明定理 1.2。我们陈述并证明一个抽象判据，类似于 [20, 定理 5.17]在定理 6.1 中。在本文的大部分内容中，我们沿用 [20]的方法和记号。

记号。在本文中，我们用 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$ 的单位圆盘，用 $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^k$中的单位球。我们用 $r\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中半径为 r 的圆盘，用 $r\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^k$中半径为 r 的球。

当我们考虑 $\mathbb{D}$中的双曲距离时，我们用 $\mathbb{D}_R$ 表示 $\mathbb{D}$中双曲半径为 R 的圆盘，因此，对于 $r=\frac{e^R-1}{e^R+1}$，有 $r\mathbb{D}=\mathbb{D}_R$；或者 $R=\ln\frac{1+r}{1-r}$。

若 $\mathscr{F}=(M、\mathscr{L}、E)$ 是一个奇异全纯叶状结构，且 $x\in M\backslash E$，我们将 $\mathscr{F}$ 上经过 x的叶记为L_x。此外，若 L_x 是双曲的，我们记 ϕ_x: $\mathbb{D}\to L_x$ 为 L_x 的一个一致化，使得 $\phi_x(0)=x$。

给定复流形 M上的厄米度量 g_M，我们将由 g_M诱导的距离记为 $d_M(\cdot、\cdot)$。类似地，若给定一个记为 g_P的 Poincar´e 度量，我们将 Poincar´e 距离记为 $d_P(\cdot、\cdot)$。

Recall that $d^c=\frac{i}{2\pi}\left(\overline{\partial}-\partial\right)$ so that $dd^c=\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.

致谢。作者得到 Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01）和 QuaSiDy 项目（ANR-21-CE40-0016）的支持。

2. 沿叶的 Poincar´e 度量

设 $\mathscr{F}=(M,\mathscr{L},E)$ 为奇异全纯叶状结构。在 M上取定一个厄米度量 g_M。定义

$$\eta(x)=\sup\left\{\|\alpha'(0)\|_{g_M}\mid\alpha\colon\mathbb{D}\to L_x\text{ holomorphic such that }\alpha(0)=x\right\},\tag{2.1}$$

其中，$\|v\|_{g_M}$ 是相对于厄米度量 g_M的 $v\in T_xL_x$ 的范数。也就是说，$\|v\|_{g_M}=\sqrt{g_{M,\,x}(v,v)}$。

定义 2.1。若 $\mathscr{F}$的叶 L 由庞加莱´圆盘$\mathbb{D}$一致化，则称其为双曲 叶。若 $\mathscr{F}$ 的所有叶都是双曲的，则称叶状结构 $\mathscr{F}$ 为双曲 叶状结构。

我们主要关注双曲叶状结构的情形。利用施瓦茨引理，很明显，L_x 是双曲的当且仅当 $\eta(x)<\infty$。在这种情况下，$\eta(x)=\|\phi_x'(0)\|_{g_M}$，其中 ϕ_x: $\mathbb{D}\to L_x$ 是 L_x 的一个一致化，并满足 $\phi_x(0)=x$。通过 ϕ_x将 $\mathbb{D}$ 上的庞加莱度量向前推，我们得到叶 L_x上的所谓庞加莱´度量 g_P。由于 ϕ_x 可以取为在旋转的前复合意义下唯一，并且由于 $\mathbb{D}$ 的双全纯映射是 ($\mathbb{D}$的等距映射，g_P)，庞加莱度量是内蕴定义的。显然有

$$\eta^2g_P=4g_M.\tag{2.2}$$

我们回顾一下 [7, 定义 3.1] 如下。

定义 2.2。如果存在一个正常数 c_0使得 $\eta<c_0$ 在 $M\backslash E$上成立，则称 $\mathscr{F}$ 是***Brody***双曲 的。

我们来定义将要研究的奇点类型。

定义 2.3。设 $\mathscr{F}=(M、\mathscr{L}、E)$ 为奇异全纯叶状结构。在奇点 $a\in E$附近，存在定义 $\mathscr{F}$的向量场 X。在以 a为中心的坐标 $(z_1、...、z_n)$ 中，我们可以写成

$$X(z)=\sum_{j=1}^{n}F_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

函数 F_j 可展开为幂级数 $F_j=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}c_{\alpha,\,j}z^\alpha$。$X$在 a 处的***1***-喷流 在图表 (U,z) 中定义为 $X_1=\sum_{j=1}^n\sum_{|\alpha|\leqslant1}c_{\alpha,\,j}z^\alpha\frac{\partial}{\partial z_j}$。更多详情请参见例如 [13,第一章] 。如果 X 的 1-喷流在 a处有一个孤立奇点，我们称a 为 $\mathscr{F}$的非退化奇点 。

以下结果是对 [16]中的非退化向量场进行局部研究的直接推论。我们将 $\log^\star = 1 + |\log|$ 记为对数型函数，并将 $d_M(x,E)$ 记为相对于厄米度量 g_M而言，从 $x \in M$ 到奇异集 E 的距离。

命题 2.4 (Dinh-Nguyˆen-Sibony)。 设 $\mathscr{F} = (M,\ \mathscr{L},\ E)$ 是 *Brody*双曲紧奇异全纯叶状结构。假设 $\mathscr{F}$ 的所有奇点均为非退化的。那么，存在一个常数 $c > 1$，使得 $\mathscr{F}$ 的 *Poincar´é* 度量满足

$$c^{-1} d_M(x,E) \log^\star d_M(x,E) \leqslant \eta(x) \leqslant c d_M(x,E) \log^\star d_M(x,E), \qquad x \in M\backslash E.$$

证明见 [2, 命题 4.1] ，其思路受到 [7, 命题 3.3] 的启发 .

3. 叶向热扩散算子

现在我们将定义我们所关注的两个热扩散算子中的一个。设 $\mathscr{F} = (M、\ \mathscr{L}、\ E)$ 为双曲奇异全纯叶状结构。沿叶的 Poincar´é 度量 g_P 在叶上导出其相应的拉普拉斯算子 Δ_P。更确切地说，对于 $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{D})$ 或对于 $f \in \mathscr{C}^2(L_x)$， Δ_P 由以下公式定义。

$$(\Delta_P f)\, g_P = \pi dd^{\mathrm{c}} f = i\partial\overline{\partial} f \qquad \text{on } \mathbb{D} \text{ or } L_x.$$

对于任意固定的 $x \in M\backslash E$，我们研究 L_x 上的热方程

$$\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial t} = \Delta_{P,y} p(x,y,t), \quad \lim_{t\to 0^+} p(x,y,t) = \delta_x(y), \quad y \in L_x,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.1}$$

这里，我们用 δ_x 表示 x 中的狄拉克质量，用 $\Delta_{P,\ y}$ 表示关于变量 y 的拉普拉斯算子 Δ_P。极限是在分布意义下取的。

L_x 上的热核记为 $p(x,y,t)$，定义为热方程（3.1）的最小正解（见 Chavel [4]）。通过扩散 $p(x,y,t)$，我们得到一个由 $\{D_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ 定义的算子单参数族:

$$D_t f(x) = \int_{L_x} p(x,y,t) f(y) g_P(y), \qquad x \in M\backslash E, \quad f \in L^\infty(M\backslash E). \tag{3.2}$$

这个族是 $L^\infty(M\backslash E)$ 上的正压缩算子半群（见（3.3））。其元素称为叶向热扩散算子。

$$D_0 = \mathrm{id}; \quad D_t \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad \text{and} \quad D_{t+s} = D_t \circ D_s, \text{ for } t,s \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

其中，1 是恒等于 1 的函数。

相同的结果在 $\mathbb{D}$ 本身上也成立。我们用 $p_{\mathbb{D}}(\theta,\zeta,t)$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的热核。叶 L_x 上的热扩散与 $\mathbb{D}$ 上的热扩散之间的关系由下式给出:

$$D_t(f \circ \phi_x) = (D_t f) \circ \phi_x, \qquad \text{on } \mathbb{D}, \text{ for } t \in \mathbb{R}_+,\ f \in L^\infty(L_x). \tag{3.4}$$

证明见 [18, 命题 2。7]

4. 定向流与调和测度

我们假定读者已经熟悉流、正流和调和流的概念。更详细的阐述请参见 [20]。新例子请参见 [1]。设 $\mathscr{F} = (M, \mathscr{L}, E)$ 为一个双曲奇异全纯叶状结构。根据以下引理，$\mathscr{F}$ 上的定向调和流可沿叶并横向分解。该引理的证明见 [6, 命题 2.3] （另见 [20, 命题 2.5]）。我们将用它来定义抽象热扩散。

引理 4.1. 设 T 为 $\mathscr{F}$上的一个定向调和流。考虑 $\mathbb{U} \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ 为一个流形盒，其坐标可延拓至 M中其闭包的一个邻域。于是，存在 $\mathbb{T}$ 上的正拉东测度 ν，并且对几乎所有关于 ν的 $t \in \mathbb{T}$，存在 $\mathbb{D}$上的调和函数h_t，使得

- 质量 $\int_{\mathbb{T}} \|h_t\|_{L^1(\mathbb{D})}\, d\nu(t)$ 是有限的；
- 对于 $\alpha \in \mathscr{D}^{1,\,1}(\mathscr{F})$ 在 $\mathbb{U}$中具有紧支撑，

$$T(\alpha) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{D}} h_t(y)\alpha(y,t) \right) d\nu(t).$$

此外，如果 T 为正，则对于 ν-几乎处处的 $t \in \mathbb{T}$，h_t 在 $\mathbb{D}$上为正。

我们对测度定义了调和性，用于刻画它们相对于叶上的拉普拉斯算子的行为。

定义 4.2。令 Δ_P 表示 $\mathscr{F}$各叶上的叶向拉普拉斯算子的总和。称 $M\backslash E$ 上的有限正博雷尔测度 μ 为调和的，如果

$$\int_M \Delta_P f d\mu = 0, \qquad f \in \mathscr{D}(\mathscr{F}),$$

其中，$\mathscr{D}(\mathscr{F}) = \mathscr{D}^{0,\,0}(\mathscr{F})$ 表示测试函数空间。

调和测度与定向调和流密切相关。更确切地说，如果 T 是一个定向调和流，并且测度

$$\mu = T \wedge g_P \quad \text{on} \quad M\backslash E, \tag{4.1}$$

若有限，则 μ 是调和的。反之，若 μ 是调和测度，则存在一个定向调和流 T，使得 (4.1) 成立。隐式证明见 [6] 。无论如何，我们将由 (4.1) 定义的 μ 的总质量称为 T的庞加莱´质量。它在奇点附近可能是无穷大的。我们需要以下结果。第一个是 Skoda 在 [23] 中定理的一个弱版本。第二个由 Dinh、Nguyˆen 和 Sibony 在 [6] 中证明。

命题 4.3. 设 T是球 $r_0\mathbb{B}$ 上的一个正的 dd^c-闭 $(0,\,0)$-流，$\beta = dd^c \|z\|^2$是标准的 ***Kähler*** 形式。那么，对于 $r \in (0,\,r_1]$，$r_1 < r_0$，量 $r^{-2}\|T \wedge \beta\|_{r\mathbb{B}}$ 有界。

这里，$\|T \wedge \beta\|_A$ 表示 $T \wedge \beta$ 作为可测集A上的正测度的质量。

命题 4.4。设 $\mathscr{F} = (M,\,\mathscr{L},\,E)$ 是具有孤立奇点的奇异全纯叶状结构，且 T 是 $M\backslash E$上的定向正调和流。那么，T 在任意奇点 $a \in E$ 附近具有局部有限质量，并且可以延拓穿过 a 成为一个正的 dd^c-闭流。

以下关于 dd^c-闭流的庞加莱质量有限性的判据，对于证明定理 1.2 将非常重要。

命题 4.5。设 $\mathscr{F} = (M、\,\mathscr{L}、\,E)$ 是一个奇异全纯叶状结构，且 E 由孤立奇点组成。假设在 $a \in E$的邻域内，$\mathscr{F}$的 ***Poincar´é*** 度量满足 $\eta(x) \geqslant cd_M(x、\,a)$对数* $d_M(x、\,a)$其中 $c > 0$为常数。那么，$\mathscr{F}$ 上的任意定向正调和流在 a附近都具有局部有限的 ***Poincar´é*** 质量。

证明。 证明已隐含于 [6, 命题 4.2] 中。基本上，我们在坐标下使用 $\mathbb{C}^k$的标准 K¨ ähler 形式 $\beta = dd^{\mathrm{c}} \|z\|^2$ 进行处理。命题 4.4 和命题 4.3 保证了 $\|T \wedge \beta\|_{r\mathbb{B}} \leqslant Cr^2$。然后，我们使用（2.2），证明以如下分部积分结束。

$$\begin{aligned}\int_{r\mathbb{B}} T \wedge g_P &= 4\int_{r\mathbb{B}} \frac{1}{\eta^2(z)} T \wedge \beta \leqslant \frac{4}{c^2}\int_{r\mathbb{B}} \frac{1}{\|z\|^2 \ln^2 \|z\|} T \wedge \beta \\ \int_{r\mathbb{B}} T \wedge g_P &\leqslant \frac{4}{c^2}\left[\frac{\|T \wedge \beta\|_{r\mathbb{B}}}{r^2 \ln^2(r)} + \int_0^r \|T \wedge \beta\|_{\rho\mathbb{B}} \left(\frac{2}{\rho^3 \ln^2 \rho} + \frac{2}{\rho^3 \ln^3 \rho}\right) d\rho\right] \\ &\leqslant \frac{8C}{c^2 |\ln r|} < +\infty.\end{aligned}$$

□

5. 抽象热扩散

设 $\mathscr{F} = (M、\ \mathscr{L}、\ E)$ 是一个双曲奇异全纯叶状结构， μ 是 $\mathscr{F}$ 上的调和测度。我们希望求得抽象热方程的一个解。该解将由 Hille-Yosida 定理给出。首先回顾泛函分析中的一些概念和事实。读者可在 Brezis [3] 中找到相关证明和论述。

设 L 是一个希尔伯特空间，$\langle \cdot、\ \cdot \rangle$ 是其内积。对于 $\mathrm{Dom}(A) \to L$ 上的线性算子 A，若 $\mathrm{Dom}(A) \subset L$，则称其为 单调的；如果 $\langle Au、\ u\rangle \geqslant 0$、 $u \in \mathrm{Dom}(A)$，则称其为 极大单调的。此外，对于 $f \in L$，存在 $u \in \mathrm{Dom}(A)$ 使得 $Au + u = f$。如果 A 是极大单调的，则 $\mathrm{Dom}(A)$ 在 L 中稠密，且 A 的图像是闭的。压缩半群是满足下列条件的一族 $S(t)$: $L \to L$、 $t \in \mathbb{R}_+$

- $S(t + t') = S(t) \circ S(t')$, $t, t' \in \mathbb{R}_+$,
- $\|S(t)\| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}_+$.

根据以下结果，极大单调算子 A 生成一个以 A 为无穷小生成元的压缩半群。

定理 5.1 (Hille-Yosida)。 设 A 是希尔伯特空间 L 上的极大单调算子。方程

$$\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t} + Au(t,\cdot) = 0, \quad \textit{and} \quad u(0,\cdot) = u_0, \tag{5.1}$$

for

$$u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, L) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A)) \tag{5.2}$$

并且 $u_0 \in$ 定义域(A)，具有唯一解 u。此外， u 由作用于 u_0 上的压缩半群 $S(t)$: $L \to L$, $t \in \mathbb{R}_+$ 给出，即 $u(t,\ \cdot) = S(t)u_0$。

因此，如果能够证明算子 $-\Delta_P$ 是极大单调的，就可以求解热方程。这项工作已在 [6, 命题 5.6] （另见 [20,命题 5.8]）中完成，并得出了以下结果。

命题 5.2。 设 $\mathscr{F} = (M,\ \mathscr{L},\ E)$ 是配备了其庞加莱度量 g_P的奇异全纯叶状结构。如果 μ是 $\mathscr{F}$上的调和测度，那么 $-\Delta_P$在 $L^2(\mu)$上是极大单调的。

特别地，存在一个压缩半群 $S(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ ，使得对于 u_0 ∈定义域 $(-\Delta_P)$, $u(t, \cdot) = S(t)u_0$ 满足 (5.2) 和(5.1)。 $S(t)$ 称为抽象热扩散算子。

[6] 的证明依赖于对通过算子 Δ_P 和另一个拉普拉斯型算子 Δ_P定义的双线性型的研究。我们回顾这些双线性型的定义及其一些所需性质。设 T 是由 (4.1) 与 μ 相关联的定向调和流。根据引理 4.1，在给定的流形盒 $\mathbb{U} \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{T}$中，我们可以写成

$$T(\alpha) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{D}} h_t(y)\alpha(y,t) \right) d\nu(t),$$

其中，对于 $t \in \mathbb{T}$， h_t是 $\mathbb{D}$ 上的正调和函数，而 ν 是一个拉东测度。定义

$$\tilde{\Delta}_P u = \Delta_P u + \left\langle h_t^{-1} \nabla h_t, \nabla u \right\rangle_{g_P}.$$

这里，梯度是相对于庞加莱度量定义的，因此对于 $u \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ 以及与叶相切的 ξ，有 $\langle \nabla u, \xi \rangle_{g_P} = du(\xi)$。注意， $|\nabla u| = |du|_P$。梯度可以扩展为一个定义域为 $H^1(\mu)$ 、值域为 $L^2(\mu)$的算子。空间 $H^1(\mu)$ 是 $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ 关于范数的完备化

$$\|u\|_{H^1(\mu)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\mu)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mu)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们有定义域 $(-\Delta_P) \subset H^1(\mu)$。先验地， $\tilde{\Delta}_P$的定义取决于流盒的选择，但函数 h_t 和流 T 的唯一性确保它是一个全局算子。定义双线性型

$$q(u,v) = -\int (\Delta_P u) v \, d\mu, \qquad \tilde{q}(u,v) = -\int (\tilde{\Delta}_P u) v \, d\mu,$$

对于 u、 $v \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$。我们在下面的陈述中总结第 6 节所需的 q和 $\tilde{q}$的性质。读者可以在 [6, 引理 5.4 和 5.5] 中找到证明（另见 [20, 引理 5.4 和 5.5，注 5.7]）。

命题 5.3。 设 μ为调和测度。双线性型 q 和 $\tilde{q}$ 可以连续延拓到 $H^1(\mu) \times H^1(\mu)$。此外，

(1) 对于 $u \in H^1(\mu)$、 $q(u, u) = \tilde{q}(u, u)$。*(2)* 对于 u∈定义域 $(-\Delta_P)$ 和 $v \in H^1(\mu)$，我们有

$$\tilde{q}(u,v) = \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{g_P} \, d\mu = \int i\partial u \wedge \overline{\partial} v \wedge T.$$

6. 热扩散的一致性：定理 1.2 的证明

本节旨在比较第 5 节定义的扩散算子 $S(t)$ 和第 3 节定义的扩散算子 D_t，其中 $t \in \mathbb{R}_+$任意。我们首先给出一个非常抽象的判据，以判断这两种热扩散是否相同。

定理 6.1。 设 $\mathscr{F} = (M, \mathscr{L}, E)$ 是具有孤立奇点的奇异全纯叶状结构。在 M 上考虑沿叶的庞加莱度量 g_P 和一个厄米度量 g_M。记 η 为由（2.1）定义的比函数。设 μ 是 $\mathscr{F}$上的调和测度。假设

(H1) η 在 $M\backslash E$ 上局部有上界，并且在任意 $a \in E$的邻域内，$\eta(x) \leqslant F_a\left(d_M(x, a)\right)$ 对于某个函数 F_a： $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$，使得 F_a 连续且 $\frac{1}{F_a}$ 在0附近不可积；

（*H2*）任何满足以下条件的可测函数 u 在 $M\backslash E$

（*a*） $\|u\|_{L^\infty} < \infty$， （*b*） $\||du|_P\|_{L^\infty} < \infty$，

（*c*） $\|\Delta_P u\|_{L^\infty} < \infty$， （*d*）对于每个 $a \in E$，

极限$_{\varepsilon \to 0} \left\|u_{|\{d_M(x,\ a)<\varepsilon\}}\right\|_{L^\infty} = 0$，

属于 $H^1(\mu)$。

于是，抽象热扩散算子与叶向热扩散算子一致。

注记 6.2。 该定理类似于 Nguyˆen [20, 定理 5.17]中的一个结果。相比之下，我们的假设（H1）强于他的假设，而我们的假设 (H2)弱于他的假设。实际上，他在一个条件远为有利的情形下使用了前一个假设。因此，为满足后一个假设，他不得不设定相当特殊的奇点和流。具体而言，他必须处理双曲奇点，并要求某个不赋予任何叶以质量的流具有勒隆数零。这里，我们放宽了第二个假设，以便将该定理应用于更奇异的测度，并相应地加强了第一个假设。特别是，我们的假设（H1）使我们能够得到下面引理 6.3 的结果。

在证明定理 6.1 之前，我们需要两个引理。第一个引理是新的，并将成为我们证明中的关键要素。第二个引理可见于 [20]。

引理 6.3。 我们沿用定理 *6.1* 中的记号，并假设假设（*H1*）。令$u_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ 和 $u(t, \cdot) = D_t u_0$。那么，对于 $t > 0$ 和 $a \in E$，极限$_{\varepsilon \to 0} \left\|u_{|\{d_M(x,\ a)<\varepsilon\}}(t,\ \cdot)\right\|_{L^\infty} = 0$。

证明。 令 $a \in E$ 和 δ 满足：存在一个厄米图 $\mathbb{U}$，其位于 a 周围，半径为δ。不妨设 g_M 是$\mathbb{U} \simeq \delta\mathbb{B}$上的标准 K¨ahler 度量。如有必要缩小图，我们还假设 $\delta < d_M(\text{supp } u_0, a)$。固定$t > 0$，取 $\varepsilon < \delta$ 和 $x \in \varepsilon\mathbb{B}$。对于 $y \in L_x \cap \text{supp}\, u_0$，由（2.2）可得，

$$d_P(x, y) \geqslant 2\int_\varepsilon^\delta \frac{dt}{F_a(t)} = R_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} +\infty,$$

由于 F_a 在 0 附近不可积，因此可得 $\phi_x^{-1}(\text{supp } u_0) \subset \mathbb{D}\backslash\mathbb{D}_{R_\varepsilon}$。换言之，在以 x为中心的 L_x 一致化中，当 x 趋近于奇点时， u_0 的支集一致地趋近于边界。由（3.4）和（3.2），我们得到

$$D_t u_0(x) = u(t, x) = \int_{\mathbb{D}} p_{\mathbb{D}}(0, y, t) u_0\left(\phi_x(y)\right) g_P(y),$$

$$|u(t, x)| \leqslant \|u_0\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{D}} \mathbf{1}_{\mathbb{D}\backslash\mathbb{D}_{R_\varepsilon}}(y) p_{\mathbb{D}}(0, y, t) g_P(y),$$

其中 $\mathbf{1}_{\mathbb{D}\backslash\mathbb{D}_{R_\varepsilon}}$ 表示 $\mathbb{D}\backslash\mathbb{D}_{R_\varepsilon}$的特征函数。该界与 x 无关，因此 $d_M(x,\ a) < \varepsilon$。根据勒贝格控制收敛定理以及 $R_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} +\infty$这一事实，当 ε 趋于 0 时，右端趋于 0。这就得到了所需的结论。□

引理 6.4。 我们沿用引理 *6.3* 的记号和假设。此外，假设u_0 为正。则 u 是可测的，并且满足

(1) (a) $\|u(\cdot,\ \cdot)\|_{L^\infty}<\infty$; *(b)* 对于 $t>0,\ \ \||du(t,\cdot)|_P\|_{L^\infty}<\infty$; *(c)* 对于 $t>0,\ \ \|\Delta_P u(t,\ \cdot)\|_{L^\infty}<\infty$; *(2)* $u\in\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*,\ L^2(\mu)\right)$ 以及对于 $t\in\mathbb{R}_+^*,\ \overline{\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t}}-\Delta_P u(t,\cdot)=0$; *(3)* 极限 $\lim_{t\to 0}u(t,\ \cdot)=u_0$ 在 $L^2(\mu)$ 中。

证明请参见 [20, 事实 (5.15)、(5.16) 和 (5.17)]，该证明依赖于对热核的精确估计。

定理 *6.1* 的证明。 我们沿用 [20, 定理 5.17] 的证明。设 $u_0\in$ 定义域 $(-\Delta_P)$并且 $t\in\mathbb{R}_+$。我们需要证明

$$D_t u_0=S(t)u_0. \tag{6.1}$$

由于算子 D_t 和 $S(t)$ 是正压缩算子，且 $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ 在定义域 $(-\Delta_P)$ 中稠密，因此只需对非负的 $u_0\in\mathscr{D}(\mathscr{F})$ 证明 (6.1) 即可。取这样一个 u_0。记 $u(t、\ \cdot)=D_t u_0$ 和 $U(t、\ \cdot)=S(t)u_0$。根据引理 6.3 和引理 6.4 以及假设 (H2)，$u(t、\ \cdot)$、$U(t、\ \cdot)$ 以及 $\tilde{u}(t、\ \cdot)=U(t、\ \cdot)-u(t、\ \cdot)$ 对某个固定的 t 均属于 $H^1(\mu)$。此外，它们是 $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*、\ L^2(\mu)\right)$。由 $S(t)$ 和 D_t 满足的热方程 (5.1) 及引理 6.4 中的 (2) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\tilde{u}(t,\cdot)\|_{L^2(\mu)}^2\right)=\langle\Delta_P\tilde{u}(t,\cdot),\tilde{u}(t,\cdot)\rangle=-q\left(\tilde{u}(t,\cdot),\tilde{u}(t,\cdot)\right).$$

通过用 $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ 中的元素逼近 $\tilde{u}(t、\ \cdot)$，并利用命题 5.3，我们得到 $q\left(\tilde{u}(t、\ \cdot)、\ \tilde{u}(t、\ \cdot)\right)=\tilde{q}\left(\tilde{u}(t、\ \cdot)、\ \tilde{u}(t、\ \cdot)\right)\geqslant 0$（见 [20, 第 50 页-51]）。因此，根据边界条件，$\|\tilde{u}(t、\ \cdot)\|_{L^2(\mu)}^2$ 是递减的，并且当 $t\to 0$ 时趋于 0。这意味着它恒等于零，且 $U(t、\ \cdot)=u(t、\ \cdot)$。□

定理 *1.2* 的证明。 我们受到 [20, 命题 5.22]证明的启发。令 T 为 $\mathscr{F}$上的一个定向正调和流。根据命题 2.4，我们有

$$c^{-1}d_M(x,E)\log^\star d_M(x,E)\leqslant\eta(x)\leqslant cd_M(x,E)\log^\star d_M(x,E),\quad x\in M\backslash E. \tag{6.2}$$

然后，命题 4.5 确保通过 (4.1) 与 T相关联的测度 μ 是有限的。因此，它是一个调和测度。我们希望应用定理 6.1。由 (6.2) 可知，假设 (H1) 显然成立。剩下需要验证假设 (H2)。令 u 为 $M\backslash E$上的一个可测函数，使得

$$\|u\|_{L^\infty}<\infty,\quad \||du|_P\|_{L^\infty}<\infty,\quad \|\Delta_P u\|_{L^\infty}<\infty,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|u_{|\{d_M(x,a)<\varepsilon\}}\right\|_{L^\infty}=0,\ a\in E. \tag{6.3}$$

我们需要证明 u 属于 $H^1(\mu)$。利用 M的紧性，我们可以找到一个有限开覆盖 $\mathcal{U}=(U_p)_{p\in I}$，其由以下对象组成：

(1) 流盒 $U_p\simeq\mathbb{D}\times\mathbb{T}$，使得 $d_M(U_p、\ E)>0$；(2) 关于 $a\in E$ 的厄米图 $U_a\simeq\mathbb{B}$，满足 $U_a\cap E=\{a\}$。

由于 μ 是有限的，利用单位分解，我们可以假设 u 在单个 U_p 或 U_a 中是紧支撑的。

情形 (1)。 我们需要找到 $u_\varepsilon\in\mathscr{D}(\mathscr{F})$，使得 $\|u-u_\varepsilon\|_{H^1(\mu)}<\varepsilon$。我们将按以下三个步骤进行。

(i) 设 $\chi^{(1)}$: $\mathbb{C}\to[0,1]$ 是一个支撑于 $\overline{\mathbb{D}}$ 的光滑函数，满足 $\int_{\mathbb{C}}\chi^{(1)}d\,\mathrm{Leb}=1$。定义 $\chi_\delta^{(1)}(z)=\delta^{-2}\chi(\delta z)$，其中 $\delta\in(0,1)$。设 u_1 为 u 与 $\chi_\delta^{(1)}$ 的沿叶的卷积。

(ii) 设 v 是一个有界连续函数，使得 $\|du_1-v\|_{L^2(m)}<\varepsilon$ 和 w 是一个有界连续函数，使得 $\|u_1(0、t)-w(t)\|_{L^2(\nu')}<\varepsilon$。这里，$m$ 和 ν' 分别是定义在 $\mathbb{D}\times\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{T}$ 上的测度，具体形式将在我们的计算中确定。回忆一下，根据卢津定理，如果 m 和 ν' 是拉东测度，我们可以找到这样的 v 和 w。定义

$$u_2(z,t)=w(t)+\int_0^1 v(\tau z,t)\cdot z d\tau.$$

(iii) 设 $u_\varepsilon=u_3$ 是 u_2 与 $\chi_\delta^{(1)}$ 的沿叶卷积。

首先注意到，根据 (6.2) 和 (2.2)，存在一个常数 $C>1$，使得在 U_p 上有 $C^{-1}\|dz\|^2\leqslant g_P\leqslant C\|dz\|^2$。由此可知，当 δ 足够小时，第一步和第三步将分别给出 $\|u_1-u\|_{H^1(\mu)}<\frac{\varepsilon}{3}$ 和 $\|u_3-u_2\|_{H^1(\mu)}<\frac{\varepsilon}{3}$。此外，显然 u_2 是连续的。因此，$u_3\in\mathscr{D}(\mathscr{F})$。所以，还需证明 $\|u_1-u_2\|_{H^1(\mu)}<\frac{\varepsilon}{3}$。由于 u_1 是沿叶光滑的，我们有

$$u_1(z,t)=u_1(0,t)+\int_0^1 du_1(\tau z,t)\cdot z d\tau$$

在 $(z、t)\in\mathbb{D}\times\mathbb{T}$ 上处处成立。回顾 μ 由 $T\wedge g_P$ 给出，而根据引理 4.1，T 由 u_1-u_2 分解为横截于 0 的部分和积分部分，并对第二部分应用柯西-施瓦茨不等式。得到

$$\|u_1-u_2\|_{L^2(\mu)}\leqslant\|w-u_1(0,\cdot)\|_{L^2(\nu')}+\|v-du_1\|_{L^2(m_1)},$$

其中 $\nu'(t)=\|h_t\|_{L^1(g_P)}\nu(t)$ 和 $m_1=\lambda_*(\mathrm{Leb}\times\mu)$，满足 λ: $(\tau、z、t)\mapsto(\tau z、t)$。此外，$du_2=v$，由于 $C^{-1}\|dz\|^2\leqslant g_P\leqslant C\|dz\|$，我们有

$$\|\nabla u_1-\nabla u_2\|_{L^2(\mu)}\leqslant C\|v-du_1\|_{L^2(\mu)}.$$

显然，$m=m_1+\mu$ 是有限的，因此是一个拉东测度。根据引理 4.1，ν' 也是如此。取 v 为一个有界连续函数，使得 $\|du_1-v\|_{L^2(m)}<\alpha\varepsilon$，并取 w 为一个有界连续函数，使得 $\|u_1(0、\cdot)-w\|_{L^2(\nu')}<\alpha\varepsilon$，其中 $\alpha\leqslant\frac{1}{3}(4+C^2)^{-1/2}$。于是 $\|u_2-u_1\|_{H^1(\mu)}<\frac{\varepsilon}{3}$，因此，$\|u-u_\varepsilon\|_{H^1(\mu)}<\varepsilon$。这就证明了情形（1）。

情形 (2)。我们在以 a 为中心的坐标 $U_a\simeq\mathbb{B}\subset\mathbb{C}^k$ 中工作。设 χ: $\mathbb{C}^k\to[0,1]$ 是一个光滑函数，使得在 $\frac{1}{2}\mathbb{B}$ 上有 $\chi(z)=1$，并且在 $\mathbb{C}^k\backslash\mathbb{B}$ 上有 $\chi(z)=0$。对于 $\varepsilon\in(0、1)$，考虑函数

$$v_\varepsilon(z)=\left(1-\chi\left(\varepsilon^{-1}z\right)\right)u(z),\qquad z\in\mathbb{B}.$$

根据构造，我们有 $v_\varepsilon=0$ 在 $\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}$ 上，且 v_ε 满足 (6.3)。通过与情形（1）相同的论证，我们得到 $v_\varepsilon\in H^1(\mu)$。因此，只需证明 $\lim_{\varepsilon\to0}\|u-v_\varepsilon\|_{H^1(\mu)}=0$。此外，$u-v_\varepsilon$ 的支集位于 $\varepsilon\mathbb{B}$ 中，并且处处 $|u-v_\varepsilon|\leqslant|u|$。由于 $\mu(\{a\})=0$,

$$\int_M|u-v_\varepsilon|^2\,d\mu\leqslant\|u\|_{L^\infty}^2\int_{\varepsilon\mathbb{B}}d\mu\underset{\varepsilon\to0}{\to}0.$$

接下来，我们讨论 $H^1(\mu)$-范数的梯度部分。我们有

$$\int_M |\nabla (u - v_\varepsilon)|^2 \, d\mu = \int_{\varepsilon\mathbb{B}} i\partial \left(u(z)\chi\left(\varepsilon^{-1}z\right)\right) \wedge \overline{\partial}\left(u(z)\chi\left(\varepsilon^{-1}z\right)\right) \wedge T(z).$$

除相差常数因子外，右侧小于以下三项之和

$$I_1 = \int_{\varepsilon\mathbb{B}} i\partial u \wedge \overline{\partial} u \wedge T, \quad I_2 = \varepsilon^{-1} \int_{\varepsilon\mathbb{B}\setminus\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}} |u| \, |du| \, T \wedge \beta, \quad I_3 = \varepsilon^{-2} \int_{\varepsilon\mathbb{B}\setminus\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}} |u|^2 \, T \wedge \beta,$$

其中 $\beta = dd^c \|z\|^2$ 是标准 K¨ahler 度量。由于 $\mu(\{a\}) = 0$，我们得到 in

$$I_1 = \int_{\varepsilon\mathbb{B}} |\nabla u|^2 \, d\mu \leqslant \left\| |du|_P \right\|^2 \mu(\varepsilon\mathbb{B}) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

回顾 $|du| = \frac{|du|_P}{\eta} = \frac{|\nabla u|}{\eta}$。由 (6.2) 以及 g_M 与标准范数的等价性，我们得到

$$I_2 \leqslant \frac{C\|u\|_{L^\infty}}{\log^\star(c\varepsilon)} \left\| |du|_P \right\|_{L^\infty} \varepsilon^{-2} \|T \wedge \beta\|_{\varepsilon\mathbb{B}}.$$

于是，当 $\varepsilon \to 0$ 时，命题 4.3 推出 $I_2 \to 0$。最后，

$$I_3 \leqslant \left\| u_{|\{d_M(x,a)<\varepsilon\}} \right\|^2_{L^\infty} \varepsilon^{-2} \|T \wedge \beta\|_{\varepsilon\mathbb{B}}.$$

因此，命题 4.3 和 (6.3) 保证当 $\varepsilon \to 0$ 时，$I_3 \to 0$。由此可知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|u - v_\varepsilon\|_{H^1(\mu)}$ 趋于 0。因此，$u \in H^1(\mu)$，定理 1.2 是定理 6.1 的推论。□

注 6.5. 事实上，I_1 的估计方法与 [20，第 56 页-57] 完全相同，I_2 也类似。这里的新内容是对 I_3 的估计，它基于引理 6.3。

参考文献

[1] Alkateeb, Mohamad；Rebelo, Julio：射影平面上的调和叶状流和奇异 Levi 平坦超曲面的例子。arXiv:2304.03744，（2023）。[2] Bacher, François：具有非退化奇点的全纯叶状结构的 Poincaré 度量。《国际数学杂志》**34**（2023），第 10 期，论文编号 2350059，共 22 页。[3] Brezis, Haïm：泛函分析。理论与应用。数学应用文集。*Masson*，巴黎，1983。xiv+234 页。ISBN：2-225-77198-7。[4] Chavel, Isaac：黎曼几何中的特征值。包括 Burton Randol 撰写的一章。附 Jozef Dodziuk 撰写的附录。纯粹数学与应用数学，第 115 卷。*Academic Press, Inc.*，奥兰多，佛罗里达州，1984。xiv+362 页。ISBN：0-12-170640-0。[5] Chen, Zhangchi：非双曲线性化奇点附近的定向调和流。遍历理论与动力系统**43**（2023），第 7 期，2228–2257。[6] Dinh, Tien-Cuong；Nguyˆen, Viˆet-Anh；Sibony, Nessim：黎曼曲面层叠上的热方程与遍历定理。《数学年刊》**354**（2012），第 1 期，331–376。[7] Dinh, Tien-Cuong；Nguyˆen, Viˆet-Anh；Sibony, Nessim：双曲黎曼曲面层叠上的熵 II。《复动力系统前沿：献给 *John Milnor 80* 岁生日的论文集，（A. Bonifant、M. Lyubich、S. Sutherland 编），593–622，（2014），普林斯顿大学出版社。[8] Dinh, Tien-Cuong；Nguyˆen, Viˆet-Anh；Sibony, Nessim：紧致 Kähler 曲面上叶状结构的唯一遍历性。《杜克数学杂志》**171**（2022），第 13 期，2627–2698。[9] Dinh, Tien-Cuong；Sibony, Nessim：关于全纯叶状结构理论的一些公开问题。《越南数学学报》**45**（2020），第 1 期，103–112。[10] Fornæss, John Erik；Sibony, Nessim：带奇点的黎曼曲面层叠。《几何分析杂志》**18**（2008），第 2 期，400–442。

[11] Garnett, Lucy：叶状结构、遍历定理与布朗运动。《函数分析杂志》51（1983），第 3 期，285–311。[12] Glutsyuk, Alexey：非奇异射影代数簇上一般一维全纯叶状结构的叶的双曲性。（俄文）《Steklov 数学研究所论文集》213（1997），《微分方程与复变量》，90–111；译文载于《Steklov数学研究所通报》1996，213(2)，83–103。[13] Ilyashenko, Yulij；Yakovenko, Sergei：解析微分方程讲义。数学研究生教材，第 86 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2008。xiv+625 页。[14] Jouanolou, Jean-Pierre：´代数 Pfaff 方程。′（法文） [代数 Pfaff 方程] 数学讲义，第 708 卷。施普林格，柏林，1979。v+255 页。[15] Lins Neto, Alcides：曲线叶状结构的叶的一致化与 Poincaré 度量。《巴西数学会通报》（新系列）31（2000），第 3 期，351–366。[16] Lins Neto, Alcides；Canille Martins, Júlio Cesar：在曲线奇异全纯叶状结构的叶上诱导 Poincaré 度量的厄米度量。《美国数学会汇刊》356（2004），第 7 期，2963–2988。[17] Lins Neto, Alcides；Soares, Márcio G.：一维叶状结构的代数解。《微分几何杂志》43（1996），第 3 期，652–673。[18] Nguyˆen, Viˆet-Anh：层叠的奥塞莱德乘法遍历定理。《美国数学会回忆录》246（2017），第 1164 号，ix+174 页。ISBN：978-1-4704-2253-0；978-1-4704-3637-7。[19] Nguyˆen, Viˆet-Anh：黎曼曲面层叠的遍历理论：综述。几何复分析，291–327，施普林格数学与统计学会议论文集，第 246 卷，施普林格，新加坡，2018。[20] Nguyˆen, Viˆet-Anh：层叠与叶状结构的遍历定理：近期结果与展望。《越南数学学报》46（2021），第 1 期，9–101。[21] Nguyˆen Viˆet-Anh：曲线奇异全纯叶状结构。III：零勒隆数。《数学年刊》（2023）。https://doi.org/10.1007/s00208-023-02618-6。[22] Rebelo, Julio C.：关于由全纯叶状结构保持不变的闭流，I。《莫斯科数学杂志》13（2013），第 1 期，123–185，190。[23] Skoda, Henri：有限质量的正闭流的延拓。（法文） [有限质量的闭正流的延拓]《数学发明》66（1982），第 3 期，361–376。