arXiv:2304.00246v1 [math.LO] 1 Apr 2023

序数分析讲义 *

Toshiyasu Arai（东京大学，日本）

本讲座依据以下文献，尤其是标有星号的文献。

- [Buchholz75] W. Buchholz，《正规函数与序数的构造系统》。载于：Diller, J., M¨uller, G. H.（编），《1974年基尔证明论研讨会》，《数学讲义》第500卷，第4–25页，Springer（1975）

- [Buchholz92]⋆ W. Buchholz，《局部谓词性的简化版本》，载于《证明论》，P. H. G. Aczel、H. Simmons 和 S. S. Wainer 编（剑桥大学出版社，1992），第115–147页。
- [Buchholz00]⋆ W. Buchholz，论文评论：A. Setzer，《Martin-L¨of 类型论的良序证明》，《符号逻辑公报》6（2000），478–479页。

- [J¨ager82]⋆ G. J¨ager，《关于自然数上的 Kripke-Platek 集合论的证明论》，《数学逻辑与基础档案》，22(1982)，121-139。

- [J¨ager83]⋆ G. J¨ager，《Feferman 理论 T_0 的一个良序证明》，《数学逻辑与基础档案》，23(1983)，65-77。
- [Rathjen94]⋆ M. Rathjen，《反射的证明论》，《纯粹与应用逻辑年刊》68 (1994)181–224。
- [Rathjen05b] M. Rathjen，《对无参数 Π^1_2-概括的序数分析》，《数学逻辑档案》44 (2005) 263-362。
- （《集合论的序数分析》） [J¨ager82]⋆。
- （算子控制推导）Buchholz[提出的一种简化技术，以及Rathjen [对其的扩展94]⋆。
- （敏锐基数） [Rathjen05b]
- （良基性证明）Buchholz [引入了特征类 75]. 我是在 [J¨ager83]⋆ 中学到的，而其改进版本则见于 [Buchholz00]⋆。

*这是根特大学数学系于2023年3月14日至3月25日开设的一门短期课程的讲义。感谢A. Weiermann和F. Pakhomov在我逗留比利时根特期间给予的热情款待。

Plan

1. KPω2. Rathjen 对 Π_3-反射的分析 KPΠ_3 中的良基性证明（略） 3. 一阶反射 4. 一阶反射（续） 5. Π^1_1-反射 6. Π^1_1-反射（续） 7. Π^1_1-反射（续） 8. Π_1-收集 9. Π_1-收集（续）

若存在定义在 ω 上、序型为 α 的递归（可计算）良序，则称序数 α 为递归序数。 ω_1^{CK}（Church-Kleene ω_1）表示最小的非递归序数。

定义 0.1 1. $Prg[\prec, U] :\Leftrightarrow \forall x[\forall y \prec x(y \in U) \to x \in U](U$ 关于 $\prec$ 是渐进的)。2. 对公式 $A(x)$，$\mathrm{TI}[\prec, A] :\Leftrightarrow Prg[\prec, A] \to \forall x\, A(x)$，且 $\mathrm{TI}[\prec, U] \Leftrightarrow Prg[\prec, U] \to \forall x\, U(x)$（对 $\prec$ 作超限归纳）。3. 设 $\prec$ 是定义在 ω 上的可计算严格偏序。若 $\prec$ 是良基的，则令 $|n|_\prec := \sup\{|m|_\prec + 1 :\ m \prec n\}$，且 $|\prec| := \sup\{|n|_\prec + 1 :\ n \in \omega\}$（$\prec$ 的序型）。否则令 $|\prec| := \omega_1^{CK}$。

定义 0.2 对于包含初等递归算术 EA 的理论 T，其证明论序数 $|T|$ 定义为

$$|T| := \sup\{|\prec| : T \vdash \mathrm{TI}[\prec, U] \text{ for some recursive well order } \prec\} \qquad (1)$$

其中 U 是一个新的谓词常元。

简而言之，序数分析的目的就是计算和/或描述自然理论的证明论序数，从而衡量理论相对于 Π^1_1-结论的证明论强度。

1 ω的序数分析

1.1 Kripke-Platek 集合论

我们介绍策梅洛-弗兰克尔集合论 ZF 的一个片段 KP，即 Kripke-Platek集合论。令 $\mathcal{L}_{set} = \{\in, =\}$ 为集合论语言。本节只讨论集合论模型 $\langle X;\ \in|(X \times X)\rangle$, 并将模型与集合 X等同起来。

定义 1.1（$\Delta_0, \Sigma_1, \Pi_2, \Sigma$）

1. 如果一个集合论公式中出现的每个量词都由一个集合界定，则称它为 Δ_0-公式。有界量词的形式为$\forall x \in u, \exists x \in u$。 2. 形如 $\exists x A$ 且具有 Δ_0-矩阵 A 的公式是一个 Σ_1- 公式。其对偶 $\forall x A$ 是一个 Π_1- 公式。 3. Σ- 公式 [Π-公式]的集合是包含 Δ_0-公式、且对正运算 $\wedge, \vee$ 、有界量化$\forall x \in u, \exists x \in u$ 以及存在（无界）量化 $\exists x$ [和全称（无界）量化 $\forall x$]封闭的最小类。例如, $\forall x \in u \exists y A(A \in \Delta_0)$ 是一个 Σ-公式，但不是一个 Σ_1-公式。

4. 形如 $\forall x A$ 且具有 Σ_1-矩阵 A 的公式是一个 Π_2-公式。

我们很容易看出， Δ_0-公式是绝对的，也就是说，对于任意传递集合 $X \subset Y$（X 是传递的，当且仅当 $\forall y \in X \forall x \in y$（$x \in X$）），$X \models A[\bar{x}] \Leftrightarrow Y \models A[\bar{x}]$ 对于任意 Δ_0-公式 A 和 $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$，其中 $x_i \in X$。

定义 1.2 KP公理包括外延公理 $\forall a, b[\forall x \in a(x \in b) \wedge \forall x \in b(x \in a) \rightarrow a = b]$、空集（空集 $\emptyset$ 存在）、配对公理 $\forall x, y \exists a(x \in a \wedge y \in a)$、并集公理 $\forall a \exists b \forall x \in a \forall y \in x(y \in b)$, 以及以下三个公理模式。

Δ_0-分离公理：对于任意集合 a 和任意 Δ_0-公式 A，集合 $b = \{x \in a : A(x)\}$存在。即 $\exists b \forall x[x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge A(x)]$。

Δ_0-收集公理 $\forall x \in a \exists y\, A(x, y) \rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, A(x, y)$，适用于 Δ_0-公式 A。

基础公理或 $\in$-归纳法 $\forall x[\forall y \in x F(y) \rightarrow F(x)] \rightarrow \forall x F(x)$
对于任意公式 F。

KPω 表示 KP 加上无穷公理 $\exists x \neq \emptyset \forall y \in x[y \cup \{y\} \in x]$。

1.2 可构造层级与可容许集

可构造层级 $\{L_\alpha : \alpha \in ON\}$。

1. $L_0 := \emptyset$。2. $L_{\alpha+1}$ 是（L_α, $\in$）中所有可定义集的集合。3. L_λ : 当 λ 为极限时为 $= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$。4. $L := \bigcup_{\alpha\in ON} L_\alpha$。注意，对于 $\alpha > 0$, $L_{\omega\alpha} \models$ KP $-$（Δ_0-收集），并且当 $\alpha > 1$时 $\omega \in L_{\omega\alpha}$。

定义 1.3 1. 如果传递集 A 满足（A; $\in$）$\models$ KP，则称其为可容许的。

2. 如果序数 α 满足 L_α 为可容许的，则称其为可容许的。3. 在可容许集 A 上的关系 R 称为 A-递归的、 [A-递归可枚举的、 A-r.e.]（A-有限的），如果 R 分别为 Δ_1 [Σ_1] （$R \in A$）。4. 在可容许集 A 上的函数称为 A-递归的，如果其图为 A-r.e.。5. 序数 α 是递归正则的，当且仅当 $L_\alpha \models$KPω。

注意，序数 α 是递归正则的，当且仅当 α 是乘法主数$> \omega$；并且对于任意 L_α-递归函数 f : $\beta \to \alpha$ ，若具有 $\beta < \alpha$，则 sup$\{f(\gamma) : \gamma < \beta\} < \alpha$ 成立。

定理 1.4（Π_2-反射于 L）
对于任意 Σ-谓词 A

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x \in L \exists y \in L\, A(x,y) \to \exists z \in L \forall x \in z \exists y \in z\, A(x,y).$$

特别地，对于递归正则序数 Ω,

$$\forall \alpha < \Omega \exists \beta < \Omega\, A(\alpha,\beta) \to \exists \gamma < \Omega \forall \alpha < \gamma \exists \beta < \gamma\, A(\alpha,\beta).$$

引理 1.5 $|\mathsf{KP}\omega| \le |\mathsf{KP}\omega|_\Sigma := \min\{\alpha : \forall A \in \Sigma(\mathsf{KP}\omega \vdash A \Rightarrow L_\alpha \models A)\}$。

证明。设 KPω 证明了关于 ω上可计算序 $\prec$ 的 TI$[\prec, U]$，其中一元谓词 U 可以出现在基础模式中，但不能出现在 Δ_0-分离或 Δ_0-收集模式中。那么 $\forall n \in \omega \exists \alpha($ $\alpha = |n|_\prec = \sup\{|m|_\prec + 1 : m \prec n\})$可在 KP$\omega$中证明。因此 $|\mathsf{KP}\omega| \le |\mathsf{KP}\omega|_\Sigma$。□

集合 b 的 Mostowski塌缩 clpse(b) 定义为 $C_b(x) = \{C_b(y) : y \in x \cap b\}$，且 clpse($b$) $:= C_b(b) = \{C_b(x) : x \in b\}$。

定义 1.6 若存在一个带参数 $\bar{a}$ 的集合论 Π_n-公式 $F(\bar{a})$，使得对于任意满足 $\bar{a} \subset P$ 的传递集 P， $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow P \models F(\bar{a})$ 均成立，则称类 $\mathcal{C}$ 是 $n \ge 2$ 的 Π_n-类。对于整个宇宙 L， $L \in \mathcal{C}$ 表示公式 $F(\bar{a})$。所谓 Π_0^1-类，是指某个 $n \ge 2$ 的 Π_n-类。

1.3 Buchholz 的 ψ函数

本节中我们在 KPω 中工作。

我们现在可以引入坍缩函数 $\psi_\sigma(\alpha) < \sigma$ （即使$\alpha \geq \sigma$）。以下定义归功于 [Buchholz86]。

定义 1.7 令 $\Omega = \omega_1$ 或 $\Omega = \omega_1^{CK}$。通过对序数 $\alpha < \Gamma_{\Omega+1}$ 进行递归，同时定义类 $\mathcal{H}_\alpha(X)$ ($X \subset \Omega$) 和序数 $\psi_\Omega(\alpha)$ 如下。

$\mathcal{H}_\alpha(X)$ 是 $\{0, \Omega\} \cup X$ 在函数 $+$、φ 和 $\beta \mapsto \psi_\Omega(\beta)$ ($\beta < \alpha$) 下的 Skolem 包。

Let

$$\psi_\Omega(\alpha) = \min(\{\Omega\} \cup \{\beta < \Omega : \mathcal{H}_\alpha(\beta) \cap \Omega \subset \beta\}) \tag{2}$$

令 $\Omega = \omega_1$。于是我们很容易看出，对于任意可数的 X， $\mathcal{H}_\alpha(X)$ 都是可数的。

要证明序数 $\psi_\Omega(\alpha)$可以定义，只需证明存在一个序数 $\beta < \Omega$，使得 $\mathcal{H}_\alpha(\beta) \cap \Omega \subset \beta$：令 $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$with $\beta_{n+1} = \min\{\beta < \Omega : \mathcal{H}_\alpha(\beta_n) \cap \Omega \subset \beta\}$ and $\beta_0 = 0 < \Omega$。于是$\mathcal{H}_\alpha(\beta) \cap \Omega \subset \beta$，因为 $\mathcal{H}_\alpha(\beta) = \bigcup_n \mathcal{H}_\alpha(\beta_n)$，且 $\beta < \Omega$，因为 $\Omega > \omega$ 是正则的。

序数 $\psi_{\Omega_1}(\varepsilon_{\Omega_1+1})$ 称为 Bachmann-Howard 序数。

命题 1.8 1. $\alpha_0 \leq \alpha_1 \wedge X_0 \subset X_1 \Rightarrow \mathcal{H}_{\alpha_0}(X_0) \subset \mathcal{H}_{\alpha_1}(X_1)$。

2. $\mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha)) \cap \Omega = \psi_\Omega(\alpha)$，且 $\psi_\Omega(\alpha) \notin \mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha))$。

3. $\alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \psi_\Omega(\alpha_0) \leq \psi_\Omega(\alpha) \wedge \mathcal{H}_{\alpha_0}(\psi_\Omega(\alpha_0)) \subset \mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha))$.

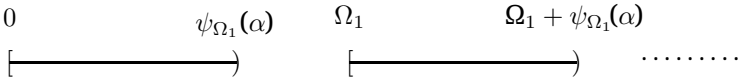
4. $\alpha_0 \in \mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha)) \cap \alpha \Rightarrow \psi_\Omega(\alpha_0) < \psi_\Omega(\alpha)$。因此$\alpha_0 \in \mathcal{H}_{\alpha_0}(\psi_\Omega(\alpha_0))$ $\wedge \alpha \in \mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha)) \Rightarrow (\alpha_0 < \alpha \leftrightarrow \psi_\Omega(\alpha_0) < \psi_\Omega(\alpha))$。

5. $\psi_\Omega(\alpha)$ 是一个强临界数，使得 $\psi_\Omega(\alpha) < \Omega$。

6. $\gamma \in \mathcal{H}_\alpha(\beta) \Leftrightarrow \mathrm{SC}(\gamma) \subset \mathcal{H}_\alpha(\beta)$，其中 $\mathrm{SC}(0) = \mathrm{SC}(\Omega) = \emptyset$，$\mathrm{SC}(\gamma) = \{\gamma\}$ 当且仅当$\gamma \neq \Omega$ 是强临界数时成立，并且 $\mathrm{SC}(\varphi\gamma\delta) = \mathrm{SC}(\gamma + \delta) = \mathrm{SC}(\gamma) \cup \mathrm{SC}(\delta)$。

7. $\mathcal{H}_\alpha(\psi_\Omega(\alpha)) = \mathcal{H}_\alpha(0)$ *and* $\psi_\Omega(\alpha) = \min\{\xi : \xi \notin \mathcal{H}_\alpha(0) \cap \Omega\}$.

命题 1.8.7 意味着， $\psi_\Omega(\alpha)$ 是迭代 Skolem 包 $\mathcal{H}_\alpha(0)$ 中点 Ω 的 Mostowski 塌缩；该包由小于 Ω 的序数在加法 $+$ 和二元 Veblen 函数 φ下生成。这表明，在受限情形下，序数 $\psi_\Omega(\alpha)$ 可以作为 Ω 的替代物。



1.4 序数的可计算记号系统 $OT(\Omega)$

由命题 1.8.7 可知 $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0) = \mathcal{H}_{\varepsilon_{\Omega+1}}(0) = \mathcal{H}_{\varepsilon_{\Omega+1}}(\psi_\Omega(\varepsilon_{\Omega+1}))$，因此，小于 $\psi_\Omega(\varepsilon_{\Omega+1})$ 的每个序数都可以用由 0、Ω 、+、φ、ψ 构成的项来表示。虽然这种表示不能由序数唯一确定，例如 $\psi_\Omega(\psi_\Omega(\Omega)) = \psi_\Omega(\Omega)$，但如果 $\alpha \in \mathcal{H}_\alpha(0)$，则可由序数 $\psi_\Omega(\alpha)$ 确定 α，参见命题 1.8.4 和命题 1.8.7。我们可以构造一个具有这一限制的序数递归记号系统 $OT(\Omega)$，使得以下结论成立

命题 1.9 EA 证明 $(OT(\Omega), \prec)$ 是一个线性序。

1.5 分层集合论

定义 1.10 RS 项 t 及其层级 $|t|$ 递归地定义如下。

1. 对每个序数 $\alpha \in OT(\Omega) \cap (\Omega + 1)$，$\mathsf{L}_\alpha$ 是层级为 $|\mathsf{L}_\alpha| = \alpha$ 的 RS 项。
2. 设 $\theta(x, y_1, \ldots, y_n)$ 是集合论语言中的一个公式，且 $s_1, \ldots, s_n$ 是满足 $\max\{|s_i| : 1 \le i \le n\} < \alpha$ 的 RS-项。则形式表达式 $[x \in \mathsf{L}_\alpha : \theta^{\mathsf{L}_\alpha}(x, s_1, \ldots, s_n)]$ 是层级为 $|[x \in \mathsf{L}_\alpha : \theta^{\mathsf{L}_\alpha}(x, s_1, \ldots, s_n)]| = \alpha$ 的 RS-项。

RS 表示所有 RS-项的集合。

设 $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个公式，其中每个量词都由变量 $y, Qx \in y$ 限定，θ 中出现的所有自由变量都包含在列表 $x_1, \ldots, x_n$ 中，并且每个 x_i 都在 θ 中自由出现。通过对每个 x_i 代入 RS-项 t_i，即可由这样的公式 $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ 得到 RS 公式。

令 $\mathsf{k}(\mathsf{L}_\alpha) := \{\alpha\}$，$\mathsf{k}([x \in \mathsf{L}_\alpha : \theta^{\mathsf{L}_\alpha}(x, s_1, \ldots, s_n)]) = \{\alpha\} \cup \bigcup_{i \le n} \mathsf{k}(s_i)$，并且

$$\mathsf{k}(\theta(t_1, \ldots, t_n)) := \bigcup_{i \le n} \mathsf{k}(t_i),\ |\theta(t_1, \ldots, t_n)| := \max\{|t_1|, \ldots, |t_n|, 0\}.$$

界限 L_Ω in $\exists x \in \mathsf{L}_\Omega$ and $\forall x \in \mathsf{L}_\Omega$ 分别是无界量词 $\exists$ and $\forall$的替换。

定义 1.11 设 s, t 为满足 $|s| < |t|$的 RS 项。

$$(s \dot{\in} t) :\equiv \begin{cases} B(s) & t \equiv [x \in \mathsf{L}_\alpha : B(x)] \\ \top & t \equiv \mathsf{L}_\alpha \end{cases}$$

其中 $\top$ 表示一个真文字，例如 $\emptyset \notin \emptyset$。

我们按如下方式为句子指定析取或合取。当为 A指定析取 $\bigvee(A_i)_{i \in J}$ [或合取 $\bigwedge(A_i)_{i \in J}$] 时，我们分别记作 $A \simeq \bigvee(A_i)_{i \in J}$ [$A \simeq \bigwedge(A_i)_{i \in J}$]。

定义 1.12 1. $(A_0 \vee A_1) :\simeq \bigvee(A_i)_{i \in J}$和 $(A_0 \wedge A_1) :\simeq \bigwedge(A_i)_{i \in J}$，其中$J := 2$。

2. $(a \in b) :\simeq \bigvee(t \dot{\in} b \wedge t = a)_{t\in J}$ 和 $(a \notin b) :\simeq \bigwedge(t \dot{\in} b \to t \neq a)_{t\in J}$，其中 $J := Tm(|b|) := \{t \in RS : |t| < |b|\}$。

3. 设 a, b 为集合项。$(a \neq b) :\simeq \bigvee(\neg A_i)_{i\in J}$ 且 $(a = b) :\simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}$，其中 $J := 2$ 且 $A_0 :\equiv (\forall x \in a(x \in b))$，$A_1 :\equiv (\forall x \in b(x \in a))$。

4. $\exists x \in b\, A(x) :\simeq \bigvee(t \dot{\in} b \wedge A(t))_{t\in J}$ 且 $\forall x \in b\, A(x) :\simeq \bigwedge(t \dot{\in} b \to A(t))_{t\in J}$，其中 $J := Tm(|b|)$。

引理 1.13 $\forall i \in J(\mathrm{k}(i) \subset \mathrm{k}(A_i) \subset \mathrm{k}(A) \cup \mathrm{k}(i))$ 对于 $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$，其中 $\mathrm{k}(0) = \mathrm{k}(1) = \emptyset$。

RS 公式 A 和 RS 项 a 的秩 $\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(a) < \Omega + \omega$ 定义如下，使得对任意公式 A 均满足以下性质。

命题 1.14 1. 对于 RS 项和 RS-公式 $\mathcal{A}$，$\mathrm{rk}(\mathcal{A}) \in \{\omega|\mathcal{A}| + n : n \in \omega\}$。

2. $\mathrm{rk}(B(t)) \in \{\omega|t| + n : n \in \omega\} \cup \{\mathrm{rk}(B(\mathrm{L}_0))\}$.

3. 设 $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$。则 $\forall i \in J(\mathrm{rk}(A_i) < \mathrm{rk}(A))$。

定义 1.15 1. 设 $B(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个 Δ_0-公式，且 $a_1, \ldots, a_n \in RS$ 是 $|a_i| < \Omega$。则 $B(a_1, \ldots, a_n)$ 是一个 $\Delta(\Omega)$-公式。

2. 设 $A(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个 Σ-公式，且 $a_1, \ldots, a_n \in RS$ 是 $|a_i| < \Omega$。则 $A^{(\mathrm{L}_\Omega)}(a_1, \ldots, a_n)$ 是一个 $\Sigma(\Omega)$-公式，其中对于 RS 项 c, $A^{(c)}$ 表示将无界存在量词 $\exists x(\cdots)$ 替换为 $\exists x \in c(\cdots)$ 后所得的结果。

3. 令 $B \equiv A^{(\mathrm{L}_\Omega)}$ 为一个 $\Sigma(\Omega)$-公式，且 $\alpha \in OT(\Omega) \cap \Omega$。则 $B^{(\alpha,\Omega)} \equiv A^{(\mathrm{L}_\alpha)}$。对于 $\Gamma \subset \Sigma(\Omega)$，$\Gamma^{(\alpha,\Omega)} := \{B^{(\alpha,\Omega)} : B \in \Gamma\}$。

我们定义有限个序数的有限集 Θ、γ、$a < \varepsilon_{\Omega+1}$、$b < \Omega + \omega$ 以及 RS-序列（即 RS-公式的有限集 Γ）之间的可导出关系 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma$。

定义 1.16 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma$ 成立，当且仅当

$$\{\gamma, a, b\} \cup \mathrm{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \tag{3}$$

且以下情况之一成立：

($\bigvee$) 存在 $A \in \Gamma$，使得 $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$，以及一个满足以下条件的 $i \in J$

$$|i| < a \tag{4}$$

以及一个 $a(i) < a$，使得 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a(i)}_b \Gamma, A_i$ 成立。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a(i)}_b \Gamma, A_i}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma}\ (\bigvee)_{(|i| < a)}$$

($\bigwedge$) 存在一个 $A \in \Gamma$，使得 $A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}$；并且对于每个 $i \in J$，都存在一个 $a(i)$，使得 $a(i) < a$，且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \mathsf{k}(i)] \vdash_b^{a(i)} \Gamma, A_i$ 成立。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \mathsf{k}(i)] \vdash_b^{a(i)} \Gamma, A_i\}_{i\in J}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma} \ (\bigwedge)$$

(cut) 存在 C 和 $a_0 < a$，使得 $\mathrm{rk}(C) < b$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg C$ 并且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} C, \Gamma$。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg C \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} C, \Gamma \ (\mathrm{rk}(C) < b)}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma} \ (cut)$$

($\Delta_0(\Omega)$-Coll) $b \geq \Omega$，并且存在一个公式 $C \in \Sigma(\Omega)$ 和一个 $a_0 < a$，使得对于每个 $\alpha < \Omega$，都有 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, C$ 和 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\alpha\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg C^{(\alpha,\Omega)}$。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, C \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\alpha\}] \vdash_b^{a_0} \neg C^{(\alpha,\Omega)}, \Gamma\}_{\alpha<\Omega}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma} \ (\Delta_0(\Omega)\text{-Coll})$$

引理 1.17（重言式） $\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(A)] \vdash_0^{2d} \neg A, A$，且 $d = \mathrm{rk}(A)$。

引理 1.18（反演）
$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma, A \Rightarrow \forall i \in J\ (\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \mathsf{k}\ (i)\ ] \vdash_b^a \Gamma, A_i)$ 用于 $A \simeq \bigwedge\ (A_i)_{\ i\in J}$。

引理 1.19（有界性）设 $a \leq \beta \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \Omega$ 且 $\Lambda \subset \Sigma(\Omega)$。那么 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma, \Lambda \Rightarrow \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma, \Lambda^{(\beta,\Omega)}$。

引理 1.20（嵌入）
令 $\Gamma[\vec{x} := \vec{a}](\vec{a} \subset RS)$ 表示一个序列 Γ 的闭实例，其中无界量词限制在 L_Ω 中。假设 $\mathrm{KP}\omega \vdash \Gamma$。那么

$$\exists m, l < \omega \forall \vec{a} \subset RS[\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(\vec{a})] \vdash_{\Omega+m}^{\Omega+l} \Gamma[\vec{x} := \vec{a}]]$$

其中，对于 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，$\mathsf{k}(\vec{a}) = \mathsf{k}(a_1) \cup \cdots \mathsf{k}(a_n)$。

令 $\theta_c(a)$ 为 $\theta_1(a) = \omega^a$ 的第 c 次迭代。$\theta_0(a) = a$, $\theta_{c\dot{+}d}(a) = \theta_c(\theta_d(a))$，且 $\theta_{\omega^c}(a) = \varphi_c(a)$。

引理 1.21（谓词演算割消去）
$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_{b+c}^a \Gamma \Rightarrow \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{\theta_c\ (a)\ \ b}$ Γ 若 $\neg(b < \Omega \ \leq b + c)$。

定理 1.22（坍缩）
假设

$$\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma)) \tag{5}$$

对于一个由序数组成的有限集 Θ，以及 $\Gamma \subset \Sigma(\Omega)$。那么对于 $\hat{a} = \gamma + \omega^a$ 和 $\beta = \psi_\Omega(\hat{a})$

$$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\Omega^a \Gamma \Rightarrow \mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta] \vdash_\beta^\beta \Gamma.$$

证明。由 a 上的归纳法可知这一点。注意，$\mathrm{k}(\Gamma)\cup\{\beta\}\subset\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta]$ 由 $\gamma<\hat{}\alpha+1$ 和 (3) 得出。

情形 1. 最后一步推理是一个（$\bigvee$）。

设 $A\in\Gamma$，使得 $A\simeq\bigvee(A_i)_{i\in J}$，并且对于一个 $i\in J$ 和一个 $a(i)<a$

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a(i)}\Gamma,A_i}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a}\Gamma}\ (\bigvee)$$

根据归纳假设，只需证明（4）的 $|i|<\psi_\Omega(\hat{a})$。我们可以假设 $\mathrm{k}(i)\subset\mathrm{k}(A_i)$。那么，根据（3）和假设（5），有$|i|\in\mathrm{k}(A_i)\subset\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\subset\mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma))$。另一方面，我们有 $|i|<\Omega$。因此，$|i|\in\mathcal{H}_{\hat{a}}(\psi_\Omega(\hat{a}))\cap\Omega=\psi_\Omega(\hat{a})$。

情形 2. 最后一步推理是一个（$\bigwedge$）。

设 $A\in\Gamma$，使得 $A\simeq\bigwedge(A_i)_{i\in J}$，并且对于每个 $i\in J$，存在 $a(i)<a$ 使得

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\mathrm{k}(i)]\vdash_\Omega^{a(i)}\Gamma,A_i\}_{i\in J}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a}\Gamma}\ (\bigwedge)$$

根据归纳假设，只需证明 $\forall i\in J(\mathrm{k}(i)\subset\mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma)))$。例如，考虑 $A\equiv(\forall x\in u\,B(x))$ 对某个集合项 u 成立的情况。于是 $J=\{t\in RS:|t|\lhd|u|\}$。由于 A 是一个 $\Sigma(\Omega)$ 句子，因此我们有 $|a|<\Omega$。另一方面，对于 $|u|=\max\mathrm{k}(u)$，我们有 $|u|\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，因此对于任意 $i\in J$，$\mathrm{k}(i)\subset|u|\in\mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma))\cap\Omega=\psi_\Omega(\gamma)$。

情况 3。最后一步推理是一个 ($\Delta_0(\Omega)$-Coll)。

存在一个句子 $C\in\Sigma(\Omega)$ 和一个 $a_0<a$，使得

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a_0}\Gamma,C\quad\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\alpha\}]\vdash_\Omega^{a_0}\neg C^{(\alpha,\Omega)},\Gamma\}_{\alpha<\Omega}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a}\Gamma}\ (\Delta_0(\Omega)\text{-Coll})$$

设 $\widehat{a_0}=\gamma+\omega^{a_0}$ 和 $\beta_0=\psi_\Omega(\widehat{a_0})$。归纳假设推出 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_0}^{\beta_0}\Gamma,C$。有界性 1.19 推出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_0}^{\beta_0}\Gamma,C^{(\beta_0,\Omega)}$，其中 $\beta_0\in\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]$。另一方面，我们有 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\beta_0\}]\vdash^{a_0}_\Omega\neg C^{(\beta_0,\Omega)},\Gamma$，并且 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]\vdash^{a_0}_\Omega\neg C^{(\beta_0,\Omega)},\Gamma$。归纳假设推出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\omega^{a_0}+1}[\Theta]\vdash_\beta^{\beta_1}\neg C^{(\beta_0,\Omega)},\Gamma$，其中 $\beta_1=\psi_\Omega(\widehat{a_0}+\omega^{a_0})$ 且 $\widehat{a_0}+\omega^{a_0}=\gamma+\omega^{a_0}+\omega^{a_0}<\hat{a}$。一个带有 $\mathrm{rk}(C^{(\beta_0,\Omega)})<\beta$ 的 (cut) 推出 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta]\vdash_\beta^\beta\Gamma$。

情况 4。最后一步推理是一个（cut）。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a_0}\Gamma,\neg C\quad\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a_0}C,\Gamma}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^{a}\Gamma}\ (cut)$$

我们得到 $\mathrm{rk}(C)<\Omega$，并且 $\mathrm{rk}(C)\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\Omega\subset\psi_\Omega(\gamma)\leq\beta$。归纳假设后接一个（$cut$）即可得出该引理。□

引理 1.23（真理）

若 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_\Omega^\alpha\Gamma$ 具有 $\Gamma\subset\Delta(\Omega)$，则 $L_\Omega\models\Gamma$。

定理 1.24 KP$\omega \vdash \Gamma$ 和 $\Gamma \subset \Sigma(\Omega_1) \Rightarrow \exists m < \omega \left[L_\Omega \models \Gamma^{(\psi_\Omega(\omega_m(\Omega+1)),\ \Omega)} \right]$。

证明。令 KP$\omega \vdash \Gamma$ 为一个由 Σ句子组成的集合 Γ。根据嵌入 1.20，取一个 $m <\omega$，使得$\mathcal{H}_0[\emptyset] \vdash^{\Omega+m}_{\Omega+m} \Gamma$。谓词式消去割 1.21 得出 $\mathcal{H}_0[\emptyset] \vdash^a_\Omega \Gamma$，其中 $a = \omega_m(\Omega + m)$。令 $\beta = \psi_\Omega(\hat{a})$，且$\hat{a} = \omega^a = \omega_{m+1}(\Omega + m)$。然后由坍缩 1.22 得到 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\emptyset] \vdash^\beta_\beta \Gamma$，由有界性 1.19 得到 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\emptyset] \vdash^\beta_\beta \Gamma^{(\beta,\Omega)}$。根据真值 1.23，我们看到 $L_\Omega \models \Gamma^{(\beta,\Omega)}$。由 $\beta < \psi_\Omega(\omega_{m+2}(\Omega + 1))$以及 Σ公式的持久性，可得 $L_\Omega \models \Gamma^{(\psi_\Omega(\omega_{m+2}(\Omega+1))\Omega)}$。□

1.6 KPω中的良基性证明

在本小节中，α、β、γ、δ、.....遍历 $OT(\Omega)$中的序数项，$<$表示定义 ?? 中定义的序数项之间的关系。序数项 α被识别为集合 $\{\beta \in OT(\Omega) : \beta < \alpha\}$。对于序数项 α、β，序数项 $\alpha + \beta$和 ω^α 的定义是平凡的。

在本小节中，我们证明，对于 $\mathbb{N}$ 上的非迭代正初等归纳定义，理论 ID 证明了关系 $<$在 $OT(\Omega)$ 上对于每个 $\alpha < \psi_\Omega(\varepsilon_{\Omega+1})$ 都是良基的这一事实。

定理 1.25 对于每个 $n < \omega$

$$\mathsf{ID} \vdash \mathrm{TI}[<\restriction \psi_\Omega(\omega_n(\Omega + 1)), B]$$

对于语言 $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ 中的任意公式 B。

Acc 表示 $OT(\Omega)$ 中 $<$ 的可达部分，它在 ID 中被定义为算子 $\mathcal{A}(X, \alpha) :\Leftrightarrow \alpha \subset X \Leftrightarrow (\forall \beta < \alpha(\beta \in X))$ 的最小不动点 $P_\mathcal{A}$。只需证明以下命题即可，而该命题等价于定理 1.25。

定理 1.26 对每个 $\alpha < \psi_\Omega(\varepsilon_{\Omega+1})$，$\mathsf{ID} \vdash \alpha \in Acc$。

最小不动点 Acc 满足 $\forall\alpha(\alpha \subset Acc \to \alpha \in Acc)$，且 $\forall\alpha(\alpha \subset F \to\alpha \in F) \to Acc \subset F$。由此我们容易看出，$Acc$对 $+$封闭，φ除此之外还满足 $0 \in Acc$。因此我们得到 $\Gamma_0 = \psi_\Omega(0) \in Acc$。同理可得 $\Gamma_1 = \psi_\Omega(1) \in Acc$。为了证明 $\psi_\Omega(\Omega) \in Acc$，我们需要证明，对于任意满足 $\psi_\Omega(\alpha)$ 是序数项（即 $G(\alpha) < \alpha$）的 $\alpha <\Omega$，$\psi_\Omega(\alpha) \in Acc$。这意味着，如果 $\psi_\Omega(\beta)$ 出现在 α 中，那么 $\beta < \alpha$ 成立。因此，我们有机会归纳证明$\psi_\Omega(\alpha) \in Acc$。序数项 α 由 0、Ω 以及一些满足 $\beta < \alpha$ 的序数项$\psi_\Omega(\beta)$ 通过 $+$、φ构成。假设出现在 α 中的每个序数 $\psi_\Omega(\beta) < \Omega$ 都属于 $W_0 = Acc \cap \Omega$，并将这些序数的集合 α 记作M_1。虽然我们手头并没有 $\Omega \in Acc$（因为这意味着 $OT(\Omega) \cap \Omega$ 是良基的，而这正是我们要证明的事实），但 Ω 属于集合 M_1 的可达部分 W_1。事实证明，W_1 在 M_1 上是渐进的，且 $\Omega \in W_1$。此外，$\omega^{\Omega+1} \in W_1$ 也可视为 epsilon 数的跳跃集。由此我们看到 $\alpha \in W_1$，即对每个 $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$，$\psi_\Omega(\alpha) \in W_0$。

令 $\mathrm{SC}(\alpha)$ 表示命题 1.8.6 中定义的 α 的强临界部分集合，并令 $\mathrm{SC}_\Omega(\alpha) = \mathrm{SC}(\alpha) \cap\Omega$。

定义 **1.27** $M_1 = \{\alpha \in OT(\Omega) : \mathrm{SC}_\Omega(\alpha) \subset W_0\}$。

命题 **1.28** $G(\beta) < \alpha \Rightarrow \mathrm{SC}_\Omega(\beta) < \psi_\Omega(\alpha)$ 对于 $\psi_\Omega(\alpha) \in OT(\Omega)$。

证明。对序数项 β 的长度进行归纳。假设 $G(\beta) < \alpha$。根据归纳假设，我们可以假设 $\beta = \psi_\Omega(\gamma)$。于是 $\gamma \in G(\beta)$ 且 $\mathrm{SC}_\Omega(\beta) = \{\beta\}$。因此 $\gamma < \alpha$and $\beta < \psi_\Omega(\alpha)$。□

除非另有说明，以下均在 ID 中进行。

引理 **1.29** $M_1 \cap \Omega = W_0$。

$$\mathcal{A}(X) := \{\alpha \in M_1 : M_1 \cap \alpha \subset X\}.$$

命题 1.30 对每个公式 F, $\mathcal{A}(F) \subset F \to \Omega \in F$。

证明。假设 $\mathcal{A}(F) \subset F$，由对 $\alpha \in W_0$ 的归纳法可知 $\alpha \in W_0 \Rightarrow \alpha \in F$。

□

引理 1.31 对于每个公式 F, $\mathcal{A}(F) \subset F \to \mathcal{A}(\mathrm{j}[F]) \subset \mathrm{j}[F]$，其中 $\mathrm{j}[F] :=\{\beta \in OT(\Omega) : \forall\alpha(M_1 \cap \alpha \subset F \to M_1 \cap (\alpha + \omega^\beta) \subset F)\}$。

引理 1.32 对于每个公式 F 以及每个 $n < \omega$, $\mathcal{A}(F) \subset F \to \omega_n(\Omega + 1) \in F$。

$$\alpha \in W :\Leftrightarrow (\psi_\Omega(\alpha) \in OT(\Omega) \to \psi_\Omega(\alpha) \in W_0)\,.$$

引理 **1.33** $\mathcal{A}(W) \subset W$。

证明。假设 $\alpha \in \mathcal{A}(W)$ 且 $\psi_\Omega(\alpha) \in OT(\Omega)$。那么 $\alpha \in M_1$ 且 $M_1 \cap \alpha \subset W$。我们证明

$$\gamma < \psi_\Omega(\alpha) \to \gamma \in W_0$$

对序数项 γ 的长度作归纳。我们可以假设 $\gamma = \psi_\Omega(\beta)$。那么 $\beta < \alpha$。由归纳假设可知 $\beta \in M_1$。因此 $\beta \in M_1 \cap \alpha \subset W$，从而得到$\gamma = \psi_\Omega(\beta) \in W_0$。因此 $\psi_\Omega(\alpha) \subset W_0$。□

下面证明定理 1.26。我们证明，对于每个 $n < \omega$，ID 都证明 $\psi_\Omega(\omega_n(\Omega + 1)) \in W_0$。由引理 1.32 和 1.33，我们得到 $\omega_n(\Omega + 1) \in W$。因此，根据 W 的定义，$\psi_\Omega(\omega_n(\Omega + 1)) \in W_0$。

2 Rathjen 对 Π_3-反射的分析

给定对单个递归正则序数的 KPω 分析，将其扩展为对具有给定序型的递归正则序数理论的分析并不困难，例如扩展为对 KPℓ 的分析，或等价地，对 Π^1_1-CA+BI 的分析。也可以用另一种方式对递归正则性进行迭代。具体而言，对递归 Mahlo 序数的 KPM 进行序数分析并非难事。

我们引入一种 Π_i-递归 Mahlo 运算 RM_i 及其迭代。对于 $2 \leq i < \omega$, Π_i-递归 Mahlo 运算 RM_i 通过一个全称 Π_i-公式 $\Pi_i(a)$ 来定义，使得对于每个 Π_i-公式 $\varphi(x)$，都存在一个自然数 n，使得 KP $\vdash \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \Pi_i(\langle n, x\rangle)]$。令 $\mathcal{X}$ 为一个集合族。

$$P \in RM_i(\mathcal{X}) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall b \in P\,[P \models \Pi_i(b) \rightarrow \exists Q \in \mathcal{X} \cap P(b \in Q \models \Pi_i(b))]$$
$$(\text{read: } P \text{ is } \Pi_i\text{-reflecting on } \mathcal{X}.)$$

设 $RM_i = RM_i(V)$，并且若 $V \in RM_i$，则称 V 是 Π_i-反射的。在可构造性公理 $V = L$ 下，$V \in RM_2$ 当且仅当 $V \models$ KPω，而 $V \in RM_2(RM_2)$ 当且仅当 V 是递归 Mahlo 宇宙。当 $V = L_\sigma$ 时，序数 σ 是递归 Mahlo 序数。

用 KPM 表示递归 Mahlo 宇宙的集合论。对于 KPM 的序数分析，我们只需有两个步坍缩 $\alpha \mapsto \sigma = \psi_M(\alpha) \in RM_2$ 和 $(\sigma, \beta) \mapsto \psi_\sigma(\beta)$。

假设 $P \in \mathcal{X}$ 由一个 Δ_0-公式给出。那么存在一个 Π_{i+1}-公式 rm_i，使得对于任意非空传递集 $P \in V \cup \{V\}$, $P \in RM_i(\mathcal{X}) \leftrightarrow rm_i^P$，其中 rm_i^P 表示将 rm_i 中的无界量词限制到 P 的结果。

沿着可定义关系 $\prec$ 对 RM_i 的迭代定义如下。

$$P \in RM_i(a; \prec) :\Leftrightarrow a \in P \in \bigcap\{RM_i(RM_i(b; \prec)) : b \in P \models b \prec a\}.$$

假设 $b \prec a$ 由一个 Σ_1-公式给出。那么存在一个 Π_{i+1}-公式$rm_i(a, \prec)$，使得对于任意非空传递集 $P \in V \cup \{V\}$ 和 $a \in P$，$P \in RM_i(a; \prec) \leftrightarrow rm_i^P(a, \prec)$。

对于 $2 \leq N < \omega$，KPΠ_N 表示一个关于 Π_N-反射宇宙V 的集合论，它由 KPω 加上公理 $V \in RM_N$ （ Π_N-反射公理）得到，该公理断言其宇宙是 Π_N-反射的。这意味着，对于每个 Π_N-公式 φ，$\varphi(a) \rightarrow \exists c[ad_N^c \wedge a \in c \wedge \varphi^c(a)]$ 是一条公理，其中 $ad_2^c :\equiv (\forall x \in c \forall y \in x(y \in c))$，即 c 是传递的；而对于 $N > 2$，$ad \equiv ad_N$ 表示一个 Π_3-句子，使得对于任意传递且良基的集合 P，$P \models ad \Leftrightarrow P \models$ KPω 。KPΠ_2 是 KPω+$(V = L)$ 的一个子理论，后者可在 KPω 中解释：KP$\omega + (V = L) \vdash \varphi \Rightarrow$ KP $\omega \vdash \varphi^L$，参见定理 1.4。

KPΠ_{N+1} 比 KPΠ_N 强得多，因为在 KPΠ_{N+1}中可以迭代 Π_N-递归 Mahlo 运算 RM_N。例如，KPΠ_{N+1} 通过对序数 α进行归纳法，证明 $\forall \alpha \in ON[V \in RM_N(\alpha; <)]$。假设 $\forall \beta < \alpha[V \in RM_N(\beta; <)]$。令$\varphi$ 为一个 Π_N-公式，使得 $V \models \varphi$，并且 $\beta < \alpha$。我们可以反映一个 Π_{N+1}-公式$V \in RM_N(\beta; <) \wedge \varphi$，并得到一个集合 P，使得 $P \in RM_N(\beta; <) \wedge P \models \varphi$。因此 $V \in RM_N(\alpha; <)$。这意味着 V属于对角交$\triangle_\alpha RM_N(\alpha; <)$，即 $V \in \bigcap\{RM_N(\alpha; <) : \alpha \in ON \cap V\}$。由于这是一个 Π_{N+1}-公式，Π_{N+1}-反映宇宙 V会反映它：存在一个集合 $P \in V$，使得 P属于对角交，即 $P \in \bigcap\{RM_N(\alpha; <) : \alpha \in ON \cap P\}$，依此类推。

令 $ON \subset V$表示序数类，$ON^\varepsilon \subset V$和 $<^\varepsilon$ 是 Δ-谓词，使得对于任意传递且良基的 KPω模型 V，$<^\varepsilon$ 都是良序

在 ON^{ε} 上的序型为 $\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$，其中 $\mathbb{K}$ 是 V 中类 ON 的序型。$\lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil \in ON^{\varepsilon}$ 表示“序数” $\omega_n(\mathbb{K}+1)$ 的编码，假定它是由编码 $\lceil\mathbb{K}\rceil$ 和 n 构成的闭“项”，例如，对于 $\alpha \in ON$、$\lceil\mathbb{K}\rceil = \langle 1、\ 0\rangle$ 和 $\lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil = \langle 2、\ \langle 2、\ \cdots\langle 2、\ \langle 3、\ \lceil\mathbb{K}\rceil、\ \langle 0、\ 1\rangle\rangle\cdots\rangle\rangle$，分别为 $\lceil\alpha\rceil = \langle 0、\ \alpha\rangle$。

$<^{\varepsilon}$ 被假定为一个以 $\mathbb{K}$ 为基的标准 ε 序（不是在 $\mathbb{N}$ 上，而是在 V 上），使得 KPω 证明 $<^{\varepsilon}$ 是线性序，并且对于任意公式 φ 和每个 $n < \omega$,

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x(\forall y <^{\varepsilon} x\, \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x <^{\varepsilon} \lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil \varphi(x) \tag{6}$$

定理 2.1 ([A14a])
对于每个 $N \geq 2$，KPΠ_{N+1} 在理论之上是 Π_{N+1}-保守的

$$\mathsf{KP}\omega + \{V \in RM_N(\lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil; <^{\varepsilon}) : n \in \omega\}.$$

由 (6) 可知，对于每个 $n \in \omega$，KPΠ_{N+1} 证明 $V \in RM_N(\lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil;\ <^{\varepsilon})$。

让我们考虑最简单的情形 $N = 3$，即针对 Π_3-反射宇宙的集合论 KPΠ_3 的序数分析。结果表明，KPΠ_3 在证明论上可归约为递归 Mahlo 运算 $V \in RM_2(\lceil\omega_n(\mathbb{K}+1)\rceil;\ <^{\varepsilon})$ 的迭代 ($n \in \omega$)，但如何对其进行证明论分析呢？这里需要 [Rathjen94] 所取得的一项突破。

2.1 KPΠ_3 的序数

本小节为 KPΠ_3 定义坍缩函数 $\psi^{\xi}_{\sigma}(a)$。借助一个较小的大基数的存在性，我们更容易论证这些定义。令 $\mathbb{K}$ 为最小的弱紧基数，即 Π^1_1-不可描述基数，且 $\Omega = \omega_1$。一般而言，对于 $n \geq 0$，$A \subset ON$ 在序数 π 中是 Π^1_n-不可描述的，当且仅当对于每个带有谓词 P 和 $C \subset \pi$ 的 $\Pi^1_n(P)$- 公式 $\varphi(P)$，若 $(L_\pi, C) \models \varphi(P)$，则存在一个 $\alpha \in A \cap \pi$ 使得 $(L_\alpha, C \cap \alpha) \models \varphi(P)$。首先介绍 Mahlo 运算。令 $A \subset \mathbb{K}$ 为一个集合，$\alpha \leq \mathbb{K}$ 为一个极限序数。$\alpha \in M_2(A)$ 当且仅当 $A \cap \alpha$ 在 α 中是 Π^1_0-不可描述的。

如定义 1.7 中所述，我们定义 Skolem 包 $\mathcal{H}_a(X)$，并同时定义类 $Mh^a_2(\xi)$，如下所示。

定义 2.2 通过对序数的递归，同时定义类 $\mathcal{H}_a(X)$ ($X \subset \Gamma_{\mathbb{K}+1}$)、$Mh^a_2(\xi)$ ($\xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$) 以及序数 $\psi^{\xi}_{\sigma}(a)$，如下所示。

1. $\mathcal{H}_a(X)$ 表示在函数 $+$、φ 以及 $(\sigma, \nu, b) \mapsto \psi^{\nu}_{\sigma}(b)$ ($b < a$) 下，$\{0, \Omega\ \mathbb{K}\} \cup X$ 的 Skolem 包。

2. 对于 $\xi > 0$，令

$$\pi \in Mh^a_2(\xi) :\Leftrightarrow \{a, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)\ \&\ \forall \nu \in \mathcal{H}_a(\pi) \cap \xi\, (\pi \in M_2(Mh^a_2(\nu))) \tag{7}$$

$\pi \in Mh^a_2$当且仅当 π 是极限序数。

3. 对于 $0 \leq \xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$,

$$\psi_\pi^\xi(a) = \min\left(\{\pi\} \cup \{\kappa \in Mh_2^a(\xi) : \{\xi, \pi, a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\,\&\,\mathcal{H}_a(\kappa) \cap \pi \subset \kappa\}\right) \tag{8}$$

and $\psi_\Omega(\alpha) = \min\{\beta < \Omega : \mathcal{H}_\alpha(\beta) \cap \Omega \subset \beta\}$.

我们看到, $x = \mathcal{H}_a(y)$、 $x = \psi_\kappa^\xi a$ 和 $x \in Mh_2^a(\xi)$都是作为 ZFL 中不动点的 Σ_1-谓词

由于对于任意无限基数 $\pi \leq \mathbb{K}$, 集合 $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}(\pi)$的基数为 π, 取一个单射 f: $\mathcal{H}_{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, 使得对于任意弱不可达基数 $\pi \leq \mathbb{K}$, f"$\mathcal{H}_{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}(\pi) \subset \pi$。

引理 2.3（参见 [Rathjen94]中的定理 4.12。）

1. 存在一个 Π_1^1-公式 $mh_2^a(x)$, 使得对于任意满足 f"$(\{a, \xi\}) \subset L_\pi$的弱不可达基数 $\pi \leq \mathbb{K}$, $\pi \in Mh_2^a(\xi)$当且仅当 $L_\pi \models mh_2^a(\xi)$。2. 对每个 $a < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $\mathbb{K} \in Mh_2^a(\varepsilon_{\mathbb{K}+1}) \cap M_2(Mh_2^a(\varepsilon_{\mathbb{K}+1}))$。

证明。2.3.1. 设 π 是一个弱不可达基数, 且 f 是一个单射, 使得 f"$\mathcal{H}_{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}(\pi) \subset L_\pi$。假设 f"$(\{a, \xi\}) \subset L_\pi$。那么, 对于 $f(\xi) \in f$"$\mathcal{H}_a(\pi)$, $\pi \in Mh_2^a(\xi)$ 当且仅当对于任意 $f(\nu) \in L_\pi$, 若 $f(\nu) \in f$"$\mathcal{H}_a(\pi)$ 且 $\nu < \xi$, 则 $\pi \in M_2(Mh_2^a(\nu))$, 其中 f"$\mathcal{H}_a(\pi) \subset L_\pi$ 是 L_π 中的一个类。

2.3.2. 我们证明以下 $B(\xi)$ 在 $\xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 中是渐进的:

$$B(\xi) :\Leftrightarrow \mathbb{K} \in Mh_2^a(\xi) \cap M_2(Mh_2^a(\xi))$$

注意, 对任意 $\xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $\xi \in \mathcal{H}_a(\mathbb{K})$ 都成立。

设 $\forall \nu < \xi\, B(\nu)$。我们需要证明 $Mh_2^a(\xi)$ 在 $\mathbb{K}$ 中是 Π_0^1-不可描述的。容易看出, 若 $\pi \in M_2(Mh_2^a(\xi))$, 则由关于 π 的归纳法可得 $\pi \in Mh_2^a(\xi)$。设 $\theta(P)$ 是一个带谓词 P 的一阶公式, 使得对 $C \subset \mathbb{K}$ 有 $(L_\mathbb{K}, C) \models \theta(P)$。

由归纳假设, 我们有 $\forall \nu < \xi[\mathbb{K} \in M_2(Mh_2^a(\nu))]$。换言之, $\mathbb{K} \in Mh_2^a(\xi)$, 即 $(L_\mathbb{K}, C) \models mh_2^a(\xi) \wedge \theta(P)$。由于宇宙 $L_\mathbb{K}$ 是 Π_1^1-不可描述的, 取一个 $\pi < \mathbb{K}$, 使得 $(L_\pi, C \cap \pi)$ 满足 Π_1^1- 句子 $mh_2^a(\xi) \wedge \theta(P)$, 并且 $\{f(a)\ f(\xi)\} \subset L_\pi$。因此 $\pi \in Mh_2^a(\xi)$。于是 $\mathbb{K} \in M_2(Mh_2^a(\xi))$。□

引理 2.4 对于不可描述基数 $\mathbb{K}$, 每个 $\{a, \xi\} \subset \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $\psi_\mathbb{K}^\xi(a) < \mathbb{K}$。

证明。令 $\{a, \xi\} \subset \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$。由引理 2.3.2, 我们得到 $\mathbb{K} \in M_2(Mh_2^a(\xi))$。另一方面, $\{\kappa < \mathbb{K} :\ \{\xi, a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\ \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \mathbb{K} \subset \kappa\}$是 $\mathbb{K}$ 的一个闭无界子集。因此, 依据定义 (8), $\psi_\mathbb{K}^\xi(a) < \mathbb{K}$。□

由定义 (8) 可知

$$\pi \in Mh_2^a(\mu) \cap \mathcal{H}_a(\pi)\,\&\,\xi \in \mathcal{H}_a(\pi) \cap \mu \Rightarrow \pi \in M_2(Mh_2^a(\xi))\,\&\,\psi_\pi^\xi(a) < \pi$$

下文中, M_2 表示 Π_2-递归 Mahlo 运算 RM_2。

2.2 面向 KPΠ_3 的算子控制推导

$OT(\Pi_3)$表示一个带有坍缩函数 $\psi_\sigma^\nu(b)$的序数可计算记号系统。若 $\{\sigma,\nu,b\}\subset OT(\Pi_3)\cap\mathcal{H}_b(\kappa)$，则 $\kappa=\psi_\sigma^\nu(b)\in OT(\Pi_3)$，$\nu=m_2(\kappa)<m_2(\sigma)$，并且

$$SC_{\mathbb{K}}(\nu)\subset\kappa\,\&\,\nu\leq b \tag{9}$$

其中 $m_2(\Omega)=1$ 且 $m_2(\mathbb{K})=\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$。在证明 $OT(\Pi_3)$ 的良基性时，我们需要条件 (9)，参见命题 3.30 和引理 3.38。

面向 KPΠ_3 的算子控制推导按定义 1.16 中对 KPω 的定义给出，并附加以下推理规则。对于序数 $\pi=\psi_\sigma^\xi(a)$，令$m_2(\pi)=\xi$。

(rfl$_{\Pi_3}(\mathbb{K})$) $b\geq\mathbb{K}$。存在一个序数 $a_0\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap a$，以及一个满足以下条件的 $\Sigma_3(\mathbb{K})$-句子A：

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\neg A\quad\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\rho\}]\vdash_b^{a_0}\Gamma,A^{(\rho,\mathbb{K})}:\rho<\mathbb{K}\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a}\Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\mathbb{K}))$$

该推理表示 $\mathbb{K}\in RM_{3\circ}$

(rfl$_{\Pi_2}(\alpha,\pi,\nu)$) 存在序数 $\alpha<\pi\leq b<\mathbb{K}$，$\nu<m_2(\pi)$，使得$SC_{\mathbb{K}}(\nu)\subset\pi$ 且 $\nu\leq\gamma$，参见(9)，$a_0<a$，以及由 $\Sigma_2(\pi)$-句子组成的有限集 Δ，其中的句子满足以下条件:

1. $\{\alpha,\pi,\nu\}\subset\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$.
2. For each $\delta\in\Delta$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\neg\delta$.
3. For each $\alpha<\rho\in Mh_2(\nu)\cap\pi$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\rho\}]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\Delta^{(\rho,\pi)}$ holds.
   By $\rho\in Mh_2(\nu)$ we mean $\nu\leq m_2(\rho)$.

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\neg\delta\}_{\delta\in\Delta}\quad\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\rho\}]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\Delta^{(\rho,\pi)}:\alpha<\rho\in Mh_2(\nu)\cap\pi\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a}\Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\alpha,\pi,\nu))$$

该推理表明，若 $\{m_2(\pi)\ \gamma,\nu\}\subset\mathcal{H}_\gamma(\pi)$，则 $\pi\in M_2(Mh_2^\gamma(\nu))_\circ$

Π_3 规则反射的公理可由如下推理（**rfl$_{\Pi_3}(\mathbb{K})$**）推出。设 $A\in\Sigma_3(\mathbb{K})$，且 $d=\mathbf{rk}(A)<\mathbb{K}+\omega$，并且对于 $\rho<\mathbb{K}$，有 $d_\rho=\mathbf{rk}(A^{(\rho,\mathbb{K})})_\circ$

$$\frac{\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(A)]\vdash_0^{2d}A,\neg A\quad\dfrac{\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(A)\cup\{\rho\}]\vdash_0^{2d_\rho}A^{(\rho,\mathbb{K})},\neg A^{(\rho,\mathbb{K})}}{\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(A)\cup\{\rho\}]\vdash_0^{\mathbb{K}}\exists z\,A^{(z,\mathbb{K})},\neg A^{(\rho,\mathbb{K})}}}{\mathcal{H}_0[\mathsf{k}(A)]\vdash_{\mathbb{K}}^{\mathbb{K}+\omega}\neg A,\exists z\,A^{(z,\mathbb{K})}}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\mathbb{K}))$$

这种坍缩技术的一个恰当名称是“平稳坍缩”，因为要使这一过程奏效，必须将单个推导坍缩为一个“平稳”的推导族。 [Rathjen94]

从下面的证明可见，在 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$ 的见证推导中出现的每个推理（$\mathbf{rfl}\Pi_2(\alpha,\kappa,a_0)$) 都满足 $\alpha=\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K})$。我们将唯一的序数 α 称为基。

引理 2.5 假设 $\Gamma\subset\Sigma_2(\mathbb{K})$、 $\Theta\subset\mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$，且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^a_{\mathbb{K}}\Gamma$ 满足 $a\leq\gamma$。那么，对于任意满足 $\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K})<\kappa$的 $\kappa\in Mh_2(a)\cap\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K}\cdot\omega)$，
$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$ 均成立，其中$\hat{a}=\gamma+\omega^{\mathbb{K}+a}$ 且 $\beta=\psi_{\mathbb{K}}(\hat{a})$。

证明。对 a使用归纳法。注意，存在一个 $\kappa\in OT(\Pi_3)$使得$\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K})<\kappa\in Mh_2(a)\cap\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K}\cdot\omega)$。例如， $\kappa=\psi^a_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K}+1)$。情形 1。考虑最后一步推理为$(\mathbf{rfl}_{\Pi_3}(\mathbb{K}))$的情形。对于 Σ_3 $\exists A\simeq\bigvee(A_i)_{i\in J}$，

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^{a_0}_{\mathbb{K}}\Gamma,\neg A\quad\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\rho\}]\vdash^{a_0}_{\mathbb{K}}\Gamma,A^{(\rho,\mathbb{K})}:\rho<\mathbb{K}\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^{a}_{\mathbb{K}}\Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\mathbb{K}))$$

Let

$$\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K})\leq\sigma\in Mh_2(a_0)\cap\kappa.$$

设 $i\in Tm(\sigma)$，即 $\mathbf{k}(i)\subset\sigma$。对于每个 $i\in Tm(\sigma)$，反演推出 $\mathcal{H}_{\gamma+|i|}[\Theta\cup\mathbf{k}(i)]\vdash^{a_0}_{\mathbb{K}}\Gamma,\neg A_i$，其中 $\mathbf{k}(i)<\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+|i|)$。根据归纳假设，我们得到 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\sigma\}\cup\mathbf{k}(i)]\vdash^{\beta_0}_{\beta}\Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})},\neg A_i^{(\sigma,\mathbb{K})}$，对于每个 $i\in Tm(\sigma)$，其中 $\beta_0=\psi_{\mathbb{K}}(\widehat{a_0})$ 且 $\widehat{a_0}=\gamma+\omega^{\mathbb{K}+a_0}=\gamma+|i|+\omega^{\mathbb{K}+a_0}$。A ($\bigwedge$) 给出

$$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\sigma\}]\vdash^{\beta_0+1}_{\beta}\Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})},\neg A^{(\sigma,\mathbb{K})}$$

另一方面，我们有 $\mathcal{H}_{\gamma+\sigma}[\Theta\cup\{\sigma\}]\vdash^{a_0}_{\mathbb{K}}\Gamma,A^{(\sigma,\mathbb{K})}$，且 $\sigma\in\mathcal{H}_{\gamma+\sigma}(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\sigma))$，但 $\sigma\notin\mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K}))$。通过 $a_0<a$，我们得到 $\kappa\in Mh_2(a_0)$，并且 $\gamma+\sigma+\mathbb{K}=\gamma+\mathbb{K}$。归纳假设给出

$$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa,\sigma\}]\vdash^{\beta_0}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})},A^{(\sigma,\mathbb{K})}$$

对切割公式 $A^{(\sigma,\mathbb{K})}$ 的一个 (cut)，其 $\mathbf{rk}(A^{(\sigma,\mathbb{K})})<\kappa<\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K}\cdot\omega)\leq\beta$，可得

$$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa,\sigma\}]\vdash^{\beta_0+2}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})},\Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})}$$

另一方面

$$\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{2d}_0\neg\theta^{(\kappa,\mathbb{K})},\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$$

对每个 $\theta\in\Gamma\subset\Sigma_2(\mathbb{K})$ 都成立，其中 $d=\max\{\mathrm{rk}(\theta^{(\kappa,\mathbb{K})}):\theta\in\Gamma\}<\kappa+\omega<\beta$。此外，我们

此外，我们 h有 $a_0<\hat{a}$，$SC_{\mathbb{K}}(a_0)\subset\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\mathbb{K}\subset\mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))\cap\mathbb{K}\subset\kappa$。带有 $\delta=\psi_{\mathbb{K}}(\gamma+\mathbb{K})$ 的 A $(\mathbf{rfl}_{\Pi_2}(\delta,\kappa,a_0))$，$\{\delta,\kappa,a_0\}\subset\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa\}]$ 可得$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{2d}_0\neg\theta^{(\kappa,\mathbb{K})},\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}\}_{\theta\in\Gamma}\quad\dfrac{\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\sigma\}]\vdash^{\beta_0+1}_{\beta}\Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})},\neg A^{(\sigma,\mathbb{K})}\quad\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa,\sigma\}]\vdash^{\beta_0}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})},A^{(\sigma,\mathbb{K})}}{\{\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa,\sigma\}]\vdash^{\beta_0+2}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})},\Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})}\}_{\delta<\sigma\in Mh_2(a_0)\cap\kappa}}}{\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta\cup\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\delta,\kappa,a_0))$$

情形 2。最后一步推理是对切割公式 C with rk(C) $< \mathbb{K}$ 的 (cut)。于是，根据 (3)、命题 3.1 和假设$\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$，rk($C$) $\in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathbb{K} \subset \psi_{\mathbb{K}}(\gamma) < \beta$。

情况 3. 最后一步推理是一个（$\bigwedge$），其主要公式为 $\Pi_1(\mathbb{K}) \ni A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$。我们可以假设 $J = Tm(\mathbb{K})$。于是 $A^{(\kappa,\mathbb{K})} \simeq \bigwedge(A_\iota)^{\iota\in Tm(\kappa)}$，通过剪除 $\iota \notin Tm(\kappa)$ 的分支即可得到该引理。

情况 4. 最后一步推理是一个（$\bigvee$），其主要公式为 $\Sigma_2(\mathbb{K}) \ni A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in J}$。我们可以假设 $J = Tm(\mathbb{K})$。于是 $A^{(\kappa,\mathbb{K})} \simeq \bigvee(A_\iota)^{\iota\in Tm(\kappa)}$。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_{\mathbb{K}} \Gamma, A_\iota}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a}_{\mathbb{K}} \Gamma} \ (\bigvee)$$

我们可以假设 k(ι) $\subset$ k(A_ι)。于是由 (3) 和 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$，我们得到 k($\iota$) $\subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathbb{K} \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma)) \cap \mathbb{K} \subset \kappa$，以及 $\iota \in Tm(\kappa)$。□

如果序数项 α 属于 $OT(\Pi_3)$，则称其为正则，当且仅当 $\alpha \in \{\Omega\ \mathbb{K}\}$ 或$\alpha = \psi^\nu_\sigma(a)$ 对某些 σ、a 和 $\nu > 0$ 成立。

引理 2.6 设 λ 为正则，$\Gamma \subset \Sigma_1(\lambda)$ 且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma$，其中 $a < \mathbb{K}$、$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \ni \lambda \leq b < \mathbb{K}$ 和 $\forall\kappa \in [\lambda, b)(\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\kappa(\gamma)))$。令 $\hat{a} = \gamma + \theta_b(a)$ 和$\beta = \psi^\eta_\lambda(\hat{a})$，使得 $0 \leq \eta \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$、$\eta < m_2(\lambda)$、$SC_{\mathbb{K}}(\eta) \subset \beta$ 且 $\eta \leq \gamma$。则$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta] \vdash^\beta_\beta \Gamma$ 成立。

证明。按照定理 1.22，对 b 作主归纳，并对 a 作辅助归纳。

情形 1。首先考虑最后一步推理为 (rfl$\Pi_2(\alpha, \sigma, \nu)$) 且带有 $b \geq \sigma > \alpha$ 的情况。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)} : \alpha < \rho \in Mh_2(\nu) \cap \sigma\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\alpha, \sigma, \nu))$$

其中 $\Delta \subset \Sigma_2(\sigma)$、$\{\alpha, \sigma, \nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, $\nu < m_2(\sigma)$、$\nu \leq \gamma$ 以及 $SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \sigma$。
情况 1.2。$\sigma < \lambda$: 那么对每个 $\delta \in \Delta$，都有 $\{\neg\delta\} \cup \Delta^{(\rho,\sigma)} \subset \Delta_0(\lambda)$。对于任意 $\lambda \leq \kappa < b$，我们得到 $\rho < \sigma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \kappa \subset \psi_\kappa(\gamma)$。SIH 推出该引理。
情况 1.2。$\sigma \geq \lambda$: 对每个 $\delta \in \Delta$，令 $\delta \simeq \bigvee(\delta_i)_{i\in J}$。我们可以假设 $J = Tm(\sigma)$。反演推出 $\mathcal{H}_{\gamma+|i|}[\Theta \cup \mathrm{k}(i)] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta_i$。令 $\widehat{a_0} = \gamma + \theta_b(a_0)$ 和 $\rho = \psi^\nu_\sigma(\widehat{a_0} + \alpha)$，其中根据该假设，$\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$，$\{\alpha, \sigma, \nu, \widehat{a_0}\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$且 $\nu < m_2(\sigma)$。因此，$\{\alpha, \sigma, \nu, \widehat{a_0}\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$ 且 $\alpha < \rho$，由 $\alpha < \sigma$ 得出。所以，参见 (9)，$SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \rho \in Mh_2(\nu) \cap \sigma \cap \mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\alpha+1}[\Theta]$。

对于每个 k(i) $\subset \rho$ 和 $\neg\delta_i \in \Sigma_1(\sigma)$，我们由$|i| < \rho < \sigma \leq b$得到 $\gamma + |i| + \theta_b(a_0) = \widehat{a_0}$，并且由 SIH 对 $\rho_0 = \psi_{|sig}(\widehat{a_0}) \leq \rho$ 得到 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta \cup \mathrm{k}(i)] \vdash^{\rho_0}_{\rho_0} \Gamma, \neg\delta_i$。因此 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\alpha+1}[\Theta \cup \mathrm{k}(i)] \vdash^\rho_\rho \Gamma, \neg\delta_i$。由有界性，我们得到 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\alpha+1}[\Theta \cup \mathrm{k}(i)] \vdash^\rho_\rho \Gamma, \neg\delta^{(\rho,\sigma)}_i$。A ($\bigwedge$) 给出

$$\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\alpha+1}[\Theta] \vdash^{\rho+1}_\rho \Gamma, \neg\delta^{(\rho,\sigma)}.$$

另一方面，我们有 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta\cup\{\rho\}]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\Delta^{(\rho,\sigma)}$ $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+\alpha+1}[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\Delta^{(\rho,\sigma)}$，and，。由 SIH，我们得到

$$\mathcal{H}_{\widehat{a_1}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_1}^{\beta_1}\Gamma,\Delta^{(\rho,\sigma)}$$

对于 $\beta_1=\psi_\sigma(\widehat{a}_1)>\rho$，其中 $\widehat{a_1}=\widehat{a_0}+\alpha+\theta_b(a_0)\leq\gamma+\theta_b(a_0)\cdot 3<\hat{a}$。因此，我们通过若干次 $\mathrm{rk}(\delta^{(\rho,\sigma)})<\rho+\omega<\beta_1$ 的 (cut)，得到 $\mathcal{H}_{\widehat{a_1}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_1}^{\beta_1+\omega}\Gamma$。

如果 $\sigma=\lambda$，那么证明完成。设 $\lambda<\sigma\leq b$。则 $\lambda\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\cap\sigma\subset\beta_1$。根据 MIH 可得 $\mathcal{H}_{\widehat{a_2}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_2}^{\beta_2}\Gamma$，其中 $\widehat{a_2}=\widehat{a_1}+\theta_{\beta_1}(\beta_1+\omega)<\hat{a}$ 由 $\beta_1<\sigma\leq b$ 得出，且 $\beta_2=\psi_\lambda(\widehat{a_2})<\psi_\lambda(\hat{a})\leq\beta_0$。

情形 2。接下来，最后一步推理是一个 (cut)，其切割公式为 C，且 $d=\mathrm{rk}(C)<b$。

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,\neg C\quad\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a_0}\Gamma,C}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash_b^{a}\Gamma}\ (cut)$$

如果 $d<\lambda$，则由 SIH 可得该引理。令 $\lambda\leq d$ 和 $\widehat{a_0}=\gamma+\theta_b(a_0)$。

情况 2.1。存在一个正则 $\sigma\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，使得 $d<\sigma\leq b$：对于 $\{\neg C,C\}\subset\Delta_0(\sigma)$，由 SIH 可得 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_0}^{\beta_0}\Gamma,C$ 以及 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_0}^{\beta_0}\Gamma,\neg C$（对于 $\beta_0=\psi_\sigma(\widehat{a_0})$）。一个 (cut) 给出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_0}^{\beta_0+1}\Gamma$。由 MIH 可得 $\mathcal{H}_{\widehat{a_1}+1}[\Theta]\vdash_{\beta_1}^{\beta_1}\Gamma$，其中 $\widehat{a_1}=\widehat{a_0}+\theta_{\beta_0}(\beta_0+1)<\hat{a}$，且 $\beta_1=\psi_\lambda(\widehat{a_1})<\psi_\lambda(\hat{a})\leq\beta_0$。

情况 2.2。否则：那么不存在正则的 $\sigma\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 使得 $d<\sigma\leq b$。令 $d+c=b$。于是由切消去可得 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^{\theta_c(a)}_d\Gamma$。MIH 得出 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta]\vdash^{\psi_\lambda(\hat{a})}_{\psi_\lambda(\hat{a})}\Gamma$，其中 $\gamma+\theta_d(\theta_c(a))=\gamma+\theta_b(a)=\hat{a}$。□

定理 2.7 假设 $\mathrm{KP}\Pi_3\vdash\theta^{L_\Omega}$ 对于 $\theta\in\Sigma$ 成立。那么存在一个 $n<\omega$，使得 $L_\alpha\models\theta$ 对于 $\alpha=\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{K}+1))$ 在 $OT(\Pi_3)$ 中成立。

证明。由嵌入可得存在一个 $m>0$，使得 $\mathcal{H}_0[\emptyset]\vdash^{\mathbb{K}+m}_{\mathbb{K}+m}\theta^{L_\Omega}$。由切消去，$\mathcal{H}_0[\emptyset]\vdash^{a}_{\mathbb{K}}\theta^{L_\Omega}$，且 $\mathcal{H}_a[\emptyset]\vdash^{a}_{\mathbb{K}}\theta^{L_\Omega}$ 对于 $a=\omega_m(\mathbb{K}+m)$ 成立。由引理 2.5 可得 $\mathcal{H}_{\omega^a+1}[\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\theta^{L_\Omega}$，其中 $\beta=\psi_{\mathbb{K}}(\omega^a)$、$a+\omega^{\mathbb{K}+a}=\omega^a$、$(\theta^{L_\Omega})^{(\kappa,\mathbb{K})}\equiv\theta^{L_\Omega}$，且 $\psi_{\mathbb{K}}(a+\mathbb{K})<\kappa\in Mh_2(a)\cap\psi_{\mathbb{K}}(a+\mathbb{K}\cdot\omega)$。例如 $\kappa=\psi^a_{\mathbb{K}}(a+\mathbb{K}+1)\in\mathcal{H}_{a+\mathbb{K}+2}[\emptyset]$。因此 $\mathcal{H}_{\omega^a+\mathbb{K}+2}[\emptyset]\vdash^{\beta}_{\beta}\theta^{L_\Omega}$。然后由引理 2.6 得出$\mathcal{H}_{\gamma+1}[\emptyset]\vdash^{\beta_1}_{\beta_1}\theta^{L_\Omega}$ $\gamma=\omega^a+\mathbb{K}+\theta_\beta\ \beta$ $\beta_1=\psi_\Omega\ \gamma<\psi_\Omega\ \omega^a+\mathbb{K}\cdot 2<\psi_\Omega\ \omega_{m+2}\ \mathbb{K}+1=\alpha$ 对于 $L_\alpha\models\theta$ □ ( ) 和 ( ) ( ) (( )) 成立。因此 。

3 KP 中的良基性证明Π_3

$OT(\Pi_3)$ 表示第 2 节中的可计算记号系统。只有当 $\nu=m_2(\kappa)<m_2(\sigma)$、$SC_{\mathbb{K}}(\nu)\subset\kappa$ 和 $\nu\leq b$ 时，$\kappa=\psi^\nu_\sigma(b)\in OT(\Pi_3)$，参见 (9)。本节中我们证明

定理 3.1 $\mathrm{KP}\Pi_3$ 证明了 $OT(\Pi_3)$ 在每个 $\alpha<\psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{K}+1})$ 以下都是良基的。

我们假设一个标准编码 $OT(\Pi_3)\ni\alpha\mapsto\ulcorner\alpha\urcorner\in\omega$，并将序数项 α 与其编码 $\ulcorner\alpha\urcorner$对应。

3.1 可定义集

在本小节中，我们在 KPℓ 中工作。

定义 3.2 [Buchholz00]。对于
$\alpha \in OT(\Pi_3)$ $X \subset OT(\Pi_3)$，令

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\alpha(X) \quad := \quad & \text{closure of } \{0, \Omega, \mathbb{K}\} \cup (X \cap \alpha) \text{ under } +, \varphi \\ & \text{and } (\sigma, \alpha, \nu) \mapsto \psi_\sigma^\nu(\alpha) \text{ for } \sigma > \alpha \text{ in } OT(\Pi_3) \end{aligned} \tag{10}$$

$\alpha^+ = \Omega_{\alpha+1}$ 表示大于 α 的最小正则项，若这样的项存在。否则 $\alpha^+ := \infty$。

命题 3.3 假设 $\forall \gamma \in X[\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(X)]$，其中 $X \subset OT(\Pi_3)$ 是一个集合。

1. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathcal{C}^\beta(X) \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$.
2. $\alpha < \beta < \alpha^+ \Rightarrow \mathcal{C}^\beta(X) = \mathcal{C}^\alpha(X)$.

证明。3.3.1。通过对 $\ell\gamma\,(\gamma \in OT(\Pi_3))$ 归纳，我们可知

$$\forall \beta \geq \alpha[\gamma \in \mathcal{C}^\beta(X) \Rightarrow \gamma \in \mathcal{C}^\alpha(X) \cup (X \cap \beta)] \tag{11}$$

例如，若 $\psi_\pi^\nu(\delta) \in \mathcal{C}^\beta(X)$，且 $\pi > \beta \geq \alpha$，并且 $\{\pi, \delta, \nu\} \subset \mathcal{C}^\alpha(X) \cup (X \cap \beta)$，则 $\pi \in \mathcal{C}^\alpha(X)$；对于任意 $\gamma \in \{\delta, \nu\}$，要么 $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha(X)$，要么 $\gamma \in X \cap \beta$。若$\gamma < \alpha$，则 $\gamma \in X \cap \alpha \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$。若 $\alpha \leq \gamma \in X \cap \beta$，则由假设可得 $\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(X)$，并由归纳假设可得 $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha(X) \cup (X \cap \gamma)$，即 $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha(X)$。因此$\{\pi, \delta, \nu\} \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$，且 $\psi_\pi^\nu(\delta) \in \mathcal{C}^\alpha(X)$。

利用 (11)，根据假设可知 $\forall \beta \geq \alpha[\gamma \in \mathcal{C}^\beta(X) \Rightarrow \gamma \in \mathcal{C}^\alpha(X)]$。

3.3.2. 假设 $\alpha < \beta < \alpha^+$。那么由命题 3.3.1 可得 $\mathcal{C}^\beta(X) \subset \mathcal{C}^\alpha(X)$。$\mathcal{C}^\alpha(X) \subset \mathcal{C}^\beta(X)$ 可由 $\beta < \alpha^+$ 容易看出。□

定义 3.4 1. $Prg[X, Y] :\Leftrightarrow \forall \alpha \in X(X \cap \alpha \subset Y \to \alpha \in Y)$。

2. 对于可定义类 $\mathcal{X}$， $TI[\mathcal{X}]$ 表示如下模式：$TI[\mathcal{X}]$：
$\Leftrightarrow Prg[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \to \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ 对任意可定义类 $\mathcal{Y}$ 都成立。

3. 对于 $X \subset OT(\Pi_3)$， $W(X)$ 表示 X 的良基部分。

4. $Wo[X] :\Leftrightarrow X \subset W(X)$。

注意，对于 $\alpha \in OT(\Pi_3)$， $W(X) \cap \alpha = W(X \cap \alpha)$。

定义 3.5 对于 $X \subset OT(\Pi_3)$ 和 $\alpha \in OT(\Pi_3)$，

1.
$$D[X] :\Leftrightarrow \forall \alpha(\alpha \leq X \to W(\mathcal{C}^\alpha(X)) \cap \alpha^+ = X \cap \alpha^+) \tag{12}$$

如果 $D[X]$，则称集合 X 为特定集合。

2. $\mathcal{W} := \bigcup\{X : D[X]\}$。

设 $\alpha \in X$ 是一个特定集合 X。那么 $W(\mathcal{C}^{\alpha}(X)) \cap \alpha^{+} = X \cap \alpha^{+}$。因此 X 是良序。

命题 3.6 设 X 是一个特定集合。那么 $\alpha \in X \Rightarrow \forall\beta[\alpha \in \mathcal{C}^{\beta}(X)]$。

证明。设 $D[X]$ 和 $\alpha \in X$。那么 $\alpha \in X \cap \alpha^{+} = W(\mathcal{C}^{\alpha}(X)) \cap \alpha^{+} \subset \mathcal{C}^{\alpha}(X)$。因此 $\forall\gamma \in X(\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(X))$，并且对于任意 $\beta \leq \alpha$，有 $\alpha \in \mathcal{C}^{\beta}(X)$，由命题 3.3.1 可知。此外，对于 $\beta > \alpha$，我们有 $\alpha \in X \cap \beta \subset \mathcal{C}^{\beta}(X)$。□

命题 3.7 $X \cap \alpha = Y \cap \alpha \Rightarrow \forall\beta < \alpha^{+}\left[\mathcal{C}^{\beta}(X) = \mathcal{C}^{\beta}(Y)\right]$，如果 $\forall\gamma \in X(\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(X))$ 且 $\forall\gamma \in Y(\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(Y))$。

证明。假设 $X \cap \alpha = Y \cap \alpha$ 和 $\alpha \leq \beta < \alpha^{+}$。我们得到 $\mathcal{C}^{\alpha}(X) = \mathcal{C}^{\alpha}(Y)$。另一方面，我们有 $\mathcal{C}^{\beta}(X) = \mathcal{C}^{\alpha}(X)$，根据命题 3.3.2，对于 $\mathcal{C}^{\beta}(Y)$ 也同样成立。因此 $\mathcal{C}^{\beta}(X) = \mathcal{C}^{\beta}(Y)$。□

命题 3.8 $\alpha \leq X \,\&\, \alpha \leq Y \Rightarrow X \cap \alpha^{+} = Y \cap \alpha^{+}$ 当且仅当 $D[X]$ 和 $D[Y]$。

证明。对于特定集合 X，$\alpha \leq X \Rightarrow X \cap \alpha^{+} = W(\mathcal{C}^{\alpha}(X)) \cap \alpha^{+}$。因此，该命题由命题 3.6 和命题 3.7 得出。□

命题 3.9 $\mathcal{W}$ 是最大的特定类。

证明。首先我们证明 $\forall\gamma \in \mathcal{W}(\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(\mathcal{W}))$。令 $\gamma \in \mathcal{W}$，并选取一个特定集合 X，使得 $\gamma \in X$。然后根据 $X \subset \mathcal{W}$，$\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(X) \subset \mathcal{C}^{\gamma}(\mathcal{W})$。

令 $\alpha \leq \mathcal{W}$。取一个特定集合 X，使得 $\alpha \leq X$。我们断言$\mathcal{W} \cap \alpha^{+} = X \cap \alpha^{+}$。令 Y为一个特定集合，且 $\beta \in Y \cap \alpha^{+}$。由命题 3.8，得$\beta \in Y \cap \beta^{+} = X \cap \beta^{+}$。由此断言可得 $W(\mathcal{C}^{\alpha}(\mathcal{W})) \cap \alpha^{+} = W(\mathcal{C}^{\alpha}(X)) \cap \alpha^{+} = X \cap \alpha^{+} = \mathcal{W} \cap \alpha^{+}$。因此 $D[\mathcal{W}]$。□

定义 3.10 $\mathcal{G}(X) := \{\alpha \in OT(\Pi_3) : \alpha \in \mathcal{C}^{\alpha}(X) \text{ 且 } \mathcal{C}^{\alpha}(X) \cap \alpha \subset X\}$。

引理 3.11 对于 $D[X]$，$X \subset \mathcal{G}(X)$。

证明。令 $\gamma \in X$。我们有 $\gamma \in W(\mathcal{C}^{\gamma}(X)) \cap \gamma^{+} = X \cap \gamma^{+}$。因此 $\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(X)$。假设 $\alpha \in \mathcal{C}^{\gamma}(X) \cap \gamma$。那么 $\alpha \in W(\mathcal{C}^{\gamma}(X)) \cap \gamma^{+} \subset X$。因此 $\mathcal{C}^{\gamma}(X) \cap \gamma \subset X$。□

定义 3.12 对于序数项 α、$\delta \in OT$（Π_3），有限集 G_{δ}（α）和 $\subset OT$（Π_3）递归地定义如下。

1. $G_{\delta}(\alpha) = \emptyset \text{ for } \alpha \in \{0, \Omega, \mathbb{K}\}$. $G_{\delta}(\alpha_m + \cdots + \alpha_0) = \bigcup_{i \leq m} G_{\delta}(\alpha_i)$. $G_{\delta}(\varphi\beta\gamma) = G_{\delta}(\beta) \cup G_{\delta}(\gamma)$.
2. $G_{\delta}(\psi_{\pi}^{\nu}(a)) = \begin{cases} G_{\delta}(\{\pi, a, \nu\}) & \delta < \pi \\ \{\psi_{\pi}^{\nu}(a)\} & \pi \leq \delta \end{cases}$.

命题 3.13 对于 $\{\alpha, \delta, a, b, \rho\} \subset OT(\Pi_3)$,

1. $G_\delta(\alpha) \leq \alpha$.

2. $\alpha \in \mathcal{H}_a(b) \Rightarrow G_\delta(\alpha) \subset \mathcal{H}_a(b)$.

证明。这些结论通过对序数项 $\ell\alpha$ 的长度 α同时进行归纳法来证明。不难看出,

$$G_\delta(\alpha) \ni \beta \Rightarrow \beta < \delta \,\&\, \ell\beta \leq \ell\alpha \tag{13}$$

3.13.1. 考虑 $\alpha = \psi_\pi^\nu(a)$ 且 $\delta < \pi$ 的情形。于是 $G_\delta(\alpha) = G_\delta(\{\pi, a, \nu\})$。另一方面，我们有 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha)$。由命题 3.13.2 和 (13) 得到 $G_\delta(\{\pi, a, \nu\}) \subset \mathcal{H}_a(\alpha) \cap \pi \subset \alpha$。因此 $G_\delta(\alpha) < \alpha$。

3.13.2. 由于根据命题 3.13.1， $G_\delta(\alpha) \leq \alpha$ ，我们可以假设 $\alpha \geq b$。

考虑 $\alpha = \psi_\pi^\nu(a)$ 且 $\delta < \pi$ 的情形。于是 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{H}_a(b)$，并且 $G_\delta(\alpha) = G_\delta(\{\pi, a, \nu\})$。归纳假设推出该命题。□

命题 3.14 设 $\gamma < \beta$。假设 $\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(X)$ 且 $\forall\kappa \leq \beta[G_\kappa(\alpha) < \gamma]$。此外，假设 $\forall\delta[\ell\delta \leq \ell\alpha \,\&\, \delta \in \mathcal{C}^\gamma(X) \cap \gamma \Rightarrow \delta \in \mathcal{C}^\beta(X)]$。那么 $\alpha \in \mathcal{C}^\beta(X)$。

证明。对 $\ell\alpha$ 作归纳。若 $\alpha < \gamma$，则 $\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(X) \cap \gamma$。第三个假设推出 $\alpha \in \mathcal{C}^\beta(X)$。假设 $\alpha \geq \gamma$。除去某些 π, a, ν 满足 $\alpha = \psi_\pi^\nu(a)$ 的情形，归纳假设推出 $\alpha \in \mathcal{C}^\beta(X)$。设某些 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{C}^\gamma(X)$ 和 $\pi > \gamma$ 满足 $\alpha = \psi_\pi^\nu(a)$。若 $\pi \leq \beta$，则由第二个假设，$\{\alpha\} = G_\pi(\alpha) < \gamma$。因此情况并非如此，于是得到 $\pi > \beta$。接着，对任意 $\kappa \leq \beta < \pi$， $G_\kappa(\{\pi, a, \nu\}) = G_\kappa(\alpha) < \gamma$。归纳假设推出 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{C}^\beta(X)$。由 $\pi > \beta$ 得出 $\alpha \in \mathcal{C}^\beta(X)$。□

引理 3.15 假设 $D[Y]$ 且 $\alpha \in \mathcal{G}(Y)$。令 $X = W(\mathcal{C}^\alpha(Y)) \cap \alpha^+$。假设以下条件 (71) 成立。那么 $\alpha \in X$ 且 $D[X]$。

$$\forall\beta \left(Y \cap \alpha^+ < \beta \,\&\, \beta^+ < \alpha^+ \to W(\mathcal{C}^\beta(Y)) \cap \beta^+ \subset Y\right) \tag{14}$$

证明。令 $\alpha \in \mathcal{G}(Y)$。根据 $\mathcal{C}^\alpha(Y) \cap \alpha \subset Y$和 $Wo[Y]$，由命题 3.6 得到

$$X \cap \alpha = Y \cap \alpha = \mathcal{C}^\alpha(Y) \cap \alpha \tag{15}$$

因此 $\alpha \in X$。

断言 3.16 $\alpha^+ = \gamma^+ \,\&\, \gamma \in X \Rightarrow \gamma \in \mathcal{C}^\gamma(X)$。

断言 3.16 的证明。令 $\alpha^+ = \gamma^+$和 $\gamma \in X = W(\mathcal{C}^\alpha(Y)) \cap \alpha^+$。由命题 3.6 和 3.3 得到 $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha(Y) = \mathcal{C}^\gamma(Y)$。因此 $Y \cap \gamma \subset \mathcal{C}^\gamma(Y) \cap \gamma = \mathcal{C}^\alpha(Y) \cap \gamma$。 $\gamma \in W(\mathcal{C}^\alpha(Y))$ 推出 $Y \cap \gamma \subset X$。因此我们得到$\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(Y) \subset \mathcal{C}^\gamma(X)$。断言 3.16 的□ 。

命题 3.17 $D[X]$。

命题 3.17 的证明。由（15）可得 $X \cap \alpha = Y \cap \alpha$。设 $\beta \leq X$。我们证明$W(\mathcal{C}^{\beta}(X)) \cap \beta^{+} = X \cap \beta^{+}$。

情形 1. $\beta^{+} = \alpha^{+}$: 根据命题 3.3、断言 3.16 和 (15)，我们得到 $\mathcal{C}^{\beta}(X) = \mathcal{C}^{\alpha}(X) = \mathcal{C}^{\alpha}(Y)$。

情形 2. $\beta^{+} < \alpha^{+}$: 于是 $\beta^{+} \leq \alpha$。

首先，设 $Y \cap \alpha^{+} < \beta$。于是由假设 (71) 得到 $W(\mathcal{C}^{\beta}(Y)) \cap \beta^{+} \subset Y$。由 (15) 我们得到 $W(\mathcal{C}^{\beta}(X)) \cap \beta^{+} \subset Y \cap \beta^{+} = X \cap \beta^{+}$。剩下只需证明$Y \cap \beta^{+} \subset W(\mathcal{C}^{\beta}(Y))$。设 $\gamma \in Y \cap \beta^{+}$。由 $D[Y]$，我们得到 $\gamma \in W(\mathcal{C}^{\gamma}(Y))$。另一方面，根据命题 3.3，有 $\mathcal{C}^{\beta}(Y) \subset \mathcal{C}^{\gamma}(Y)$。此外，命题 3.6 推出 $\gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y)$。因此 $\gamma \in W(\mathcal{C}^{\beta}(Y))$。

接下来令 $\beta \leq Y \cap \alpha^{+}$。由此得到 $Y \cap \beta^{+} = \mathcal{W}(\mathcal{C}^{\beta}(Y)) \cap \beta^{+}$，并且根据 (15)，$X \cap \beta^{+} = \mathcal{W}(\mathcal{C}^{\beta}(X)) \cap \beta^{+}$。□ 命题 3.17。

这就完成了引理 3.15 的证明。 □

命题 3.18 令 $D[X]$。

1. 令 $\{\alpha, \beta\} \subset X$，满足 $\alpha + \beta = \alpha \# \beta$ 且 $\alpha > 0$。则 $\gamma = \alpha + \beta \in X$。
2. 如果 $\{\alpha, \beta\} \subset X$，则 $\varphi_{\alpha}(\beta) \in X$。

证明。通过对 $\alpha \in X$ 进行主归纳，并使用命题 3.18.1 对 $\beta \in X$ 进行辅助归纳，可以得到命题 3.18.2。我们证明命题 3.18.1。我们得到 $\alpha \in X \cap \gamma^{+} = W(\mathcal{C}^{\gamma}(X)) \cap \gamma^{+}$，其中 $\gamma^{+} = \alpha^{+}$。根据对 $\beta \in X \cap \alpha \subset \mathcal{C}^{\gamma}(X)$ 的归纳法，我们看到 $\alpha + \beta \in W(\mathcal{C}^{\gamma}(X))$。□

命题 3.19 设 $X_0 = W(\mathcal{C}^{0}(\emptyset)) \cap 0^{+}$ 且 $0^{+} = \Omega$，并且 $X_1 = W(\mathcal{C}^{\Omega}(X_0)) \cap \Omega^{+}$。那么 $0 \in X_0$、$\Omega \in X_1$ 以及 $D[X_i]$ 对 $i = 0$、1 成立。

证明。对每个 $\alpha \in \{0, \Omega\}$ 以及任意集合 $Y \subset OT(\Pi_3)$，我们有 $\alpha \in \mathcal{C}^{\alpha}(Y)$。首先得到 $0 \in \mathcal{G}(\emptyset)$ 和 $D[\emptyset]$。此外，不存在满足 $\beta^{+} < 0^{+}$ 的 β。因此条件 (71) 得以满足，并由引理 3.15 得到 $0 \in X_0$ 和 $D[X_0]$。

接下来，设 $\gamma \in \mathcal{C}^{\Omega}(X_0) \cap \Omega$。我们按序数项 γ 的长度$\ell\gamma$ 进行归纳，证明 $\gamma \in X_0$。我们看到，每个强临界数$\gamma \in \mathcal{C}^{\Omega}(X_0) \cap \Omega$ 都属于 X_0，因为若 $\psi_{\sigma}^{\nu}(\beta) < \Omega$，则 $\sigma = \Omega$。否则，利用归纳假设、命题 3.18 和 $0 \in X_0$，可得 $\gamma \in X_0$。因此，我们得到 $\alpha \in \mathcal{G}(X_0)$。设 $\beta^{+} < \alpha^{+}$。那么 $\beta^{+} = \Omega$ 且 $\beta < \Omega$。由命题 3.3，$W(\mathcal{C}^{\beta}(X_0)) \cap \Omega = W(\mathcal{C}^{0}(X_0)) \cap \Omega = X_0$。因此条件 (71) 得以满足，并由引理 3.15 得到 $\Omega \in X_1$ 和 $D[X_1]$。□

定义 3.20 $\beta \prec \alpha$ 当且仅当存在一个序列 $\{\sigma_i\}_{i \leq n} (n > 0)$，使得$\alpha = \sigma_0$，$\beta = \sigma_n$ 并且对于每个 $i < n$，都存在一些 ν_i, a_i，使得 $\sigma_{i+1} = \psi_{\sigma_i}^{\nu_i}(a_i)$。

Note that $\beta \prec \alpha \Rightarrow m_2(\beta) < m_2(\alpha)$.

引理 3.21 设 $D[Y]$ 满足 $\{0, \Omega\} \subset Y$，且对于 $\eta \in OT(\Pi_3)$

$$\eta \in \mathcal{G}(Y) \tag{16}$$

and

$$\forall\gamma \prec \eta(\gamma \in \mathcal{G}(Y) \Rightarrow \gamma \in Y) \tag{17}$$

令 $X = W(\mathcal{C}^{\eta}(Y)) \cap \eta^{+}$。则 $\eta \in X$ 且 $D[X]$。

证明。根据引理 3.15 和假设 (16)，只需证明 (71)，即

$$\forall\beta\left(Y \cap \eta^{+} < \beta \,\&\, \beta^{+} < \eta^{+} \rightarrow W(\mathcal{C}^{\beta}(Y)) \cap \beta^{+} \subset Y\right).$$

假设 $Y \cap \eta^{+} < \beta$ 和 $\beta^{+} < \eta^{+}$。我们需要证明 $W(\mathcal{C}^{\beta}(Y)) \cap \beta^{+} \subset Y$。我们对此关于 $\gamma \in W(\mathcal{C}^{\beta}(Y)) \cap \beta^{+}$ 作归纳法证明。设 $\gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \beta^{+}$ 并且

$$\mathrm{MIH} : \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \gamma \subset Y.$$

我们证明 $\gamma \in Y$。不妨设

$$Y \cap \eta^{+} < \gamma \tag{18}$$

因为如果对于某个 $\delta \in Y \cap \eta^{+}$ 有 $\gamma \leq \delta$，那么根据 $Y \cap \eta^{+} < \beta$ 和 $\gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y)$，我们得到 $\delta < \beta$、$\gamma \in \mathcal{C}^{\delta}(Y)$ 以及 $\delta \in W(\mathcal{C}^{\delta}(Y)) \cap \delta^{+} = Y \cap \delta^{+}$。因此 $\gamma \in W(\mathcal{C}^{\delta}(Y)) \cap \delta^{+} \subset Y$。

我们首先证明

$$\gamma \in \mathcal{G}(Y) \tag{19}$$

首先，根据 $\gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \beta^{+}$ 和命题 3.3，有 $\gamma \in \mathcal{C}^{\gamma}(Y)$。其次，我们通过关于 $\ell\alpha$ 的归纳法证明以下断言：

$$\alpha \in \mathcal{C}^{\gamma}(Y) \cap \gamma \Rightarrow \alpha \in Y \tag{20}$$

(20) 的证明。假设 $\alpha \in \mathcal{C}^{\gamma}(Y)$。不妨设 $\gamma^{+} \leq \beta$，否则由 MIH 可得 $\alpha \in \mathcal{C}^{\gamma}(Y) \cap \gamma = \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \gamma \subset Y$。

根据长度归纳假设、$\alpha < \gamma < \beta^{+} < \eta^{+}$、命题 3.18 以及 $\{0,\Omega\} \subset Y$，不妨设对于某个 $\pi > \gamma$，$\alpha = \psi_{\pi}^{\nu}(a)$，使得 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{C}^{\gamma}(Y)$。

情形 1。$\beta < \pi$：则由命题 3.13.1，$G_{\beta}(\{\pi, a, \nu\}) = G_{\beta}(\alpha) < \alpha < \gamma$。命题 3.14 与长度归纳假设推出 $\{\pi, a, \nu\} \subset \mathcal{C}^{\beta}(Y)$。因此，根据 $\pi > \beta$，$\alpha \in \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \gamma$。MIH 推出 $\alpha \in Y$。

情形 2。$\beta \geq \pi$：我们有 $\alpha < \gamma < \pi \leq \beta$。只需证明 $\alpha \leq Y \cap \eta^{+}$。于是根据 (18)，对于某个 $\delta < \gamma$，我们有 $\alpha \leq \delta \in Y \cap \eta^{+}$。$\mathcal{C}^{\delta}(Y) \ni \alpha \leq \delta \in Y \cap \delta^{+} = W(\mathcal{C}^{\delta}(Y)) \cap \delta^{+}$ 推出 $\alpha \in W(\mathcal{C}^{\delta}(Y)) \cap \delta^{+} \subset Y$。

首先假设 γ 不是强临界数。根据 $\alpha = \psi_{\pi}^{\nu}(a) < \gamma$，我们可以假设 $\gamma \neq 0$。令 δ 表示 γ的最大直接子项。由（18）和 $Y \cap \eta^{+} < \gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y)$，我们得到 $\delta \in \mathcal{C}^{\beta}(Y) \cap \gamma$。因此，根据 MIH 可得 $\delta \in Y$。此外，根据 $\alpha < \gamma$，我们得到 $\alpha \leq \delta$，即 $\alpha \leq Y$，证毕。

接下来，由（18）和 $\gamma \in \mathcal{C}^{\beta}(Y)$，对某些 b、ξ 和 $\kappa > \beta$，有 $\gamma = \psi_{\kappa}^{\xi}(b)$。我们有 $\alpha < \gamma < \pi \leq \beta < \kappa$。我们得到 $\pi \notin \mathcal{H}_{b}(\gamma)$，因为否则由 $\pi < \kappa$ 可得 $\pi < \gamma$。因此，$\alpha = \psi_{\pi}^{\nu}(a) < \psi_{\kappa}^{\xi}(b) = \gamma < \pi < \kappa$，其中 $\pi \in \mathcal{H}_{a}(\alpha)$ 且$\pi \notin \mathcal{H}_{b}(\gamma)$。由此得到 $a > b$ 和 $\{\kappa, b, \xi\} \not\subset \mathcal{H}_{a}(\alpha)$。

另一方面，我们有 $\{\kappa, b, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\gamma)$。这意味着，在 κ、b、ξ 中有一个的某个子项 $\delta < \gamma$ 满足 $\delta \notin \mathcal{H}_a(\alpha)$。此外，我们有 $\{\kappa, b, \xi\} \subset \mathcal{C}^\beta(Y)$。于是，$\delta \in \mathcal{C}^\beta(Y) \cap \gamma$。由 MIH，我们得到 $\alpha \leq \delta \in \mathcal{C}^\beta(Y) \cap \gamma \subset Y$。

□ 由 (20) 和 (19) 得出。

因此我们得到 $\gamma \in \mathcal{G}(Y)$。我们有 $\gamma < \beta^+ \leq \eta$ 和 $\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(Y)$。若 $\gamma \prec \eta$，则假设 (17) 给出 $\gamma \in Y$。下文假设 $\gamma \not\prec \eta$。

若 $G_\eta(\gamma) < \gamma$，则由命题 3.14 可得 $\gamma \in \mathcal{C}^\eta(Y) \cap \eta \subset Y$，根据 $\eta \in \mathcal{G}(Y)$。

假设 $G_\eta(\gamma) = \{\gamma\}$。根据 $\gamma \not\prec \eta$，这意味着对于某个 $\tau < \eta$，有 $\gamma \prec \tau$。令τ 表示其中最大的一个。我们有 $\gamma < \tau < \eta$。由 $\gamma \in \mathcal{C}^\gamma(Y)$ 可知$\tau \in \mathcal{C}^\gamma(Y)$。接下来我们证明

$$G_\eta(\tau) < \gamma \tag{21}$$

令 $\tau = \psi_\kappa^\mu(b)$。由 τ 的极大性可知 $\eta < \kappa$，并且根据命题 3.13.1，$G_\eta(\tau) = G_\eta(\{\kappa, b, \mu\}) < \tau$。另一方面，我们有 $\tau \in \mathcal{H}_a(\gamma)$。命题 3.13.2 给出 $G_\eta(\tau) \subset \mathcal{H}_a(\gamma)$。我们可以归纳地看出 $G_\eta(\tau) < \gamma$。

由命题 3.14 和 (21) 得到 $\tau \in \mathcal{C}^\eta(Y)$，并且 $\tau \in \mathcal{C}^\eta(Y) \cap \eta \subset Y$根据 $\eta \in \mathcal{G}(Y)$。因此 $Y \cap \eta^+ < \gamma < \tau \in Y$。根据 (18)，情况并非如此。证毕。□

命题 3.**22** $\alpha \leq \mathcal{W} \cap \beta^+ \,\&\, \alpha \in \mathcal{C}^\beta(\mathcal{W}) \Rightarrow \alpha \in \mathcal{W}$。

证明。由命题 3.3、3.6 和 7.39 可知。 □

3.2 Mahlo 宇宙

在命题 3.9 中，我们看到 $\mathcal{W}$ 是最大可区分类，它是 Σ_2^{1-}-可定义的，并且是 $\mathrm{KP}\Pi_3$ 中的真类。定义 3.25 中的 $\mathcal{W}^P$ 表示集合 P 内的最大可区分类。$\mathcal{W}^P$ 是一个集合。

令 ad 表示一个 Π_3^--句子，使得传递集 z 是容许的，当且仅当 $(z; \in) \models ad$。令 $lmtad :\Leftrightarrow \forall x \exists y (x \in y \wedge ad^y)$。注意，$lmtad$ 是一个 Π_2^--句子。

定义 3.**23** L 表示一个完整宇宙，它是 $\mathrm{KP}\Pi_3$ 的模型。

1. 宇宙指完整宇宙 L，或满足 $\omega \in Q$ 的传递集$Q \in L$。宇宙记作 P、Q, ... 2. 对于宇宙 P 和集合论句子 φ，$P \models \varphi :\Leftrightarrow (P; \in) \models \varphi$。3. 若 $lmtad^P$ 成立，则称宇宙 P 为极限宇宙，即 P 是可容许集的极限。极限宇宙类记作 $Lmtad$。

引理 3.**24** $W(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 以及 $D[X]$ 对极限宇宙 P 都是绝对的。

证明。令 P为一个极限宇宙，且 $X \in \mathcal{P}(\omega) \cap P$。那么 $W(X)$ 在 P 中是 Δ_1，$W(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 也如此。因此 $W(\mathcal{C}^\alpha(X)) = \{\beta \in OT(\Pi_3) : P \models \beta \in W(\mathcal{C}^\alpha(X))\}$，并且 $D[X] \Leftrightarrow P \models D[X]$。□

定义 3.25 对于一个宇宙 P，令 $\mathcal{W}^P := \bigcup\{X \in P\colon D[X]\}$。

引理3.26 设 P 是一个对有限并封闭的宇宙，且 $\alpha \in OT(\Pi_3)$。

1. 存在一个有限集 $K(\alpha) \subset OT(\Pi_3)$，使得 $\forall Y \in P \forall \gamma[K(\alpha) \cap Y = K(\alpha) \cap \mathcal{W}^P \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{C}^\gamma(Y))]$。2. 存在一个特定集合 $X \in P$，使得 $\forall Y \in P \forall \gamma[X \subset Y \& D[Y] \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{C}^\gamma(Y))]$。

证明。3.26.1. 例如，α 的子项集合满足 $K(\alpha)$ 的条件。3.26.2. 根据 $X, Y \in P \Rightarrow X \cup Y \in P$，选取一个特定集合 $X \in P$，使得$K(\alpha) \cap \mathcal{W}^P \subset X$。□

命题 3.27 对每个极限宇宙 P，$D[\mathcal{W}^P]$成立；若 P是一个集合，则 $\exists X(X = \mathcal{W}^P)$。

证明. 如命题 3.9 中所示，$D[\mathcal{W}^P]$。 □

对于一个普遍的 Π_n-公式 $\Pi_n(a)$（$n > 0$），在可容许集上是一致的，令

$$P \in M_2(\mathcal{C}) :\Leftrightarrow P \in Lmtad \,\&\, \forall b \in P[P \models \Pi_2(b) \to \exists Q \in \mathcal{C} \cap P(Q \models \Pi_2(b))].$$

引理 3.28 设 $\mathcal{C}$ 是一个 Π^1_0-类，且满足 $\mathcal{C} \subset Lmtad$。假设 $P \in M_2(\mathcal{C})$ 且 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$。则存在一个宇宙 $Q \in \mathcal{C}$，使得 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^Q)$。

证明. 假设 $P \in M_2(\mathcal{C})$ 且 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$。首先，由 $\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P)$ 和引理 3.26，选取一个特定集合 $X_0 \in P$，使得 $\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(X_0)$ 且 $K(\alpha) \cap \mathcal{W}^P \subset X_0$。接着，将 $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \cap \alpha \subset \mathcal{W}^P$ 解析地写出，我们有

$$\forall \beta < \alpha[\beta \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \Rightarrow \exists Y \in P(D[Y] \,\&\, \beta \in Y)]$$

由引理 3.26，我们得到 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^P) \Leftrightarrow \exists X \in P\{D[X] \,\&\, K(\beta) \cap \mathcal{W}^P \subset X \,\&\, \beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)\}$。因此，对于任意 $\beta < \alpha$ 和任意特定集合 $X \in P$，存在 $\gamma \in K(\beta)$、$Z \in P$ 以及一个特定集合 $Y \in P$，使得若 $\gamma \in Z \,\&\, D[Z] \to \gamma \in X$ 且 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)$，则 $\beta \in Y$。由引理 3.24 $D[X]$ 对极限宇宙是绝对的。因此，以下 Π_2-谓词在宇宙 $P \in M_2(\mathcal{C})$ 中成立:

$$\begin{aligned}&\forall \beta < \alpha \forall X \exists \gamma \in K(\beta) \exists Z \exists Y[\{D[X] \,\&\, (\gamma \in Z \,\&\, D[Z] \to \gamma \in X) \,\&\, \beta \in \mathcal{C}^\alpha(X)\} \\ &\Rightarrow (D[Y] \,\&\, \beta \in Y)] \end{aligned} \tag{22}$$

现在取一个满足 $X_0 \in Q$ 且满足 $Q \models$ (22) 的宇宙 $Q \in \mathcal{C} \cap P$。沿着上述论证在极限宇宙 Q 中反向推演，我们得到 $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^Q) \cap \alpha \subset \mathcal{W}^Q$ 和 $X_0 \subset \mathcal{W}^Q = \bigcup\{X \in Q : Q \models D[X]\} \in P$。因此，引理 3.26 推出$\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}^Q)$。我们得到 $\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^Q)$。□

定义 3.29 我们如下定义 $\alpha \in OT(\Pi_3)$ 的 α-递归 Mahlo 宇宙类 $M_2(\alpha)$:

$$P \in M_2(\alpha) \Leftrightarrow P \in Lmtad \,\&\, \forall \beta \prec \alpha[SC_{\mathbb{K}}(m_2(\beta)) \subset \mathcal{W}^P \Rightarrow P \in M_2(M_2(\beta))] \tag{23}$$

$M_2(\alpha)$ 是一个 Π_3类。

命题 3.30 若 $\eta \in \mathcal{G}(Y)$，则 $SC_{\mathbb{K}}(m_2(\eta)) \subset Y$。

证明。令 $\nu = m_2(\eta)$。那么由 (9) 得 $SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \eta$。由 $\eta \in \mathcal{C}^{\eta}(Y)$ 可知$SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \mathcal{C}^{\eta}(Y)$。因此，由 $\eta \in \mathcal{G}(Y)$ 得 $SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \mathcal{C}^{\eta}(Y) \cap \eta \subset Y$。□

引理 3.31 若 $\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$ 且 $P \in M_2(M_2(\eta))$，则 $\eta \in \mathcal{W}^P$。

证明。我们对 $\in$作归纳法来证明这一点。设该引理对任意 $Q \in P$ 均成立，这是归纳假设。由引理 3.28，取一个 $Q \in P$，使得 $Q \in M_2(\eta)$，并且对于$Y = \mathcal{W}^Q \in P$，$\{0, \Omega\} \subset Y$且

$$\eta \in \mathcal{G}(Y) \tag{16}$$

另一方面，定义 (23) 得出 $\forall \gamma \prec \eta[SC_{\mathbb{K}}(m_2(\gamma)) \subset \mathcal{W}^Q \Rightarrow Q \in M_2(M_2(\gamma))]$。因此，由命题3.30 $\forall \gamma \prec \eta[\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^Q)$ 得 $\Rightarrow Q \in M_2(M_2(\gamma))]$。归纳假设结合 $Y = \mathcal{W}^Q$ 得出

$$\forall \gamma \prec \eta(\gamma \in \mathcal{G}(Y) \Rightarrow \gamma \in Y) \tag{17}$$

因此，根据引理 3.21，我们得出 $\eta \in X$ 和 $D[X]$ 对于 $X = W(\mathcal{C}^{\eta}(Y)) \cap \eta^+$成立。$X \in P$ 由 $Y \in P \in Lmtad$推出。因此 $\eta \in \mathcal{W}^P$。□

引理 3.32 1. $\mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap \mathbb{K} = \mathcal{W} \cap \mathbb{K}$。

2. $\mathbb{K} \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$。3. 对每个 $n \in \omega$，$TI[\mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap \omega_n(\mathbb{K}+1)]$。

证明。我们证明引理 3.32.3。只需证明 $TI[\mathcal{W}]$。设对于公式 A，有 $Prg[\mathcal{W}, A]$，且 $\alpha \in \mathcal{W}$。取一个特定集合 X，使得 $\alpha \in X$。于是$X \cap \alpha^+ = \mathcal{W} \cap \alpha^+$，因此 $Prg[X \cap (\alpha+1)\ A]$。$Wo[X]$ 推出 $A(\alpha)$。□

引理 3.33 $\forall \eta[m_2(\eta) \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap \omega_n(\mathbb{K}+1) \Rightarrow L \in M_2(M_2(\eta))]$ 对每个 $n \in \omega$都成立。

证明。我们对 $\nu = m_2(\eta) \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$ 归纳，逐一考察每个$\omega_n(\mathbb{K}+1)$，从而证明该引理。设 $\nu \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$ 且 $L \models \Pi_2(b)$，其中有一个 $b \in L$。我们必须找到一个宇宙 $Q \in L$，使得 $b \in Q$、$Q \in M_2(\eta)$ 且 $Q \models \Pi_2(b)$。

根据定义 (23)，$L \in M_2(\eta)$ 等价于 $\forall \gamma \prec \eta[m_2(\gamma) \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \Rightarrow L \in M_2(M_2(\gamma))]$。我们得到 $\gamma \prec \eta \Rightarrow m_2(\gamma) < m_2(\eta) = \nu$。因此，由归纳假设可得$L \in M_2(\eta)$。令 g 为一个集合论意义下的原始递归函数，使得 $L \in M_2(\eta) \Leftrightarrow P \models \Pi_3(g(\eta))$。那么 $L \models \Pi_2(b) \wedge \Pi_3(g(\eta))$。由于这是一个在 Π_3反射宇宙 L中成立的 Π_3公式，我们得出，对于某个$Q \in L$，$Q \models \Pi_2(b) \wedge \Pi_3(g(\eta))$，因而 $Q \in M_2(\eta)$。证毕。□

注 3.34 仅在此处我们需要 Π_3-反射。因此，只要整个宇宙 L 承认沿着一个良基关系 $\prec$对 Π_2-递归 Mahlo 运算进行迭代即可，其中该关系在 L上是 Σ的：$L \in M_2^{\prec}(\mu) = \bigcap\{M_2(M_2^{\prec}(\nu)) : L \models \nu \prec \mu\}$。因此，我们的良基性证明可以在公理化了此类宇宙 L的集合论中形式化。

引理 3.35 对于每个 $n \in \omega$, $m_2(\eta) < \omega_n(\mathbb{K}+1)$& $\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}) \Rightarrow \eta \in \mathcal{W}$。

证明。假设 $\nu = m_2(\eta) < \omega_n(\mathbb{K}+1)$ 且 $\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W})$。由命题 3.30 可得 $\nu \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$。引理 3.33 得出 $L \in M_2(M_2(\eta))$。由此可见 $L \in M_2(\mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{C} = M_2(M_2(\eta))$, 如引理 3.33 的证明中所示, 再次使用对整个宇宙的 Π_3-反射 L。然后由引理 3.28 取一个集合 $P \in L$, 使得 $\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{W}^P)$ 且 $P \in \mathcal{C} = M_2(M_2(\eta))$。引理 3.31 得出 $\eta \in \mathcal{W}^P \subset \mathcal{W}$。□

3.3 良基性证明（续）

定义 3.36 对于项 α、κ、$\delta \in OT(\Pi_3)$, 有限集 $\mathcal{E}(\alpha)$ $K_\delta(\alpha)$ $k_\delta(\alpha) \subset OT(\Pi_3)$ 按如下方式递归地定义。

1. $\mathcal{E}\ \alpha\ = \emptyset \quad \alpha \in \{0, \quad \mathbb{K}\}\ \ \mathcal{E}\ \alpha_m + \cdots + \alpha_0\ = \bigcup_{i \le m} \mathcal{E}\ \alpha_i \quad \mathcal{E}\ \varphi\beta\gamma\ = (\ )$
   $\mathcal{E}\ \beta\ \cup \mathcal{E}\ \gamma \quad \mathcal{E}\ \psi_\pi^\nu\ a\ = \{\psi_\pi^\nu\ a\ \}$
   对于 Ω。( ) ( )。( ) ( ) ( )。(( )) ( )。
2. $\mathcal{A}(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{A}(\beta):\ \beta \in \mathcal{E}(\alpha)\}$ 对于 $\mathcal{A} \in \{K_\delta, k_\delta\}$。
3. $K_\delta(\psi_\pi^\nu(a)) = \begin{cases} \{a\} \cup K_\delta(& \\ \{\pi, a\} \cup SC_{\mathbb{K}}\ \nu & \psi_\pi^\nu\ a\ \ge \delta\ (\ ))\ (\ )\ (\ )。 \end{cases}$ 4. $k_\delta(\psi_\pi^\nu(a))$

$$= \begin{cases} \emptyset & \psi_\pi^\nu\ a\ < \delta \\ \{\psi_\pi^\nu(\quad a\ \} \cup k_\delta\ \{\pi, a\} \cup SC_{\mathbb{K}}\ \nu & \psi_\pi^\nu\ a\ \ge \delta\ )\ (\ (\ ))\ (\ )\ (\ )。 \\ \quad \emptyset & \psi_\pi^\nu\ a\ < \delta \end{cases}$$

注意, $K_\delta(\alpha) < a \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{H}_a(\delta)$。

定义 3.37 对于 $a, \nu \in OT(\Pi_3)$, 定义如下:

$$A(a,\nu) \ :\Leftrightarrow\ \forall \sigma \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})[\psi_\sigma^\nu(a) \in OT(\Pi_3) \Rightarrow \psi_\sigma^\nu(a) \in \mathcal{W}]. \tag{24}$$

$$\mathrm{MIH}(a) \ :\Leftrightarrow\ \forall b \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap a \forall \nu \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})\, A(b,\nu). \tag{25}$$

$$\mathrm{SIH}(a,\nu) \ :\Leftrightarrow\ \forall \xi \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})[\xi < \nu \Rightarrow A(a,\xi)]. \tag{26}$$

引理 3.38 对每个 n, 以下结论成立: 假设定义 3.37 中的 $\{a,\nu\} \subset \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap \omega_n(\mathbb{K}+1)$、MIH($a$) 和 SIH($a,\nu$)。则

$$\forall \kappa \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})[\psi_\kappa^\nu(a) \in OT(\Pi_3) \Rightarrow \psi_\kappa^\nu(a) \in \mathcal{W}].$$

证明。设 $\alpha_1 = \psi_\kappa^\nu(a) \in OT(\Pi_3)$, 其中 $\{a,\kappa,\nu\} \subset \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$ 且 $\nu \le a < \omega_n(\mathbb{K}+1)$, 参见 (9)。由引理 3.35, 只需证明 $\alpha_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{W})$。

由命题 3.6, 我们有 $\{\kappa,a,\nu\} \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$, 因此 $\alpha_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$。只需证明以下断言。

$$\forall \beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1[\beta_1 \in \mathcal{W}]. \tag{27}$$

用关于 $\ell\beta_1$ 的归纳法证明 (27)。假设 $\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1$, 并令

$$\mathrm{LIH} :\Leftrightarrow \forall \gamma \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W}) \cap \alpha_1[\ell\gamma < \ell\beta_1 \Rightarrow \gamma \in \mathcal{W}].$$

我们证明 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。根据命题 3.18、3.19 和 LIH，我们可以假设，对某些 π、b、ξ，有$\beta_1 = \psi_\pi^\xi(b)$，且 $\{\pi, b, \xi\} \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$。

$\beta_1 = \psi_\pi^\xi(b) < \psi_\kappa^\nu(a) = \alpha_1$ 成立，当且仅当以下情形之一成立：(1) $\pi \leq \alpha_1$。(2) $b < a$、$\beta_1 < \kappa$ 以及 $\{\pi, b, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha_1)$。(3) $b = a$、$\pi = \kappa$、$\xi \in \mathcal{H}_a(\alpha_1)$ 以及$\xi < \nu$。(4) $a \leq b$ 以及 $\{\kappa, a, \nu\} \not\subset \mathcal{H}_b(\beta_1)$。

情形 1。$\pi \leq \alpha_1$: 那么根据 $\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$，$\beta_1 \in \mathcal{W}$。

情形 2。$b < a$、$\beta_1 < \kappa$ 以及 $\{\pi, b, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha_1)$: 令 B 表示由 β_1 的子项递归地定义的集合，如下所述。首先，$\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{K}}(\xi) \subset B$。令 $\alpha_1 \leq \beta \in B$。如果 $\beta =_{NF} \gamma_m + \cdots + \gamma_0$，那么 $\{\gamma_i : i \leq m\} \subset B$。如果 $\beta =_{NF} \varphi\gamma\delta$，那么 $\{\gamma, \delta\} \subset B$。如果 $\beta = \psi_\sigma^\mu(c)$，那么 $\{\sigma, c\} \cup SC_{\mathbb{K}}(\mu) \subset B$。

于是由 $\{\pi, b, \xi\} \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$，我们可以归纳得出 $B \subset \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$。因此，根据 LIH 可得 $B \cap \alpha_1 \subset \mathcal{W}$。此外，若 $\alpha_1 \leq \psi_\sigma^\mu(c) \in B$，则由 $\{\pi, b, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha_1)$ 可得 $c < a$。我们断言

$$\forall \beta \in B(\beta \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})) \tag{28}$$

通过对 $\ell\beta$ 进行归纳证明 (28)。设 $\beta \in B$。根据长度的归纳假设，我们可以假定 $\alpha_1 \leq \beta = \psi_\sigma^\mu(c)$。然后根据归纳假设，有 $\{\sigma, c\} \cup SC_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$。另一方面，由 (9) 可得 $\mu \leq c < a$。MIH(a) 得出 $\beta \in \mathcal{W}$。因此 (28) 得证。□

特别地，我们得到 $\{\pi, b\} \cup SC_{\mathbb{K}}(\xi) \subset \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$。此外，由 (9) 可得 $\xi \leq b < a$。因此再次由 MIH(a) 得出 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。

情况 3. $b = a$, $\pi = \kappa$, $\xi \in \mathcal{H}_a(\alpha_1)$ 和 $\xi < \nu \leq a$: 如同在 (28) 中所见，$SC_{\mathbb{K}}(\xi) \subset \mathcal{W}$ 由 MIH(a) 得出。SIH(a, ν) 推出 $\beta_1 \in \mathcal{W}$。

情况 4. $a \leq b$ 和 $\{\kappa, a, \nu\} \not\subset \mathcal{H}_b(\beta_1)$: 只需找到一个 γ，使得 $\beta_1 \leq \gamma \in \mathcal{W} \cap \alpha_1$。于是，$\beta_1 \in \mathcal{W}$ 由 $\beta_1 \in \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathcal{W})$ 和命题 3.22 得出。

$k_\delta(\alpha)$ 表示定义 3.36 中的集合。一般而言，我们看到 $a \in K_\delta(\alpha)$ 当且仅当对某些 σ, h，有 $\psi_\sigma^h(a) \in k_\delta(\alpha)$；并且对于每个 $\psi_\sigma^h(a) \in k_\delta(\psi_{\sigma_0}^{h_0}(a_0))$，都存在一个由 $\alpha_0 = \psi_{\sigma_0}^{h_0}(\alpha_i = \psi_{\sigma_i}^{h_i} a_i \quad \sigma_i\ a_i\ h_i \quad i < m\ \ \delta \leq \alpha_{i+1} \in \mathcal{E}\ C_i \quad C_i =)$ 的子项构成的序列 $\{\alpha_i\}_{i \leq m}$，使得对于某些 , , ,, 有 $\alpha_m = \psi_\sigma^h(\,), (\,)$，并且对于 $\{\sigma_i, a_i\} \cup SC_{\mathbb{K}}(h_i)$，每个 , ( ) 都成立。

令 $\delta \in SC_{\mathbb{K}}(f) \cup \{\kappa, a\}$ 使得 $b \leq \gamma$ 对于某个 $\gamma \in K_{\beta_1}(\delta)$。选取一个 $\alpha_2 = \psi_{\sigma_2}^{h_2}(a_2) \in \mathcal{E}(\delta)$，使得 $\gamma \in K_{\beta_1}(\alpha_2)$，以及一个 $\alpha_m = \psi_{\sigma_m}^{h_m}(a_m) \in k_{\beta_1}(\alpha_2)$，其中 σ_m、h_m 和 $a_m \geq b \geq a$。由 $\delta \in \mathcal{W}$，我们有 $\alpha_2 \in \mathcal{W}$。若 $\alpha_2 < \alpha_1$，则 $\beta_1 \leq \alpha_2 \in \mathcal{W} \cap \alpha_1$，证毕。假设 $\alpha_2 \geq \alpha_1$。于是 $a_2 \in K_{\alpha_1}(\alpha_2) < a \leq b$，且 $m > 2$。

令 $\{\alpha_i\}_{2 \leq i \leq m}$ 为 α_2 的子项序列，使得对于某些 σ_i、a_i、h_i，有 $\alpha_i = \psi_{\sigma_i}^{h_i}(a_i)$；并且对于每个 $i < m$，$\beta_1 \leq \alpha_{i+1} \in \mathcal{E}(C_i)$ 对 $C_i = \{\sigma_i, a_i\} \cup SC_{\mathbb{K}}(h_i)$ 成立。

令 $\{n_j\}_{0 \leq j \leq k}\,(0 < k \leq m-2)$ 为由 $n_0 = 2$ 递归地定义的递增序列 $n_0 < n_1 < \cdots < n_k \leq m$。假设 n_j 已定义，使得$n_j < m$ 且 $\alpha_{n_j} \geq \alpha_1$，则 n_{j+1} 由 $n_{j+1} = \min(\{i : n_j < i < m, \alpha_i < \alpha_{n_j}\} \cup \{m\})$ 定义。若 $n_j = m$ 或 $\alpha_{n_j} < \alpha_1$，则 $k = j$ 且 n_{j+1} 未定义。于是我们断言

$$\forall j \leq k(\alpha_{n_j} \in \mathcal{W}) \,\&\, \alpha_{n_k} < \alpha_1 \tag{29}$$

(29) 的证明。对 $j \leq k$ 使用归纳法，我们首先证明 $\forall j \leq k(\alpha_{n_j} \in \mathcal{W})$。有 $\alpha_{n_0} = \alpha_2 \in \mathcal{W}$。假设 $\alpha_{n_j} \in \mathcal{W}$ 且 $j < k$。则 $n_j < m$，即$\alpha_{n_{j+1}} < \alpha_{n_j}$；由 $\alpha_{n_j} \in \mathcal{C}^{\alpha_{n_j}}(\mathcal{W})$，可得 $C_{n_j} \subset \mathcal{C}^{\alpha_{n_j}}(\mathcal{W})$，因此$\alpha_{n_j+1} \in \mathcal{E}(C_{n_j}) \subset \mathcal{C}^{\alpha_{n_j}}(\mathcal{W})$。我们可以归纳地看到，对于任意满足 $n_j \leq i \leq n_{j+1}$的 i，都有 $\alpha_i \in \mathcal{C}^{\alpha_{n_j}}(\mathcal{W})$。因此，根据命题 3.22，$\alpha_{n_{j+1}} \in \mathcal{C}^{\alpha_{n_j}}(\mathcal{W}) \cap \alpha_{n_j} \subset \mathcal{W}$。

接下来我们证明 $\alpha_{n_k} < \alpha_1$。我们可以假设 $n_k = m$。这意味着$\forall i(n_{k-1} \leq i < m \Rightarrow \alpha_i \geq \alpha_{n_{k-1}})$。我们有 $\alpha_2 = \alpha_{n_0} > \alpha_{n_1} > \cdots > \alpha_{n_{k-1}} \geq \alpha_1$，并且 $\forall i < m(\alpha_i \geq \alpha_1)$。因此 $\alpha_m \in k_{\alpha_1}(\alpha_2) \subset k_{\alpha_1}(\{\kappa, a\} \cup SC_{\mathbb{K}}(h))$，即对于 $\alpha_m = \psi^{h_m}_{\sigma_m}(a_m)$，有$a_m \in K_{\alpha_1}(\{\kappa, a\} \cup SC_{\mathbb{K}}(h))$。另一方面，对于 $\alpha_1 = \psi^h_\sigma(a)$，我们有 $K_{\alpha_1}(\{\kappa, a\} \cup SC_{\mathbb{K}}(h)) < a$。因此 $a \leq a_m < a$，这就产生了矛盾。

式 (29) 得证，由此我们得到 $\beta_1 \leq \alpha_{n_k} \in \mathcal{W} \cap \alpha_1$。
至此，式（27）和该引理的证明便完成了。 □

引理 3.39 对每个 $\alpha \in OT(\Pi_3)$， $\alpha \in \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W})$。

证明。对 $\ell\alpha$ 作元归纳即可看出这一点。由命题 3.18、3.19 和引理 3.32，我们可以假设 $\alpha = \psi^\nu_\kappa(a)$。根据归纳假设，取一个 $n < \omega$，使得$\{\kappa, \nu, a\} \subset \mathcal{C}^{\mathbb{K}}(\mathcal{W}) \cap \omega_{n+1}(\mathbb{K}+1)$。由引理 3.38 可得 $\alpha \in \mathcal{W}$。□

定理 3.1 由引理 3.39 以及以下事实推出： $\mathcal{W} \cap \Omega = W(\mathcal{C}^0(\emptyset)) \cap \Omega = W(OT(\Pi_3)) \cap \Omega$。

4 Π_4-反射

> 本文着重研究 Π_3 反射的序数分析。这并未造成实质性的普遍性损失，因为在推导中去除 Π_3 反射规则，已经展示了同样适用于任意 Π_n 反射规则的割消去模式。（ [Rathjen94]）

在本节中， $\mathbb{K}$ 表示一个 Π^1_2-不可描述基数或一个 Π_4-反射序数。Skolem 包 $\mathcal{H}_a(X)$ 和马洛类 $Mh^a_3(\xi)$ 的定义与定义 2.2 中相同：对于 $\xi > 0$，令

$$\pi \in Mh^a_3(\xi) :\Leftrightarrow [\{a, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\pi) \,\&\, \forall \nu \in \mathcal{H}_a(\pi) \cap \xi \, (\pi \in M_3(Mh^a_3(\nu)))]$$

其中， $\alpha \in M_3(A)$ 当且仅当 A 在 α 中是 Π^1_1-不可描述的，或者 α 在 A上是 Π_3-反射的。接着，与 (8) 中一样

$$\psi^\xi_\pi(a) = \min\left(\{\pi\} \cup \{\kappa \in Mh^a_3(\xi) : \{\xi, \pi, a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa) \,\&\, \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \pi \subset \kappa\}\right)$$

其中， $\xi = m_3(\psi^\xi_\pi(a))$。
与引理 2.3 和 2.4 中一样，我们得到以下关于 Π^1_2-不可描述基数$\mathbb{K}$的结论。

引理 4.1 设 $a \in \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$。则 $\mathbb{K} \in M_3(Mh^a_3(\varepsilon_{\mathbb{K}+1}))$。对于每个$\xi \in \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$， $\psi^\xi_{\mathbb{K}}(a) < \mathbb{K}$。

$\mathrm{KP}\Pi_4$ 的算子控制推导对以下推理规则封闭。为方便起见，我们给推导附加一个赋值 $\bar{m} : \pi \mapsto \bar{m}(\pi) = (\bar{m}_2(\pi)\ \bar{m}_3(\pi))$，其中对于 $i = 2$，$\bar{m}_i(\pi) \leq m_i(\pi)$，3。尽管我们的可导出关系应写作 $(\mathcal{H}_\gamma[\Theta], \bar{m}) \vdash^a_b \Gamma$，我们姑且写作 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma$。

(rfl$_{\Pi_4}(\mathbb{K})$) $b \geq \mathbb{K}$. 存在一个序数 $a_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap a$，以及一个 $\Sigma_4(\mathbb{K})$-句子A，满足以下条件：

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg A \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, A^{(\rho,\mathbb{K})} : \rho < \mathbb{K}\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_4}(\mathbb{K}))$$

(rfl$_{\Pi_3}(\alpha, \pi, \nu)$) 存在序数 $\alpha < \pi \leq b < \mathbb{K}$, $\nu < \bar{m}_3(\pi) \leq m_3(\pi)$，满足$SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \pi$ 和 $\nu \leq \gamma$, $a_0 < a$，以及一个由 $\Sigma_3(\pi)$-句子组成的有限集 Δ，满足以下条件：

1. $\{\alpha, \pi, \nu\} \cup \bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。
2. 对每个 $\delta \in \Delta$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta$。
3. 设
$$\rho \in Mh_3(\nu) :\Leftrightarrow \nu \leq m_3(\rho).$$
那么，对每个 $\alpha < \rho \in Mh_3(\nu) \cap \pi$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho)}$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\alpha<\rho\in Mh_3(\nu)\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\alpha, \pi, \nu))$$

$\mathrm{KP}\Pi_4$ 中的有限证明嵌入到带有推理 **(rfl$_{\Pi_4}(\mathbb{K})$)** 的受控推导中，然后按照引理 2.5，将 **(rfl$_{\Pi_4}(\mathbb{K})$)** 替换为推理 **(rfl$_{\Pi_3}(\alpha, \pi, \nu)$)**。

引理 4.2 假设 $\Gamma \subset \Sigma_3(\mathbb{K})$、$\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$，且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_{\mathbb{K}} \Gamma$ 满足 $a \leq \gamma$。那么，对于满足 $\psi_{\mathbb{K}}(\gamma + \mathbb{K}) < \kappa$的每个 $\kappa \in Mh_3(a) \cap \psi_{\mathbb{K}}(\gamma + \mathbb{K} \cdot \omega)$，
$\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^\beta_\beta \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$ 成立，其中$\hat{a} = \gamma + \omega^{\mathbb{K}+a}$ 且 $\beta = \psi_{\mathbb{K}}(\hat{a})$。

让我们仿照引理 2.5 的证明，尝试从所得推导中消去推理 **(rfl$_{\Pi_3}(\alpha, \pi, \nu)$)**。设 $Mh_2(\xi;\ a)$为一个满足以下条件的马洛类。

引理 4.3 设 $\Gamma \subset \Sigma_2(\pi)$ 满足 $\xi = m_3(\pi)$，且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_\pi \Gamma$。那么对于任意 $\kappa \in Mh_2(\xi;\ a) \cap \pi$，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a}_\pi \Gamma^{(\kappa,\pi)}$ 成立[1]。

[1]这里我们不需要坍缩推导和切割秩$< \pi$。

考虑关键情形。设 $\Delta \subset \Sigma_3(\pi)$、 $\pi \in Mh_3(\xi)$ 和 $\nu < \xi$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)} : \alpha < \rho \in Mh_3(\nu) \cap \pi\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^{a} \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\alpha, \pi, \nu))$$

令 $\sigma \in Mh_2\ \xi\ a_0\ \cap \kappa$ $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash_\pi^{\kappa+\omega a_0+1}(\ ;\ )$。由归纳假设并应用反演，我们得到，对每个 $\Gamma^{(\sigma,\pi)}\ \neg\delta^{(\sigma,\pi)}$ $\delta \in \Delta$。

另一方面，对于 $\alpha < \sigma \in Mh_3(\nu) \cap \pi$，我们有 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\sigma,\pi)}$。假设 $Mh_2(\xi;\ a) \subset Mh_2(\xi;\ a_0)$。归纳假设给出 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash_\pi^{\kappa+\omega a_0} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Delta^{(\sigma,\pi)}$。

令 $\alpha < \sigma \in Mh_2(\xi;\ a_0) \cap Mh_3(\nu) \cap \kappa$。随后，对割公式 $\delta^{(\sigma,\pi)}$ 进行一次 (cut)，即可得到 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash_\pi^{\kappa+\omega a_0+p} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Gamma^{(\sigma,\pi)}$，对应一个 $p < \omega$。

另一方面，对于每个（），我们有 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_0^{2d} \neg\theta^{(\kappa,\pi)}\ \Gamma^{(\kappa,\pi)}$ $\theta \in \Gamma \subset$，其中 max rk( ) : 。$\Sigma_2\ \pi$ $d \in \{\ ;\ \theta^{(\kappa,\pi)}\ \theta \in \Gamma\}$ $\alpha < \kappa \in \nu$。现在，$\kappa \in Mh_2(\xi;\ a) \cap \pi$ 需要将 $\Pi_2(\kappa)$-公式 $\neg\theta^{(\kappa,\pi)}$ 反映到某个 $\alpha < \sigma \in Mh_2(\xi;\ a_0) \cap Mh_3(\nu) \cap \kappa$。

$$a_0 < a \,\&\, \nu < \xi \Rightarrow Mh_2(\xi; a) \subset M_2(Mh_2(\xi; a_0) \cap Mh_3(\nu))$$

因此，我们得到了以下马洛类 $Mh_2^\gamma(\xi;\ a)$ 的定义；从某种意义上说，它是一个 Π_3-类，即存在一个 Π_3-公式 $\theta(\gamma, \xi, a)$，使得 $\alpha \in Mh_2^\gamma(\xi;\ a)$ 当且仅当 $L_\alpha \models \theta(\gamma, \xi, a)$，而 $Mh_3^\gamma(\nu)$ 是一个 Π_4-类。

$\pi \in Mh_2^\gamma(\xi;\ a)$ 当且仅当 $\{\gamma, \xi, a\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\pi)$ 且

$$\forall\{\nu, b\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\pi)\,[\nu < \xi \,\&\, b < a \Rightarrow \pi \in M_2\,(Mh_2^\gamma(\xi; b) \cap Mh_3^\gamma(\nu))]\,.$$

事实证明，在我们的证明论研究中，需要使用针对有限序列 $\bar{\xi}$和 $\bar{a}$ 的马洛类 $Mh_2^\gamma(\bar{\xi};\ \bar{a})$，参见引理 4.13。下一小节将直观地解释这些类。

4.1 马洛类

设 $M_i = RM_i$和 P、Q、.....表示 $L \cup \{L\}$ 中一个 Π_4-反射宇宙 L的传递类。对于类 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$和 $i = 2$，3 令

$$\mathcal{X} \prec_i \mathcal{Y} :\Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{Y}(P \in M_i(\mathcal{X}))$$

定义 4.4 令

$$M_2(\xi; a) := \bigcap\{M_2\,(M_2(\xi; b) \cap M_3(\nu)) : \nu < \xi, b < a\}.$$

一般而言，对于类 $\mathcal{Y}$，令

$$M_2^{\mathcal{Y}}(\xi; a) := \mathcal{Y} \cap \bigcap\{M_2\left(M_2^{\mathcal{Y}}(\xi; b) \cap M_3(\nu)\right) : \nu < \xi, b < a\}.$$

命题 4.5 对于一个 Π_3-类 $\mathcal{Y}$和 $\mu < \xi$, $M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\ a) \cap M_3(\mu) \prec_2 \mathcal{Y} \cap M_3(\xi)$ 以及 $M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\ a) \supset \mathcal{Y} \cap M_3(\xi)$。

证明。对 a 使用归纳法，我们证明 $P \in \mathcal{Y} \cap M_3(\xi) \Rightarrow P \in M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, a)$。

设 $P \in \mathcal{Y} \cap M_3(\xi)$、$\nu < \xi$ 和 $b < a$。根据归纳假设，我们得到 $P \in M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, b)$。由于 $M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, b)$ 是一个 Π_3-类，我们得到 $P \in M_2\left(M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, b) \cap M_3(\nu)\right)$，由 $P \in M_3(\xi)$ 得出。因此 $P \in M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, a)$。

由于 $M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, a)$ 是一个 Π_3-类，且 $P \in M_3(\xi) \subset M_3(M_3(\mu))$，我们得到$P \in M_2(M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, a) \cap M_3(\mu))$。□

设 $\nu < \mu < \xi$。由命题 4.5 可知 $M_2(\xi; a) \cap M_3(\mu) \prec_2 M_3(\xi)$，并且对于 $\mathcal{Y} = M_2(\xi;\, a)$，$M_2^{\mathcal{Y}}(\mu;\, b) \cap M_3(\nu) \prec_2 \mathcal{Y} \cap M_3(\mu)$。

我们将 $M_2^{\mathcal{Y}}(\mu;\, b)$ 记作 $M_2((\xi, \mu); (a, b))$，其中 $\xi > \mu$。设 $\nu < \mu < \xi$。我们得到 $M_2((\xi, \mu); (a, b)) \cap M_3(\nu) \prec_2 M_2(\xi;\, a) \cap M_3(\mu) \prec_2 M_3(\xi)$。

命题 4.6 设 $\xi_1, \zeta < \xi$，$c < b$和 $d < a$。则 $M_2((\xi, \mu); (a, c)) \cap M_3(\nu) \prec_2 M_2((\xi, \mu); (a, b))$，并且 $M_2((\xi, \xi_1); (d, e)) \cap M_3(\zeta) \prec_2 M_2((\xi, \mu); (a, b))$。

证明。设 $\mathcal{Y} = M_2(\xi;\, a)$。则 $M_2((\xi, \mu); (a, c)) \cap M_3(\nu) = M_2^{\mathcal{Y}}(\mu;\, c) \cap M_3(\nu) \prec_2 M_2^{\mathcal{Y}}(\mu;\, b) = M_2((\xi, \mu); (a, b))$，由 $c < b$和 $\nu < \mu$得出。

接下来我们证明 $M_2^{\mathcal{X}}(\xi_1;\, e) \cap M_3(\zeta) \prec_2 \mathcal{Y} \supset M_2^{\mathcal{Y}}(\mu;\, b)$，其中 $\mathcal{X} = M_2(\xi;\, d)$ 且 $M_2((\xi, \xi_1); (d, e)) = M_2^{\mathcal{X}}(\xi_1;\, e)$。我们有 $\mathcal{X} \cap M_3(\xi_1) \cap M_3(\zeta) = M_2(\xi;\, d) \cap M_3(\xi_1) \cap M_3(\zeta) \prec_2 M_2(\xi;\, a) = \mathcal{Y}$根据 $d < a$和 ξ_1、$\zeta < \xi$。另一方面，根据命题 4.5，我们有 $M_2^{\mathcal{X}}(\xi_1;\, e) \supset \mathcal{X} \cap M_3(\xi_1)$。因此 $M_2^{\mathcal{X}}(\xi_1;\, e) \cap M_3(\zeta) \prec_2 \mathcal{Y}$。□

同样的论证不仅适用于配对 $(\xi > \mu)$、(a, b)，也适用于三元组，依此类推。

¯令 $\xi = (\xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_n)$ 和 $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 为长度相同的序列。通过迭代过程 $\mathcal{Y} \mapsto \{M_2^{\mathcal{Y}}(\xi;\, a)\}_a$ 并结合 $M_3(\xi)$，现在我们

¯按序列长度归纳定义类 $M_2(\xi; \bar{a})$ n，如下所示:

$M_2(\langle\rangle; \langle\rangle)$ 表示 $\mathrm{L} \cup \{\mathrm{L}\}$ 中传递集的类。

¯对于 $\xi * (\xi) = (\xi_0 > \cdots > \xi_n > \xi)$ 和 $\bar{a} * (a) = (a_0, \ldots, a_n, a)$，定义$\Pi_3$-类 $\mathcal{Y} = M_2(\xi; \bar{a})$

$$M_2(\bar{\xi} * (\xi); \bar{a} * (a)) = M_2^{\mathcal{Y}}(\xi; a)$$

即

$$M_2(\bar{\xi} * (\xi); \bar{a} * (a)) = M_2(\bar{\xi}; \bar{a}) \cap \bigcap \{M_2\left(M_2(\bar{\xi} * (\xi); \bar{a} * (b)) \cap M_3(\nu)\right) : \nu < \xi, b < a\}$$

命题 4.6 扩展到有限序列。为陈述这一扩展，我们通过序数 $\alpha = \Lambda^{\xi_0} a_0 + \cdots + \Lambda^{\xi_n} a_n$ 重新定义类 $M_2(\bar{\xi}; \bar{a})$，如下所示，其中 Λ 是一个足够大的序数，使得 $\Lambda > a_0$。

设 $\alpha = \Lambda^{\xi_0} a_0 + \cdots + \Lambda^{\xi_n} a_n$，其中 $\xi_0 > \cdots > \xi_n$和 a_0，……，$a_n \neq 0$。

$$M_2(\alpha) := \bigcap \{M_2(M_2(\beta) \cap M_3(\nu)) : (\beta, \nu) < \alpha\}$$

其中，对于 $\alpha = \Lambda^{\xi_0} a_0 + \cdots + \Lambda^{\xi_n} a_n$ 的片段 $\alpha_i = \Lambda^{\xi_0} a_0 + \cdots + \Lambda^{\xi_i} a_i$

$$(\beta, \nu) < \alpha :\Leftrightarrow \exists i \leq n \left[\beta < \alpha_i \,\&\, \nu < \xi_i\right].$$

例如，在命题 4.6 中，我们有 $(\Lambda^{\xi}a+\Lambda^{\mu}c,\nu) < \Lambda^{\xi}a+\Lambda^{\mu}b$ 和 $(\Lambda^{\xi}d+\Lambda^{\xi_1}e,\zeta) <\Lambda^{\xi}a+\Lambda^{\mu}b$, 但 $(\Lambda^{\xi}a+\Lambda^{\mu}c,\mu) \not< \Lambda^{\xi}a+\Lambda^{\mu}b$，其中 $\nu<\mu<\xi$、ξ_1、$\zeta<\xi$、$c<b$ 和 $d<a$。

命题 4.7 $(\beta,\nu) <\alpha<\gamma \Rightarrow (\beta,\nu) <\gamma$。

$\alpha\dot{+}\beta$ 表示 $\alpha+\beta=\alpha\#\beta$。

引理 4.8（参见 [A09] 中的引理3.2。）
如果 $\xi>0$ 和 $\beta<\Lambda^{\xi+1}$，那么 $M_2(\alpha\dot{+}\beta) \prec_2 M_2(\alpha,\xi) := M_2(\alpha) \cap M_3(\xi)$。

证明。假设 $P\in M_2(\alpha,\xi) = M_2(\alpha) \cap M_3(\xi)$ 且 $\beta<\Lambda^{\xi+1}$。

我们对序数 β 使用归纳法证明 $P\in M_2(\alpha\dot{+}\beta)$。令 $(\gamma,\nu) <\alpha\dot{+}\beta$。我们需要证明 $P\in M_2(M_2(\gamma,\nu))$。

设 δ 是 $\alpha\dot{+}\beta$ 的一个片段，使得 $\gamma<\delta$ 且 $\nu<\mu$，其中 $\delta=\cdots+\Lambda^{\mu}b$。若 δ 是 α 的一个片段，则由 $P\in M_2(\alpha)$ 可得 $P\in M_2(M_2(\gamma,\nu))$。

设 $\delta=\alpha\dot{+}\beta_0$，其中 β_0 是 β 的一个片段。于是 $\nu<\mu\le\xi$。我们断言 $P\in M_2(\gamma)$。若 $\gamma<\alpha$，则由命题 4.7 可得 $P\in M_2(\alpha) \subset M_2(\gamma)$。令 $\gamma=\alpha\dot{+}\gamma_0<\alpha\dot{+}\beta_0$。由归纳假设可得 $P\in M_2(\gamma)$。因此该断言得证。另一方面，我们有 $P\in M_3(\xi)$ 且 $\nu<\xi$。由于 $M_2(\gamma)$ 是一个 Π_3-类，我们得到 $P\in M_3(M_2(\gamma,\nu)) \subset M_2(M_2(\gamma,\nu))$。$P\in M_2(\alpha\dot{+}\beta)$ 得证。

根据 $P\in M_2(\alpha\dot{+}\beta)$ 和 $P\in M_3(\xi) \subset M_3$ 在 $\xi>0$ 下，我们得到 $P\in M_3(M_2(\alpha\dot{+}\beta)) \subset M_2(M_2(\alpha\dot{+}\beta))$。□

4.2 Skolem壳与坍缩函数

我们可以假设 $\xi<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 和 $a<\Lambda=\mathbb{K}$。对于 $\alpha<\Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}$，我们如下定义 $Mh_2^{\gamma}(\alpha)$。(β,ν) 表示满足 $\beta+\Lambda^{\nu}=\beta\#\Lambda^{\nu}$ 的序数 $\beta<\Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}$ 和 $\nu<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 的配对。设 $\alpha=\Lambda^{\beta_0}a_0+\cdots+\Lambda^{\beta_n}a_n$，其中 $\varepsilon_{\mathbb{K}+1}>\beta_0>\cdots>\beta_n$ 和 $0<a_0$，……，$a_n<\Lambda$。那么 $\pi\in Mh_2^{\gamma}(\alpha)$ 当且仅当 $\{\gamma,\alpha\}\subset\mathcal{H}_{\gamma}(\pi)$ 并且

$$\forall\{\nu,\beta\}\subset\mathcal{H}_{\gamma}(\pi)\,[(\beta,\nu)<\alpha\Rightarrow\pi\in M_2\,(Mh_2^{\gamma}(\beta)\cap Mh_3^{\gamma}(\nu))]$$

其中 $\alpha_i=\Lambda^{\beta_0}a_0+\cdots+\Lambda^{\beta_i}a_i$ $\alpha=\Lambda^{\beta_0}a_0+\cdots+\Lambda^{\beta_n}a_n$的片段

$$(\beta,\nu)<\alpha:\Leftrightarrow\exists i\le n\,[\beta<\alpha_i\,\&\,\nu<\beta_i]\,.$$

例如，如果 $\nu<\xi$ 且 $a_0<a$，那么 $(\Lambda^{\xi}a_0,\nu) <\Lambda^{\xi}a_0$。$\alpha$的指数 β_i 表示“Π_3-Mahlo 度”。

命题 4.9 $(\beta,\nu) <\alpha<\gamma\Rightarrow(\beta,\nu) <\gamma$。

定义 4.10 通过对序数 $a<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 的递归，同时定义类 $\mathcal{H}_a(X)$ $(X\subset\Gamma_{\mathbb{K}+1})$、$Mh_2^a(\alpha)$ $(\xi<\varepsilon_{\mathbb{K}+1})$以及序数 $\psi_{\sigma}^{(\alpha,\xi)}(a)$，如下所示。

1. $\mathcal{H}_a(X)$ 表示在函数 $+$、φ 及以下函数作用下 $\{0,\Omega\ \mathbb{K}\}\cup X$ 的 Skolem 包。令 $\{\sigma,b,\alpha,\xi\}\subset\mathcal{H}_a(X)$，$\alpha\in\{0\}\cup[\Lambda,\Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}})$，$\xi\in[0,\varepsilon_{\mathbb{K}+1})$ 和 $b<a$。那么 $\psi_{\sigma}^{(\alpha,\xi)}(b)\in\mathcal{H}_a(X)$。

2. $\pi \in Mh_3^a(\xi) :\Leftrightarrow \{a,\xi\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)$ & $\forall \nu \in \mathcal{H}_a(\pi) \cap \xi(\pi \in M_3(Mh_3^a(\nu)))$, 其中 $\alpha \in Mh_3^a(0)$ 当且仅当 α 是极限序数。

3. 对于 $\alpha < \Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}$ 和 $a < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $\pi \in Mh_2^a(\alpha)$ 当且仅当 $\{a,\alpha\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)$ 并且

$$\forall \{\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)\,[(\beta,\nu) < \alpha \to \pi \in M_2\,(Mh_2^a(\beta,\nu))]$$

其中

$$Mh_2^a(\beta,\nu) = Mh_2^a(\beta) \cap Mh_3^a(\nu)$$

并且 $\alpha \in Mh_2^a(0)$ 当且仅当 α 是一个极限序数。注意, $Mh_2^a(\alpha)$ 是一个 Π_3-类。

4. 设 $m_2(\mathbb{K}) = 0$, $m_3(\mathbb{K}) = \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $m_2(\Omega) = 1$ 且 $m_3(\Omega) = 0$。

(a) For $\{\xi,a\} \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ with $0 < \xi \le a$, let
$\psi_{\mathbb{K}}^{(0,\xi)}(a) = \min(\{\mathbb{K}\} \cup \{\kappa \in Mh_3^a(\xi) : \{\xi,a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\,\&\,\mathcal{H}_a(\kappa) \cap \mathbb{K} \subset \kappa\})$.
$m_2(\psi_{\mathbb{K}}^{(0,\xi)}(a)) = 0$ and $m_3(\psi_{\mathbb{K}}^{(0,\xi)}(a)) = \xi$.

(b) 设 $0 \le \alpha < \Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}$ 和 $0 < \xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 为序数, $0 < c \le a < \Lambda = \mathbb{K}$满足 $c \in \mathcal{H}_a(\sigma)$ 且 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha,\xi)$。那么对于 $\beta = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi c \psi_\sigma^{(\beta,0)}(a) = \min(\{\sigma\} \cup \{\kappa \in Mh_2^a(\beta) : \{\sigma,\alpha,\xi,c,a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)$ & $\mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\})$. $m_2(\psi_\sigma^{(\beta,0)}(a)) = \beta$ 且 $m_3(\psi_\sigma^{(\beta,0)}(a)) = 0$。

(c) 设 $0 < \beta$、 $\alpha < \Lambda^{\varepsilon_{\mathbb{K}+1}}$ 和 $0 < \nu < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 满足 $\{\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_a(\sigma)$, $SC_{\mathbb{K}}(\beta,\nu) \subset (a+1) < \mathbb{K}$ 且 $(\beta,\nu) < \alpha$。那么对于满足 $m_3(\sigma)$ 的 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha)$, $= 0 m_2(\psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(a)) = \beta$ 且 $m_3(\psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(a)) = \nu$。

$$\psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(a) = \min(\{\sigma\} \cup \{\kappa \in Mh_2^a(\beta,\nu) : \{\sigma,\beta,\nu,a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\,\&\,\mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\})\,.$$

(d)

$$\psi_\sigma(a) = \min\{\kappa \le \sigma : \{\sigma,a\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\,\&\,\mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\}.$$

我们将 $\psi_\sigma(a)$ 记作 $\psi_\sigma^{(0,0)}(a)$。

设 $\mathbb{K}$ 是一个 Π_2^1-不可描述基数。和引理 2.3 和 2.4 中一样, 我们看到, 对于每个 $\{a,\xi\} \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, 都有$\psi_{\mathbb{K}}^{(0,\xi)}(a) < \mathbb{K}$。

容易看出, 如果 $(\beta,\nu) < \alpha$、 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha)$ 且 $\{\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_a(\sigma)$, 那么 $\psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(a) < \sigma$。

引理 4.11（参见 [A09]中的引理3.2。）假设 $\mathbb{K} \ge \sigma \in Mh_2^a(\alpha,\xi)$, 且满足 $0 < \xi < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$, $\beta < \Lambda^{\xi+1}$ 以及 $\beta \in \mathcal{H}_a(\sigma)$。那么 $\sigma \in M_3(Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta))$ 成立; 更可得 $\sigma \in M_2(Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta))$。

证明。设 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha,\xi) = Mh_2^a(\alpha) \cap Mh_3^a(\xi)$，并且 $\beta \in \mathcal{H}_a(\sigma)$，其中 $\beta < \Lambda^{\xi+1}$。我们对序数 β 使用归纳法，证明 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta)$。令 $\{\gamma,\nu\} \subset \mathcal{H}_a(\sigma)$，且 $(\gamma,\nu) < \alpha \dot{+} \beta$。我们需要证明 $\sigma \in M_2(Mh_2^a(\gamma,\nu))$。

设 δ 是 $\alpha \dot{+} \beta$ 的一个片段，使得 $\gamma < \delta$ 且 $\nu < \mu$，其中 $\delta = \cdots + \Lambda^\mu b$。若 δ 是 α 的一个片段，则由 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha)$ 得 $\sigma \in M_2(Mh_2^a(\gamma,\nu))$。

设 $\beta_0 \delta$ 其中 α β_0 是 β 的一个片段。于是 $\nu < \mu \leq \xi$。我们断言 $\sigma \in Mh_2^a(\gamma)$。若 $\gamma < \alpha$，则由命题 4.9 和 $\gamma \in \mathcal{H}_a(\sigma)$ 得到 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha) \subset Mh_2^a(\gamma)$。设 $\gamma = \alpha \dot{+} \gamma_0 < \alpha \dot{+} \beta_0$ 满足 $\gamma_0 \in \mathcal{H}_a(\sigma)$。归纳假设推出 $\sigma \in Mh_2^a(\gamma)$。因此断言得证。另一方面，我们有 $\sigma \in Mh_3^a(\xi)$ 和 $\nu \in \mathcal{H}_a(\sigma) \cap \xi$。由于 $Mh_2^a(\gamma)$ 是一个 Π_3-类，我们得到 $\sigma \in M_3(Mh_2^a(\gamma,\nu)) \subset M_2(Mh_2^a(\gamma,\nu))$，其中 $Mh_2^a(\gamma,\nu) = Mh_2^a(\gamma) \cap Mh_3^a(\nu)$。$\sigma \in Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta)$ 得证。

由 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta)$ 和 $\sigma \in Mh_3^a(\xi) \subset M_3$ 连同 $\xi > 0$，我们得到 $\sigma \in M_3(Mh_2^a(\alpha \dot{+} \beta))$。□

推论 4.12 若 $\sigma \in Mh_2^a(\alpha,\xi)$ 且 $c \in \mathcal{H}_a(\sigma) \cap \Lambda$ 连同 $\xi > 0$，则对 $\beta = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi c$ 有 $\psi_\sigma^{(\beta,0)}(a) < \sigma$。

证明。由引理 4.11，我们得到 $\sigma \in M_2(Mh_2^a(\beta))$。由于 $\{\kappa < \sigma : \{\beta, a, \sigma\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\ \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\}$ 是 σ 的闭无界子集，我们得到 $\psi_\sigma^{(\beta,0)}(a) < \sigma$。□

$OT(\Pi_4)$ 表示一个带有坍缩函数 $\psi_\sigma^{(\alpha,\xi)}(a)$ 的序数可计算记号系统。尽管在我们的 $\mathrm{KP}\Pi_4$ 良基性证明中，序数项 $\psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(a)$ 必须遵守某些限制，例如 $OT(\Pi_3)$ 的 (9)，但验证这些条件很繁琐，因此我们略过。

$\mathrm{KP}\Pi_4$ 的算子控制推导对推理规则 $(\mathrm{rfl}_{\Pi_4}(\mathbb{K}))$、$(\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\alpha,\pi,\nu))$ 以及以下规则封闭。

$(\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\alpha,\pi,\beta,\nu))$ 存在序数 $\alpha < \pi \leq b < \mathbb{K}$、$(\beta,\nu) < \bar{m}_2(\pi) \leq m_2(\pi)$、$a_0 < a$，以及一个有限集 Δ，其中包含 $\Sigma_2(\pi)$-句子，并满足以下条件：

1. $\{\alpha,\pi,\beta,\nu\} \cup \bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。2. 对每个 $\delta \in \Delta$，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta$。3. 对每个 $\alpha < \rho \in Mh_2(\beta,\nu) \cap \pi$，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\alpha<\rho\in Mh_2(\beta,\nu)\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a} \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\alpha,\pi,\beta,\nu))$$

这一推理表明 $\pi \in M_2(Mh_2^\gamma(\beta) \cap Mh_3^\gamma(\nu))$。

引理 4.13 令 $\Gamma \subset \Sigma_2(\pi)$。假设对于一个 $\pi < \mathbb{K}$，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma$，且对于 $\alpha = \bar{m}_2(\pi)$，$\xi = \bar{m}_3(\pi)$，$\{\xi,\alpha\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。令 η 为 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma$ $\eta < \kappa \in Mh_2\ \alpha \dot{+} \Lambda^\xi\ 1+a\ \cap \pi\ \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_\pi^{\kappa+\omega a}$ 中 $(\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\pi,\nu))$ 的 $\Gamma^{(\kappa,\pi)}$ $\alpha \dot{+} \Lambda^\xi\ 1+a\ \leq \bar{m}_2\ \kappa\ \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma\ \kappa$ 基。那么对于任意 $(\ )(\ )$，都有成立，其中 $(\ )(\ )$。此外，当 $(\ )$ 时，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_\kappa^{\kappa+\omega a} \Gamma^{(\kappa,\pi)}$ 成立。

证明。对 a 使用归纳法。若 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$，令 $\pi' = \kappa$。否则令 $\pi' = \pi$。注意，存在一个 κ，使得若 $\Theta \cup \{\pi\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\pi)$，则 $\kappa \in Mh_2(\alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1+a)) \cap \pi$。例如 $\kappa = \psi_\pi^{(\alpha+\Lambda^\xi(1+a),\ 0)}(\gamma + \max\Theta)$。

令 η 作为 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma$中 $(\mathrm{rfl}\Pi_3(\eta,\pi,\nu))$ 的基。

情形 1. $(\mathrm{rfl}\Pi_3(\eta,\pi,\nu))$：于是 $\eta < \pi$, $\{\eta,\pi,\nu\} \cup \bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, $SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \pi$，且 $\nu < \bar{m}_3(\pi) \leq m_3(\pi)$。令 $\Delta \subset \Sigma_3(\pi)$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\eta<\rho\in Mh_3(\nu)\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\pi,\nu))$$

令 $\alpha_0 = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1+a_0)$。于是 $(\alpha_0,\nu) < \alpha_1 = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1+a)$。我们得到 $\{\kappa,\alpha_1,\nu,\alpha_0\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}]$。在下面的推导中，$\alpha_1 \leq \bar{m}_2(\kappa)$ 与$\bar{m}(\kappa) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。

$$\frac{\dfrac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash_{\pi'}^{\sigma+\omega a_0+1} \Gamma^{(\sigma,\pi)}, \neg\delta^{(\sigma,\pi)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa,\sigma\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a_0} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Delta^{(\sigma,\pi)}}{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_0^{2d} \neg\theta^{(\kappa,\pi)}, \Gamma^{(\kappa,\pi)}\}_{\theta\in\Gamma} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa,\sigma\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a_0+p} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Gamma^{(\sigma,\pi)}\}_{\eta<\sigma\in Mh_2(\alpha_0,\nu)\cap\pi}}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a} \Gamma^{(\kappa,\pi)}}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\kappa,\alpha_0,\nu))$$

情形 2. $(\mathrm{rfl}\Pi_2(\mu,\pi,\beta,\nu))$: $(\beta,\nu) < \alpha = \bar{m}_2(\pi) \leq m_2(\pi)$, $\mu < \pi$, $\{\mu,\pi,\alpha,\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 以及 $\Delta \subset \Sigma_2(\pi)$.

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_\pi^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\mu<\rho\in Mh_2(\beta,\nu)\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\pi,\beta,\nu))$$

那么 $(\beta,\nu) < \alpha_1 = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1+a) \leq \bar{m}_2(\kappa)$，其中 α 是 $\alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1+a)$ 的片段。我们有 $\Delta^{(\rho,\pi)} = \left(\Delta^{(\kappa,\pi)}\right)^{(\rho,\kappa)}$ 并且 $\{\kappa,\alpha_1,\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}]$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a_0+1} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \neg\delta^{(\kappa,\pi)}\}_{\delta\in\Delta} \ \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa,\rho\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a_0} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\mu<\rho\in Mh_2(\beta,\nu)\cap\kappa}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a} \Gamma^{(\kappa,\pi)}}\ (\mathrm{rfl}\Pi_2(\mu,\kappa,\beta,\nu))$$

情况 3. 最后一步推理是对切割公式 C 进行 (cut)：那么 $\mathrm{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi$且 $C \in \Delta_0(\pi)$。如果 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$，那么 $\mathrm{rk}(C) < \kappa$。

情况 4. 最后一步推理要么是 $(\mathrm{rfl}\Pi_3(\sigma,\nu))$，要么是带有$\sigma \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \pi$的 $(\mathrm{rfl}\Pi_2(\sigma,\delta,\nu))$：归纳假设给出该引理。如果 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$，那么 $\sigma < \kappa$。□

从上述证明可见，若存在一个基 η，既适用于 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\pi^a \Gamma$ 中的推理 $(\mathrm{rfl}\Pi_3(\mu_3,\sigma,\nu))$，又适用于 $(\mathrm{rfl}\Pi_2(\mu_2,\sigma,\delta,\nu))$（即$\eta = \mu_3 = \mu_2$），那么同一个 η 也是 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_{\pi'}^{\kappa+\omega a} \Gamma^{(\kappa,\pi)}$ 中推理 $(\mathrm{rfl}\Pi_3(\mu_3,\sigma,\nu))$ 和 $(\mathrm{rfl}\Pi_2(\mu_2,\sigma,\delta,\nu))$ 的基。

引理 4.14 设 $\Gamma \subset \Sigma_1(\lambda)$ 和 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma$，其中 $a < \Lambda = \mathbb{K}$、$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \ni \lambda \leq b < \mathbb{K}$ 和 λ 正则，并假设 $\forall\kappa \in [\lambda,b)(\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\kappa(\gamma)))$。

设$\hat{a} = \gamma + \theta_b(a)$ 和 $\delta = \psi_\lambda^{(\beta,\nu)}(\hat{a})$，当 $\lambda \in Mh_2^\gamma(\alpha)$、$m_3(\lambda) = 0$ 且 $(\beta,\nu) < \alpha$ 满足 $\{\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$时成立。那么 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta] \vdash_\delta^\delta \Gamma$ 成立。

证明。按照 b 进行主归纳，并按照 a 进行辅助归纳，如引理 2.6 所示。设 η 是 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^a \Gamma$ 中反射推理的一个基。

情形 1. 考虑最后一步推理为 ($\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\sigma,\nu)$) 且带有 $b \geq \sigma$ 的情形。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}\}_{\eta<\rho\in Mh_3(\nu)\cap\sigma}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a} \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\sigma,\nu))$$

其中 $\Delta \subset \Sigma_3(\sigma)$、 $SC_{\mathbb{K}}(\nu) \subset \sigma$、 $\nu < \xi = \bar{m}_3(\sigma) \leq m_3(\sigma)$、 $\alpha = \bar{m}_2(\sigma) \leq m_2(\sigma)$、$\eta < \sigma$ 和 $\{\eta,\sigma,\xi,\alpha,\nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。我们可以假设 $\sigma \geq \lambda_0$。

情形 1.1. 存在一个正则的 $\pi \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，使得 $\sigma < \pi \leq b$：于是 $\Delta \subset \Delta_0(\pi)$，并且对于 $\widehat{a_0} = \gamma + \theta_b(a_0)$，有 $\sigma < b_0 = \psi_\pi(\widehat{a_0})$。对于每个 $\delta \in \Delta$，SIH 得出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta] \vdash_{b_0}^{b_0} \Gamma, \neg\delta$；对于每个 $\eta < \rho \in Mh_3(\nu) \cap \sigma$，SIH 得出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_{b_0}^{b_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}$。由 ($\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\sigma,\nu)$) 得出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta] \vdash_{b_0}^{b_0+1} \Gamma$，其中 $b_0 < b$。令 $\delta_0 = \psi_\lambda(\widehat{a_1})$，其中 $\widehat{a_1} = \widehat{a_0} + \theta_{b_0}(b_0+1) = \gamma + \theta_b(a_0) + \theta_{b_0}(b_0+1) < \gamma + \theta_b(a) = \hat{a}$。由 MIH 可得 $\mathcal{H}_{\widehat{a_1}+1}[\Theta] \vdash_{\delta_0}^{\delta_0} \Gamma$，引理得证。

情况 1.2。否则：通过切消去，对于每个 $\delta \in \Delta$，我们得到 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{\theta_b(a_0)_\sigma} \Gamma, \neg\delta$；并且对于每个 $\eta < \rho \in Mh_3(\nu) \cap \sigma$，得到 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{\theta_b(a_0)_\sigma} \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}$。一个 ($\mathrm{rfl}_{\Pi_3}(\eta,\sigma,\nu)$) 给出对于 $a_1 = \theta_b(a_0) + 1$ 的 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_\sigma^{a_1} \Gamma$。令 $\beta = \alpha + \Lambda^\xi(1+a_1)$，使得对于 $\alpha = \bar{m}_2(\sigma) \leq m_2(\sigma)$ 以及 $\xi = \bar{m}_3(\pi) \leq m_3(\sigma)$，并令 $\kappa = \psi_\sigma^{(\beta,0)}(\gamma)$。根据假设，我们得到 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$。因此有 $\{\gamma,\sigma,\beta\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$，并且 $\eta < \kappa \in Mh_2(\beta) \cap \sigma$，参见推论 4.12。此外，我们还有 $\kappa \in \mathcal{H}_{\gamma+1}[\Theta]$。

引理 4.13 得出 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash_\kappa^{\kappa+\omega a_1} \Gamma^{(\kappa,\sigma)}$ 和 $\mathcal{H}_{\gamma+1}[\Theta] \vdash_\kappa^{\kappa+\omega a_1} \Gamma^{(\kappa,\sigma)}$，其中 $\beta \leq \bar{m}_2(\kappa)$ 满足 $\bar{m}(\kappa) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，若 $\lambda < \sigma$ 则 $\Gamma^{(\kappa,\sigma)} = \Gamma$，否则为 $\Gamma^{(\kappa,\sigma)} = \Gamma^{(\kappa,\lambda)}$。在每种情况下，我们都得到 $\mathcal{H}_{\gamma+1}[\Theta] \vdash_\kappa^{\kappa+\omega a_1} \Gamma_0$。随后由 MIH 得出 $\mathcal{H}_{\widehat{a_1}+1}[\Theta] \vdash_{\delta_1}^{\delta_1} \Gamma$，其中 $\delta_1 = \psi_\lambda(\widehat{a_1})$ 满足 $\widehat{a_1} = \gamma + \theta_\kappa(\kappa + \omega a_1) < \gamma + \theta_b(a) = \hat{a}$，依据 $\kappa < \sigma \leq b$ 和 $a_1 < \theta_b(a)$。

情形 2。考虑最后一步推理为 ($\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\sigma,\beta,\nu)$) 且满足$b \geq \sigma$的情形。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\beta,\nu)\cap\sigma}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a} \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\sigma,\beta,\nu))$$

其中 $\Delta \subset \Sigma_2(\sigma)$、$(\beta,\nu) < \alpha = \bar{m}_2(\sigma) \leq m_2(\sigma)$、 $\xi = \bar{m}_3(\sigma) \leq m_3(\sigma)$、 $\eta < \sigma$以及 $\{\eta,\sigma,\alpha,\xi,\beta,\nu\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。

我们可以假设 $\sigma \geq \lambda_0$。对于每个 $\delta \in \Delta$，令 $\delta \simeq \bigvee(\delta_i)_{i\in J_0}$。我们可以假设 $J = Tm(\sigma)_0$。反演得出 $\mathcal{H}_{\gamma+|i|}[\Theta \cup \mathrm{k}(i)] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta_i$，其中 $\Gamma \cup \{\neg\delta_i\} \subset \Sigma_1(\sigma)_0$。令 $\widehat{a_0} = \gamma + \theta_b(a_0)$ 且 $\rho = \psi_\sigma^{(\beta,\nu)}(\widehat{a_0})$，其中根据假设，$\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$，$\{\eta,\sigma,\beta,\nu,\widehat{a_0}\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 且 $(\beta,\nu) < m_2(\sigma)_0$。因此$\{\eta,\sigma,\beta,\nu,\widehat{a_0}\} \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$ 且 $\mathcal{H}_\gamma(\rho) \cap \sigma \subset \rho_0$。所以 $< \eta < \rho \in Mh_2(\beta,\nu) \cap \sigma \cap \mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]$。

通过反演，我们可以像引理 2.6 中那样得到该引理：从右上方的序列中选取第 ρ 个分支，然后引入若干个 (cut)，而不是 ($\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\sigma,\beta,\nu)$)。当 $\lambda < \sigma$ 时使用 MIH。

情况 3。与引理 2.6 中一样，我们考察最后一步推理是切割公式 C with $d = \mathrm{rk}(C) < b$ 的 (cut) 的情况。□

定理 4.15 假设 $\mathrm{KP}\Pi_4 \vdash \theta^{L_\Omega}$ 对于 $\theta \in \Sigma_0$。那么存在一个 $n < \omega$，使得 $L_\alpha \models \theta$ 对于 $\alpha = \psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{K}+1))$ 属于 $OT(\Pi_4)_0$。

证明。根据嵌入，存在一个 $m>0$，使得 $\mathcal{H}_0[\emptyset]\vdash^{\mathbb{K}+m}_{\mathbb{K}+m}\theta^{L_\Omega}$。根据切消去，$\mathcal{H}_0[\emptyset]\vdash^{a}_{\mathbb{K}}\theta^{L_\Omega}$ 对于 $a=\omega_m(\mathbb{K}+m)$。由引理 4.2 得到$\mathcal{H}_{\omega^a+1}[\{\kappa\}]\vdash^{\beta}_{\beta}\theta^{L_\Omega}$，其中 $\beta=\psi_{\mathbb{K}}(\omega^a)$、$\mathbb{K}+a=a$、$(\theta^{L_\Omega})^{(\kappa,\mathbb{K})}\equiv\theta^{L_\Omega}$ 以及$\kappa\in Mh_2(a)\cap\psi_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$。例如 $\kappa=\psi^{(0,a)}_{\mathbb{K}}(0)\in\mathcal{H}_1[\emptyset]$。因此 $\mathcal{H}_{\omega^a+1}[\emptyset]\vdash^{\beta}_{\beta}\theta^{L_\Omega}$。引理

4 14 $\mathcal{H}_{\gamma+1}[\emptyset]\vdash^{\beta_1}_{\beta_1}\theta^{L_\Omega}$ $\gamma=\omega^a+\theta_\beta\ \beta$ $\beta_1=\psi_\Omega\ \gamma\ <$。然后推出对 $\psi_\Omega\ \omega^a+\mathbb{K}\ <\psi_\Omega\ \omega_{m+2}$ $\mathbb{K}+1\ =\alpha$ $L_\alpha\models\theta$ □

于 ( ) 和 ( ) ( ) (( )) 。因此 。

5 一阶反射

在第 4 节建立了针对 Π_4-反射的序数分析后，将其扩展到一阶反射并不困难。正如预期，在解析更高阶的马洛类时，会出现指数型序数结构。

设 $\mathbb{K}=\Lambda$ 为一个 Π^1_{N-2}-不可描述基数，或一个针对整数 $N\geq 3$ 的 Π_N-反射序数。对于 $k>0,\alpha\in M_{k+2}$，定义 A 当且仅当 A 在 α 中是 Π^1_k-不可描述的，或者 α 在 A 上是 Π_{k+2}-反射的。设 $(\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})$ 是一个序数序列$\nu_i<\varepsilon_{\Lambda+1}$，且 $\varepsilon_{\Lambda+1}>\alpha=\Lambda^{\beta_0}a_0+\cdots+\Lambda^{\beta_n}a_n$ 满足 $\beta_0>\cdots>\beta_n$ 和 $0<a_0,\ldots,a_n<\Lambda$。那么，$(\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})<\alpha$ 当且仅当存在 α 的一个片段$\alpha_i=\Lambda^{\beta_0}a_0+\cdots+\Lambda^{\beta_i}a_i$，使得 $\nu_k<\alpha_i$ 且 $(\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})<\beta_i$。

命题 5.1 $\vec{\nu}<\alpha<\gamma\Rightarrow\vec{\nu}<\gamma$。

5.1 ΠN-反射的马洛类

与小节 4.1 $P\in M_i$ 中一样，$(\mathcal{X})$ 表示 P 在 $\mathcal{X}$ 上是 Π_i-反射的。令

$$M_k(\alpha):=\bigcap\{M_k(M_k(\bar{\nu})):\bar{\nu}=(\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})<\alpha\}$$

其中

$$M_k((\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})):=\bigcap_{i\geq k}M_i(\nu_i).$$

由命题 5.1 可得 $\alpha_0>\alpha\Rightarrow M_k(\alpha_0)\subset M_k(\alpha)$。因此，对于 $(\max\{\bar{\nu},\bar{\mu}\})_i=\max\{\nu_i,\mu_i\}$，参见引理 5.8 中的情形 1，

$$M_2(\bar{\nu})\cap M_2(\bar{\mu})=M_2(\max\{\bar{\nu},\bar{\mu}\}).$$

设 $\bar{\nu}=(\nu_2,\ldots,\nu_{N-1})$ 和 $\bar{\mu}=(\mu_2,\ldots,\mu_{N-1})$。再令

$$\bar{\nu}\prec_k\bar{\mu}:\Leftrightarrow M_2(\bar{\nu})\prec_k M_2(\bar{\mu}).$$

¯命题 5.2 设 $\bar{\mu}=(\mu_2,\ldots,\mu_{k-1})$、$\bar{\nu}=(\nu_{k+1},\ldots,\nu_{N-1})$ 和 $\xi=(\xi_{k+1},\ldots,\xi_{N-1})$。

¯1. 若 $(\nu_k)*\bar{\nu}<\xi_k$，则 $\bar{\mu}*(\nu_k)*\bar{\nu}\prec_k\bar{\mu}*(\xi_k)*\xi$。

2.（参见引理 4.8）如果 $\xi_{k+1},a>0$，那么 $\bar{\mu}*(\xi_k\dot{+}\Lambda^{\xi_{k+1}}a)*\bar{0}\prec_k\bar{\mu}*(\xi_k)*\bar{\xi}$。

证明。5.2.1. 设 $P \in M_2(\bar{\mu} * (\xi_k) * \bar{\xi}) \subset M_2(\bar{\mu} * \bar{0}) \cap M_k(\xi_k)$。由（$\nu_k$）$* \bar{\nu} < \xi_k$，我们得到 $P \in M_k(M_k((\nu_k) * \bar{\nu}))$。由于 $P \in M_2(\bar{\mu} * \bar{0})$ 在 P 上是 Π_k，我们得出结论：$P \in M_k(M_2(\bar{\mu} * \bar{0}) \cap M_k((\nu_k) * \bar{\nu})) = M_k(M_k(\bar{\mu} * (\nu_k) * \bar{\nu}))$。
5.2.2. 只需证明 $M_k(\xi_k \dot{+} \Lambda^{\xi_{k+1}} a) \prec_k M_k(\xi_k) \cap M_{k+1}(\xi_{k+1})$，这可由 $M_k(\xi_k) \cap M_{k+1}(\xi_{k+1}) \subset M_k(\xi_k \dot{+} \Lambda^{\xi_{k+1}} a)$ 推出。后者可仿照引理 4.8，通过对 a 进行归纳，并利用以下事实来证明：对于 $\nu < \xi_{k+1}$，$P \in M_k(\gamma) \cap M_{k+1}(\xi_{k+1}) \Rightarrow P \in M_k(M_k(\gamma) \cap M_{k+1}(\nu))$。□

5.2 一阶反射的序数

定义 5.3 通过对序数进行递归，同时定义 $a < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 这些类 $\mathcal{H}_a(X)$ ($X \subset \Gamma_{\mathbb{K}+1}$)、$Mh_k^a(\vec{\nu})$ ($lh(\vec{\nu}) = N - k$)，以及序数 $\psi_\sigma^{\vec{\nu}}(a)$，如下所示。

1. $\mathcal{H}_a(X)$ 表示在函数 $+, \varphi$ 及下列函数下 $\{0, \Omega\ \mathbb{K}\} \cup X$ 的 Skolem 包。令 $\vec{\nu} = (\nu_2, \ldots, \nu_{N-1})$，$\{\sigma, b\} \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_a(X)$ 和 $b < a$。那么 $\psi_\sigma^{\vec{\nu}}(b) \in \mathcal{H}_a(X)$。

2. 对于 $2 \leq k < N$, $\pi \in Mh_k^a(\alpha)$，当且仅当 $\{a, \alpha\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)$ 并且

$$\forall \vec{\nu} = (\nu_k, \ldots, \nu_{N-1}) \subset \mathcal{H}_a(\pi)\, [\vec{\nu} < \alpha \to \pi \in M_k\, (Mh_k^a(\vec{\nu}))]$$

其中

$$Mh_k^a(\vec{\nu}) = \bigcap_{i \geq k} Mh_i^a(\nu_i).$$

注意，$Mh_k^a(\alpha)$ 是一个 Π_{k+1}-类。

3. $\psi_\sigma(a) = \min(\{\sigma\} \cup \{\kappa < \sigma :\ \{a, \sigma\} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\ \&\ \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\})$。
$m_i(\psi_\sigma(a)) = 0$ 对于 $i < N$。

4. 令 $\sigma \in Mh_2^a(\xi)$ 对于带有 $\xi_{k+1} > 0$ 的 $\vec{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_{N-1})$ 成立，并令 $0 < c < \Lambda = \mathbb{K}$ 带有 $c \in \mathcal{H}_a(\sigma)$。令 $\vec{\nu} = (\xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k \dot{+} \Lambda^{\xi_{k+1}} c, 0, \ldots, 0)$。那么

$$\psi_\sigma^{\vec{\nu}}(a) = \min\left(\{\sigma\} \cup \{\kappa \in Mh_2^a(\vec{\nu}) \cap \sigma : \{a\} \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\ \&\ \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\}\right).$$

$m_i(\psi_\sigma^{\vec{\nu}}(a)) = \nu_i$ 对于 $i < N$，参见命题 5.2.2。

5. 设 $\sigma \in Mh_2^a(\vec{\mu} * \xi)$，其中 $\vec{\mu} = (\mu_2, \ldots, \mu_{k-1})$ 和 $\xi = (\xi_k, \ldots, \xi_{N-1})$，且 $\vec{\nu} = (\nu_k, \ldots, \nu_{N-1}) < \xi_k$，参见命题 5.2.1。

$$\psi_\sigma^{\vec{\mu} * \vec{\nu}}(a) = \text{最小值}\,(\{\sigma\} \cup \{\kappa \in Mh_2^a(\vec{\mu} * \vec{\nu}) \cap \sigma :\ \{a\} \cup \vec{\mu} \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_a(\kappa)\ \&\ \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \sigma \subset \kappa\})\ 。$$

$$m_i(\psi_\sigma^{\vec{\mu} * \vec{\nu}}(a)) = \mu_i \text{ for } i < k, \text{ and } m_i(\psi_\sigma^{\vec{\mu} * \vec{\nu}}(a)) = \nu_i \text{ for } i \geq k.$$

与第 4 节中关于 Π_4-反射的情形一样，我们可以得到关于 Π^1_{N-2}-不可描述基数 $\mathbb{K}$的以下引理。

引理 5.4 设 $a \in \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$。则 $\mathbb{K} \in M_{N-1}(Mh^a_{N-1}(\varepsilon_{\mathbb{K}+1}))$，其中$\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 表示满足 $\nu_{N-1} = \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 的序列 $\vec{\nu} = \vec{0} * (\nu_{N-1})$。对于每个 $\xi \in \mathcal{H}_a(\mathbb{K}) \cap \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$，都有 $\psi^{\vec{0}*(\xi)}_{\mathbb{K}}(a) < \mathbb{K}$。

引理 5.5 设 $\vec{\nu} = (\xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k \dot{+} \Lambda^{\xi_{k+1}} c, 0, \ldots, 0)$，其中 $\vec{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_{N-1})$，且 $\xi_{k+1} > 0$；并且 $0 < c < \Lambda$ 满足 $c \in \mathcal{H}_a(\sigma)$。

假设 $\sigma \in Mh^a_2(\vec{\xi})$。则 $\sigma \in M_2(Mh^a_2(\vec{\nu}))$，且 $\psi^{\vec{\nu}}_\sigma(a) < \sigma$，参见命题 5.2.2。

引理 5.6 设 $\vec{\mu} = (\mu_2, \ldots, \mu_{k-1})$，且 $\vec{\nu} = (\nu_k, \ldots, \nu_{N-1}) < \xi$。假设$\vec{\nu} \subset \mathcal{H}_a(\sigma)$，且 $\sigma \in Mh^a_2(\vec{\mu} * (\xi))$。则 $\psi^{\vec{\mu}*\vec{\nu}}_\sigma(a) < \sigma$，参见命题 5.2.1。

5.3 一阶反射的算子控制推导

$\mathrm{KP}\Pi_N$ 的算子控制推导对以下推理规则封闭。 $\bar{m}$： $\pi \mapsto \bar{m}(\pi) = (\bar{m}_2(\pi) \ldots, \bar{m}_{N-1}(\pi))$ 是推导的附加数据，其中对于 $2 \le i \le N-1$， $\bar{m}_i(\pi) \le m_i(\pi)$。

($\mathrm{rfl}^{\Pi_N}(\mathbb{K})$) $b \ge \mathbb{K}$。存在一个序数 $a_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap a$，以及一个满足以下条件的 $\Sigma_N(\mathbb{K})$-句子A：

$$\frac{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg A \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, A^{(\rho,\mathbb{K})} : \rho < \mathbb{K}\}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_N}(\mathbb{K}))$$

($\mathrm{rfl}^{\Pi_k}(\eta, \pi, \vec{\nu})$) 对每个 $2 \le k \le N-1$ 都成立，参见命题 5.2.1。

存在序数 $\eta < \pi \le b < \mathbb{K}$, $\vec{\nu} = (\nu_k, \ldots, \nu_{N-1}) < \bar{m}_k(\pi) \le m_k(\pi)$、$a_0 < a$，以及一个由满足以下条件的 $\Sigma_k(\pi)$-句子构成的有限集 Δ：

1. $\{\eta, \pi\} \cup \vec{\nu} \cup \bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。 2. 对每个 $\delta \in \Delta$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta$。 3. 对任意 $\eta < \rho \in Mh_2(\bar{m}_{<k}(\pi) * \vec{\nu}) \cap \pi$, $\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}$，其中 $\bar{m}_{<k}(\pi) = (\bar{m}_2(\pi) \ldots, \bar{m}_{k-1}(\pi))$，且 $\rho \in Mh_k(\vec{\nu})$ 当且仅当对于每个 $k \le i \le N-1$， $\nu_i \le m_i(\rho)$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\bar{m}_{<k}(\pi)*\vec{\nu})\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_k}(\eta, \pi, \vec{\nu}))$$

引理 5.7 假设 $\Gamma \subset \Sigma_{N-1}(\mathbb{K})$、 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$ 和 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_{\mathbb{K}} \Gamma$。那么，对于任意 $\eta = \psi_{\mathbb{K}}(\gamma + \mathbb{K}) < \kappa \in Mh_{N-1}(a) \cap \psi_{\mathbb{K}}(\gamma + \mathbb{K} \cdot \omega)$， $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^\beta_\beta \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}$ 成立，其中 $\hat{a} = \gamma + \omega^{\mathbb{K}+a}$ 且 $\beta = \psi_{\mathbb{K}}(\hat{a})$。

引理 5.8 假设 $\bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，且存在一个 $2 \le k < N-1$，使得$\bar{m}_{k+1}(\pi) > 0$，并令 $k = \max\{k : \bar{m}_{k+1}(\pi) > 0\}$且 $\alpha = \bar{m}_k(\pi)$，$\xi = \bar{m}_{k+1}(\pi)$。此外，假设对于 a，$\pi < \mathbb{K}$ 和 $\Gamma \subset \Sigma_k(\pi)$，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_\pi \Gamma$。

那么，对于任意 $\eta < \kappa \in Mh_2\ \bar{m}_{<k}\ \pi\ \cap Mh_k\ \alpha \dot{+} \Lambda^\xi\ 1 + a\ \cap \pi\ \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup (\ (\ ))$ $\{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a}_\pi \Gamma^{(\kappa,\pi)}$ η $\alpha \dot{+} \Lambda^\xi\ 1 + a\ \le \bar{m}_k\ \kappa\ \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ $(\ (\ ))$，均有 成立，其中 是一个基，$(\ )\ (\ )$ 且 $\bar{m}_{<k}(\kappa) = \bar{m}_{<k}(\pi)$。此外，当 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$ 时，$\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a}_\kappa \Gamma^{(\kappa,\pi)}$成立。

证明。仿照引理 4.13，对 a 作归纳即可得。令 $\pi' = \kappa$，若 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\kappa)$。否则，$\pi' = \pi$。考虑最后一步推理为 $(\mathrm{rfl}^{\Pi_n}(\eta, \pi, \vec{\nu}))$ 的情形。我们有 $n \le k+1$, $\eta < \pi$, $\{\eta, \pi\} \cup \vec{\nu} \cup \bar{m}(\pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, $\vec{\nu} = (\nu_n, \ldots, \nu_{N-1}) < \bar{m}_n(\pi) \le m_n(\pi)$ 和 $\Delta \subset \Sigma_n(\pi)$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_\pi \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_\pi \Gamma, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\bar{m}_{<n}(\pi)*\vec{\nu})\cap\pi}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_\pi \Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_n}(\eta, \pi, \vec{\nu}))$$

情形 1. $n = k+1$: 令 $\alpha_0 = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1 + a_0)$。则根据 $\vec{\nu} < \xi = \bar{m}_{k+1}(\pi)$，有 $\vec{\mu} = (\alpha_0) * \vec{\nu} < \alpha_1 = \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1 + a)$。我们得到 $\eta < \kappa$, $\{\eta, \kappa, \alpha_0\} \cup \bar{m}(\kappa) \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}]$。在以下推导中，$\alpha_1 \le \bar{m}_k(\kappa)$，其中 $\bar{m}(\kappa) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。注意，$\bar{m}_{<k}(\kappa)*\vec{\mu} = \bar{m}_{<k}(\pi)*(\alpha_0)*\vec{\nu} = \max\{(\ \bar{m}_{<k}(\pi)*(\alpha_0)*\bar{0}),\ (\ \bar{m}_{<k}(\pi)*(\alpha)*\vec{\nu})\}$。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{2^d}_0 \neg\theta^{(\kappa,\pi)}, \Gamma^{(\kappa,\pi)}\}_{\theta\in\Gamma} \quad \dfrac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash^{\sigma+\omega a_0+1}_{\pi'} \Gamma^{(\sigma,\pi)}, \neg\delta^{(\sigma,\pi)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash^{\kappa+\omega a_0}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Delta^{(\sigma,\pi)}}{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash^{\kappa+\omega a_0+p}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Gamma^{(\sigma,\pi)}\}_{\eta<\sigma\in Mh_2(\bar{m}_{<k}(\kappa)*\vec{\mu})\cap\kappa}}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_k}(\eta, \kappa, \vec{\mu}))$$

情形 2. $n \le k$: 若 $n < k$，则 $\vec{\nu} < \bar{m}_n(\pi) = \bar{m}_n(\kappa) \le m_n(\kappa)$。若 $n = k$，则$\vec{\nu} < \alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1 + a) \le \bar{m}_k(\kappa)$，其中 $\alpha \dot{+} \Lambda^\xi(1 + a)$ 的片段为 α。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a_0+1}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \neg\delta^{(\kappa,\pi)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \rho\}] \vdash^{\kappa+\omega a_0}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}, \Delta^{(\rho,\pi)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\bar{m}_{<n}(\kappa)*\vec{\nu})\cap\kappa}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash^{\kappa+\omega a}_{\pi'} \Gamma^{(\kappa,\pi)}}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_n}(\eta, \kappa, \vec{\nu}))$$

□

引理 5.9 设 $\Gamma \subset \Sigma_1(\lambda)$ 且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma$，其中 $a < \mathbb{K}$、$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \ni \lambda \le b < \mathbb{K}$ 和 λ 正则。假设 $\forall\kappa \in [\lambda, b)(\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\kappa(\gamma)))$。

令$\hat{a} = \gamma + \theta(a)$和$\hat{b} = \psi\ \vec{\nu}\ <\ \alpha$ with $\vec{\nu} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$时成立。则 $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta] \vdash^\delta_\delta \Gamma$ 成立。

证明。这可仿照引理 4.14，通过对 b 作主归纳并对 a作辅助归纳得出。令 η 为一个基。

情形 1。考虑最后一步推理为一个 $(\mathrm{rfl}^{\Pi_{k+1}}(\eta, \sigma, \vec{\nu}))$，且带有$2 \le k < N-1$ 和 $b \ge \sigma$的情形。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash^{a_0}_b \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\bar{m}_{\le k}(\sigma)*\vec{\nu})\cap\sigma}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a_b \Gamma}\ (\mathrm{rfl}_{\Pi_{k+1}}(\eta, \sigma, \vec{\nu}))$$

其中 $\Delta \subset \Sigma_{k+1}(\sigma)$、$\vec{\nu} < \xi = \bar{m}_{k+1}(\sigma) \le m_{k+1}(\sigma)$、$\eta < \sigma$ 以及 $\{\eta, \sigma\} \cup \bar{m}(\sigma) \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。我们可以假设 $\sigma \ge \lambda$，并且不存在满足 $\sigma < \pi \le b$ 的正则 $\pi \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。

通过切消去、引理 5.8，我们对 $\kappa = \psi^{\bar{m}_{<k}}(\quad \sigma * \beta *\vec{0})()(\gamma)$（其中 $\beta = \bar{m}_k(\sigma) \dot{+} \Lambda^{\bar{m}_{k+1}(\sigma)}(1+a_1)$，且 $a_1 = \theta_b(a_0) + 1$）得到该引理，并使用 MIH。情形 2。接下来考虑最后一步推理为 $(\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\sigma,\vec{\nu}))$ 且 $b \geq \sigma$ 的情形。

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \neg\delta\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash_b^{a_0} \Gamma, \Delta^{(\rho,\sigma)}\}_{\eta<\rho\in Mh_2(\vec{\nu})\cap\sigma}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_b^{a} \Gamma} \ (\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\eta,\sigma,\vec{\nu}))$$

其中 $\Delta \subset \Sigma_2(\sigma)$、$\vec{\nu} < \xi = \bar{m}_2(\sigma) \leq m_2(\sigma)$、$\eta < \sigma$ 和 $\{\eta,\sigma\} \cup \bar{m}(\sigma) \cup \vec{\nu} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。我们可以假设 $\sigma \geq \lambda$。令 $\rho = \psi_\sigma^{\vec{\nu}}(\widehat{a_0})$。由假设 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$，我们可得 $\eta < \rho \in Mh_2(\vec{\nu}) \cap \sigma \cap \mathcal{H}_{\widehat{a_0}+1}[\Theta]$。

通过反演，取右上方序列中的第 ρ 个分支，并引入若干个 (cut)，而不是 $(\mathrm{rfl}_{\Pi_2}(\sigma,\vec{\nu}))$，即可得到与引理 2.6 相同的引理。当 $\lambda < \sigma$ 时使用 MIH。□

$OT(\Pi_N)$ 表示一个带有坍缩函数 $\psi_\sigma^{\vec{\nu}}(a)$ 的序数可计算记号系统。

定理 5.10 假设 $\mathrm{KP}\Pi_N \vdash \theta^{L_\Omega}$ for $\theta \in \Sigma$。那么存在一个 $n < \omega$，使得 $L_\alpha \models \theta$ for $\alpha = \psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{K}+1))$ 属于 $OT(\Pi_N)$。

证明。这由引理 5.7 和 5.9 可知。 □

6 Π^1_1-反射

定义 6.1 σ 若 $L_\sigma \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$，则称 **1** σ 对于 $\alpha > \sigma$ 是 α-稳定的。

已知 σ 是 $(\sigma+1)$-稳定的，当且仅当 σ 是 Π^1_0-反射的；而 σ 是 σ^+-稳定的，当且仅当 σ 是 Π^1_1-反射的。其中 σ^+ 表示 σ 上方的下一个容许序数，参见 [Richter-Aczel74]。

令 S_1 表示由 $\mathrm{KP}\omega + (V = L)$ 加上以下关于个体常元 $\mathbb{S}$ 的公理所得的理论：$\mathbb{S}$ 是一个极限序数，并且

$$L_{\mathbb{S}} \prec_{\Sigma_1} L.$$

后者表示一个模式

$$\exists x\, B(x,v) \wedge v \in L_{\mathbb{S}} \to \exists x \in L_{\mathbb{S}}\, B(x,v)$$

对于每个 Δ_0-公式 B。令 $L = L_{\mathbb{S}^+} \models S_1$。

通过迭代（递归地）施行 Mahlo 运算以解决一阶反射 M_N，可以得到一种指数结构，其形式涉及马洛类 $Mh^a_k(\alpha)$ 和 $Mh^a_k(\vec{\nu})$。将向量 $\vec{\nu} = (\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{N-1})$ 视为函数 $\{2,3,\ldots,N-1\} \ni k \mapsto \nu_k$，其定义域中的每个 k 表示 Π_k-公式的类或 Mahlo 运算 M_k，而其值 ν_k 对应于推导高度；参见引理 5.8 证明中的情形 1。

另一方面，公理 $L_{\mathbb{S}} \prec_{\Sigma_1} L_{\mathbb{S}^+}$ 指出，$\mathbb{S}$ 在超限层级中对 $\Pi_{\mathbb{S}^+}$公式进行“反射”。我们需要用函数来代替有限长度的向量

$f:\mathbb{S}^+\to ON$。函数定义域中的每个 c 都对应高阶反射推理规则中秩为$<c$ 的公式。其支集 $\mathrm{supp}(f)=\{c<\mathbb{S}^+:\ f(c)\neq 0\}$可假定为有限集，而其值 $f(c)<\varepsilon_{\mathbb{S}^++1}$。韦布伦函数 $\theta_b(\xi)$ 用于表示序数，以取代指数函数 $\tilde{\theta}_1(\xi)=(\mathbb{S}^+)^\xi$。第5节中的关系 $\vec{\nu}<\alpha$ 被替换为针对序数 c、ξ和有限函数 f的关系$f<^c\xi$。若 $f(c)<\mu$，对于 ξ 的一个~~片段 $\mu=\cdots+\theta_b(\nu)$，且对于 $d=\min\{d>0:c+d\in\mathrm{supp}(f)\}$，有 $f(c+d)<\theta_{-d}(\theta_b(\nu))$，则 $f<^c\xi$成立，依此类推；其中 $\theta_{-d}(\xi)$ 表示函数 $\xi\mapsto\theta_d(\xi)$ 的反函数。

在（32）中引入的马洛类 $Mh^a_c(\xi)$ 反射了较低层级中关于序数 $\pi\in Mh^a_c(\xi)$ 的每一个事实 $\pi\in Mh^a_0(g_c)\rightleftharpoons\bigcap\{Mh^a_d(g(d)):\ c>d\in\mathrm{supp}(g)\}$，并将其向下反射到“更小”的马洛类 $Mh^a_c(f)=\bigcap\{Mh^a_d(f(d)):\ c\leq d\in\mathrm{supp}(f)\}$，其中 $f<^c\xi$。

这一套工具足以分析超限层级中的反射。对于Π^1_1-反射公理 $L_{\mathbb{S}}\prec_{\Sigma_1}L_{\mathbb{S}^+}$，即（形式化的）Mostowski塌缩，我们还需要另一套工具：设 $B(u,v)$，其中 $v\in L_{\mathbb{S}}$，且 B 是一个 Δ_0-公式。我们需要为 $u\in L_{\mathbb{S}^+}$ 找到一个替代物 $u'\in L_{\mathbb{S}}$，即 $B(u',v)$。为简便起见，设 $v=\beta<\mathbb{S}$ 和 $u=\alpha<\mathbb{S}^+$ 是序数。我们可以假设 $\alpha\geq\mathbb{S}$。设 $\rho<\mathbb{S}$ 为一个序数，它大于 $B(\alpha,\beta)$ 的“上下文”中出现的每个序数$<\mathbb{S}$。这意味着，如果序数 $\delta<\mathbb{S}$ 出现在 $B(\alpha,\beta)$ 的推导中的某个“相关”分支上，则 $\delta<\rho$ 成立。于是，我们可以为序数项 α 定义一个 Mostowski塌缩 $\alpha\mapsto\alpha[\rho/\mathbb{S}]$，使得对每个相关的$\beta<\mathbb{S}$，都有 $\beta[\rho/\mathbb{S}]=\beta$、$\mathbb{S}[\rho/\mathbb{S}]=\rho$，并且 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]<(\mathbb{S}^+)[\rho/\mathbb{S}]=\rho^+<\mathbb{S}$；参见定义 6.22。由此可知，$B(\alpha[\rho/\mathbb{S}],\beta)$ 成立。

虽然上述方案看起来可行，但该如何实施呢？令 $E^{\mathbb{S}}_\rho$ 表示满足以下条件的序数项集合：对于其中任意序数项 α，其每个子项 $\beta<\mathbb{S}$ 都小于 ρ α。事实证明，如果 $\mathcal{H}_\gamma(\rho)\cap\mathbb{S}\subset\rho$，那么 $\mathcal{H}_\gamma(E^{\mathbb{S}}_\rho)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$。令 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^a_b\Gamma$，并假设定义 1.16 中的 (3)、$\{\gamma,a,b\}\cup\mathrm{k}(\Gamma)\subset\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 成立。此外，假设 $\Theta\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$成立。于是我们得到 $\{\gamma,a,b\}\cup\mathrm{k}(\Gamma)\subset\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\subset\mathcal{H}_\gamma(E^{\mathbb{S}}_\rho)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$。这意味着，只要 $\Theta\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$ 成立，$\mathrm{k}(\Gamma)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$ 就成立；也就是说，只要我们讨论的是 $\mathrm{k}(\iota)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$ 中的分支，例如推理 (⋀)：$A\simeq\bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^{a_0}_b\Gamma,A,A_\iota\}_{\iota\in J}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^a_b\Gamma,A}\ (\bigwedge)\rightsquigarrow\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^{a_0}_b\Gamma,A,A_\iota\}_{\iota\in J,\mathrm{k}(\iota)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta]\vdash^a_b\Gamma,A}\ (\bigwedge)$$

反过来，对于一个（⋁）的次要公式 A_ι，其主要公式为$A\simeq\bigvee(A_\iota)_{\iota\in J}$，若 $\mathcal{H}_\gamma(\rho)\cap\mathbb{S}\subset\rho$，则有 $\mathrm{k}(\iota)\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$。这一附加条件意味着，当 $\rho=\psi^f_{\mathbb{S}}(\gamma_1)$ 时，$\gamma_1\geq\gamma_0$。只有当 $\rho\in\Theta$时，才有这样的 $\rho\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。让我们尝试替换用于保证 $\mathbb{S}$稳定性的推理

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma,\Theta)\vdash\Gamma,B(u)\quad\{(\mathcal{H}_\gamma,\Theta\cup\{\sigma\})\vdash\Gamma,\neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_{\Theta\subset E^{\mathbb{S}}_\sigma}}{(\mathcal{H}_\gamma,\Theta)\vdash\Gamma}\ (\mathrm{stbl})$$

通过对 ρ 关于 $\Theta\subset E^{\mathbb{S}}_\rho$的反射进行推理：如果 $B(u)^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 成立，那么 $B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$

对某个 $\sigma < \rho$成立。

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\rho\}) \vdash \Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}, B(u)^{[\rho/\mathbb{S}]} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\rho, \sigma\}) \vdash \Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_{\Theta \subset E^{\mathbb{S}}_\sigma, \sigma < \rho}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\rho\}) \vdash \Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}} \text{ (rfl)}$$

然而，我们需要消除超限层级中关于反射的推理。根据第5节对一阶反射的分析， $\Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}, B(u)^{[\rho/\mathbb{S}]}$被替换为 $\Gamma^{[\sigma/\mathbb{S}]}, B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$， 而 $\Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 则被替换为 $\Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$， 其中$\sigma < \kappa < \rho$。

$$\frac{\{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\kappa\}) \vdash \Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}, \neg\theta^{[\kappa/\mathbb{S}]}\}_{\theta \in \Gamma} \qquad \dfrac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\rho, \sigma\}) \vdash \Gamma^{[\sigma/\mathbb{S}]}, B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]} \quad (\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\kappa, \rho, \sigma\}) \vdash \Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}}{\{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\kappa, \rho, \sigma\}) \vdash \Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}, \Gamma^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_\sigma} (cut)}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\kappa, \rho\}) \vdash \Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}} \text{ (rfl)}$$

我们将公式 $\Gamma^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 替换为 $\Gamma^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 或 $\Gamma^{[\kappa/\mathbb{S}]}$。这意味着将 $\alpha[\sigma/\mathbb{S}]$替代每个 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]$。也就是说，会出现反塌缩与坍缩 $\alpha[\rho/\mathbb{S}] \mapsto \alpha \mapsto \alpha[\sigma/\mathbb{S}]$ 的复合。因此，对于 $\sigma < \rho$，我们需要 $\alpha \in E^{\mathbb{S}}_\sigma \subsetneq E^{\mathbb{S}}_\rho$。然而，我们有 $\Theta \cup \{\rho\} \not\subset E^{\mathbb{S}}_\sigma$, 而模式似乎被破坏了。此外，有限集 $\Theta \cup \{\rho\}$ 会增大到 $\Theta \cup \{\kappa, \rho\}$。在超限层次消去反射推理时，它还能保持有限吗?

回顾引理 4.13 的证明，对于 $\Gamma \subset \Sigma_2$ 和 $\Delta \subset \Pi_2$

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\pi,\mathbb{K})}, \neg\delta^{(\pi,\mathbb{K})}\}_{\delta \in \Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\rho\}] \vdash \Gamma^{(\pi,\mathbb{K})}, \Delta^{(\rho,\mathbb{K})}\}_\rho}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\pi,\mathbb{K})}} \ (\text{rfl}_{\Pi_3})$$

被改写为

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash \neg\theta^{(\kappa,\mathbb{K})}, \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}\}_{\theta \in \Gamma} \qquad \dfrac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash \Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})}, \neg\delta^{(\sigma,\mathbb{K})}\}_{\delta \in \Delta} \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}, \Delta^{(\sigma,\mathbb{K})}}{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa, \sigma\}] \vdash \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}, \Gamma^{(\sigma,\mathbb{K})}\}_\sigma}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\kappa\}] \vdash \Gamma^{(\kappa,\mathbb{K})}} \ (\text{rfl}_{\Pi_2})$$

这是通过将限制 $(_\pi,_\mathbb{K})$ 替换为 $(_\sigma,_\mathbb{K})$ 或 $(_\kappa,_\mathbb{K})$ 来完成的；序数 π、 σ、 κ 会进入推导，但我们需要控制这些序数吗? 公式也可以放在上界 π、 σ、 κ 上，而不是采用限制 $(_\pi,_\mathbb{K})$，使得 $\mathrm{k}(A^{(\sigma)}) = \mathrm{k}(A)$。这意味着上界 σ 不会“出现在”带帽公式 $A^{(\sigma)}$中。如果我们选取一个足够大的序数 γ_0 （取决于给定的有限证明图），那么推导中“出现”的每个序数（包括算子 $\mathcal{H}_\gamma$中的下标 $\gamma \leq \gamma_0$）都属于序数 γ_0 的 $\mathcal{H}_{\gamma_0} = \mathcal{H}_{\gamma_0}(\emptyset)$，而每个上界 ρ 都超过阈值 γ_0，也就是说 $\rho \notin \mathcal{H}_{\gamma_0}(\rho) \cap \mathbb{S} \subset \rho$。这样，推导中“出现”的每个序数都属于 Mostowski塌缩 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 的定义域 $E^{\mathbb{S}}_\rho$。下面给出细节。

6.1 一个稳定序数的序数

暂且， $\mathbb{S}$ 表示一个弱不可达基数。

定义 6.2 设 $\Lambda = \omega_{\mathbb{S}+1}$ 或 $\Lambda = \mathbb{S}^+$。 $\varphi_b(\xi)$ 表示定义在 Λ^+ 上的二元 Veblen 函数，其中 $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$，并且对于 ε 数 Λ， $\tilde{\varphi}_b(\xi) := \varphi_b(\Lambda \cdot \xi$。

令 $b, \xi < \Lambda^+$。 $\theta_b(\xi)$ $[\tilde{\theta}_b(\xi)]$ 表示 $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$ [对 $\tilde{\varphi}_0(\xi) = \Lambda^\xi$] 的第 b 次迭代，分别。

定义 6.3 令 $\xi < \varphi_\Lambda(0)$ 为一个非零序数，其标准形为:

$$\xi = \sum_{i \le m} \tilde{\theta}_{b_i}(\xi_i) \cdot a_i =_{NF} \tilde{\theta}_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \tilde{\theta}_{b_0}(\xi_0) \cdot a_0 \tag{30}$$

其中 $\theta_{b_i}(\xi_i) > \xi_i$, $\theta_{b_m}(\xi_m) > \cdots > \theta_{b_0}(\xi_0)$, $b_i = \omega^{c_i} < \Lambda$，以及 $0 < a_0, \ldots, a_m < \Lambda$。 $SC_\Lambda(\xi) = \bigcup_{i \le m}(\{a_i\} \cup SC_\Lambda(\xi_i))$。 $\theta_{b_0}(\xi_0)$ 称为 ξ 的尾项，记作 $\theta_{b_0}(\xi_0) = tl(\xi)$；而 $\theta_{b_m}(\xi_m)$ 是 ξ 的首项，记作 $\theta_{b_m}(\xi_m) = hd(\xi)$。

1. ζ 是 ξ 的一个片段，当且仅当存在一个 $n(0 \le n \le m+1)$，使得 $\zeta =_{NF} \sum_{i \ge n} \theta_{b_i}(\xi_i) \cdot a_i = \theta_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \theta_{b_n}(\xi_n) \cdot a_n$ 对于 ξ 成立（见（30））。

2. 设 $\zeta =_{NF} \tilde{\theta}_b(\xi)$，其中 $\tilde{\theta}_b(\xi) > \xi$ 和 $b = \omega^{b_0}$，且 c 是序数。序数 $\theta_{-c}(\zeta)$ 按如下方式递归定义。若 $b \ge c$，则 $\theta_{-c}(\zeta) = \theta_{b-c}(\xi)$。设 $c > b_0$。若 $\xi > 0$，则对于（30）中 ξ 的首项 $hd(\xi) = \theta_{b_m}(\xi_m)$，有 $\theta_{-c}(\zeta) = \theta_{-(c-b)}(\theta_{b_m}(\xi_m))$。若 $\xi = 0$，则令 $\theta_{-c}(\zeta) = 0$。

定义 6.4 1. 支集 supp(f) 为有限的函数 $f\colon \Lambda \to \varphi_\Lambda(0) = \{c < \Lambda : f(c) \ne 0\} \subset \Lambda$ 称为有限函数，若 $\forall i > 0(a_i = 1)$ 且当 $b_0 > 1$ 属于 $f(c)$ 时，$a_0 = 1(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \theta_{b_0}(\xi_0) \cdot a_0$ 对任意 $c \in \text{supp}(f)$ 都成立。

它与有限函数 $f \restriction \text{supp}(f)$ 等同。当 $c \notin \text{supp}(f)$ 时，令 $f(c) := 0$。 $SC_\Lambda(f) := \bigcup\{\{c\} \cup SC_\Lambda(f(c))\}\colon c \in \text{supp}(f)\}$。 f、 g、 h、 .....表示有限函数。

对于一个序数 c， f_c 和 f^c 是 f 在定义域 $\text{supp}(f_c) = \{d \in \text{supp}(f) : d < c\}$ 以及 $\text{supp}(f^c) = \{d \in \text{supp}(f) : d \ge c\}$ 上的限制。 $g_c * f^c$ 表示满足以下条件的拼接函数: $\text{supp}(g_c * f^c) = \text{supp}(g_c) \cup \text{supp}(f^c)$，对于 $a < c$， $(g_c * f^c)(a) = g(a)$；对于 $a \ge c$， $(g_c * f^c)(a) = f(a)$。

2. 设 f 是一个有限函数， c 和 ξ 是序数。通过对有限集 $\{d \in$ 的支集 f 的基数进行归纳，定义关系 $f <^c \xi$ 如下: 若 $f^c = \emptyset$，则 $f <^c \xi$ 成立。对于 $f^c \ne \emptyset$，当且仅当存在 ξ 的一个片段 μ，使得 $f(c) < \mu$，并且对于 $d = \min\{c + d \in$ 支集 f: $f <^{c+d} \tilde{\theta}_{-d}(tl(\mu))$， $d > 0\}$ 成立。

命题 6.5 $f <^c \xi \le \zeta \Rightarrow f <^c \zeta$。

6.2 Π11-反射的马洛类

在引理 4.8 和命题 5.2.2 中，$P \in M_k(\gamma) \Rightarrow P \in M_k(M_k(\gamma) \cap M_{k+1}(\nu))$ if $P \in M_{k+1}(\xi_{k+1})$ and $\nu < \xi_{k+1}$ 这一事实至关重要。这意味着，如果P属于更高的马洛类，那么 P 就会将关于较低马洛类中 P 的事实反映出来。

$P \in M_c(\xi)$ 通过对 c 的主归纳并对 P 的辅助归纳来定义。

$$P \in M_c(\xi) :\Leftrightarrow \forall f <^c \xi \forall g \left[P \in M_0(g_c) \Rightarrow P \in M_2(M_0(g_c * f^c))\right] \tag{31}$$

其中 f、g 遍历有限函数，并且

$$M_c(f) := \bigcap \{M_d(f(d)) : d \in \mathrm{supp}(f^c)\} = \bigcap \{M_d(f(d)) : c \leq d \in \mathrm{supp}(f)\}.$$

由命题 6.5 可知，$\xi < \zeta \Rightarrow M_c(\xi) \supset M_c(\zeta)$。

对于类 $\mathcal{X}$，令

$$P \in M_c(\mathcal{X}) :\Leftrightarrow \forall g \left[P \in M_0(g_c) \Rightarrow P \in M_2(M_0(g_c) \cap \mathcal{X})\right].$$

于是，由 $M_0(g_c * f^c) = M_0(g_c) \cap M_c(f^c)$，$P \in M_c(\xi) \Leftrightarrow \forall f <^c \xi \left[P \in M_c(M_c(f^c))\right]$,; 即，$M_c(\xi) = \bigcap_{f <^c \xi} M_c(M_c(f^c))$。

命题 6.6 假设 $P \in M_c(\xi)$。

1. 设 $f <^c \xi$。则 $P \in M_c(M_c(f^c))$。2. 对于 $d > c$，设 $P \in M_d(\mathcal{X})$。则 $P \in M_c(M_c(\xi) \cap \mathcal{X})$。

证明。6.6.1. 设 g 是一个函数，满足 $P \in M_0(g_c)$。根据 $P \in M_c(\xi)$ 的定义 (31)，我们得到 $P \in M_2\left(M_0(g_c) \cap M_c(f^c)\right)$。
6.6.2. 对于 $d > c$，设 $P \in M_d(\mathcal{X})$。设 g 是一个函数，满足 $P \in M_0(g_c)$。利用函数 $g_c * h$ 的 $d > c$，我们得到 $P \in M_2\left(M_0(g_c) \cap M_c(\xi) \cap \mathcal{X}\right)$，其中 $\mathrm{supp}(h) = \{c\}$，且 $h(c) = \xi$。□

引理 6.7 假设 $P \in M_d(\xi) \cap M_c(\xi_0)$、$\xi_0 \neq 0$ 和 $d < c$。此外，设 $\xi_1 \leq \tilde{\theta}_{c-d}(\xi_0)$。则 $P \in M_d(\xi \dot{+} \xi_1) \cap M_d(M_d(\xi \dot{+} \xi_1))$。

证明。由引理 4.11 可知。

由命题 6.6.1，得到 $P \in M_c(\xi_0) \subset M_c(M_c(\emptyset))$。设 $P \in M_d(\xi \dot{+} \xi_1) \cap M_0(g_d)$，其中函数为 g_c。我们证明 $P \in M_2\left(M_0(g_d) \cap M_d(\xi \dot{+} \xi_1)\right)$。设 $h = g_d \cup \{(d, \xi \dot{+} \xi_1)\}$。则由 $d < c$ 可得 $P \in M_0(h_c)$。$P \in M_c(M_c(\emptyset))$ 推出$P \in M_2\left(M_0(h_c) \cap M_c(\emptyset)\right)$，因此 $P \in M_2\left(M_0(g_d) \cap M_d(\xi \dot{+} \xi_1)\right)$。所以 $P \in M_d(M_d(\xi \dot{+} \xi_1))$。

设 f 是一个满足 $f <^d \xi + \xi_1$ 的有限函数。我们通过对有限集 $\{e \in \mathrm{supp}(f) : e > d\}$，并对 ξ_1 进行辅助归纳。

首先令 $f <^d \mu$ 为 ξ的一个片段 μ。我们得到 $P \in M_d(\mu)$ 和 $P \in M_d(M_d(f^d))$。

以下令 $f(d) = \xi \dotplus \zeta$ 且满足 $\zeta < \xi_1$。由 SIH 可得 $P \in M_d(f(d)) \cap M_d(M_d(f(d)))$。若 $\{e \in \mathrm{supp}(f) : e > d\} = \emptyset$，则 $M_d(f^d) = M_d(f(d))$，于是结论成立。否则令 $e = \min\{e \in \mathrm{supp}(f) : e > d\}$。

由 SIH 可假设得到 $P \in M_{c_0}(M_{c_0}(f^{c_0}))$。若 $c = e$，则由假设 $P \in M_c(\xi_0)$ and $f <^e \xi_0$ 可得该断言。令 $e = c + e_0 > c$。则 $\theta_{-e}(\theta_c(\xi_0)) = \theta_{-e_0}(\theta_{c_1}(\xi_0))$，而结合 $f(c) = 0$ 即可得到该断言。令 $c = e + c_1 > e$。则 $\theta_{-e}(\theta_c(\xi_0)) = \theta_{c_1}(\xi_0)$。由 MIH 可得该断言。

另一方面，我们有 $M_d(f^d) = M_d(f(d)) \cap M_{c_0}(f^{c_0})$。$P \in M_d(f(d)) \cap M_{c_0}(M_{c_0}(f^{c_0}))$，结合 $d < c_0$，由命题 6.6.2 可得 $P \in M_d(M_d(f(d)) \cap M_{c_0}(f^{c_0}))$，即 $P \in M_d(M_d(f^d))$。□

对于有限函数 f 和 g，

$$M_0(g) \prec M_0(f) :\Leftrightarrow \forall P \in M_0(f)\,(P \in M_2(M_0(g)))\,.$$

推论 6.8 设 f、g 为有限函数，且 $c \in$ 支集(f)。假设存在一个序数 $d < c$，使得 $(d, c) \cap$ 支集$(f) = (d, c) \cap$ 支集$(g) = \emptyset$，$g_d = f_d$，$g(d) < f(d) \dotplus \tilde{\theta}_{c-d}(f(\cdot))$，并且 $g <^c f(\cdot)$。则 $M_0(\cdot) \prec M_0(f)$ 成立。

证明。由引理 6.7。□

定义 6.9 有限函数的不可约性 f 按有限集 $\mathrm{supp}(f)$ 的基数 n 归纳定义。若 $n \leq 1$，f 被定义为不可约。令 $n \geq 2$ 和 $c < c + d$ 为 $\mathrm{supp}(f)$ 中最大的两个元素，并令 g 为一个有限函数，使得 $\mathrm{supp}(g) = \mathrm{supp}(f_c) \cup \{c\}$，$g_c = f_c$ 且 $g(c) = f(c) + \theta_d(f(c + d))$。

那么 f 不可约，当且仅当 $tl(f(c)) > \theta_d(f(c + d))$，并且 g 不可约。

定义 6.10 设 f, g 为不可约有限函数，b 为一个序数。我们按基数 $\#\{e \in \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$ 归纳定义关系 $f <^b_{lx} g$ 如下。$f <^b_{lx} g$ 成立，当且仅当 $f^b \neq g^b$，并且对于序数 $c = \min\{c \geq b : f(c) \neq g(c)\}$，以下条件之一成立：

1. $f(c) < g(c)$，并令 μ 为 $g(c)$ 的最短部分，使得 $f(c) < \mu$。那么，对于任意 $c < c + d \in \mathrm{supp}(f)$，若 $tl(\mu) \leq \tilde{\theta}_d(f(c + d))$，则 $f <^{c+d}_{lx} g$ 成立。
2. $f(c) > g(c)$，并令 ν 为 $f(c)$ 的最短部分，使得 $\nu > g(c)$。那么，存在一个 $c < c + d \in \mathrm{supp}(g)$，使得 $f <^{c+d}_{lx} g$ 且 $tl(\nu) \leq \theta_d(g(c + d))$。

命题 6.11 若 $f <^0_{lx} g$，则 $M_0(f) \prec M_0(g)$。

证明。这可由推论 6.8 得出。□

6.3 Skolem壳与坍缩函数

定义 6.12 设 $\mathbb{K}=\omega_{\mathbb{S}+1}$、 $a<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 和 $X\subset\Gamma_{\mathbb{K}+1}$。

1. $\mathcal{H}_a(X)$ 表示在函数 $+$、φ、 $\beta\mapsto\psi_\Omega(\beta)$（$\beta<a$）、 $\mathbb{S}>\alpha\mapsto\alpha^+$ 和（π、b、f）$\mapsto\psi_\pi^f(b)$ 下， $\{0,\Omega,\mathbb{S},\mathbb{K}\}\cup X$ 的 Skolem 包，其中 $b<a$ 和 f 是有限函数，满足 $f\in\mathcal{H}_a(X):\Leftrightarrow SC_{\mathbb{K}}(f)\subset\mathcal{H}_a(X)$。

2. 设 $c<\mathbb{K}$、 $a<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 和 $\xi<\varphi_{\mathbb{K}}(0)$。 $\pi\in Mh_c^a(\xi)$ 当且仅当 $\{a,c,\xi\}\subset\mathcal{H}_a(\pi)$ 且 $\forall f<^c\xi\forall g(SC_{\mathbb{K}}(f)\cup SC_{\mathbb{K}}(g)\subset\mathcal{H}_a(\pi)\&\ \pi\in Mh_0^a(g_c)\Rightarrow\pi\in M_2(Mh_0^a(g_c*f^c)))$（32），其中 $Mh_c^a(f):=\bigcap\{Mh_d^a(f(d)):\ d\in\text{支集}(f^c)\}=\bigcap\{Mh_d^a(f(d)):\ c\le d\in\text{支集}(f)\}$

.

3.

$$\psi_\pi^f(a):=\min(\{\pi\}\cup\{\kappa\in Mh_0^a(f)\cap\pi:\mathcal{H}_a(\kappa)\cap\pi\subset\kappa,\{\pi,a\}\cup SC_{\mathbb{K}}(f)\subset\mathcal{H}_a(\kappa)\})\tag{33}$$

敏锐基数由 [Rathjen05b]引入。基数 κ 是敏锐基数，当且仅当对于任意 $\eta>0$、$P\subset V_\kappa$和公式 $\varphi(x,y)$，若 $V_{\kappa+\eta}\models\varphi[P,\kappa]$，则存在$0<\kappa_0$、 $\eta_0<\kappa$ 使得 $V_{\kappa_0+\eta_0}\models\varphi[P\cap V_{\kappa_0},\kappa_0]$。 T表示通过加入断言 $\mathbb{S}$ 是敏锐基数这一公理对 ZFC 的扩展。

~引理 6.13 T证明，对于每个满足 $\{a,c,\xi\}\subset\mathcal{H}_a(\mathbb{S})$的 $a<\varepsilon_{\mathbb{K}+1}$、$c<\mathbb{K}$、$\xi<\varphi_{\mathbb{K}}(0)$，都有 $\mathbb{S}\in Mh_c^a(\xi)\cap M_2(Mh_c^a(\xi))$。

证明。我们对 $\xi<\varphi_{\mathbb{K}}(0)$使用归纳法来证明该引理。

设 $\{a,c,\xi\}\cup SC_{\mathbb{K}}(f)\subset\mathcal{H}_a(\mathbb{S})$且 $f<^c\xi$。我们证明 $\mathbb{S}\in Mh_c^a(f^c)$，并证明$\mathbb{S}\in M_2(Mh_0^a(g_c)\cap Mh_c^a(f^c))$，假设 $\mathbb{S}\in Mh_0^a(g_c)$且 $SC_{\mathbb{K}}(g_c)\subset\mathcal{H}_a(\mathbb{S})$。

对于每个$d\zeta\in$ supp(f)，由归纳假设得到 $f(d)<\xi$。

我们需要证明，对于 $A=Mh_0^a(g_c)\cap\mathbb{S}$ 和 $B=Mh_c^a(f^c)\cap\mathbb{S}$，有 $\mathbb{S}\in M_2(A\cap B)$。令 C 为 $\mathbb{S}$ 的一个闭无界子集。

我们有 $\mathbb{S}\in Mh_0^a(g_c)\cap Mh_c^a(f^c)$，以及 $\{a,c\}\cup SC_{\mathbb{K}}(g_c,f^c)\subset\mathcal{H}_a(\mathbb{S})$。选取一个 $b<\mathbb{S}$，使得 $\{a,c\}\cup SC_{\mathbb{K}}(g_c,f^c)\subset\mathcal{H}_a(b)$，并选取一个双射 $F\colon\mathbb{S}\to\mathcal{H}_a(\mathbb{S})$。每个 $\alpha\in\mathcal{H}_a(\mathbb{S})\cap\Gamma_{\mathbb{K}+1}$ 都与其编码相对应，记作 $F^{-1}(\alpha)$。令 P为类 $P=\{(\pi,d,\alpha)\in\mathbb{S}^3:\ \pi\in Mh_{F(d)}^a(F(\alpha))\}$，其中 $F(d)<\mathbb{K}$ 且 $F(\alpha)<\varphi_{\mathbb{K}}(0)$，并满足 $\{F(d)\ F(\alpha)\}\subset\mathcal{H}_a(\pi)$。对于固定的 a，集合 $\{(d,\eta)\in\mathbb{K}\times\varphi_{\mathbb{K}}(0):\mathbb{S}\in Mh_d^a(\eta)\}$ 由类 P通过对序数的递归 $d<\mathbb{K}$定义。令 φ为一个公式，使得 $V_{\mathbb{S}+\mathbb{K}}\models\varphi[P,C,\mathbb{S},b]$当且仅当 $\mathbb{S}\in Mh_0^a(g_c)\cap Mh_c^a(f^c)$，且 C 是 $\mathbb{S}$的闭无界子集。由于 $\mathbb{S}$ 具有机敏性，选取 $b<\mathbb{S}_0<\mathbb{K}_0<\mathbb{S}$ 使得 $V_{\mathbb{S}_0+\mathbb{K}_0}\models\varphi[P\cap\mathbb{S}_0,C\cap\mathbb{S}_0,\mathbb{S}_0,b]$。由此得到 $\mathbb{S}_0\in A\cap B\cap C$。因此，证明了 $\mathbb{S}\in Mh_c^a(\xi)$。根据 $\mathbb{S}$的机敏性，可知 $\mathbb{S}\in M_2(Mh_c^a(\xi))$。□

推论 6.14 $\tilde{T}$证明，对于每个 $\xi < \varphi_{\mathbb{K}}(0)$ 以及满足 $\mathrm{supp}(f) = \{c\}, c < \mathbb{K}$ 和 $f(c) = \xi$ 的有限函数 f， $\forall a < \varepsilon_{\mathbb{K}+1} \forall c < \mathbb{K}[\{a, c, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{S}) \to \psi^f_{\mathbb{S}}(a) < \mathbb{S})]$。

引理 6.15 假设 $\mathbb{S} \geq \pi \in Mh^a_d(\xi) \cap Mh^a_c(\xi_0)$、 $\xi_0 \neq 0$ 和 $d < c$。此外，设对于 $\xi_1 \leq \tilde{\theta}_{c-d}(\xi_0)$，有 $\xi_1 \in \mathcal{H}_a(\pi)$。那么 $\pi \in Mh^a_d(\xi \dot{+} \xi_1) \cap M^a_d(Mh^a_d(\xi \dot{+} \xi_1))$。

证明。如引理 6.7 所示。 □

定义 6.16 对于有限函数 f 和 g,

$$Mh^a_0(g) \prec Mh^a_0(f) :\Leftrightarrow \forall \pi \in Mh^a_0(f)\,(SC_{\mathbb{K}}(g) \subset \mathcal{H}_a(\pi) \Rightarrow \pi \in M_2(Mh^a_0(g)))\,.$$

推论 6.17 设 f、g 为有限函数，且 $c \in$ 是 f 的支集。假设存在一个序数 $d < c$，使得 $(d, c) \cap$ 是 f 的支集，$= (d, c) \cap$ 是 g 的支集，$= \emptyset, g_d = f_d$,
g $c \cdot \omega$ c g $(d) < f(d) \dot{+} \tilde{\theta}_{c-d}(f(\,))$，并且 $g <^c f(\,)$。那么 $Mh^a_0(\,) \prec Mh^a_0(f)$ 成立。特别地，若 $\pi \in Mh^a_0(f)$ 且 $SC_{\mathbb{K}}(g) \subset \mathcal{H}_a(\pi)$，则 $\psi^g_\pi(a) < \pi$。

命题 6.18 设 $f, g\colon \mathbb{K} \to \varphi_{\mathbb{K}}(0)$。若 $f <^0_{lx} g$，则 $Mh^a_0(f) \prec Mh^a_0(g)$。

证明。由推论 6.17 可知。 □

6.4 AMostowski坍缩

$OT(\Pi^1_1)$ 表示一个序数的可计算记号系统，其中包含一个表示稳定序数的常数 $\mathbb{S}$，以及针对有限函数 g 的坍缩函数 $\psi^g_\sigma(a)$，其中 $\mathrm{supp}(g) = \{d\}$ 对于一个 $d < \mathbb{K} = \mathbb{S}^+$，且 $g(d) < \varepsilon_{\mathbb{K}+1}$ 当 $\sigma = \mathbb{S}$。令 $m(\alpha) = g$ 对于$\alpha = \psi^g_\sigma(a)$ 和 $\sigma < \mathbb{S}$。对于 $g \neq \emptyset$，只有当 g 按如下方式由 $f = m(\sigma)$ 得到时， $\alpha = \psi^g_\sigma(a) \in OT(\Pi^1_1)$，参见推论 6.17。存在 c 和 d，使得 $d < c \in \mathrm{supp}(f)$，且 ($d\ c \cap f = \emptyset$ $g_d = f_d$ $d\ c \cap g = \emptyset$,) $\mathrm{supp}(\,)$。于是，(,) $\mathrm{supp}(\,)$ $g(d) < f(d) + \theta_{c-d}(f(c)) \cdot \omega$，并且 $g <^c f(c)$。

下文中，序数指 $OT(\Pi^1_1)$ 中的序数项。 $\Psi_{\mathbb{S}}$ 表示某些 a、f 和 $\sigma \in \Psi_{\mathbb{S}} \cup \{\mathbb{S}\}$ 所对应的序数项集合 $\psi^f_\sigma(a)$。注意，在 $OT(\Pi^1_1)$ 中， $\psi^f_\sigma(a)$ 仅当 $\sigma = \mathbb{K} = \mathbb{S}^+$ 和 $f = \emptyset$ 时才 $\geq \mathbb{S}$。

我们定义一个 Mostowski塌缩 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$，以便将稳定性的推理规则替换为反射规则。该塌缩的定义域 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 是 $E^{\mathbb{S}}_\rho$ 的子集 M_ρ。关于作此限制的原因，见第6.5小节开头。

定义 6.19 对序数项 $\psi^f_\sigma(a) \in \Psi_{\mathbb{S}} \subset OT(\Pi^1_1)$，定义 $m(\psi^f_\sigma(a)) := f$，以及 $s(\psi^f_\sigma(a)) := \max(\mathrm{supp}(f))$。此外，若 $\sigma < \mathbb{S}$，则 $\mathrm{p}_0(\psi^f_\sigma(a)) = \mathrm{p}_0(\sigma)$；而 $\mathrm{p}_0(\psi^f_{\mathbb{S}}(a)) = a$。

定义 6.20 $M_\rho := \mathcal{H}_b(\rho)$ 对于 $b = \mathrm{p}_0(\rho)$ 和 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。

$\alpha = \psi^g_\sigma(a) \in OT(\Pi^1_1)$ 仅当 $\{\sigma, a\} \subset \mathcal{H}_a(\alpha)$ 且 $SC_{\mathbb{K}}(g) \subset M_\alpha$ 时。

$OT(\Pi^1_1)$ 定义为对 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$ for $\alpha \in M_\rho$ 封闭。具体而言，若 $\{\alpha, \rho\} \subset OT(\Pi^1_1)$，且 $\alpha \in M_\rho$ 和 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$，则 $\alpha[\rho/\mathbb{S}] \in OT(\Pi^1_1)$。

命题 6.21 设 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。

1. $\mathcal{H}_\gamma(M_\rho) \subset M_\rho$ 当且仅当 $\gamma \leq \mathrm{p}_0(\rho)$。

2. $M_\rho \cap \mathbb{S} = \rho$ 且 $\rho \notin M_\rho$。 3. 若 $\sigma < \rho$ 且 $\mathrm{p}_0(\sigma) \leq \mathrm{p}_0(\rho)$，则 $M_\sigma \subset M_\rho$。

定义 6.22 设 $\alpha \in M_\rho$ 满足 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$。我们递归地定义一个序数 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 如下。 $\alpha[\rho/\mathbb{S}] := \alpha$ 当 $\alpha < \mathbb{S}$。下文中假设 $\alpha \geq \mathbb{S}$。

$\mathbb{S}[\rho/\mathbb{S}] := \rho$。 $\mathbb{K}[\rho/\mathbb{S}] \equiv (\mathbb{S}^+)[\rho/\mathbb{S}] := \rho^+$。 $(\psi_{\mathbb{K}}(a))\ [\rho/\mathbb{S}] = (\psi_{\mathbb{S}^+}(a))\ [\rho/\mathbb{S}] = \psi_{\rho^+}(a[\rho/\mathbb{S}])$。该映射与 $+$ 和 φ相交换。

引理 6.23 对于 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}}$, $\{\alpha[\rho/\mathbb{S}] : \alpha \in M_\rho\}$ 是M_ρ 的传递坍缩，其含义是 $\beta < \alpha \Leftrightarrow \beta[\rho/\mathbb{S}] < \alpha[\rho/\mathbb{S}]$, $\beta \in \mathcal{H}_\alpha(\gamma) \Leftrightarrow \beta[\rho/\mathbb{S}] \in \mathcal{H}_{\alpha[\rho/\mathbb{S}]}(\gamma[\rho/\mathbb{S}])$ 对于 $\gamma > \mathbb{S}$，且 $OT(\Pi^1_1) \cap \alpha[\rho/\mathbb{S}] = \{\beta[\rho/\mathbb{S}] : \beta \in M_\rho \cap \alpha\}$ 对于$\alpha, \beta, \gamma \in M_\rho$。

设 $\rho \leq \mathbb{S}$，且 ι 是一个 RS-项或一个 RS-公式，满足 $\mathrm{k}(\iota) \subset M_\rho$，其中 $M_{\mathbb{S}} = \mathbb{K}$。那么 $\iota^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 表示将每个无界量词 Qx 替换为 $Qx \in L_{\mathbb{K}[\rho/\mathbb{S}]}$，并将每个序数项 $\alpha \in \mathrm{k}(\iota)$ 替换为 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 后的结果；此处的 Mostowski 塌缩见定义 6.22。

命题 6.24 设 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}} \cup \{\mathbb{S}\}$。

1. 设 v 是一个 RS-项，满足 $\mathrm{k}(v) \subset M_\rho$，且 $\alpha = |v|$。那么 $v^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 是一个层级为 $\alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 的 RS-项，$\left|v^{[\rho/\mathbb{S}]}\right| = \alpha[\rho/\mathbb{S}]$，并且 $\mathrm{k}(v^{[\rho/\mathbb{S}]}) = (\mathrm{k}(v))^{[\rho/\mathbb{S}]}$。
2. 设 $\alpha \leq \mathbb{K}$ 满足 $\alpha \in M_\rho$。那么 $(Tm(\alpha))^{[\rho/\mathbb{S}]} := \{v^{[\rho/\mathbb{S}]} : v \in Tm(\alpha), \mathrm{k}(v) \subset M_\rho\} = Tm(\alpha[\rho/\mathbb{S}])$。3. 假设 $\mathcal{H}_\gamma(\rho) \cap \mathbb{S} \subset \rho$。对于一个 RS-公式 A，若 $\mathrm{k}(A) \subset \mathcal{H}_\gamma(\rho)$，则 $A^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 是一个 RS-公式，满足 $\mathrm{k}(A^{[\rho/\mathbb{S}]}) \subset \{\alpha[\rho/\mathbb{S}] : \alpha \in \mathrm{k}(A)\} \cup \{\mathbb{K}[\rho/\mathbb{S}]\}$。

对于每个句子 A，要么将析取指定为 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$，要么将合取指定为 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$。在前一种情况下， A 称为$\bigvee$公式；在后一种情况下， A 是 $\bigwedge$公式。

定义 6.25 令 $[\rho]Tm(\alpha) := \{u \in Tm(\alpha) : \mathrm{k}(u) \subset M_\rho\}$。

命题 6.26 令 $\rho \in \Psi_{\mathbb{S}} \cup \{\mathbb{S}\}$。对于 RS-公式 A，令 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$并假设 $\mathrm{k}(A) \subset M_\rho$。那么 $A^{[\rho/\mathbb{S}]} \simeq \bigvee \left((A_\iota)^{[\rho/\mathbb{S}]}\right)_{\iota \in [\rho]J}$。情形 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$ 类似。

6.5 Π11-反射的算子控制推导

我们定义一个可导出关系 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$，其中 Q_Π 是 $\Psi_\mathbb{S}$ 中的有限序数集，c 是推理规则 (stbl) 的秩以及切割公式的秩的上界。该关系依赖于一个序数 γ_0，应写作 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{c,\ \gamma_0}^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$。不过序数 γ_0 将固定不变。因此我们省略它。

演算 $\vdash_c^{*a}$ 的作用有两方面：首先，有限证明图嵌入该演算中；其次，$\vdash_c^{*a}$ 中的切割秩 c 降低到 $\mathbb{K} = \mathbb{S}^+$。在下一小节 6.6 中，可导出关系 $\vdash_c^{*a}$ 被嵌入另一个带有上界 ρ 的可导出关系 $\vdash_{c,\ e,\ b_1}^{a} A^{(\rho)}$ 中。在后一个演算中，切割秩 c 以及待反射公式的秩都降低到 $\mathbb{S}$，并且反射推理被移除。为此，我们需要区分秩较小的公式 $< \mathbb{S}$ 和秩较高的公式。

与引理 4.13 中一样，在消除反射推理时，

$$\frac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\rho)}, \neg\delta^{(\rho)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash \Gamma^{(\rho)}, \Delta^{(\sigma)}\}_\sigma}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash^a \Gamma^{(\rho)}}\ (\mathrm{rfl}_\rho)$$

被改写为，参见 Recapping 6.47

$$\dfrac{\dfrac{\{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \neg\theta^{(\kappa)}, \Gamma^{(\kappa)}\}_{\theta\in\Gamma} \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash \Gamma^{(\kappa)}, \Gamma^{(\sigma)}\}_\sigma}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\kappa)}}\ (\mathrm{rfl}_\kappa) \quad \vdots\ \rho \rightsquigarrow \sigma \quad \{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\sigma)}, \neg\delta^{(\sigma)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}] \vdash \Gamma^{(\kappa)}, \Delta^{(\sigma)}}{\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash \Gamma^{(\kappa)}}\ (cut) \quad \vdots\ \rho \rightsquigarrow \kappa$$

其中 $\sigma < \kappa < \rho$。改写时，推理 (rfl_ρ) 被替换为针对较小 $\kappa < \rho$ 的推理 (rfl_κ)。这意味着，在部分 $\rho \rightsquigarrow \sigma$ 中，(rfl_ρ) 被替换为 (rfl_σ)。κ 将 Γ 反射到某个 σ，而 σ 必须反射 Δ，其中 $\mathrm{rk}(\Delta) > \mathrm{rk}(\Gamma)$ 是可能的。因此，移除过程整体的终止性可通过对反射序数 ρ 的归纳法得出，参见引理 6.48。

在 $\kappa = \psi_\rho^g(\alpha)$ 中，Mahlo 度 $g = m(\kappa)$ 是通过一个下降步骤 $(f, d, c) \mapsto g$（或其迭代）得到的，其中 $f = m(\rho)$、$d < c \in \mathrm{supp}(f)$、$(d, \sim_c =) \cap \mathrm{supp}(f) \emptyset$，$g_d = f_d$、$(d, c) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$、$g(d) < f(d) + \theta_{c-d}(f(c)) \cdot \omega$，以及 $g <^c f(c)$。g 取决于 a, ρ 以及 $\mathrm{rk}(\Gamma^{(\rho)}) := \mathrm{rk}(\Gamma)$。在证明

$$SC_\mathbb{K}(g) \subset \mathcal{H}_\alpha(\kappa)$$

ρ 和 $\mathrm{rk}(\Gamma^{(\rho)})$ 无关紧要，因为它们涉及给定的序数 ρ；而序数 a 会造成麻烦，因为所有反射序数 $\rho, \ldots$ 都具有相同的推导序数深度 a。如果 $\rho = \psi_\sigma^f(\alpha_0)$，我们需要 $a \in \mathcal{H}_{\alpha_0}(\rho)$；如果 $\tau = \psi_\beta^h(\beta)$，则需要 $a \in \mathcal{H}_\beta(\tau)$，依此类推。这引出了集合 $M_\rho = \mathcal{H}_b(\rho)$，用于 $b = \mathrm{p}_0(\rho)$，其中 $\rho = \psi^f(\alpha_0)$，以及条件 (35)：a 和 $\ldots\psi_\mathbb{S}(b)$

推导中出现的序数应属于 M_ρ 每个反射序数ρ 推导中出现。注意，$M_\rho = \mathcal{H}_b(\rho) \subset \mathcal{H}_{\alpha_0}(\rho)$ 由 $b \le \alpha_0$ 得出，但$E_\rho^\mathbb{S} \not\subset \mathcal{H}_{\alpha_0}(\rho)$。这就是我们将 Mostowski塌缩 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}]$ 的定义域限制为 $\alpha \in M_\rho \subsetneq E_\rho^\mathbb{S}$ 的原因。

Q_Π 在 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$ 中，是在某个推理 (stbl) 的右上序列 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 中引入的序数集合，该推理用于下方 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$ 处出现的稳定性；而集合 $\Pi^{[\cdot]} = \bigcup\{\Pi_\sigma^{[\sigma/\mathbb{S}]} : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\}$ 则是公式 $\neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 的汇集。

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, B(u); \Pi^{[\cdot]} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_\sigma}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}} \text{ (稳定)}$$

这些内容促使我们给出以下定义 6.27、6.28 和 6.40。

定义 6.27 设 $\mathsf{Q} \subset \Psi_\mathbb{S}$ 是一个有限序数集，且 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$。定义 $M_\mathtt{Q} := \bigcap_{\sigma \in \mathtt{Q}} M_\sigma$,

$$[\mathtt{Q}]_A J := [\mathtt{Q}]_{\neg A} J := \{\iota \in J : \mathrm{rk}(A_\iota) \geq \mathbb{S} \Rightarrow \mathsf{k}(\iota) \subset M_\mathtt{Q}\}$$

$$\mathsf{k}^\mathbb{S}(\Gamma) := \bigcup\{\mathsf{k}(A) : A \in \Gamma, \mathrm{rk}(A) \geq \mathbb{S}\}$$

定义 6.28 设 Θ 是一个有限序数集，$\gamma \leq \gamma_0$ 和 a, c 序数[2]，且 $\mathsf{Q}_\Pi \subset \Psi_\mathbb{S}$ 是一个有限序数集，使得对于每个 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$，$\mathsf{p}_0(\sigma) \geq \gamma_0$。设 $\Pi = \bigcup\{\Pi_\sigma : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\} \subset \Delta_0(\mathbb{K})$ 是一个公式集合，使得对于每个 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$，$\mathsf{k}(\Pi_\sigma) \subset M_\sigma$，$\Pi^{[\cdot]} = \bigcup\{\Pi_\sigma^{[\sigma/\mathbb{S}]} : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\}$, $\Theta^{(\sigma)} = \Theta \cap M_\sigma$ 和 $\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi} = \Theta \cap M_{\mathtt{Q}_\Pi}$。

$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$ 当一组公式 Γ 满足以下条件时

$$\mathsf{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \,\&\, \forall \sigma \in \mathtt{Q}_\Pi \left(\mathsf{k}(\Pi_\sigma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\sigma)}]\right) \tag{34}$$

$$\{\gamma, a, c\} \cup \mathsf{k}^\mathbb{S}(\Gamma) \cup \mathsf{k}^\mathbb{S}(\Pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi}] \tag{35}$$

且以下情况之一成立：

($\bigvee$) [3] 存在 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个序数 $a(\iota) < a$ 以及一个 $\iota \in J$，使得$A \in \Gamma$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。

($\bigvee$)$^{[\cdot]}$ 存在 $A \equiv B^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$, $B \simeq \bigvee(B_\iota)_{\iota \in J}$、一个序数 $a(\iota) < a$ 以及一个 $\iota \in [\sigma]J$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}, A_\iota$ 且 $A_\iota \equiv B_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}$。

($\bigwedge$) 存在 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$、若干序数 $a(\iota) < a$，使得 $A \in \Gamma$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota); \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$ 对每个 $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_A J$ 均成立。

($\bigwedge$)$^{[\cdot]}$ 存在 $A \equiv B^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$, $B \simeq \bigwedge(B_\iota)_{\iota \in J}$，序数 $a(\iota) < a$ 使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota); \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma; A_\iota, \Pi^{[\cdot]}$ 对每个 $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_B J \cap [\sigma]J$。

(*cut*) 存在一个序数 $a_0 < a$ 和一个公式 C，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, \neg C; \Pi^{[\cdot]}$ 并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}, C$ 且 $\mathrm{rk}(C) < c$。

[2] 在第6.5小节中，我们可以令 $\gamma = \mathbb{S}$。[3] 推理 ($\bigvee$) 中不包含条件 (4)，$|\iota| < a$ 参见引理 6.44 中的情况 3。

(Σ-rfl) There exist ordinals $a_\ell, a_r < a$ and a formula $C \in \Sigma(\pi)$ for a $\pi \in \{\Omega, \mathbb{K} = \mathbb{S}^+\}$ such that $c \geq \pi$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_\ell} \Gamma, C; \Pi^{[\cdot]}$ and $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_r} \neg\exists x < \pi\, C^{(x,\pi)}, \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$.

(stbl) 存在一个序数 $a_0 < a$、一个 $\bigwedge$-公式 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$，以及一个 $u \in Tm\,\mathbb{K}$ $\mathbb{S} \leq B\,u < c$ $\mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ _\Pi \vdash_c^{*a_0}(),$ 满足以下条件: $\mathrm{rk}(\,(\,)), (,;$ $\Gamma\ B\ u\ \Pi^{[\cdot]}\ \Pi^{[\cdot]}\neg B\ u\ ^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ $\mathtt{Q}\,), (); ,$ 并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathtt{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma;,$ 对每个满足 $\Theta \subset M_\sigma$ 的序数 $\sigma \in \Psi_\mathbb{S}$，() 均成立。

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma\ \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, B(u); \Pi^{[\cdot]} \qquad \{(\mathcal{H}_\gamma\ \Theta \cup \{\sigma\}; \mathtt{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}, \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_{\Theta \subset M_\sigma}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}}\ \text{(stbl)}$$

Note that $(\Theta \cup \{\sigma\})_{\mathtt{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}} = \Theta_{\mathtt{Q}_\Pi}$ if $\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi} \subset M_\sigma$.

命题 6.29（重言式）设 $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\mathrm{k}(A)]$ 且 $d = \mathrm{rk}(A)$.

1. $(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A); \emptyset) \vdash_0^{*2d} \neg A, A; \emptyset$. 2. $(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d} \neg A^{[\sigma/\mathbb{S}]}; A^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 当 $\mathrm{k}(A) \subset M_\sigma$ 且 $\gamma \geq \mathbb{S}$ 时。

证明。两者都可通过对 d 作归纳法得到。考虑命题 6.29.2。

对于 (34) 和 (35)，有 $(\mathrm{k}(A) \cup \{\sigma\}) \cap M_\sigma = \mathrm{k}(A)$；对于 (34)，有 $\mathrm{k}(A^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \subset \mathcal{H}_\mathbb{S}((\mathrm{k}(A) \cap \mathbb{S}) \cup \{\sigma\})$。注意，由于 $\sigma \notin \mathrm{k}(A) \subset M_\sigma$ 且 $\gamma \leq \gamma_0 \leq \mathrm{p}_0(\sigma)$，因此 $\sigma \notin \mathcal{H}_\gamma[\mathrm{k}(A)]$，并且 $\mathrm{rk}(A^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \notin \mathcal{H}_\gamma[(\mathrm{k}(A) \cup \{\sigma\}) \cap M_\sigma]$。

令 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$。则由命题 6.26 可得 $A^{[\sigma/\mathbb{S}]} \simeq \bigvee(A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]})_{\iota \in [\sigma]J}$，且 $\mathrm{k}(\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \subset \mathcal{H}_\mathbb{S}[(\mathrm{k}(\iota) \cap \mathbb{S}) \cup \{\sigma\}]$。令 $I = \{\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]} : \iota \in [\sigma]J\}$。则对于 $\nu = \iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}$，有 $A^{[\sigma/\mathbb{S}]} \simeq \bigvee(B_\nu)_{\nu \in I}$，且根据 $\mathrm{rk}(A^{[\sigma/\mathbb{S}]}) < \mathbb{S}$，有 $[\{\sigma\}]_{A^{[\sigma/\mathbb{S}]}} I = I$。对于 $d_\iota = \mathrm{rk}(A_\iota) \in \mathcal{H}_\gamma[\mathrm{k}(A, \iota)]$，结合 $\iota \in [\sigma]J = [\{\sigma\}]_{A^{(\sigma)}} J$，我们得到

$$\frac{\dfrac{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A, \iota) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d_\iota} \neg A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}; A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}}{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A, \iota) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d_\iota+1} \neg A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}; A^{[\sigma/\mathbb{S}]}}\ (\bigvee)^{[\cdot]}}{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d} \neg A^{[\sigma/\mathbb{S}]}; A^{[\sigma/\mathbb{S}]}}\ (\bigwedge)$$

and

$$\frac{\dfrac{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A) \cup \mathrm{k}(\iota) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d_\iota} A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}; \neg A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}}{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A) \cup \mathrm{k}(\iota) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d_\iota+1} A^{[\sigma/\mathbb{S}]}; \neg A_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}}\ (\bigvee)}{(\mathcal{H}_\gamma, \mathrm{k}(A) \cup \{\sigma\}; \{\sigma\}) \vdash_0^{*2d} A^{[\sigma/\mathbb{S}]}; \neg A^{[\sigma/\mathbb{S}]}}\ (\bigwedge)^{[\cdot]}$$

□

引理 6.30（公理嵌入）对于每个公理 A in S_1，都存在一个 $m < \omega$，使得 $(\mathcal{H}_\mathbb{S}, \emptyset; \emptyset) \vdash_{\mathbb{K}+m}^{*\mathbb{K}\cdot 2} A;$ 对 $\mathbb{K} = \mathbb{S}^+$ 成立。

证明。我们证明，公理 $\exists x\, B(x, v) \wedge v \in L_\mathbb{S} \to \exists x \in L_\mathbb{S}\, B(x, v)$ ($B \in \Delta_0$) 可由推理 (stbl) 得出。在证明中，我们省略算子 $\mathcal{H}_\mathbb{S}$。设 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$ 是一个 $\bigwedge$-公式，且 $u \in Tm(\mathbb{K})$。我们可以假设 $\mathbb{K} > d = \mathrm{rk}(B(u)) \geq \mathbb{S}$。令 $\mathrm{k}_0 = \mathrm{k}(B(0))$，且 $\mathrm{k}_u = \mathrm{k}(u)$。令 $\mathrm{k}_0 \cup \mathrm{k}_u \subset M_{\sigma 0}$

于是，对于 $\exists x \in L_{\mathbb{S}}B(x) \simeq \bigvee(B(v))_{v\in J}$，由 $\mathsf{rk}(\exists x \in L_{\mathbb{S}}B(x)) = \mathbb{S}$，可得 $u^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in J = Tm(\mathbb{S})$。我们有 $B(u^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \equiv B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$，$\mathsf{k}_u^{[\sigma/\mathbb{S}]} = \mathsf{k}(u^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \subset \mathcal{H}_{\mathbb{S}}[\mathsf{k}(u) \cup \{\sigma\}]$，$(\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u)_\emptyset = \mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u$，以及 $(\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\sigma\}) \cap M_\sigma = \mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u$。

$$\dfrac{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u;\vdash_0^{*2d} \neg B(u), B(u); \quad \dfrac{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\sigma\}; \{\sigma\} \vdash_0^{*2d} B(u^{[\sigma/\mathbb{S}]}); \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}}{\{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\sigma\}; \{\sigma\} \vdash_0^{*2d+1} \exists x \in L_{\mathbb{S}}B(x); \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \subset M_\sigma}} (\bigvee)}{\dfrac{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u;\vdash_{\mathbb{K}}^{*\mathbb{K}} \neg B(u), \exists x \in L_{\mathbb{S}}B(x);}{\mathsf{k}_0;\vdash_{\mathbb{K}}^{*\mathbb{K}+1} \neg\exists x\, B(x), \exists x \in L_{\mathbb{S}}B(x);} (\bigwedge)} (\mathrm{stbl})$$

□

命题 6.31（反演）设 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$ with $A \in \Gamma$, $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_A J$ and $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$. 那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota); \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。

命题 6.32 设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$. 假设 $\Theta \subset M_\sigma$. 那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$。

证明。对 a 进行归纳法。由假设可得 $(\Theta \cup \{\sigma\})_{\mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}} = \Theta_{\mathsf{Q}_\Pi}$。在一次推理 (stbl) 中，右上序列被限制为 τ，使得 $\sigma \in M_\tau$。此外，由于 $[(\mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\})]_A J \subset [\mathsf{Q}_\Pi]_A J$，我们还需要在 $(\bigwedge)$ 和 $(\bigwedge)^{[\cdot]}$ 处剪去一些分支。□

命题 6.33（归约）设 $C \simeq \bigvee(C_\iota)_{\iota\in J}$ 且 $\mathbb{K} = \mathbb{S}^+ \leq \mathsf{rk}(C) \leq c$。假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma, \neg C; \Pi^{[\cdot]}$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*b} C, \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$。

则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a+b} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$。

证明。对 b 使用逆演算 6.31 和命题 6.32 进行归纳。

注意，若对于某个满足 $\mathsf{rk}(C_\iota) \geq \mathbb{K}$ 的 $\iota \in J$，有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*b(\iota)} C_\iota, \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$，则由 (35) 和命题 6.21（其中 $\gamma \leq \gamma_0 \leq \mathsf{p}_0(\sigma)$ 对应 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$），可得 $\mathsf{k}(C_\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S})}] \subset M_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S})}$。因此，若 $\mathsf{k}(\iota) \subset \mathsf{k}(C_\iota)$，则 $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_C J$。□

命题 6.34 $\mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \Pi \vdash_{c+1}^{*a} \Gamma$ $c \geq$。（切消去）
假设 $(\mathbb{S}^+ = \mathbb{K}, \Theta; \mathsf{Q})\Pi^{[\cdot]}$ 其中。那么 $(\mathcal{H}_\gamma, ; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*\omega^a} \Gamma;$。

证明。通过对 a 使用约化 6.33 进行归纳法即可得出。□

引理 6.35（坍缩）设 $\Gamma \subset \Sigma$ 是公式的集合，并且 $\Pi \subset \Delta_0(\mathbb{K})$。假设 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{\mathbb{K}}^{*a} \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$。令 $\beta = \psi_{\mathbb{K}}(\hat{a})$，其中 $\hat{a} = \gamma + \omega^a$。那么 $(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_\beta^{*\beta} \Gamma^{(\beta,\mathbb{K})}; \Pi^{[\cdot]}$ 成立。

证明。按照定理 1.22 中的方法对 a 进行归纳。由（35）可得 $\{\gamma, a\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi}]$，并且 $\beta \in \mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi}]$。

当最后一步推理是 (stbl) 时，令 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$ 为一个 $\bigwedge$-公式，$u \in Tm(\mathbb{K})$ 为一项，使得 $\mathbb{S} \leq \mathsf{rk}(B(u)) < \mathbb{K}$，$\mathsf{k}(B(u)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{\mathbb{K}}^{*a_0} \Gamma, B(u);\ \Pi^{[\cdot]}$ 对于某个序数 $a_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi}] \cap a$。于是得到 $\mathsf{rk}(B(u)) < \beta$。

考虑最后一步推理是在 $\mathbb{K}$ 上应用 (Σ-rfl) 的情形。存在序数 $a_\ell, a_r < a$ 和一个公式 $C \in \Sigma$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathrm{Q}_\Pi) \vdash^{*a_\ell}_{\mathbb{K}} \Gamma, C;\ \Pi^{[\cdot]}$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathrm{Q}_\Pi) \vdash^{*a_r}_{\mathbb{K}} \neg\exists x\, C^{(x,\mathbb{K})}, \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$。

令 $\beta_\ell = \psi_{\mathbb{K}}\,\widehat{a_\ell} \in \mathcal{H}_{\widehat{a_\ell}+1}[\Theta_{\mathrm{Q}_\Pi}] \cap \beta$ $\widehat{a_\ell} = \gamma + \omega^{a_\ell}$ $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}\ \Theta\ \Pi \vdash^{*\beta_\ell}_{\beta}(),$ 其中。归纳假设得出 $(, ; \mathrm{Q}),\ );$ 。
$\Gamma^{(\beta,\mathbb{K})}\ C^{(\beta_\ell,\mathbb{K}}\ \Pi^{[\cdot]}$ 6 31 Θ
另一方面，反演。得出 $(\quad \mathcal{H}_{\widehat{a_\ell}+1}\ \Pi \vdash^{*a_r}_{\mathbb{K}}, ; \mathrm{Q}));$ 。对于 $()$，其
$\neg C^{(\beta_\ell,\mathbb{K}}\ \Gamma\ \Pi^{[\cdot]}$ $\beta_r = \psi_{\mathbb{K}}\,\widehat{a_r} \in \mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta_{\mathrm{Q}_\Pi}] \cap \beta$ $\widehat{a_r} = \widehat{a_\ell} + \omega^{a_r}$
中，归纳假设得出 $(\quad \mathcal{H}_{\hat{a}+1}\ \Theta\ \Pi \vdash^{*\beta_r}_{\beta} \neg C^{(\beta_\ell,\mathbb{K}}\ \Gamma^{(\beta,\mathbb{K})}\ \Pi^{[\cdot]}$ $\mathcal{H}_{\hat{a}+1}\ \Theta\ \Pi \vdash^{*\beta}_{\beta}, ; \mathrm{Q}));$ 。我们通过一个 $()$
$\Gamma^{(\beta,\mathbb{K})}\ \Pi^{[\cdot]}$ *cut*
得到 $(, ; \mathrm{Q});$ 。

注意，由于 $\Pi \subset \Delta_0(\mathbb{K})$，推理 $(\bigwedge)^{[\cdot]}$ 对条件 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_{\mathbb{K}}(\gamma))$ 无害。□

6.6 带封顶的算子控制推导

在本小节中，我们引入另一种可导出关系 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{c,e,b_1} \Gamma$，它同样依赖于一个序数 γ_0，应写作 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{c,e,\gamma_0,b_1} \Gamma$。不过，序数 γ_0 将固定下来，并在定理 6.51 的证明中指定。因此我们暂且省略它。

通过在引理 6.44 中给公式加上上界 ρ，将推理规则 (stbl) 替换为推理 (rfl(ρ, d, f, b_1))。在 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_c$ 中，$_{e,b_1}\ \Gamma$, c 是切割秩的上界，e 是推导中出现的推理 (rfl(ρ, d, f, b_1)) 所涉及序数 ρ 的上界。b_1 是一个界，使得 $s(\rho) = \max(\mathrm{supp}(m(\rho))) \leq b_1$。尽管定义 6.36 中的带帽公式 $A^{(\rho)}$ 意在表示公式 $A^{[\rho/\mathbb{S}]}$，但我们需要将它与 $A^{[\rho/\mathbb{S}]}$ 区分开来。我们的主要任务是从所得推导 $\mathcal{D}_1$ 中消去推理 (rfl(ρ, d, f))。在重新封顶 6.47 中，推理 (rfl(ρ, d, f, b_1)) 的上界 ρ 被另一个上界 $\kappa < \rho$ 替代。在此过程中，会产生新的推理 (rfl(σ, d_1, f_1, b_1))，其满足 $\sigma < \kappa$。重复这一过程，我们便得到一个推导 $\mathcal{D}_2$，使得 $s(\rho) \leq \mathbb{S}$，即 $\mathrm{supp}(m(\rho)) \subset \mathbb{S} + 1$。此时上界便不起作用了，也就是说，对于 $A \in \Delta_0(\mathbb{S})$，$A^{(\rho)}$ 与 A “等价”。最后，通过引入上界并用一系列 (*cut*) 替换这些上界，从 $\mathcal{D}_2$ 中消去推理 (rfl(ρ, d, f, b_1))，参见引理 6.48。

序数，即阈值 γ_0 将在本节末尾给出。

定义 6.36 所谓带帽公式，是指由 *RS*-句公式 A和序数 $\rho < \mathbb{S}$ 组成的配对 (A, ρ)，满足 $\mathrm{k}(A) \subset M_\rho$。这样的配对记作 $A^{(\rho)}$。序列是带帽公式的有限集，记作 $\Gamma^{(\rho_0)}{}_0, \ldots, \Gamma^{(\rho_n)}{}_n$，其中集合 $\Gamma^{(\rho_i)}{}_i$ 中的每个公式都取上界 $\rho_i \in \mathbb{S}$。当我们写作 $\Gamma^{(\rho)}$时，默认假设 $\mathrm{k}(\Gamma) \subset M_\rho$。若带帽公式 $A^{(\rho)}$ 满足 $A \in \Sigma(\pi)$，则称其为 $\Sigma(\pi)$-公式。令 $\mathrm{k}(A^{(\rho)}) := \mathrm{k}(A)$。

定义 6.37 设 f 是一个非空（且不可约）的有限函数。若存在一个序数 α 使得 $f(c_{\max}) = \alpha + \mathbb{K}$ 对于$c_{\max} = \max(\mathrm{supp}(f))$，则称$f$为特殊。对于特殊有限函数 f，f'表示一个有限函数，使得 $\mathrm{supp}(f') = \mathrm{supp}(f)$，$f'(c) = f(c)$ 对于 $c \neq c_{\max}$，并且 $f'(c_{\max}) = \alpha$且$f(c_{\max}) = \alpha + \mathbb{K}$。

在 $f(c_{\max}) = \alpha + \mathbb{K}$ 中，序数 $\mathbb{K}$ 是一个可由更小序数替换的“空位”，参见定义 6.45。

定义 6.38 若有限集 $\mathrm{Q} \subset \Psi_{\mathbb{S}}$ 满足：对于序数γ_0 和 b_1 ， $\rho \in \mathcal{H}_{\gamma_0+\mathbb{S}} = \mathcal{H}_{\gamma_0+\mathbb{S}}(0)$， $m(\rho): \mathbb{K} \to \varphi_{\mathbb{K}}(0)$ 是特殊的，且$s(\rho) = \max(\mathrm{supp}(m(\rho))) \le b_1$ ，并且对每个 $\rho \in \mathrm{Q}$，$\mathrm{p}_0(\rho) \ge \gamma_0$ ，则称 $\mathrm{Q} \subset \Psi_{\mathbb{S}}$ 为一个有限族。

下述定义 6.39 中的消解类 $H_\rho(f, b_1, \gamma_0, \Theta)$ 是序数 $\sigma < \rho$ 的集合；这些序数是反射推理 $(\mathrm{rfl}(\rho, d, f, b_1))$ 中 ρ 的候选替代物。注意，若 $\mathrm{p}_0(\sigma) \le \mathrm{p}_0(\rho)$ 且 $\sigma < \rho$，则 $M_\sigma \subset M_\rho = \mathcal{H}_{\mathrm{p}_0(\rho)}(\rho)$。此外，若 $\mathrm{p}_0(\sigma) \ge \gamma_0 \ge \gamma$ 且 $\Theta \subset M_\sigma$，则$\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subset M_\sigma$ ，由命题 6.21 得出。

定义 6.39 $H_\rho(f, b_1, \gamma_0, \Theta)$ 表示有限函数f、序数 ρ, b_1, γ_0 以及有限序数集 Θ 的消解类，其定义为： $\sigma \in H_\rho(f, b_1, \gamma_0, \Theta)$ 当且仅当 $\sigma \in \mathcal{H}_{\gamma_0+\mathbb{S}} \cap \rho$, $SC_{\mathbb{K}}(m(\sigma)) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta]$, $\Theta \subset M_\sigma$, $\mathrm{p}_0(\sigma) = \mathrm{p}_0(\rho) \ge \gamma_0$，并且$m(\sigma)$ 是特殊的，使得 $s(f) = \max(\mathrm{supp}(f)) \le s(\sigma) \le b_1$ 且 $f' \le (m(\sigma))'$，其中 $f \le g \Leftrightarrow \forall i(f(i) \le g(i))$。

我们定义可导出关系 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{c,e} \Gamma$，其中 $\mathbb{S} \le \gamma \le \gamma_0$ 是一个序数， Θ 是一个有限序数集，Q 是关于 γ_0, b_1的有限族，而 $a, c < \mathbb{K} = \mathbb{S}^+$.$c$ 是切割秩的上界， e 是推理规则中 ρ 的上界（$\mathrm{rfl}(\rho, d, f, b_1)$ ）， b_1是关于 $s(\rho)$的上界。关系 $\vdash^a_{c,e}$ 取决于固定序数 γ_0 和 b_1。

对于 $d = \mathrm{rk}(A) < \mathbb{S}$，可能是 $\mathrm{k}(A) \cup \{d\} \not\subset M_{\mathtt{Q}}$。我们避免通过标准推导得出重言式 $\neg A, A$ ，以证明 $\vdash^{2d} \neg A, A$。

定义 6.40 令 $\Theta^{(\rho)} = \Theta \cap M_\rho$, $[\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J = [\mathrm{Q}]_A J \cap [\rho] J$, $\mathbb{S} \le \gamma \le \gamma_0$ 和 $e \in \mathcal{H}_{\gamma_0+\mathbb{S}}(0)$。

$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{c,e,\gamma_0,b_1} \Gamma$ 对于公式集合 $\Gamma = \bigcup\{\Gamma^{(\rho)}_\rho : \rho \in \mathrm{Q}\}$ 成立，当且仅当

$$\forall \rho \in \mathtt{Q} \left(\mathrm{k}(\Gamma_\rho) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}] \right) \tag{36}$$

$$\{\gamma, a, c, b_1\} \cup \mathrm{k}^{\mathbb{S}}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}] \tag{37}$$

并且下列情形之一成立：

(重言式) $\{\neg A^{(\rho)}, A^{(\rho)}\} \subset \Gamma$ 对于一个 $\rho \in \mathrm{Q}$ 和一个满足 $\mathrm{rk}(A) < \mathbb{S}$ 的公式 A。

($\bigvee$) 存在 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个上界 $\rho \in \mathrm{Q}$、一个序数 $a_\iota < a$ 和一个 $\iota \in [\rho] J$, 使得 $A^{(\rho)} \in \Gamma$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a_\iota}_{c,e,\gamma_0,b_1} \Gamma, (A_\iota)^{(\rho)}$。

注意，若 $\mathrm{rk}(A_\iota) \ge \mathbb{S}$，则根据 (37)，$\mathrm{k}(A_\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}] \subset M_{\mathtt{Q}}$ 。因此$\iota \in [\mathrm{Q}]_A J = \{\iota \in J : \mathrm{rk}(A_\iota) \ge \mathbb{S} \Rightarrow \mathrm{k}(\iota) \subset M_{\mathtt{Q}}\}$。

($\bigwedge$) 存在 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$，一个上界 $\rho \in \mathrm{Q}$，以及序数 $a_\iota < a$，对每个 $\iota \in [\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J$ 都有 $A^{(\rho)} \in \Gamma$，且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\iota), \mathrm{Q}) \vdash^{a_\iota}_{c,\ e,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$，$(A_\iota)^{(\rho)}$。

注意，如果 $\mathrm{rk}(A_\iota) \ge \mathbb{S}$，那么根据 $\iota \in [\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J$，$\mathrm{k}(\iota) \subset M_{\mathtt{Q}}$ 。因此，对于（37），$\mathrm{k}^{\mathbb{S}}(A_\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[(\Theta \cup \mathrm{k}(\iota))_{\mathtt{Q}}]$，其中 $(\Theta \cup \mathrm{k}(\iota))_{\mathtt{Q}} = \Theta_{\mathtt{Q}} \cup \mathrm{k}(\iota)$。

（cut）存在一个上界 $\rho \in \mathsf{Q}$、一个序数 $a_0 < a$ 和一个公式 C，使得（$\mathcal{H}_\gamma$、Θ、Q）$\vdash^{a_0}_{c,\ e,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$、$\neg C^{(\rho)}$，并且（$\mathcal{H}_\gamma$、$\Theta$、$\mathsf{Q}$）$\vdash^{a_0}_{c,\ e,\ \gamma_0,\ b_1} C^{(\rho)}$、$\Gamma$，且 $\mathrm{rk}(C) < c$。

(Σ-rfl(Ω)) 存在一个上界 $\rho \in \mathsf{Q}$、序数 $a_\ell, a_r < a$ 以及一个无上界公式 $C \in \Sigma(\Omega)$，使得 $c \geq \Omega$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^{a_\ell}_{c,\ e,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma, C^{(\rho)}$ 并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{a_r}_{c,e,\gamma_0,b_1} \neg\left(\exists x < \pi\, C^{(x,\Omega)}\right)^{(\rho)}, \Gamma$.

(rfl(ρ, d, f, b_1)) 存在一个上界 $\rho \in \mathsf{Q}$，使得 $\Theta \subset M_\rho$、序数 $d \in \mathrm{supp}(m(\rho))$、$a_0 < a$、一个特殊有限函数 f，以及一个由无上界公式组成的有限集 Δ，满足以下条件。

(r0) $\rho < e$ if $s(\rho) > \mathbb{S}$.

(r1) $\Delta \subset \bigvee(d) := \{\delta : \mathrm{rk}(\delta) < d, \delta \text{ is a } \bigvee\text{-formula}\} \cup \{\delta : \mathrm{rk}(\delta) < \mathbb{S}\}$.

(r2) For the special finite function $g = m(\rho)$, $s(f) \leq b_1$, $SC_{\mathbb{K}}(f, g) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}]$ and $f_d = g_d \,\&\, f^d <^d g'(d)$.

(r3) For each $\delta \in \Delta$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{a_0}_{c,e,\gamma_0,b_1} \Gamma, \neg\delta^{(\rho)}$.

(r4) $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_{c,e,\gamma_0,b_1} \Gamma, \Delta^{(\sigma)}$ holds for every $\sigma \in H_\rho(f, b_1, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$.

$$\frac{\{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{a_0}_{c,e} \Gamma, \neg\delta^{(\rho)}\}_{\delta\in\Delta} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_{c,e} \Gamma, \Delta^{(\sigma)}\}_{\sigma \in H_\rho(f,b_1,\gamma_0,\Theta^{(\rho)})}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{a}_{c,e} \Gamma}\ (\mathrm{rfl}(\rho, d, f, b_1))$$

Note that $(\Theta \cup \{\sigma\})_{\mathtt{Q}\cup\{\sigma\}} = \Theta_{\mathtt{Q}\cup\{\sigma\}} = \Theta_{\mathtt{Q}}$ by $\Theta^{(\rho)} \subset M_\sigma$ and $\rho \in \mathtt{Q}$.

$\{e\} \cup \mathsf{Q} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 不必成立。

假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^{a}_{c,\ e} \Gamma$ 成立，且满足 $A^{(\rho)} \in \Gamma$ 和 $\rho \in \mathsf{Q}$。根据 (36)，我们有 $\mathsf{k}(A) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}]$。由命题 6.21 可得 $\mathsf{k}(A) \subset M_\rho$。

在本小节中，序数 γ_0 和 b_1 将固定不变，并记 $\vdash^{a}_{c,e}$ 为 $\vdash^{a}_{c,e,\gamma_0,b_1}$。

命题 **6.41** $\{\gamma\} \cup A \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}]$ $\sigma \in A \subset$. (重言式) 设 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(\ )$ 且 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\sigma)}]$ $\mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \vdash^{2d}_{0\,0} \neg A^{(\sigma)}\ A^{(\sigma)}$ $d =$ $\{\mathbb{S},\ A\}$ $\mathsf{Q}, \mathsf{k}(\ )$。那么 $(\ ,\ ,\mathsf{Q})$., 对 max $\mathrm{rk}(\ )$ 成立。

证明。对 d 使用归纳法。设 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota\in J}$ 且 $\mathrm{rk}(A) \geq \mathbb{S}$。对于 $\iota \in [\mathsf{Q}]_{A^{(\sigma)}} J \subset [\sigma]J$，若 $\mathrm{rk}(A_\iota) < \mathbb{S}$，则令 $d_\iota = 0$。否则 $d_\iota = \max\{\mathbb{S}, \mathrm{rk}(A_\iota)\}$。在每种情况下，我们都有 $d_\iota < d$。由归纳假设可得

$$\frac{\dfrac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathtt{Q}) \vdash^{2d_\iota}_{0,0} \neg A^{(\sigma)}_\iota, A^{(\sigma)}_\iota}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathtt{Q}) \vdash^{2d_\iota+1}_{0,0} \neg A^{(\sigma)}_\iota, A^{(\sigma)}}\ (\bigvee)}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{2d}_{0,0} \neg A^{(\sigma)}, A^{(\sigma)}}\ (\bigwedge)$$

□

命题 6.42（反演）设 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$ 满足 $A^{(\rho)} \in \Gamma$ 且 $\mathrm{rk}(A) \geq \mathbb{S}$，$\iota \in [\mathsf{Q}]_{A^{(\rho)}} J$ 满足 $\rho \in \mathsf{Q}$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^{a}_{c,\ e} \Gamma$。则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathsf{Q}) \vdash^{a}_{c,\ e} \Gamma, A_\iota$。

命题 6.43（切消去）设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c+d,\ e} \Gamma$ 满足 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}] \ni c \geq \mathbb{S}$。则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^{\varphi_d(a)c,\ e} \Gamma$。

证明。对 d 作主归纳，并对 a 作辅助归纳，使用类似于约化 6.33 的方法并结合 (37)。注意，当 $\mathsf{rk}(C) \geq \mathbb{S}$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c,\ e} \Gamma, C$ 时，$\mathsf{rk}(C) \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}]$。□

引理 6.44（封顶）设 $\Gamma \cup \Pi \subset \Delta_0(\mathbb{K})$，其中 $\Pi = \bigcup\{\Pi_\sigma : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\}$。假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a}_{c,\ \gamma_0} \Gamma$；$\Pi^{[\cdot]}$ 对于 $a, c < \mathbb{K}$ 以及 $\Pi^{[\cdot]} = \bigcup\{\Pi^{[\sigma/\mathbb{S}]}_\sigma : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\}$ 均成立。设 $\rho = \psi^g_{\mathbb{S}}(\gamma_1)$ 是一个序数，使得 $\mathsf{Q}_\Pi \subset \rho$，

$$\Theta \subset M_\rho \tag{38}$$

并且 $g = m(\rho)$ 是一个特殊有限函数，使得 $\mathsf{supp}(g) = \{c\}$ 且 $g(c) = \alpha_0 + \mathbb{K}$，其中 $\mathbb{K}(2a+1) \leq \alpha_0 + \mathbb{K} \leq \gamma_0 \leq \gamma_1$ 且 $\{\gamma_1, c, \alpha_0\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \cap \mathcal{H}_{\gamma_0}$，并且对于每个 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$，$\mathsf{p}_0(\sigma) \leq \mathsf{p}_0(\rho) = \gamma_1$。设 $\widehat{\Gamma} = \bigcup\{A^{(\rho)} : A \in \Gamma\}$, $\widehat{\Pi} = \bigcup\{\Pi^{(\sigma)}_\sigma : \sigma \in \mathsf{Q}_\Pi\}$ 且 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\rho\}$。

那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c,\ \rho+1,\ \gamma_0,\ c} \Gamma, \Pi$ 对 $\Theta_\Pi = \Theta \cup \mathsf{Q}_\Pi$ 成立。

证明。对 a 作归纳法。证明中记 $\vdash^a_c$ 为 $\vdash^a_{c,\ \rho+1,\ \gamma_0,\ c}$。根据假设，我们有 $\Theta \subset M_\rho$ 和 $\mathsf{Q}_\Pi \subset \rho$。因此 $\Theta = \Theta^{(\rho)}$ 且 $\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi} = \Theta_{\mathtt{Q}}$。另一方面，我们有 $\mathsf{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，并且对于 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$，根据（34）有 $\mathsf{k}(\Pi_\sigma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\sigma)}]$。因此（36）成立。根据（35），我们有 $\{\gamma, a, c\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi}]$。因此（37）成立。此外，我们有 $SC_{\mathbb{K}}(g) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subset M_\rho$。

情形 1。首先考虑最后一步推理为 (stbl) 的情形：

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a_0}_c \Gamma, B(u);\ \Pi^{[\cdot]} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash^{*a_0}_c \Gamma;\ \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}\}_{\Theta \subset M_\sigma}(\mathrm{stbl})}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash^{*a}_c \Gamma; \Pi^{[\cdot]}}$$

注意，公式 $B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 可能属于 Γ，参见 Embedding 6.30。σ属于 $\Theta \cup \{\sigma\}$ 保证了 $\mathsf{k}(B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta \cup \{\sigma\}]$ 属于 (34)。这解释了 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^a_c \Gamma, \Pi$ 中额外集合 Q_Π 的由来，而这一加法会妨碍在 (37) 中进行 $a \in \Theta_{\mathtt{Q}}$。

我们有一个序数 $a_0 < a \quad \bigwedge \quad B\ 0 \in \Delta_0\ \mathbb{S} \quad u \in$、一个 -公式 $Tm\ \mathbb{K}\ \mathbb{S} \leq B\ u < c \quad \mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \Pi \vdash^{*a_0} \Gamma\ B\ u\ \Pi^{[\cdot]}$ ( ) ( )，以及一项 ( )，使得 $\mathsf{rk}(\ (\ ))$。我们有 (, ; Q) , ( ); 。$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^{a_0}_c \widehat{\Gamma}, (B(u))^{(\rho)}, \widehat{\Pi}$ 由归纳假设得出。

另一方面，对于满足 $\Theta \subset M_\sigma$ 的每个序数 σ，我们有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\sigma\}) \vdash^{*a_0}_c \Gamma; \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}$。

设 h 是一个特殊有限函数，使得 $\mathsf{supp}(h) = \{c\}$ 且 $h(c) = \mathbb{K}(2a_0 + 1)$。那么，根据 $h(c) = \mathbb{K}(2a_0 + 1) < \mathbb{K}(2a) \leq \alpha_0 = g'(c)$，有 $h_c = g_c = \emptyset$ 和 $h^c <^c g'(c)$。设 $\sigma \in H_\rho(h, c, \gamma_0, \Theta)$。例如，$\sigma = \psi^h_\rho(\gamma_1 + \eta)$，其中 $\eta = \mathsf{max}(\{1\} \cup E_{\mathbb{S}}(\Theta))$，且 $E_{\mathbb{S}}(\Theta) = \bigcup_{\alpha \in \Theta} E_{\mathbb{S}}(\alpha)$，其子项集合为 $E_{\mathbb{S}}(\alpha) < \mathbb{S}$，属于 α。我们由此得到 $\Theta \subset \mathcal{H}_{\gamma_1}(\sigma) = M_\sigma$，根据 $\Theta \subset M_\rho$，并且 $\{\gamma_1, c, a_0\} \subset \mathcal{H}_{\gamma_1}[\Theta] \subset \mathcal{H}_{\gamma_1}(\sigma)$。

对于（37），我们有 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(B(u)) = \mathsf{k}(B(u)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}}] \subset M_\sigma$，而 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi \cup \{\sigma\}, \mathsf{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_c \widehat{\Gamma}, \neg B(u)^{(\sigma)}, \widehat{\Pi}$ 根据带有 $\sigma \in M_\rho$ 的归纳假设得出。由于这对

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$每个这样的 σ 都成立，我们得到（$\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}$）$\vdash^a_{c,\rho+1} \Gamma, \Pi$，通过一次推理 (rfl($\rho, c, h, c$))，其中 rk($B(u)$) $< c \in$ 支集 ($m(\rho)$)。在下图中，我们省略算子 $\mathcal{H}_\gamma$。

$$\frac{(\Theta_\Pi, \mathtt{Q}) \vdash^{a_0}_c \widehat{\Gamma}, B(u)^{(\rho)}, \widehat{\Pi} \quad \{(\Theta_\Pi \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_c \widehat{\Gamma}, \neg B(u)^{(\sigma)}, \widehat{\Pi}\}_\sigma}{(\Theta_\Pi, \mathtt{Q}) \vdash^a_c \widehat{\Gamma}, \widehat{\Pi}} \ (\mathrm{rfl}(\rho, c, h, c))$$

情形 2。倒数第二步推理引入了一个 $\bigvee$公式 A。
情况 2.1。首先，设 $A \in \Gamma$ 由一个（$\bigvee$）引入，且 $A \simeq \bigvee$（A_ι）$_{\iota \in J}$。存在一个 $\iota \in J$ 序数 a（ι）$< a$，使得（$\mathcal{H}_\gamma$, Θ; Q_Π）$\vdash^{*a(\iota)}_c \Gamma$, A_ι; $\Pi^{[\cdot]}$。设 k（ι）$\subset$ k（A_ι）。由（34），$\Theta \subset M_\rho$ 和 $\gamma \le \gamma_0 \le \gamma_1$，可得 k（$\iota$）$\subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subset M_\rho$。因此 $\iota \in [\rho]J$。归纳假设推出（$\mathcal{H}_\gamma$, Θ_Π, Q）$\vdash^{a(\iota)}_c \widehat{\Pi}$, $\widehat{\Gamma}$, （A_ι）$^{(\rho)}$。由一个（$\bigvee$）可得（$\mathcal{H}_\gamma$, Θ_Π, Q）$\vdash^a_c \widehat{\Pi}$, $\widehat{\Gamma}$。
情况 2.2。第二个 $A \equiv B^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$ 由一个 $(\bigvee)^{[\cdot]}$ 引入，其中包含 $B^{(\sigma)} \in \widehat{\Pi}$和 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$。令 $B \simeq \bigvee (B_\iota)_{\iota \in J}$。于是 $A \simeq \bigvee \left(B_\iota^{[\sigma,\mathbb{S}]}\right)_{\iota \in [\sigma]J}$根据命题 6.26。存在一个 $\iota \in [\sigma]J$和一个序数 $a(\iota) < a$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{a(\iota)}_c \Gamma$; $B_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}$ 对于 $A_\iota \equiv B_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}$。归纳假设推出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^{a(\iota)}_c \widehat{\Pi}, \widehat{\Gamma}, (B_\iota)^{(\sigma)}$。我们$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$通过一个 $(\bigvee)$ 得到 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^a_c \Pi, \Gamma$。
情况 3. 第三种情况是，最后一步推理引入了一个 $\bigwedge$公式 A。
情况 3.1. 首先，令 $A \in \Gamma$ 由一个 $(\bigwedge)$ 引入，并且 $A \simeq \bigwedge (A_\iota)_{\iota \in J}$。对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_A J$，都存在一个 $a(\iota) < a$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\iota); \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a(\iota)}_c \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。

归纳假设给出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi \cup \mathrm{k}(\iota), \mathsf{Q}) \vdash^{a(\iota)}_c \widehat{\Pi}, \widehat{\Gamma}, (A_\iota)^{(\rho)}$，对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}]_{A^{(\rho)}} J \subset [\mathsf{Q}_\Pi]_A J$ 均成立，其中 $\mathrm{k}(\iota) \subset M_\rho$。我们通过一个 $(\bigwedge)$ 得到 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^a_c \Pi, \Gamma$。
情况 3.2. 第二种情况是，$A \equiv B^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$ 由一个 $(\bigwedge)^{[\cdot]}$ 引入，且满足 $B^{(\sigma)} \in \widehat{\Pi}$ 和 $\sigma \in \mathsf{Q}_\Pi$。令 $B \simeq \bigwedge (B_\iota)_{\iota \in J}$，且满足 $A \simeq \bigwedge \left(B_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}\right)_{\iota \in [\sigma]J}$。对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}_\Pi]_B J \cap [\sigma]J$，都存在一个序数 $a(\iota) < a$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\iota); \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a(\iota)}_c \Gamma$; $A_\iota, \Pi^{[\cdot]}$，对于 $A_\iota \equiv B_\iota^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 均成立。归纳假设给出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi \cup \mathrm{k}(\iota), \mathsf{Q}) \vdash^{a(\iota)}_c \widehat{\Pi}, \widehat{\Gamma}, (B_\iota)^{(\sigma)}$，对于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$每个 $\iota \in [\mathsf{Q}]_{B^{(\sigma)}} J \subset [\mathsf{Q}_\Pi]_B J \cap [\sigma]J$ 均成立，其中 $\mathrm{k}(\iota) \subset M_\sigma \subset M_\rho$。$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash^a_c \Pi, \Gamma$ 可由一个 $(\bigwedge)$ 得出。

关于 Ω 的其他情形 (cut) 或 (Σ-rfl) 可由归纳假设得出。 □

6.7 消除推理 (rfl)

在本小节中，将从 Ω 上 Σ_1 句子的算子控制推导 θ^{L_Ω} 中移除 (rfl(ρ, c, γ))。

定义 6.45 对于特殊有限函数 g 和序数 $a < \mathbb{K}$、$b < c_{\max} =$，若 max(supp(g)) $< \mathbb{K}$，定义特殊有限函数 $h = h^b(g; a)$ 如下。max(supp(h)) $= b$，且 $h_b = g_b$。为定义 $h(b)$，令 $\{b = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = c_{\max}\} = \{b, c_{\max}\} \cup ((b, c_{\max}) \cap$ supp(g))。递归地定义序数 α_i：令 $\alpha_n = \alpha + a$，其中 $g(c_{\max}) = \alpha + \mathbb{K}$。对于 $c_i = b_{i+1} - b_i$，$\alpha_i = g(b_i) + \theta_{c_i}(\alpha_{i+1})$。最后令 $h(b) = \alpha_0 + \mathbb{K}$。

命题 6.46 设 f 和 g 为特殊有限函数，且 $c_{\max} = \max(\mathrm{supp}(g))$。

1. 设 $b < e < c_{\max}$ 和 $a_0, a_1 < a$。那么 $h^b(h^e(g;\, a_0);\, a_1) \leq (h^b(g;\, a))'$。

2. 假设对于某个 $d \in \mathrm{supp}(g)$，有 $f <^d g'(d)$。设 $b < d$。那么 $f_b = (h^b(g;\, a))_b$ 和 $f <^b (h^b(g;\, a))'(b)$。

回忆一下，$s(\rho) = \max(\mathrm{supp}(m(\rho)))$。

引理 6.47（重新封顶）
设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c_1,\ e,\ \gamma_0,\ b_2} \Pi, \widehat{\Gamma}$ 为一个有限族 Q，对 γ_0, b_2，$\mathsf{Q}^t \subset \mathsf{Q}$，$\forall \rho \in \mathsf{Q}^t (s(\rho) > \mathbb{S})$ 且 $\mathsf{Q}^f = \mathsf{Q} \setminus \mathsf{Q}^t$, $\Gamma \cup \Pi \subset \Delta_0(\mathbb{K})$，$\widehat{\Gamma} = \bigcup\{\Gamma^{(\rho)}_\rho :\ \rho \in \mathsf{Q}^t\}$，其中每个 $\theta \in \Gamma$ 要么是一个 $\bigvee$-公式，要么 $\mathrm{rk}(\theta) < \mathbb{S}$，并且 Π 是公式的一个集合，使得对于每个 $A^{(\tau)} \in \Pi$，$\tau \in \mathsf{Q}^f$。

令 $\max\{s(\rho) :\ \rho \in \mathsf{Q}^t\} \leq b_1$。对于每个 $\rho \in \mathsf{Q}^t$，令 $\mathbb{S} \leq b^{(\rho)} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}]$ with $\mathrm{rk}(\Gamma_\rho) < b^{(\rho)} < s(\rho)$，且 $\kappa(\rho) \in H_\rho(h^{b^{(\rho)}}(m(\rho);\, \omega(b_1, a))\ b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$，其中 $\omega(b, a) = \omega^{\omega^b} a$。假设 $b_1 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}}]$。

则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1,a)}_{c_{b_1},\ e^\kappa,\ \gamma_0,\ b_2} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa$ 成立，其中 $\mathsf{Q}(\kappa) = \mathsf{Q}^f \cup \{\kappa(\rho) :\ \rho \in \mathsf{Q}^t\}$, $c_{b_1} = \max\{c_1, b_1\}$, $e^\kappa = \max(\{\tau \in \mathsf{Q}^f :\ s(\tau) > \mathbb{S}\} \cup \{\kappa(\rho) :\ \rho \in \mathsf{Q}^t\}) + 1$, $\widehat{\Gamma}_\kappa = \bigcup\{\Gamma^{(\kappa(\rho))}_\rho :\ \rho \in \mathsf{Q}^t\}$。

$e^\kappa < e$ 当 $\mathsf{Q}^t = \{\rho \in \mathsf{Q} :\ s(\rho) > \mathbb{S}\} \neq \emptyset$ 时成立。

证明。我们通过对 b_1 进行主归纳，并对 a 进行辅助归纳来证明该引理。证明中省略下标 γ_0、b_2。由假设和 ( )，我们得到 $\{\gamma, b_1, a, c_1\} \cup \mathsf{k}^{\mathbb{S}}($ $\Pi\ \Gamma\ \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}}]$ 37 $\{\gamma, \omega\ b_1\ a\ \ c_{b_1}\} \cup$ $\Pi\ \Gamma\ \subset$,)。于是 (,) $\mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}(\kappa)}]$ $\Theta^{(\rho)} \subset M_{\kappa(\rho)}$ $\rho \in$ ^{t} 37 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}$(,), 因为对每个 Q 都如此。因此，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1,a)}_{c_{b_1},\ e,\ \gamma_0,\ b_2} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa$ 中成立 ( )。

令 $\rho \in \mathsf{Q}^t$。我们有 $b^{(\rho)} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}]$, $SC_{\mathbb{K}}(m(\rho)) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}]$ 以及 $\Theta^{(\rho)} \subset M_{\kappa(\rho)}$。由此得到 $SC_{\mathbb{K}}(h^{b^{(\rho)}}(m(\rho);\, \omega(b_1, a))) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}]$。此外，我们有 $SC_{\mathbb{K}}(m(\kappa(\rho))) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}] \subset M_{\kappa(\rho)}$。

考虑最后一步推理为某个 $\rho \in \mathsf{Q}$ 的 $(\mathrm{rfl}(\rho, d, f, b_2))$ 的情形。$\rho \in \mathsf{Q}^f$ 的情形由 SIH 得出。设 $\rho \in \mathsf{Q}^t$。令 $b = b^{(\rho)}$, $g = m(\rho)$, $b_1 \geq s(\rho) \geq d \in \mathrm{supp}(g)$, $\kappa = \kappa(\rho)$, $\Gamma = \Gamma_\rho$, $\widehat{\Lambda} = \bigcup_{\rho \neq \tau \in \mathsf{Q}^t}\{\Gamma^{(\tau)}_\tau\}$, 且 $\widehat{\Lambda}_\kappa = \bigcup_{\rho \neq \tau \in \mathsf{Q}^t}\{\Gamma^{\kappa(\tau)}_\tau\}$。我们有一个序列 $\Delta \subset \bigvee(d)$，使得 $\mathrm{rk}(\Delta) < d \leq s(\rho) \leq b_1$，并且根据 (37) 有 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(\Delta) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}}] \subset M_{\mathsf{Q}}$，根据 $\Theta_{\mathsf{Q}} = \Theta_{\mathsf{Q}(\kappa)}$ 有 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(\Delta) \subset M_{\mathsf{Q}(\kappa)}$。存在一个序数 $a_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}}] \cap a$，使得对每个 $\delta \in \Delta$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^{a_0}_{c_1, e} \Pi, \widehat{\Lambda}, \Gamma^{(\rho)}, \neg\delta^{(\rho)}$。对于每个 $\mathrm{rk}(\delta) \geq \mathbb{S}$ 的 $\delta \in \Delta \subset \bigvee(d)$，我们有 $\delta \simeq \bigvee(\delta_\iota)_{\iota \in J}$。令 $b_0 = \max(\{\mathbb{S}\} \cup \{\mathrm{rk}(\delta) :\ \delta \in \Delta\})$。那么 $s(\rho) > b_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}}]$。由反演 6.42 可得，对于 $\mathrm{rk}(\delta) \geq \mathbb{S}$

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathsf{Q}) \vdash^{a_0}_{c_1, e} \Pi, \widehat{\Lambda}, \Gamma^{(\rho)}, \neg(\delta_\iota)^{(\rho)} \tag{39}$$

对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}]_{\delta^{(\rho)}} J$，其中 $J \subset Tm(b_0)$ 和 $\neg\delta_\iota \in \bigvee(b_0)$ 由 $\mathrm{rk}(\delta_\iota) < \mathrm{rk}(\delta)$ 决定。

另一方面，对于每个 $\sigma \in H_\rho(f, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_{c_1,e} \Pi, \widehat{\Lambda}, \Gamma^{(\rho)}, \Delta^{(\sigma)} \tag{40}$$

f 是一个特殊有限函数，使得 $s(f) \leq b_2$, $f_d = g_d$, $f^d <^d g'(d)$ 且$SC_{\mathbb{K}}(f) \subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}]$。令 $(\mathsf{Q} \cup \{\sigma\})^f = \mathsf{Q}^f \cup \{\sigma\}$。

情形 1。 $b_0 < b$: 则 $\mathsf{rk}(\Delta) < b_0$。令 $\mathsf{rk}(\delta) \geq \mathbb{S}$。由 (39)，利用带有 $b > b_0 \geq \mathbb{S}$ 的 SIH，我们得到 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathsf{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1,a_0)}_{c_{b_1},e^\kappa} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\kappa)}, \neg(\delta_\iota)^{(\kappa)}$ 对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}(\kappa)]_{\delta^{(\kappa)}} J \subset [\mathsf{Q}]_{\delta^{(\rho)}} J$。一个推理 ($\bigwedge$) 得到

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1,a_0)+1}_{c_{b_1},e^\kappa} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\kappa)}, \neg\delta^{(\kappa)} \tag{41}$$

此外，SIH 对于 $\mathsf{rk}(\delta) < \mathbb{S}$ 给出 (41)。令 $d_1 = \min\{b, d\}$。那么，根据 $b > b_0$, $\Delta \subset \bigvee(d_1)$。

我们断言，对于特殊有限函数 $h = h^b(g;\, \omega(b_1, a))$,

$$f_{d_1} = h_{d_1} \,\&\, f^{d_1} <^{d_1} h'(d_1) \tag{42}$$

若 $d_1 = d \leq b$，则 $h_d = g_d$ 和 $g'(d) = g(d) \leq h'(d)$。由命题 6.5 得到该断言。若 $d_1 = b < d$，则由命题6.46.2 得到该断言。

另一方面，对于每个 $\sigma \in H_\kappa(f, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)}) \subset H_\rho(f, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$，由 (40) 和 SIH 可得,

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q}(\kappa) \cup \{\sigma\}) \vdash^{\omega(b_1,a_0)}_{c_{b_1},e^\kappa} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\kappa)}, \Delta^{(\sigma)} \tag{43}$$

对于 (r0)，我们有 $\kappa = \kappa(\rho) < \kappa(\rho) + 1 \leq e^\kappa$。根据 (42)、(41) 和 (43) 作推理 $(\mathsf{rfl}(\kappa, d_1, f, b_2))$，可得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1,a_0)}_{c_{b_1},\ e^\kappa} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\kappa)}$，其中 $d_1 \in \mathsf{supp}(m(\kappa))$，且 $\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(\Delta) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}(\kappa)}]$。

情形 2. $b \leq b_0$: 当 $b = b_0$ 时，令 $\tau = \kappa_\circ$ 当 $b < b_0$ 时，令 $\tau \in H_\rho(h, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$ 满足 $\kappa < \tau$ 且 $m(\tau) = h = h^{b_0}(g;\, a_1)$，其中 $a_1 = \omega(b_1, a_0) + 1$。

令 $\sigma \in H_\tau(f, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$。由 (40) 和 $b_0 < s(\rho)$，根据归纳假设可得

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{Q}_\tau \cup \{\sigma\}) \vdash^{\omega(b_1,a_0)}_{c_{b_1},e^\tau} \Delta^{(\sigma)}, \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\tau)} \tag{44}$$

其中 $\mathsf{Q}_\tau = \mathsf{Q}^f \cup \{\kappa(\lambda) :\ \rho \neq \lambda \in \mathsf{Q}^t\} \cup \{\tau\}$，且 $e^\tau = \max(\{\lambda \in \mathsf{Q}^f :\ s(\lambda) >^{\mathbb{S}}\} \cup \{\kappa(\lambda) :\ \rho \neq \lambda \in \mathsf{Q}^t\} \cup \{\tau\}) + 1$。令 $\sigma \in R := \{\sigma \in H_\tau(f, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)}) : (m(\sigma))' \geq (h^{b_0}(g;\, \omega(b_1, a_0)))'\}$。我们看到 $\sigma \in H_\rho(h^{b_0}(g;\, \omega(b_1, a_0))\ b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$。此外，若 $\mathsf{rk}(\delta) \geq \mathbb{S}$，则 $\mathsf{rk}(\neg\delta_\iota) < b_0$；若 $\mathsf{rk}(\delta) < \mathbb{S} \leq b_0$，则 $\mathsf{rk}(\neg\delta) < b_0$。

对于每个 $\iota \in [\mathsf{Q}]_{\delta^{(\rho)}} J$ 以及 $\mathsf{rk}(\delta) \geq \mathbb{S}$，由 $\mathsf{rk}(\neg\delta_\iota) < b_0$、SIH 和 (39)，我们得到 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathsf{Q}_\sigma) \vdash^{\omega(b_1,a_0)}_{c_{b_1},e^\sigma} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\sigma)}, \neg(\delta_\iota)^{(\sigma)}$，其中 $\mathsf{Q}_\sigma \cup \{\tau\} = \mathsf{Q}_\tau \cup \{\sigma\}$。一个 ($\bigwedge$) 得出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}_\sigma) \vdash^{\omega(b_1,a_0)+1}_{c_{b_1},e^\sigma} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\sigma)}, \neg\delta^{(\sigma)}$。当 $\mathsf{rk}(\delta) < \mathbb{S}$ 时，这由 SIH 得出。此外，由 $\tau > \sigma$ 可得 $M_{\mathtt{Q}_\sigma} = M_{\mathtt{Q}_\sigma \cup \{\tau\}}$ 和 $e^\sigma \leq e^\tau$。因此

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}_\tau \cup \{\sigma\}) \vdash^{\omega(b_1,a_0)+1}_{c_{b_1},e^\tau} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\sigma)}, \neg\delta^{(\sigma)} \tag{45}$$

由 (44) 和 (45)，经过若干次 δ 的 (cut)，且 $\mathrm{rk}(\delta) < d \leq b_1 \leq c_{b_1}$，我们对一个 $p < \omega$ 得到：

$$\forall \sigma \in R \left[(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathbb{Q}_\tau \cup \{\sigma\}) \vdash_{c_{b_1}, e^\tau}^{\omega(b_1, a_0)+p} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\sigma)}, \Gamma^{(\tau)} \right] \tag{46}$$

另一方面，根据 ()，我们有 $r = \{\mathbb{S}, \quad \Gamma\} \leq b < b_1 \quad \Gamma \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathbb{Q}}] = \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathbb{Q}_\tau}] \subset M_{\mathbb{Q}_\tau} \quad 37 \quad \Theta_{\mathbb{Q}} = \Theta_{\mathbb{Q}_\tau} \quad \Theta^{(\rho)} \subset M_\tau \quad 6\ 41$ $\max \mathrm{rk}(\,)$ 和 $\mathrm{k}^{\mathbb{S}}(\,)$，其中由 . 重言式 . 得出，对于每个 $\theta \in \Gamma$

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}_\tau) \vdash_{0,0}^{2r} \Gamma^{(\tau)}, \neg\theta^{(\tau)} \tag{47}$$

定义有限函数 h，使得 $\mathrm{supp}(h) = \mathrm{supp}(g_{b_0}) \cup \mathrm{supp}(f^{b_0+1}) \cup \{b_0\}$,$h_{b_0} = g_{b_0}$且 $h^{b_0+1} = f^{b_0+1}$。令 $(h^{b_0}(g;\ \omega(b_1, a_0)))(b_0) = \alpha + \mathbb{K}$。那么，如果 $f^{b_0+1} \neq \emptyset$，则 $h(b_0) = \alpha$。否则， $h(b_0) = \alpha + \mathbb{K}$。我们看到 $R = H_\tau(h, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$，并且$h^{b_0} <^{b_0} (m(\tau))'(b_0)$。

通过推理 ($\mathrm{rfl}(\tau, b_0, h, b_2)$)，其消解类为 $R = H_\tau(h, b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$ 和 $\Gamma \subset \bigvee(b_0)$，由 (47) 和 (46) 可得，对于 $\mathrm{rk}(\Gamma)$， $< b \leq b_0 \leq s(\tau)$

$$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}_\tau) \vdash_{c_{b_1}, e^\tau}^{a_2} \Pi, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma^{(\tau)} \tag{48}$$

其中 $a_2 = \max\{2r, \omega(b_1, a_0) + p\} + 1 < \omega(b_1, a) = \omega^{\omega^{b_1}} a_\circ$ 若 $b_0 = b$，则证毕。以下假设 $b < b_0$。由 $b_0 < b_1$，有 $a_1 < \omega(b_1, a)$ 和 $\omega(b_0, a_2) = \omega^{\omega^{b_0}} a_2 < \omega(b_1, a)$。此外，命题 6.46.1 对于 $m(\tau) = h^{b_0}(g;\ a_1)$ 给出 $(h^b(m(\tau);\ \omega(b_0, a_2)))' = (h^b(h^{b_0}(g;\ a_1);\ \omega(b_0, a_2)))' \leq (h^b(g;\ \omega(b_1, a)))'$。

令 $(\mathbb{Q}_\tau)^t = \{\tau\}$ 且 $\kappa(\tau) = \kappa(\rho) = \kappa_\circ$ 则 $(e^\tau)^\kappa = \max(\{\lambda \in (\mathbb{Q}_\tau)^f: s\ \lambda > \mathbb{S}\} \cup \{\kappa\} + 1 = e^\kappa \quad \Gamma \cup \{b_0\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathbb{Q}_\tau}] \quad \Gamma_\rho < (\,)\,)$。我们有 $\mathrm{k}^{\mathbb{S}}(\,)$, $b^{(\rho)} = b < b_0 = s\ \tau < b_1 \quad \Gamma = \Gamma_\rho \quad b \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\tau)}]\ \ \omega\ b_0\ a_2$ $\mathrm{rk}(\,)(\,)$，对于和，$(\,,\,)$ $<$ $\omega\ b_1\ a \quad \{c_{b_1}, b_0\} = c_{b_1} \quad \kappa \in H_\rho\ h^b\ g\ \omega\ b_1\ a \quad b_2\ \gamma_0\ \Theta^{(\rho)} \cap \tau \subset (\,,\,)$ 且 $\max$。此外，$(\,(\,;(\,,\,))\,,\,,\,)\ H_\tau(h^b(m(\tau);\ \omega(b_1, a_2))\ b_2, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$。由 MIH 和 (48) 得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1, a_)\, c_{b_1}, e^\kappa} \Pi, \Gamma^{(\kappa)}$。

其次，考虑最后一步推理（$\bigvee$）引入一个 $\bigvee$-公式B 的情形：若 $B \in \Pi$，则 SIH 给出该引理。假设 $B \equiv A^{(\rho)} \in \Gamma_\rho^{(\rho)}$with$A \simeq \bigvee (A_\iota)_{\iota \in J}$且 $\rho \in \mathbb{Q}_\circ$ 我们可以假设 $\rho \in \mathbb{Q}^t$。我们有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}) \vdash_{c_{1,e}}^{a_0} \Pi, \widehat{\Gamma}, (A_\iota)^{(\rho)}$，其中 $a_0 < a$， $\iota \in [\rho]J$。我们断言 $\iota \in [\kappa\ (\rho)\ ]J$。我们可以假设 $\mathrm{k}(\iota) \subset \mathrm{k}(A_\iota)$。根据（36），我们有 $\mathrm{k}(A_\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}]$。 $\Theta^{(\rho)} \subset M_{\kappa(\rho)}$ 给出 $\mathrm{k}(A_\iota) \subset M_{\kappa(\rho)}$。

设 $A_\iota \simeq \bigwedge (B_\nu)_{\nu \in I}$ 对于 $\bigvee$-公式 B_ν 成立，并假设 $\mathrm{rk}(A_\iota) \geq \mathbb{S}$。反演 7.25 对每个 $\nu \in [\mathbb{Q}]_{A_\iota^{(\rho)}} I$ 给出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\nu), \mathbb{Q}) \vdash_{c_{1,e}}^{a_0} \Pi, \widehat{\Gamma}, (B_\nu)^{(\rho)}$。

SIH 推出，对于每个 $\nu \in [\mathbb{Q}(\kappa)]_{A_\iota^{(\rho)}} I \subset [\mathbb{Q}]_{A_\iota^{(\rho)}} I$， $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\nu), \mathbb{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1, a_0)\, c_{b_1}, e^\kappa} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa, (B_\nu)^{(\kappa)}$。$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1, a_0)\, c_{b_1} \quad +1 \quad , e^\kappa} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa, (A_\iota)^{(\kappa)}$ 可由一个 ($\bigwedge$) 得出。推理 ($\bigvee$) 得出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathbb{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1, a_)\, c_{b_1}, e^\kappa} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa$。

其他情形可由 SIH 得出。 □

对于 $c \leq \mathbb{S}$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta) \vdash_c^{*a} \Gamma$ 表示 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \emptyset) \vdash_c^{*a} \Gamma;\ \emptyset$。由于 $\Theta_\emptyset = \Theta$，(34) 和 (35) 等同于 (3) $\{\gamma, a, c\} \cup \mathrm{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，且其中没有推理

$(\bigvee)^{[\cdot]}$，$(\bigwedge)^{[\cdot]}$ 也不是 (stbl)。推理 (Σ-rfl) 仅作用于 Ω。这意味着 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta) \vdash_c^{*a} \Gamma$ 等同于定义 1.16 中的 $\mathcal{H}_\gamma[\Theta] \vdash_c^a \Gamma$。

引理 6.48（推理消去（rfl））

设 Q 是关于 γ_0 和 $b_1 \geq \mathbb{S}$的有限族。令 $\max(\mathrm{rk}(\Gamma)) < \mathbb{S}$, $\widehat{\Gamma} = \bigcup\{\Gamma^{(\rho)}$ $\rho : \rho \in \widehat{\mathrm{Q}}\}$ 和 $\Gamma = \bigcup\{\Gamma_\rho : \rho \in \mathrm{Q}\}$，其中 $\mathrm{k}(\Gamma_\rho) \subset M_\rho$。假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{\mathbb{S},\ e,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$。

则 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash^{*\tilde{a}}_{\mathbb{S}} \Gamma$ 对 $\gamma_1 = \gamma_0 + \mathbb{S}$, $\tilde{a} = \varphi_e(b_1 + a)$成立。

证明。对 e 作主归纳，并对 a作辅助归纳。由定义 6.40 和定义 6.38 可得 $\{e\} \cup \mathrm{Q} \subset \mathcal{H}_{\gamma_1}$，由 (37) 可得 $b_1 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{Q}}]$，且 $\emptyset = \mathrm{k}^{\mathbb{S}}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{Q}}]$。

情形 1。首先，由（重言式）可得 $\{\neg A^{(\sigma)}, A^{(\sigma)}\} \subset \widehat{\Gamma}$ with $\mathrm{rk}(A) < \mathbb{S}$。然后，由重言式 6.29.1 可得 $(\mathcal{H}_0, \mathrm{k}(A)) \vdash_0^{*\mathbb{S}} \neg A, A$，并且由 $\tilde{a} > \mathbb{S}$ 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*\tilde{a}} \Gamma$。

情形 2。其次，考虑最后一步推理是某个 $\rho \in \mathrm{Q}$ 的 (rfl(ρ, d, f, b_1)) 的情形。令 $\mathrm{Q}^t = \{\tau \in \mathrm{Q} : s(\tau) > \mathbb{S}\}$, $\mathrm{Q}^f = \mathrm{Q} \setminus \mathrm{Q}^t$，并且对每个 $\tau \in \mathrm{Q}^t$，有 $\kappa(\tau) \in H_\tau(h^{\mathbb{S}}(m(\tau); \omega(b, a))\ b_1, \gamma_0, \Theta^{(\tau)})$。令 $g = m(\rho)$，$s(\rho) \geq d \in \mathrm{supp}(g)$，当 $\rho \in \mathrm{Q}^t$，$\widehat{\Pi} = \bigcup_{\rho \neq \tau \in \mathrm{Q}^f} \Gamma_\tau^{(\tau)}$, $\widehat{\Lambda} = \bigcup_{\rho \neq \tau \in \mathrm{Q}^t} \Gamma_\tau^{(\tau)}$ 时，$\kappa = \kappa(\rho)$，并且$\widehat{\Lambda}_\kappa = \bigcup_{\rho \neq \tau \in \mathrm{Q}^t} \Gamma_\tau^{\kappa(\tau)}$。我们有一个序列 $\Delta \subset \bigvee(d)$ 和一个序数 $a_0 < a$，使得 $\mathrm{rk}(\Delta) < d \leq s(\rho)$，且对每个 $\delta \in \Delta$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a_0}_{\mathbb{S}, e, \gamma_0, b_1} \widehat{\Pi}, \widehat{\Lambda}, \Gamma_\rho^{(\rho)}, \neg\delta^{(\rho)}$。另一方面，我们有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathrm{Q} \cup \{\sigma\}) \vdash^{a_0}_{\mathbb{S}, e, \gamma_0, b_1} \widehat{\Pi}, \widehat{\Lambda}, \Gamma_\rho^{(\rho)}, \Delta^{(\sigma)}$，其中 $\sigma \in H_\rho(f, b_1, \gamma_0, \Theta^{(\rho)})$，$f$ 是一个特殊有限函数，使得 $s(f) \leq b_1, f_d = g_d$ $f^d <^d g'$ d $SC_{\mathbb{K}}$ f $\subset \mathcal{H}_{\gamma_0}[\Theta^{(\rho)}]$, ( ) and ( )。

情形 2.1 $s(\rho) \leq \mathbb{S}$: 我们有 $\mathrm{rk}(\Delta) < d \leq s(\rho) \leq \mathbb{S}$。令 $\tilde{a}_0 = \varphi_e(b_1 + a_0)$。由 ~ ~SIH，我们得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*a_0} \Pi, \Lambda, \Gamma_\rho, \neg\delta$，对每个 $\delta \in \Delta$ 均成立；并且 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta \cup \{\sigma\}) \vdash_{\mathbb{S}}^{*a_0} \Pi, \Lambda, \Gamma_\rho, \Delta$，其中 $\sigma \in \mathcal{H}_{\gamma_0 + \mathbb{S}} \subset \mathcal{H}_{\gamma_1}[\Theta]$。若干个 $\mathrm{rk}(\delta)$ 为 $< \mathbb{S}$ 的 (*cut*) 给出 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*\tilde{a}} \Pi, \Lambda, \Gamma_\rho$，对于 $\Gamma = \Pi \cup \Lambda \cup \Gamma_\rho$。

情况 2.2. $s(\rho) > \mathbb{S}$: 于是 $\rho \in \mathrm{Q}^t \neq \emptyset$。$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}(\kappa)) \vdash^{\omega(b_1, a)}_{b_1, e^\kappa, \gamma_0, b_1} \widehat{\Pi}, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma_\rho^{(\kappa)}$ 由重新封顶 6.47 得出，其中 $b_1 \geq \mathbb{S}$ 且 $e^\kappa < e$。切消去 6.43 对于 $a_1 = \varphi_{b_1}(\omega(b_1, a))$ 得出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}(\kappa)) \vdash^{a_1}_{\mathbb{S}, e^\kappa, \gamma_0, b_1} \widehat{\Pi}, \widehat{\Lambda}_\kappa, \Gamma_\rho^{(\kappa)}$。MIH 随后给出~$(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*a_1} \Gamma$，其中 $\Gamma = \Pi \cup \Lambda \cup \Gamma_\rho$ 且 $\tilde{a}_1 = \varphi_{e^\kappa}(b_1 + a_1) < \varphi_e(b_1 + a) = \tilde{a}$，由 $e^\kappa < e$ 和 $a, b_1 < \tilde{a}$ 得出。

情况 2.3. 其最后一步推理是一个 $(\bigwedge)$。我们有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a(\iota)}_{\mathbb{S}, e, \gamma_0, b_1} \widehat{\Gamma}, A_\iota^{(\rho)}$ 对每个 $\iota \in [\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J$ 都成立。由于 $A \in \Delta_0(\mathbb{S})$，我们得到 $[\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J = [\rho] J = J$。由 SIH 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*\tilde{a}(\iota)} \Gamma, A_\iota$对每个 $\iota \in J$ 都成立，其中 $\tilde{a}(\iota) = \varphi_e(b_1 + a(\iota)) < \tilde{a}$。由一个 $(\bigwedge)$ 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta) \vdash_{\mathbb{S}}^{*\tilde{a}} \Gamma$。

其他情况可由 SIH 得出。 □

命题 6.49（坍缩）设 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma))$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta) \vdash_\Omega^{*a} \Gamma$ 和$\Gamma \subset \Sigma(\Omega)$。则对于 $\hat{a} = \gamma + \omega^a$ 和 $\beta = \psi_\Omega(\hat{a})$，$(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \Theta) \vdash_\beta^{*\beta} \Gamma^{(\beta, \Omega)}$ 成立。

命题 6.50（切消去）设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta) \vdash_{c+d}^{*a} \Gamma$，其中有 $c + d \leq \mathbb{S}$和 $\neg(c < \Omega \leq c + d)$。则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta) \vdash^{*\theta_d\ (a)\ c}$ Γ。

定理 6.51 假设 $S_1 \vdash \theta^{L_\Omega}$ for $\theta \in \Sigma$。那么存在一个 $n < \omega$，使得 $L_\alpha \models \theta$ for $\alpha = \psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{K} + 1))$ 属于 $OT(\Pi^1_1)$。

证明。设 $S_1 \vdash \theta^{L_\Omega}$ 对应一个 Σ-句子 θ。由 Embedding 6.30，取一个 m，使得 $(\mathcal{H}_\mathbb{S}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*\mathbb{K}\cdot 2+m}_{\mathbb{K}+m} \theta^{L_\Omega}; \emptyset$。由切消去 6.34 得到 $(\mathcal{H}_\mathbb{S}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*a}_{\mathbb{K}} \theta^{L_\Omega}$，其中 $a = \omega_m(\mathbb{K}\cdot 2+m) < \omega_{m+1}(\mathbb{K}+1)$。现在设 $\gamma_0 = \omega_{m+2}(\mathbb{K}+1)$。令$\beta = \psi_\mathbb{K}(\omega^a) > \mathbb{S}$，其中 $\omega^a < \gamma_0 = \omega_{m+2}(\mathbb{K}+1)$。由坍缩 7.18 得到 $(\mathcal{H}_{\omega^a+1}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*\beta}_{\beta} \theta^{L_\Omega}; \emptyset$。

令 $\rho = \psi^g_\mathbb{S}(\gamma_0)$，其中 $g = \{(\beta, \beta+\mathbb{K})\}$，且 $\mathbb{K}(\beta+1) = \beta+\mathbb{K}$。由封顶 6.44 可得 $(\mathcal{H}_{\omega^a+1}, \emptyset, \{\rho\}) \vdash^{\beta}_{\beta}{}_{,\rho+1,\gamma_0,\beta} (\theta^{L_\Omega})^{(\rho)}$。切消去 6.43 得出 $(\mathcal{H}_{\omega^a+1}, \emptyset, \{\rho\}) \vdash^{a_1}_{\mathbb{S}}{}_{,\rho+1,\gamma_0,\beta} (\theta^{L_\Omega})^{(\rho)}$，对于 $a_1 = \varphi_\beta(\beta)$。

由引理 6.48，我们得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \emptyset) \vdash^{*a_2}_{\mathbb{S}} \theta^{L_\Omega}$，其中 $a_2 = \varphi_{\rho+1}(\beta+a_1)$ 且$\gamma_1 = \gamma_0 + \mathbb{S}$。由切消去 6.50 得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \emptyset) \vdash^{*a_3}\Omega\, \theta^{L_\Omega}$，其中 $a_3 = \theta_\mathbb{S}(a_2)$。坍缩 6.49 得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1+a_3+1}, \emptyset) \vdash^{*\eta}_{\eta} \theta^{L_\eta}$，其中 $\eta = \psi_\Omega(\gamma_1+a_3) < \psi_\Omega(\omega_{m+3}(\mathbb{K}+1))$。由切消去 6.50 得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1+a_3+1}, \emptyset) \vdash^{*\theta_\eta(0}_{\eta} \theta^{L_\eta})$。然后，我们通过归纳法直到 $\theta_\eta(\eta)$ 得知 $L_\eta \models \theta$。□

实际上，这个界限已被证明是紧的。

定理 6.52 [A∞d]
KPω + $(M \prec_{\Sigma_1} V)$ 证明了对每个n，其良基性可达 $\psi_\Omega(\omega_n(\mathbb{S}^+ + 1))$。

KPω +$(M \prec_{\Sigma_1} V)$ 证明了一个带有来自M的参数的 Σ_1-分离公理。 $\exists b\,[b = \{x \in a : \varphi(x, c)\} = \{x \in a : M \models \varphi(x, c)\}]$，其中 $c \in M$, $a \in M \cup \{M\}$ 和 $\varphi \in \Sigma_1$。然而，对我们而言，KPω +$(M \prec_{\Sigma_1} V)$ 中是否成立无参数的 Σ^1_2-概括公理，仍是一个悬而未决的问题。

7 Π_1-收集

集合论 KPω + Π_1-收集 +$(V = L)$ 的公理由 KPω +$(V = L)$ 的公理以及以下公理模式 Π_1-收集组成：对于集合论语言中的每个 Π_1-公式$A(x, y)$， $\forall x \in a \exists y A(x, y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b A(x, y)$。很容易看出，二阶算术 Σ^1_3–DC +BI 可规范地解释到 KPω + Π_1-收集 + $(V = L)$ 中。

接下来我们证明，KPω + Π_1-Collection + $(V = L)$ 包含于一个集合论 $S_\mathbb{I}$ 中。该理论 $S_\mathbb{I}$ 的语言是 $\{\in, St, \Omega\}$，其中带有一个一元谓词常元 St 和一个个体常元 Ω。 $\Delta_0(St)$ 表示语言 $\{\in, St, \Omega\}$ 中有界公式的集合，其中可以出现原子公式 $St(t)$。类似地， $\Sigma_1(St)$ 表示扩充语言中的 Σ_1-公式集合。 $St(\alpha)$ 意在表示这样的事实： α 是一个稳定序数， $L_\alpha \prec_{\Sigma_1} L$，且 $\Omega = \omega_1^{CK}$。 $S_\mathbb{I}$ 的公理由 KPω 的 [4] 公理添加以下公理而得。令 ON 表示所有序数构成的类。对于序数 α， $\alpha^\dagger$ 表示大于 α的最小稳定序数。后继稳定序数是形如 $\alpha^\dagger$ 的序数，其中α。注意，最小稳定序数 $0^\dagger$ 是一个后继稳定序数。

[4]在公理模式 Δ_0-分离和 Δ_0-收集模式中， Δ_0-公式仍表示其中不出现 St 的 aΔ_0-公式；而基础公理可应用于其中可能出现 St 的公式。

1. $V = L$，以及关于 Ω 的递归正则性的公理。
2. $\Delta_0(St)$-收集：

$$\forall x \in a \exists y\, \theta(x,y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \theta(x,y)$$

对于每个 $\Delta_0(St)$-公式 θ，其中可能出现谓词 St。

3. $L = \bigcup\{L_\sigma : St(\sigma)\}$，即，

$$\forall \alpha \in ON \exists \sigma\, (\alpha < \sigma \wedge St(\sigma)) \tag{49}$$

.

4. 对于后继稳定序数 $\sigma < \mathbb{I}$，$L_\sigma \prec_{\Sigma_1} L = L_{\mathbb{I}}$:

$$SSt(\sigma) \wedge \varphi(u) \wedge u \in L_\sigma \to \varphi^{L_\sigma}(u) \tag{50}$$

对于集合论语言中的每个 Σ_1-公式 φ，即常量 St不出现在 φ中。

引理 7.1 $S_{\mathbb{I}}$ 是 KP$\omega + \Pi_1$-收集 $+ (V = L)$的扩展。也就是说，$S_{\mathbb{I}}$证明了 Π_1-收集。

证明。在 $S_{\mathbb{I}}$ 中进行论证。令 $A(x,y)$ 为集合论语言中的一个 Π_1-公式。由公理 (49) 和 (50)，我们得到

$$A(x,y) \leftrightarrow \exists \beta (St(\beta^\dagger) \wedge x, y \in L_{\beta^\dagger} \wedge A^{L_{\beta^\dagger}}(x,y)) \tag{51}$$

假设 $\forall x \in a \exists y A(x,y)$。那么由 (51)，我们得到 $\forall x \in a \exists y \exists \beta (St(\beta^\dagger) \wedge x, y \in L_{\beta^\dagger} \wedge A^{L_{\beta^\dagger}}(x,y))$。由于 $St(\beta^\dagger) \wedge x, y \in L_{\beta^\dagger} \wedge A^{L_{\beta^\dagger}}(x,y)$ 是一个 $\Sigma_1(St)$-公式，取一个集合 c，使得由$\Delta_0(St)$-收集可得 $\forall x \in a \exists y \in c \exists \beta \in c (St(\beta^\dagger) \wedge x, y \in L_{\beta^\dagger} \wedge A^{L_{\beta^\dagger}}(x,y))$。再由 (51)，我们得到 $\forall x \in a \exists y \in c A(x,y)$。□

反过来，在 KP$\omega + \Pi_1$-Collection $+ (V = L)$ 中，谓词 $St(\alpha)$ 由一个 Π_1-公式 $st(\alpha)$ 定义，因此 (50) 可证，并且由 Π_1-Collection 可推出 $\Delta_0(St)$-collection。

引理 7.2 KP$\omega + \Pi_1$-Collection 可证明 Σ_1-Separation、Δ_2-Separation 和 Σ_2-Replacement。

证明。我们证明，对于含有 Δ_0 矩阵 θ 的 Σ_1-公式 $\varphi \equiv \exists y \theta(x,y)$，$\{x \in a : \varphi(x)\}$ 存在为一个集合。根据逻辑，我们有 $\forall x \in a \exists y (\exists z \theta(x,z) \to \theta(x,y))$。由 Π_1-Collection 选取一个集合 b，使得 $\forall x \in a \exists y \in b (\varphi(x) \to \theta(x,y))$。换言之，$\{x \in a : \varphi(x)\} = \{x \in a : \exists y \in b\, \theta(x,y)\}$。□

令 Hull$^{\Sigma_1}(\alpha)$ 表示序数 α 的 Σ_1-Skolem 包 Hull$^{\Sigma_1}(\alpha)$。Hull$^{\Sigma_1}(\alpha)$ 是宇宙中由参数$< \alpha$ 定义的 Σ_1 元素的集合。

具体而言，令 $\{\varphi_i : i \in \omega\}$ 表示 Σ_1-公式的枚举。每个公式的形式为 $\varphi_i \equiv \exists y \theta_i(x, y; u)(\theta \in \Delta_0)$，其中变量 x, y, u 固定。令 $b \in \alpha$

$$\begin{aligned} r(i,b) &\simeq \text{ the } <_L\text{-least } c \in L \text{ such that } L \models \theta_i((c)_0, (c)_1; b) \\ h(i,b) &\simeq (r(i,b))_0 \\ \mathrm{Hull}_{\Sigma_1}(\alpha) &= \{h(i,b) \in L : i \in \omega, b \in \alpha\} \end{aligned}$$

部分 Δ_1 映射 r 的定义域是 $\omega \times \alpha$ 的一个 Σ_1 子集。由引理 7.2（Σ_1 分离）可知，该定义域作为集合存在，$\mathrm{Hull}_{\Sigma_1}(\alpha)$ 也存在。因此，其 Mostowski 塌缩[5] 序数 $\beta \geq \alpha$。这就证明了（49）。

请注意，可容许序数的极限不一定是可容许的，因为存在一个 Π_3^- 公式 ad，使得对于任意传递集 x，x 可容许当且仅当 ad^x 成立。另一方面，稳定序数的每个极限 κ 都是稳定的：对于 $c \in L_\kappa$，取一个稳定序数 $\sigma < \kappa$，使得 $c \in L_\sigma$。那么对于 Σ_1 公式 A，$L \models A(c) \Rightarrow L_\sigma \models A(c) \Rightarrow L_\kappa \models A(c)$。

7.1 Π_1-收集的序数

在本小节至小节 7.2 中，我们在集合论 ZFC(St) 中工作，其中 St 是一个一元谓词符号。我们假设 St 是 $\mathbb{I}$ 以下的一个无界序数类，并且 St 的最小元素 $\mathbb{S}_0$ 大于 Ω。当 $\alpha < \mathbb{I}$ 时，$\alpha^\dagger$ 表示类 St 中的最小序数 $> \alpha$。若 $\alpha \geq \mathbb{I}$，则 $\alpha^\dagger := \mathbb{I}$。于是 $\mathbb{S}_0 = \Omega^\dagger$。令 $SSt := \{\alpha^\dagger : \alpha \in ON\}$ 且 $LS = St \setminus SSt$。对于自然数 k，$\alpha^{\dagger k}$ 由 $\alpha^{\dagger 0} = \alpha$ 递归定义，且 $\alpha^{\dagger(k+1)} = (\alpha^{\dagger k})^\dagger$。

$\varphi_b(\xi)$ 表示定义在 $\mathbb{I}^+ = \omega_{\mathbb{I}+1}$ 上的二元 Veblen 函数，其中 $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$ 令 $\Lambda \leq \mathbb{I}$ 为一个强临界数。如定义 6.2 所述，$\tilde{\varphi}_b(\xi) := \varphi_b(\mathbb{I} \cdot \xi)$。令 $b, \xi < \mathbb{I}^+$。$\theta_b(\xi)$ $[\tilde{\theta}_b(\xi)]$ 表示 $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$ [关于 $\tilde{\varphi}_0(\xi) = \mathbb{I}^\xi$] 的第 b 次迭代，分别。

定义 7.3 若有限函数 $f : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 满足 $\sim \forall i > 0(a_i = 1)$，并且当 $b_0 > 1$ 属于 $f(c)$ 时，$a_0 = 1 =_{NF} \theta_{b_m}(\xi_m) \cdot a_m + \cdots + \theta_{b_0}(\xi_0) \cdot a_0$ 对任意 $c \in$支集(f) 成立，则称其为有限函数。令 $SC_{\mathbb{I}}(f) := \bigcup\{\{c\} \cup SC_{\mathbb{I}}(f(c)) : c \in$支集$(f)\}$。

对于有限函数 f、$c < \mathbb{I}$ 和 $\xi < \varphi_{\mathbb{I}}(0)$。关系 $f <^c_{\mathbb{I}} \xi$ 通过对有限集 $\{d \in \mathrm{supp}(f)$ 的基数进行归纳来定义：$d > c\}$，如定义 6.4.2 所示。

定义 7.4 设 $A \subset \mathbb{I}$ 是一个集合，$\alpha \leq \mathbb{I}$ 是一个极限序数。

$\alpha \in M(A) :\Leftrightarrow A \cap \alpha$ 在 $\alpha \Leftrightarrow$ 中是平稳的，即每个闭无界子集都与 α 相交于 A.

类 $\mathcal{H}_a(X) \subset \Gamma_{\mathbb{I}+1}$、$Mh^a_c(\xi) \subset (\mathbb{I}+1)$ 以及序数 $\psi^f_\kappa(a) \leq \kappa$ 按如下方式同时定义。

$\mathcal{H}_a(X)$ 表示 $\{0, \Omega\ \mathbb{I}\} \cup X$ 在 $+, \varphi, a \mapsto \psi_\Omega(a)$，$a \mapsto \psi_{\mathbb{I}}(a) \in LS, \alpha \mapsto \alpha^\dagger \in SSt$ 和 $(\pi, b, f) \mapsto \psi^f_\pi(b)$ 下的闭包。

[5] 对于不属于 $\mathrm{Hull}_{\Sigma_1}(\alpha)$ 的最小序数 β，坍缩与 L_β 相同。

$\pi \in Mh_c^a(\xi)$ 当且仅当 $\{a, c, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\pi)$，并且对任意有限函数 f, g，都满足以下条件：$\mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$，使得 $f <_{\mathbb{I}}^c \xi$

$$SC_{\mathbb{I}}(f, g) \subset \mathcal{H}_a(\pi) \,\&\, \pi \in Mh_0^a(g_c) \Rightarrow \pi \in M(Mh_0^a(g_c * f^c))$$

其中

$$\begin{aligned} Mh_c^a(f) &:= \bigcap \{Mh_d^a(f(d)) : d \in \mathrm{supp}(f^c)\} \\ &= \bigcap \{Mh_d^a(f(d)) : c \leq d \in \mathrm{supp}(f)\} \end{aligned}$$

设 a、π 为序数，且 f：$\mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 是一个有限函数。那么 $\psi_\pi^f(a)$ 表示满足下列条件的最小序数 $\kappa < \pi$

$$\kappa \in Mh_0^a(f) \,\&\, \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \pi \subset \kappa \,\&\, \{\pi, a\} \cup SC_{\mathbb{I}}(f) \subset \mathcal{H}_a(\kappa) \tag{52}$$

如果存在这样的 κ。否则，令 $\psi_\pi^f(a) = \pi$。

$$\psi_{\mathbb{I}}(a) := \min(\{\mathbb{I}\} \cup \{\kappa \in LS : \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \mathbb{I} \subset \kappa\}) \tag{53}$$

对于类 $A \subset \mathbb{I}$，令 $\alpha \in M_c^a(A)$ 当且仅当 $\alpha \in A$，并且对于任意有限函数 g：$\mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$

$$\alpha \in Mh_0^a(g_c) \,\&\, SC_{\mathbb{I}}(g_c) \subset \mathcal{H}_a(\alpha) \Rightarrow \alpha \in M\left(Mh_0^a(g_c) \cap A\right) \tag{54}$$

命题 7.5 在 ZFC(St) 中，$x \in \mathcal{H}_a(y)$、$x \in Mh_c^a(f)$ 和 $x = \psi_\kappa^f(a)$ 各自都是一个 Δ_1(St)-谓词。

7.2 小型大基数假设

为论证上述定义，我们不妨假设一个小型大基数的存在性。

微妙基数由 R. Jensen 和 K. Kunen 引入。[Rathjen05b] 中的引理 2.7 表明，在一个微妙基数 π中，V_π 中的敏锐基数集合是平稳的。由此可见，在一个微妙基数 π中，V_π 中的敏锐基数的敏锐极限基数集合也是平稳的；其中，对于 V_π中的敏锐基数 κ，κ 是敏锐极限，当且仅当 κ 是 V_π中的敏锐基数的极限。

设 C 是 π的一个闭子集，并设 $C_0 \subset C$ 是由以下条件定义的子集：$\kappa \in C_0$ 当且仅当$\kappa \in C$，且 κ 是敏锐基数的极限。由于敏锐基数集合在 V_π中是平稳的，C_0 是 π的一个闭无界子集。因此，C_0中存在一个敏锐基数。

本小节中，我们在 ZFC 的一个扩张中工作 T，该扩张通过添加公理，断言存在一个正则基数 $\mathbb{I}$，使得其中的敏锐基数集合 St 在 $V_{\mathbb{I}}$ 中是平稳的 $\mathbb{I}$。本小节中，Ω 表示最小的不可数序数 ω_1，而 LS 表示 $V_{\mathbb{I}}$ 中的敏锐极限基数集合。类 LS 在 $\mathbb{I}$ 中是平稳的。后继敏锐基数是 $V_{\mathbb{I}}$ 中的敏锐基数，而不是 LS 中的敏锐基数。

引理 7.6 $\forall a[\psi_{\mathbb{I}}(a) < \mathbb{I}]$。

证明。集合 $C = \{\kappa < \mathbb{I} : \mathcal{H}_a(\kappa) \cap \mathbb{I} \subset \kappa\}$ 是正则基数 $\mathbb{I}$ 的一个闭无界子集。这表明存在一个 $\kappa \in LS \cap C$，因此根据定义 (53)，$\psi_{\mathbb{I}}(a) < \mathbb{I}$。□

引理 7.7 设 $\mathbb{S}$ 是一个敏锐基数，$a < \varepsilon(\mathbb{I})$，$h : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 是一个有限函数，且 $\{a\} \cup SC_{\mathbb{I}}(h) \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{S})$。则 $\mathbb{S} \in Mh_0^a(h) \cap M(Mh_0^a(h))$。

证明。通过对 $\xi < \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 作归纳法，我们证明对于引理 6.13 中的 $\{a, c, \xi\} \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{S})$，有 $\mathbb{S} \in Mh_c^a(\xi)$。□

引理 7.8 设 $\mathbb{S}$ 是一个敏锐基数，a 是一个序数，且 $f : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 是一个有限函数，使得 $\{a\} \cup SC_{\mathbb{I}}(f) \subset \mathcal{H}_a(\mathbb{S})$。则 $\psi_{\mathbb{S}}^f(a) < \mathbb{S}$ 成立。

推论 7.9 设 f、$g : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 是有限函数，且 $c \in$ 支集(f)。假设存在一个序数 $d < c$，使得 $(d, c) \cap$支集$(f) = (d, c) \cap$支集$(g) = \emptyset$，$g_d = f_d$，$g(d) < f(d) + \theta_{c-d}(f(c); \mathbb{I}) \cdot \omega$，并且 $g <_{\mathbb{I}}^c f(c)$。

于是，$Mh_0^a(g) \prec Mh_0^a(f)$成立。特别地，若 $\pi \in Mh_0^a(f)$且 $SC_{\mathbb{I}}(g) \subset \mathcal{H}_a(\pi)$，则 $\psi_\pi^g(a) < \pi$。

证明。由推论 6.17 可知。□

有限函数的不可约性 $f : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$按定义 6.9 定义，有限函数上的字典序 $f <_{lx}^b g$ f, g 按定义 6.10 定义。于是，$f <_{lx}^0 g \Rightarrow Mh_0^a(f) \prec Mh_0^a(g)$可由命题 6.18 得知。

为 Π_1-集族定义一个可计算记号系统 $OT(\mathbb{I})$，使其对莫斯托夫斯基塌缩封闭。使用一个新的构造子 $\mathbb{I}[\cdot]$ 来生成 $OT(\mathbb{I})$中的项。注意，对于 $\mathbb{S} \in LS$，并没有从 a构造 $\kappa = \psi_{\mathbb{S}}(a)$的规则。

定义 7.10 1. $\{(\rho, \sigma) : \rho \prec \sigma\}$ 表示关系 $\{(\rho, \sigma) : \exists f, a(\rho = \psi_\sigma^f(a))\}$ 的传递闭包。令 $\rho \preceq \sigma :\Leftrightarrow \rho \prec \sigma \vee \rho = \sigma$。

2. 令 $\alpha \prec \mathbb{S}$，其中 $\mathbb{S} \in SSt$ 和 $b = \mathrm{p}_0(\alpha)$。然后令

$$M_\alpha := \mathcal{H}_b(\alpha).$$

3. 对于 $\alpha \in \Psi$，定义序数 $\mathrm{p}_0(\alpha)$。

(a) 对于一个 $\mathbb{S} \in SSt$，令 $\alpha \preceq \psi_{\mathbb{S}}^g(b)$。那么 $\mathrm{p}_0(\alpha) = b$。(b) 存在一个 $\mathbb{S} = \mathbb{T}^\dagger \in SSt$ 和一个 $\mathbb{T} < \tau < \mathbb{S}$，使得 $\alpha \prec \tau^{\dagger k}$ 对于一个 $k > 0$ 成立。令 $\rho \prec \mathbb{S}$ 满足 $\alpha = \beta[\rho/\mathbb{S}]$ 对于一个 $\beta \in M_\rho$ 成立。令 $\mathrm{p}_0(\alpha) = \mathrm{p}_0(\beta)$。(c) 否则 $\mathrm{p}_0(\alpha) = 0$。

$\alpha = \psi^f_{\mathbb{S}}(a) \in OT(\mathbb{I})$ 仅当

$$SC_{\mathbb{I}}(f) \subset \mathcal{H}_a(SC_{\mathbb{I}}(a)) \tag{55}$$

其中 $a = \mathrm{p}_0(\alpha)$。

设 $\{\pi, a, d\} \subset OT(\mathbb{I})$，其中 $\pi \prec \mathbb{S} \in SSt$, $m(\pi) = f$, $d < c \in$支集(f)，且 $(d, c) \cap$支集$(f) = \emptyset$。

当 $g \neq \emptyset$ 时，设 g 为不可约有限函数，使得 $SC_{\mathbb{I}}(g) \subset OT(\mathbb{I})$，$\sim g_d = f_d$，$(d, c) \cap$支集$(g) = \emptyset$，$g(d) < f(d) + \theta_{c-d}(f(c); \mathbb{I}) \cdot \omega$，且 $g <^c_{\mathbb{I}} f(c)$。

那么，只有当 $\alpha = \psi^g_\pi(a) \in OT(\mathbb{I})$ 时，

$$SC_{\mathbb{I}}(g) \subset M_\alpha \tag{56}$$

Mostowski塌缩 $\alpha \mapsto \alpha[\rho/\mathbb{S}](\alpha \in M_\rho)$ 定义如下。$(\mathbb{S})[\rho/\mathbb{S}] := \rho$，$(\mathbb{S}^\dagger)[\rho/\mathbb{S}] := \rho^\dagger$，以及 $(\mathbb{I})[\rho/\mathbb{S}] := \mathbb{I}[\rho]$。$(\tau^\dagger)[\rho/\mathbb{S}] = (\tau[\rho/\mathbb{S}])^\dagger$，其中 $\mathbb{S} < \tau^\dagger$。$(\mathbb{I}[\tau])[\rho/\mathbb{S}] = \mathbb{I}[\tau[\rho/\mathbb{S}]]$，其中 $\mathbb{I}[\tau] \neq \mathbb{I}$。

关系 $\alpha < \beta$ for $\alpha, \beta \in OT(\mathbb{I})$ 定义为：对于每个 κ, ρ, a, b, c, d and f, g, h, $\psi^f_\kappa(a) < \kappa$ and $\rho < \psi^g_{\rho^\dagger}(b) < \rho^\dagger < \tau = \psi_{\mathbb{I}[\rho]}(c) < \psi^h_{\tau^\dagger}(d) < \tau^\dagger < \mathbb{I}[\rho]$。

命题 7.11 不存在这样的 $\psi^f_\sigma(a) \in OT(\mathbb{I})$，使得 $\rho < \psi^f_\sigma(a) \leq \rho^\dagger < \sigma$。

引理 7.12 对于 $\rho \prec \mathbb{S}$ and $\mathbb{S} \in SSt$, $\{\alpha[\rho/\mathbb{S}] : \alpha \in M_\rho\}$ 是 M_ρ 的传递坍缩，如引理6.23所述。

7.3 关于 Π_1-收集的算子控制推导

我们考虑一种带有一元谓词 $St(a)$ 的语言中的 RS-公式，其中对于稳定序数 κ，$a = L_\kappa$。具体而言，$St(a)$: $\simeq \bigvee((\forall x \in \iota(x \in a)) \wedge (\forall x \in a(x \in \iota)))_{\iota \in J}$，其中 $J = \{L_\kappa : \kappa \in St \cap (|a| + 1)\}$，对于 $St \subset OT(\mathbb{I})$。

定义 7.13 有限族是一个有限函数 $\mathsf{Q} \subset \coprod_{\mathbb{S}} \Psi_{\mathbb{S}}$，其定义域 $dom(\mathsf{Q})$ 是后继稳定序数的有限集，并且对于每个 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q})$，$\mathsf{Q}(\mathbb{S})$ 是 $\Psi_{\mathbb{S}}$ 中的有限序数集。令 $\mathsf{Q}(\mathbb{T}) = \emptyset$，其中 $\mathbb{T} \notin dom(\mathsf{Q})$，并且$\bigcup \mathsf{Q} = \bigcup_{\mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})} \mathsf{Q}(\mathbb{S})$。定义 $M_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})} = \bigcap_{\sigma \in \mathtt{Q}(\mathbb{S})} M_\sigma$。

对于 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$ 和 $\iota \in J$

$$\iota \in [\mathtt{Q}]_A J = [\mathtt{Q}]_{\neg A} J :\Leftrightarrow \forall \mathbb{U} \in dom(\mathtt{Q}) \left(\mathrm{rk}(A_\iota) \geq \mathbb{U} \Rightarrow \mathsf{k}(\iota) \subset M_{\mathtt{Q}(\mathbb{U})}\right)$$

我们定义一个可导出关系 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a}_c \Gamma; \Pi^{\cdot]}$，其中 c 是推理规则 (stbl) 的秩以及切割公式的秩的上界。该关系依赖于一个序数 γ_0，应写作 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a}_{c,\ \gamma_0} \Gamma; \Pi^{\cdot]}$。不过，序数 γ_0 将固定不变。因此我们省略它。

定义 7.14 令 Θ a 为有限序数集，a、c 为序数，且 Q_Π 为有限族，使得对于每个 $(\mathbb{S}, \sigma) \in \mathsf{Q}_\Pi$，都有 $\gamma_0 \leq \mathrm{p}_0(\sigma)$。令 $\Pi = \bigcup_{\sigma \in \bigcup \mathtt{Q}_\Pi} \Pi_\sigma \subset \Delta_0(\mathbb{I})$ 为一个公式集合，使得对于每个 $(\mathbb{S}, \sigma) \in \mathsf{Q}_\Pi$，都有 $\mathsf{k}(\Pi_\sigma) \subset M_\sigma$。令 $\Pi^{[\cdot]} = \bigcup_{\sigma \in \bigcup \mathtt{Q}_\Pi} \Pi^{[\sigma/\mathbb{S}]}_\sigma$和 $\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})} = \Theta \cap M_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}$。

若 $\gamma \le \gamma_0$ 成立，则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$ 对公式集合 Γ 成立

$$\mathtt{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \,\&\, \forall \sigma \in \bigcup \mathtt{Q}_\Pi \left(\mathtt{k}(\Pi_\sigma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\sigma)}]\right) \tag{57}$$

$$\forall \mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q}_\Pi) \left(\{\gamma, a, c, \gamma_0\} \cup \mathtt{k}^{\mathbb{S}}(\Gamma, \Pi) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}]\right)^{6} \tag{58}$$

$$\forall \{\mathbb{U} \le \mathbb{S}\} \subset dom(\mathtt{Q}_\Pi) \left(\mathbb{S} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{U})}]\right) \tag{59}$$

并且以下情况之一成立：

$(\bigvee)$ [7] 存在 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个序数 $a(\iota) < a$ 以及一个 $\iota \in J$，使得 $A \in \Gamma$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。

$(\bigvee)^{[\cdot]}$ 存在 $\sigma \in \bigcup \mathtt{Q}_\Pi$、$A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个序数 $a(\iota) < a$ 以及一个 $\iota \in [\sigma]J$，使得 $A^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma; (A_\iota)^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}$。

$(\bigwedge)$ 存在 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$、序数 $a(\iota) < a$，使得 $A \in \Gamma$，并且对每个$\iota \in [\mathtt{Q}_\Pi]_A J$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathtt{k}(\iota); \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。

$(\bigwedge)^{[\cdot]}$ 存在 $\sigma \in \bigcup \mathtt{Q}_\Pi$, $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$ 这样的序数 $a(\iota) < a$，使得 $A^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in \Pi^{[\cdot]}$，并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathtt{k}(\iota); \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$，$(A_\iota)^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 对每个 $\iota \in [\mathtt{Q}_\Pi]_A J \cap [\sigma]J$ 都成立。

(cut) 存在一个序数 $a_0 < a$ C $\mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \Pi \vdash_c^{*a_0}$和一个公式，使得 $\Gamma\ \neg C\ \Pi^{[\cdot]}$ Θ $\Gamma\ \Pi^{[\cdot]}$ $C\ < c$ ，；并且 $(\mathcal{H}_\gamma, ; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} C, ;$ 满足 $\mathtt{rk}(\ )$。

$(\Sigma(St)\text{-}\mathtt{rfl})$ 存在序数 $a_\ell, a_r < a$ 和一个公式 $C \in \Sigma(St)$，使得 $c \ge \mathbb{I}$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_\ell} \Gamma, C;\ \Pi^{[\cdot]}$ 并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_r} \neg\exists x\, C^{(x,\mathbb{I})}, \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$。

（$\Sigma(\Omega)$-$\mathtt{rfl}$）存在序数 a_ℓ、$a_r < a$ 和一个公式 $C \in \Sigma(\Omega)$，使得 $c \ge \Omega$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_\ell} \Gamma, C;\ \Pi^{[\cdot]}$，并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_r} \neg\exists x < \Omega\ C^{(x,\Omega)}, \Gamma;\ \Pi^{[\cdot]}$。

（$\mathtt{stbl}(\mathbb{S})$）存在一个序数 $a_0 < a$、一个后继稳定序数 $\mathbb{S}$、一个 $\bigwedge$-公式$B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$ 和一个 $u \in Tm(\mathbb{I})$，使得以下条件成立：

$$\mathbb{S} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}] \,\&\, \forall \mathbb{U} \in dom(\mathtt{Q}_\Pi) \cap \mathbb{S} \left(\mathbb{S} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{U})}]\right) \tag{60}$$

$\mathbb{S} \le \mathtt{rk}(B(u)) < c$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, B(u);\ \Pi^{[\cdot]}$，$\{\mathbb{S}\ \sigma\} \vdash_c^{*a_0} \Gamma\ \neg B\ u^{[\sigma/\mathbb{S}]}\ \Pi^{[\cdot]}$ $\mathcal{H}_\gamma\ \Theta \cup \{\sigma\}\ \Pi \cup$并且 $(\ ;\ \mathtt{Q}(\ ,\ )\ )\ ;(\ )$，对每个满足 $\mathtt{p}_0(\sigma) \ge \gamma_0$ and 的序数都成立 $\sigma \in \Psi_{\mathbb{S}}$

$$\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\sigma \tag{61}$$

其中 $dom(\mathtt{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) = dom(\mathtt{Q}_\Pi) \cup \{\mathbb{S}\}$, and $(\mathtt{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\})(\mathbb{S}) = \mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S}) \cup \{\sigma\}$.

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, B(u);\ \Pi^{[\cdot]} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}; \mathtt{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma; \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}\}_\sigma}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}}$$

假设 (60) 和 (61)。那么 $(\Theta \cup \{\sigma\})_{(\mathtt{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S},\sigma)\})(\mathbb{S})} = \Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}$, 且 $(\Theta \cup \{\sigma\})_{(\mathtt{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S},\sigma)\})(\mathbb{U})} = (\Theta \cup \{\sigma\})_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{U})} \supset \Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{U})}$ 对于 $\mathbb{U} \in dom(\mathtt{Q}_\Pi) \cap \mathbb{S}$.

[6] (58) 表示 $\{\gamma, a, c, \gamma_0\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 当 $dom(\mathtt{Q}_\Pi) = \emptyset$。[7] 推理 $(\bigvee)$ 中没有条件 $|\iota| < a$。

引理 7.15（重言式）设 $\gamma \in \mathcal{H}_\gamma[\mathsf{k}(A)]$ 和 $d = \mathrm{rk}(A)$。

1. $(\mathcal{H}_\gamma, \mathsf{k}(A);\ \emptyset) \vdash_0^{*2d} \neg A, A;\ \emptyset$. 2. $(\mathcal{H}_\gamma, \mathsf{k}(A) \cup \{\mathbb{S}, \sigma\};\ \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) \vdash_0^{*2d} \neg A^{[\sigma/\mathbb{S}]};$ $A^{[\sigma/\mathbb{S}]}$ 当且仅当 $\mathsf{k}(A) \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\sigma$ 并且 $\gamma \geq \mathbb{S}$。

证明。根据对 $d = \mathrm{rk}(A)$ 的归纳法即可看出每一项。例如，考虑引理 7.15.2。对于 (58) 和 (59)，我们有 $\mathrm{rk}(A^{[\sigma/\mathbb{S}]}) < \mathbb{S}$ 并且 $(\mathsf{k}(A) \cup \{\mathbb{S}, \sigma\}) \cap M_\sigma = \mathsf{k}(A) \cup \{\mathbb{S}\}$；对于 (57)，则有 $\mathsf{k}(A^{[\sigma/\mathbb{S}]}) \subset \mathcal{H}_\mathbb{S}((\mathsf{k}(A) \cap \mathbb{S}) \cup \{\sigma\})$。□

引理 7.16（公理嵌入）对于 $S_\mathbb{I}$ 中的每个公理 A，都存在一个 $m < \omega$，使得 $(\mathcal{H}_\mathbb{I}, \emptyset; \emptyset) \vdash_{\mathbb{I}+m}^{*\mathbb{I}\cdot 2} A; \emptyset$ 成立。

证明。我们省略算子 $\mathcal{H}_\mathbb{I}$。首先证明，对于后继稳定序数 $\mathbb{S} < \mathbb{I}$，公理 (50),$SSt(\sigma) \wedge \varphi(u) \wedge u \in L_\sigma \to \varphi^{L_\sigma}(u)$ 可由推理 (stbl(𝕊)) 得出。令 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$ 为一个 $\bigwedge$-公式，且 $u \in Tm(\mathbb{I})$。

我们可以假设 $\mathbb{I} > d = \mathrm{rk}(B(u)) \geq \mathbb{S}$。令 $\mathsf{k}_0 = \mathsf{k}(B(0))$ 且 $\mathsf{k}_u = \mathsf{k}(u)$。于是 $\mathsf{k}(B(0)) \subset \mathcal{H}_0(\mathsf{k}_0)$。令 $\sigma \in \Psi_\mathbb{S}$ 为一个序数，使得 $\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\sigma$ 且 $\gamma_0 \leq \mathrm{p}_0(\sigma)$。

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\mathbb{S}, \sigma\};\ \{(\mathbb{S}, \sigma)\} \vdash_0^{*2d} B(u^{[\sigma/\mathbb{S}]}); \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}}{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u;\ \vdash_0^{*2d} \neg B(u)\ B(u);\ \{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\mathbb{S}, \sigma\};\ \{(\mathbb{S}, \sigma)\} \vdash_0^{*2d+1} \exists x \in L_\mathbb{S} B(x);\ \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}\}_\sigma}\,(\bigvee)}{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\mathbb{S}\}; \vdash_\mathbb{I}^{*\mathbb{I}} \neg B(u), \exists x \in L_\mathbb{S} B(x);}\,(\bigwedge)$$ (stbl(𝕊))

$$\dfrac{\mathsf{k}_0 \cup \mathsf{k}_u \cup \{\mathbb{S}\}; \vdash_\mathbb{I}^{*\mathbb{I}} \neg B(u), \exists x \in L_\mathbb{S} B(x);}{\mathsf{k}_0 \cup \{\mathbb{S}\}; \vdash_\mathbb{I}^{*\mathbb{I}+1} \neg \exists x\, B(x), \exists x \in L_\mathbb{S} B(x);}\,(\bigwedge)$$

因此 $(\mathcal{H}_\mathbb{I}, \emptyset;\ \emptyset) \vdash_\mathbb{I}^{*\mathbb{I}+\omega} \forall \mathbb{S}, v\left[SSt(\mathbb{S}) \wedge A(v) \wedge v \in L_\mathbb{S} \to A^{(\mathbb{S},\mathbb{I})}(v)\right]; \emptyset$，其中 $SSt(\alpha) :\Leftrightarrow (St(\alpha) \wedge \exists \beta < \alpha \forall \gamma < \alpha (St(\gamma) \to \gamma \leq \beta))$。

接下来证明公理 (49)。设 α 为一个满足 $\alpha < \mathbb{I}$ 的序数。对于满足 $d_0 = \mathrm{rk}(\alpha < \alpha^\dagger)$ 和 $\alpha^\dagger \leq d_1 = \mathrm{rk}(St(\alpha^\dagger))$ 的 $\alpha < \alpha^\dagger < \mathbb{I}$，我们得到 $< d_2 = \omega(\alpha^\dagger + 1)$，其中 $\alpha^\dagger \in \mathcal{H}_0[\{\alpha\}]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\alpha\}; \emptyset \vdash_0^{*d_0} \alpha < \alpha^\dagger; \emptyset \quad \{\alpha\}; \emptyset \vdash_0^{*2d_1} St(\alpha^\dagger); \emptyset}{\{\alpha\}; \emptyset \vdash_0^{*d_2} \alpha < \alpha^\dagger \wedge St(\alpha^\dagger); \emptyset}\,(\bigwedge)}{\{\alpha\}; \emptyset \vdash_0^{*d_2+1} \exists \sigma\,(\alpha < \sigma \wedge St(\sigma)); \emptyset}\,(\bigvee)}{\emptyset; \emptyset \vdash_0^{*\mathbb{I}} \forall \alpha \in ON \exists \sigma\,(\alpha < \sigma \wedge St(\sigma)); \emptyset}\,(\bigwedge)$$

□

引理 7.17（切消去）假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta;\ \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{c+1}^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$，其中 $c \geq \mathbb{I}$。那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta;\ \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*\omega^a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$。

证明。利用这一事实：如果 $(\mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \Pi \vdash_c^{*a} \Gamma \quad \Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\sigma \quad \mathcal{H}_\gamma\ \Theta \cup ,;$ $\{\sigma\}\ \Pi \cup \{\mathbb{S}\ \sigma\} \vdash_c^{*a} \Gamma\ \Pi^{[\cdot]}$ □ $\mathsf{Q}); \Pi^{[\cdot]}$ and $,$ then $(,; \mathsf{Q}(,)); 。$

引理 7 18 $\Gamma \subset \Sigma\ St \quad \Theta \subset 。$（坍缩）设 $\mathcal{H}_\gamma\ \psi_\mathbb{I}\ \gamma \quad \mathcal{H}_\gamma\ \Theta\ \Pi \vdash_\mathbb{I}^{*a} \Gamma\ \Pi^{[\cdot]} \quad \beta = \psi_\mathbb{I}\ a \quad a = \gamma + \omega^a$ $()$ 是一个公式集合。假设 $(())$ 和 $(,; \mathsf{Q}); 。$ 令 $(\hat{})$ 满足 $\hat{} 。$ 那么 $(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \Theta;\ \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_\beta^{*\beta} \Gamma^{(\beta,\mathbb{I})}; \Pi^{[\cdot]}$ 成立。

证明。对 a 使用归纳法。由 (58) 可得 $\{\gamma, a\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}]$，并且对于 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi)$，有 $\beta \in \mathcal{H}_{\hat{a}+1}[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi(\mathbb{S})}]$

当最后一步推理是 (stbl($\mathbb{S}$)) 时，令 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$ 为一个 $\bigwedge$-公式，令项 $u \in Tm(\mathbb{I})$ 满足 $\mathbb{S} \leq \mathsf{rk}(B(u)) < \mathbb{I}$、$\mathsf{k}(B(u)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，以及 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{\mathbb{I}}^{*a_0} \Gamma, B(u)$；$\Pi^{[\cdot]}$ 其中 $a_0 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}_\Pi}] \cap a$ 是一个序数。于是得到$\mathbb{S} \leq \mathsf{rk}(B(u)) < \beta$。□

7.4 带封顶的算子控制推导

设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{\mathbb{K}}^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}$ 在第6.5小节中用于 Π^1_1-反射的演算里。在 Capping 6.44 中，每个公式 $A \in \Gamma$ 都会加上一个上界 ρ，使得 $\mathsf{Q}_\Pi \subset \rho$ 且满足 (38)，$\Theta \subset M_\rho$。(38) 是证明中情况 3.1 所需的。具体而言，当 $\Gamma \ni A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$ 由某个 ($\bigvee$) 引入，且满足 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_{\mathbb{K}}^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$时，我们需要 $\iota \in [\rho]J$，也就是说 $\mathsf{k}(\iota) \subset M_\rho$；这可由 $\mathsf{k}(A_\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subset M_\rho$ 结合 (34) 和 $\Theta \subset M_\rho$推出。

我们在这里关注若干稳定序数 $\mathbb{S}$、$\mathbb{T}$，.....。对我们而言，将无上界公式 A 视为带帽公式 $A^{(\mathfrak{u})}$ 并令其上界为 $\mathfrak{u}$ 是很方便的。令 $M_{\mathfrak{u}} = OT(\mathbb{I})$。

在封顶 7.29 Γ 中，$\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{u}} \cup \bigcup_{\mathbb{S} \in dom\ (\mathtt{Q}_\Pi)} \Gamma_{\mathbb{S}}$被分类。$\Gamma_{\mathbb{S}}$ 是后继稳定序数 $\mathbb{S}$ 的稳定性推理中公式 $B(u)$的集合。

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma,\ \Theta;\ \mathsf{Q}_\Pi \cup \{\mathbb{S}\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma,\ B(u);\ \Pi^{[\cdot]} \quad \{(\mathcal{H}_\gamma,\ \Theta \cup \{\sigma\};\ \mathsf{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S},\ \sigma)\}) \vdash_c^{*a_0} \Gamma;\ \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]},\ \Pi^{[\cdot]}\}_{\sigma}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma; \Pi^{[\cdot]}}$$

每个公式 $A \in \Gamma_{\mathbb{S}}$ 都为稳定序数 $\mathbb{S}$设置一个上界 $\rho_{\mathbb{S}}$。然后，对于每个 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi)$，(38)运行$\Theta \subset M_{\rho_{\mathbb{S}}}$。这意味着 $\Theta \subset M_{\partial \mathtt{Q}} :=\bigcap_{\kappa \in \partial \mathtt{Q}} M_\kappa$，其中

$$\partial \mathtt{Q} = \{\max(\mathtt{Q}(\mathbb{S})) : \mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q}), \mathtt{Q}(\mathbb{S}) \neq \emptyset\}.$$

推导中出现的序数被限制在集合 $M_{\partial \mathtt{Q}}$ 中。

在第 6 节关于 Π^1_1-反射的内容中，序数 γ_0 是一个阈值，这意味着推导中出现的每个序数都属于 $\mathcal{H}_{\gamma_0}(0)$，且下标 $\gamma \leq \gamma_0$ 属于$\mathcal{H}_\gamma$，而每个 $\rho \in \mathsf{Q}$ 都以这样的方式超过 γ_0，使得 $\mathsf{p}_0(\rho) \geq \gamma_0$。这确保了 $\mathcal{H}_\gamma(M_\rho) \subset M_\rho$。最后，通过移到 $\mathcal{H}_{\gamma_0}(0)$ 之外，引理 6.48 中的推理 (rfl(ρ, d, f)) 被消除。具体来说，$\mathsf{Q} \subset \mathcal{H}_{\gamma_0+\mathbb{S}}(0)$。

现在我们有几个（后继）稳定序数 $\mathbb{S}, \mathbb{T}, \ldots \in dom(\mathsf{Q})$。首先针对较大的 $\mathbb{S} > \mathbb{T}$ 消除推理 (stbl($\mathbb{S}$)) 及其子项 (rfl$_{\mathbb{S}}$(ρ, d, f))，然后再处理较小的那些 (stbl($\mathbb{T}$))。因此，我们需要为阈值指定赋值$dom(\mathsf{Q}) \ni \mathbb{S} \mapsto \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}$，使得若 $\mathbb{S} > \mathbb{T}$，则 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} < \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{T}}$。这通过留隙来实现，即预先在 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}$ 和 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{T}}$ 之间留出间隔 $\mathbb{I} \cdot 2^a$；当 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a} \Gamma$ 时，$\Pi^{[\cdot]^\frown\ \widehat{}}$ 被嵌入到 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathsf{Q}) \vdash_{c,\ c,\ \gamma_0}^{a} \Gamma, \Pi$ 中，参见封顶 7.29。

定义 7.19 三元组 $(\mathsf{Q}\ \gamma^{\mathtt{Q}}, e^{\mathtt{Q}})$ 称为关于序数 γ_0和 b_1 的有限族，当且仅当 Q 是定义 7.13 意义下的有限族，且满足以下条件：

1. $\gamma^{\mathtt{Q}}$ 是一个映射 $dom(\mathsf{Q}) \ni \mathbb{S} \mapsto \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}$，使得 $\gamma_0 + \mathbb{I}^2 > \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \geq \gamma_0, \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \geq \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{T}} + \mathbb{I}$ 对于$\{\mathbb{S} < \mathbb{T}\} \subset dom(\mathsf{Q})$ 成立，且 $\mathbb{S} \in \mathcal{H}_{\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}}$ 对于 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q})$ 成立。

当 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \geq \gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{T}} + \mathbb{I} \cdot \eta$ 对 $\{\mathbb{S} < \mathbb{T}\} \subset dom(\mathsf{Q})$ 成立且 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \geq \gamma_0 + \mathbb{I} \cdot \eta$ 对 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q})$ 成立时，称 Q 有间隙 η。

2. 对每个 $\rho \in \mathsf{Q}(\mathbb{S})$， $m(\rho)$: $\mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$ 是特殊的， $s(\rho) \leq b_1, \rho \in \mathcal{H}_{\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}}(0)$，并且 $\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \leq \mathsf{p}_0(\rho)$。

3. $e^{\mathtt{Q}}$ 将一个序数 $e^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \in \mathcal{H}_{\gamma^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}} \cap (\mathbb{S}+1)$ 指派给每个 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q})$，使得

$$\max(\{0\} \cup \{\rho \in \mathtt{Q}(\mathbb{S}) : s(\rho) > \mathbb{S}\}) < e^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} \tag{62}$$

当 $\mathbb{S} \notin dom(\mathsf{Q})$ 时，令 $e^{\mathtt{Q}}_{\mathbb{S}} = \mathbb{S}$。

定义 7.20 对于有限族 Q，以及对于 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$

$$[\mathtt{Q}]_{A^{(\rho)}} J = [\mathtt{Q}]_{\neg A^{(\rho)}} J = [\mathtt{Q}]_A J \cap [\partial \mathtt{Q}] J \cap [\rho] J$$

其中 $[\mathrm{u}]J = J$ 并且

$$[\partial \mathtt{Q}] J = \bigcap_{\kappa \in \partial \mathtt{Q}} [\kappa] J.$$

定义 7.21 1. 对于有限族 Q，令 $\partial \mathsf{Q} = \{\mathsf{max}(\mathsf{Q}(\mathbb{S})) : \mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}), \mathsf{Q}(\mathbb{S}) \neq \emptyset\}$ 和 $M_{\partial \mathtt{Q}} = \bigcap_{\kappa \in \partial \mathtt{Q}} M_\kappa$。

2.

$$[\mathtt{Q}]_{A^{(\rho)}} J = [\mathtt{Q}]_{\neg A^{(\rho)}} J = [\mathtt{Q}]_A J \cap [\partial \mathtt{Q}] J \cap [\rho] J$$

where $[\mathrm{u}]J = J$ and $[\partial \mathtt{Q}]J = \bigcap_{\kappa \in \partial \mathtt{Q}} [\kappa] J$.

定义 7.22 $H^{\mathtt{Q}}_\rho(f, b_1, \gamma, \Theta)$ 表示 Q、 ρ、特殊函数 f、序数 b_1, γ 以及序数的有限集 Θ 的消解类，定义如下： $\sigma \in H^{\mathtt{Q}}_\rho(f, \gamma, \Theta)$ 当且仅当 $\sigma \in \mathcal{H}_{\gamma+\mathbb{I}}(0) \cap \rho \cap M_{\partial \mathtt{Q}}$, $SC_{\mathbb{I}}(m(\sigma)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$, $\Theta \subset M_\sigma$, $\gamma \leq \mathsf{p}_0(\sigma) \leq \mathsf{p}_0(\rho)$ 且 $m(\sigma)$ 是特殊的，使得 $s(f) \leq s(m(\sigma)) \leq b_1, f' \leq (m(\sigma))'$，其中 $\sigma, \rho \prec \mathbb{S}$ 和 $f \leq g \Leftrightarrow \forall i (f(i) \leq g(i))$。

我们定义另一种可导出关系 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c,\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$，其中 c 是割公式的秩的上界，而 ξ 是推理规则（$\mathbf{rfl}_{\mathbb{S}}(\rho, d, f, b_1)$）中序数 $\mathbb{S}$ 的上界。

定义 7.23 设 $\Theta^{(\rho)} = \Theta \cap M_\rho$和 $\Theta_{\partial \mathtt{Q}} = \Theta \cap M_{\partial \mathtt{Q}}$。设 a、 b、 c、 $\xi < \mathbb{I}$为有限集 $\Theta \subset \mathbb{I}$，且 Q 是关于 γ_0, b_1 的有限族，使得 $dom(\mathsf{Q}) \subset (\xi + 1)$。

$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}) \vdash^a_{c,\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$ 对于序列 $\Gamma = \bigcup\{\Gamma^{(\rho)}_\rho : \rho \in \{\mathrm{u}\} \cup \bigcup \mathsf{Q}\}$，若$\gamma \leq \gamma_0$

$$\forall \rho \in \{\mathrm{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q} \left(\mathsf{k}(\Gamma_\rho) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathtt{Q}}] \right) \tag{63}$$

$$\forall \mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})\left(\{\gamma, a, c, \xi, \gamma_0, b_1\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathtt{Q}}]\right)^{8} \tag{64}$$

$$\forall \{\mathbb{U} \leq \mathbb{S}\} \subset dom(\mathtt{Q})\left(\{\mathbb{S}, \gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{Q}}\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{U})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathtt{Q}}]\right) \tag{65}$$

$$\forall \rho \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q} \forall \mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})\left(\mathsf{k}^{\mathbb{S}}(\Gamma_\rho) \subset \mathcal{H}_\gamma\left[\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})}\right] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathtt{Q}}]\right) \tag{66}$$

$$\forall (\mathbb{S}, \rho) \in \mathtt{Q}\left(SC_{\mathbb{I}}(m(\rho)) \subset \mathcal{H}_{\gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{Q}}}\left[\Theta^{(\rho)} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial\mathtt{Q}}\right]\right) \tag{67}$$

并且以下情况之一成立:

(重言式) $\{\neg A^{(\rho)}, A^{(\rho)}\} \subset \Gamma$ 对于一个 $\rho \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q}$ 和一个公式 A，使得 $\mathbf{rk}(A) < \mathbb{S} \leq \xi$ 对于某个后继稳定序数 $\mathbb{S}$。若 $\mathbf{rk}(A) < \mathbb{S}$，则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{0,\ \gamma_0,\ b_1}^{0,\ \mathbb{S},} \neg A^{(\sigma)}, A^{(\sigma)}$ 由 (重言式) 得出，前提是满足 (64) 和 (66)。

($\bigvee$) 存在 $A \simeq \bigvee(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个上界 $\rho \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q}$、一个序数 $a(\iota) < a$ 以及一个 $\iota \in [\rho]J \cap [\partial\mathtt{Q}]J$，使得 $A^{(\rho)} \in \Gamma$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_c^{a(\iota),\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma, (A_\iota)^{(\rho)}$。

($\bigwedge$) 存在 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota \in J}$、一个上界 $\rho \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q}$，以及序数 $a(\iota) < a$，对于每个 $\iota \in [\mathtt{Q}]_{A^{(\rho)}}J$，使得 $A^{(\rho)} \in \Gamma$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathsf{k}(\iota), \mathtt{Q}) \vdash_c^{a(\iota),\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma, (A_\iota)^{(\rho)}$。

(cut) 存在一个上界 $\rho \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup \mathtt{Q}$、序数 $a_0 < a$ 和公式 C，使得 $\mathbf{rk}(C) < c$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c\ ,\xi,\gamma_0,b_1}^{a_0} \Gamma, \neg C^{(\rho)}$ 以及 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c\ ,\xi,\gamma_0,b_1}^{a_0} C^{(\rho)}, \Gamma$。

($\Sigma(\Omega)$-rfl) 存在序数 $a_\ell, a_r < a$ 和一个无上界公式 $C \in \Sigma(\Omega)$，使得 $c \geq \Omega$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c\ ,\xi,\gamma_0,b_1}^{a_\ell} \Gamma, C$ 以及 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c\ ,\xi,\gamma_0,b_1}^{a_r} \neg\exists x <_\pi C^{(x,\Omega)}, \Gamma$。

($\mathrm{rfl}_{\mathbb{S}}(\rho, d, f, b_1)$) 存在一个后继稳定序数 $\mathbb{S} \leq \xi$ 和一个序数 $\rho \prec \mathbb{S}$，使得

$$\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial\mathtt{Q}} \subset M_\rho \tag{68}$$

且如果 $\mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})$，则 $\rho \in \mathtt{Q}(\mathbb{S})$。令 $\mathtt{R} = \mathtt{Q}$，如果 $\mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})$。否则 $\mathtt{R} = \mathtt{Q} \cup \{(\mathbb{S}, \rho)\}$，其中 $\mathtt{Q} \cup \{(\mathbb{S}, \rho)\}$ 是一个有限族，用于 γ_0 扩展 $\mathtt{Q}$，使得 $dom(\mathtt{R}) = dom(\mathtt{Q}) \cup \{\mathbb{S}\}$，$\mathtt{R}(\mathbb{S}) = \mathtt{Q}(\mathbb{S}) \cup \{\rho\}$，$e_{\mathbb{T}}^{\mathtt{R}} = e_{\mathbb{T}}^{\mathtt{Q}}$ 对于 $\mathbb{S} \neq \mathbb{T} \in dom(\mathtt{Q})$，$\gamma_{\mathbb{T}}^{\mathtt{Q}} \geq \gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}} + \mathbb{I}$ 对于每个 $\mathbb{S} > \mathbb{T} \in dom(\mathtt{Q})$ 和 $\gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}} \geq \gamma_0 + \mathbb{I}$。

此外，还存在一个序数 $d \in \mathrm{supp}(m(\rho))$、一个特殊函数 f、一个序数 $a_0 < a$ 以及一个由无上界公式构成的有限集 Δ，它们满足以下条件。

(r0) $\rho < e_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}}$ 如果 $s(\rho) = \max(\mathrm{supp}(m(\rho))) > \mathbb{S}$。(r1) $\Delta \subset \bigvee_{\mathbb{S}}(d) :=$ $\{\delta : \mathbf{rk}(\delta) < d, \delta$ 是一个 $\bigvee$-公式$\} \cup \{\delta : \mathbf{rk}(\delta) < \mathbb{S}\}$。

[8] (64) 表示：当 $dom(\mathtt{Q}) = \emptyset$ 时，$\{\gamma, a, c, \xi, \gamma_0\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。

(r2) 对于 $g = m(\rho)$, $s(f) \leq b_1$, $SC_{\mathbb{I}}(f) \cup SC_{\mathbb{I}}(g) \subset \mathcal{H}_{\gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}}}[\Theta^{(\rho)}]$ 和 $f_d = g_d$ & $f^d <_{\mathbb{I}}^d g'(d)$。(r3) 对每个 $\delta \in \Delta$, $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{R}) \vdash_c^{a_0,\xi,\gamma_0} \Gamma, \neg\delta^{(\rho)}$。(r4) 令 $\gamma^{\mathtt{R}\cup\{(\mathbb{S},\sigma)\}} = \gamma^{\mathtt{R}}$, $e^{\mathtt{R}\cup\{(\mathbb{S},\sigma)\}} = e^{\mathtt{R}}$ 和 $\sigma \in H_\rho^{\mathtt{R}}(f, b_1, \gamma_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}}, \Theta^{(\rho)} \cup \Theta_{\partial\mathtt{Q}})$。那么，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\sigma\}, \mathtt{R} \cup \{(\mathbb{S},\sigma)\}) \vdash_c^{a_0,\xi,\gamma_0} \Gamma, \Delta^{(\sigma)}$ 成立。特别是，如果 $s(\sigma) > \mathbb{S}$，则由 (62) 可得 $\sigma < e_{\mathbb{S}}^{\mathtt{R}}$。

注意，$\bigcup\mathtt{Q} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 不一定成立。此外，由 $\Theta^{(\rho)} \subset M_\sigma$ 和 (68)，$(\Theta \cup \{\sigma\})^{(\mathtt{R}(\mathbb{S})\cup\{\sigma\})} = \Theta_{\mathtt{R}(\mathbb{S})} = \Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})}$ 以及 $\Theta_{\partial\mathtt{R}} = \Theta_{\partial\mathtt{Q}}$。

在本小节中，序数 γ_0 和 b_1 将固定不变，并记 $\vdash_{c,\ \xi}^a$ 为 $\vdash_{c,\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1}^a$。

引理 7.24（重言式）设对每个 $\mathbb{T} \in dom(\mathtt{Q}) \cap (\mathbb{S}+1)$, $\{\gamma, \gamma_0, \mathbb{S}\} \cup \mathtt{k}^{\mathbb{T}}(A) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{T})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathtt{Q}}]$；且 $\sigma \in \{\mathtt{u}\} \cup \bigcup\mathtt{Q}$, $\mathtt{k}(A) \subset M_\sigma$。则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_0^{2d,\ \mathbb{S}} \neg A^{(\sigma)}, A^{(\sigma)}$ 对 $d = \max\{\mathbb{S}, \mathtt{rk}(A)\}$ 成立。

引理 7.25（反演）设 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$ 且 $(\mathcal{H}, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c,\xi}^a \Gamma$，其中 $A^{(\rho)} \in \Gamma$，并且不存在满足 $\mathtt{rk}(A) < \mathbb{S} \leq \xi$ 的 $\mathbb{S} \in SSt$。那么对于任意 $\iota \in [\mathtt{Q}]_{A^{(\rho)}} J$，$(\mathcal{H}, \Theta \cup \mathtt{k}(\iota), \mathtt{Q}) \vdash_{c,\xi}^a \Gamma$，$(A_\iota)^{(\rho)}$。

证明。由于（重言式），我们需要假设不存在满足 $\mathtt{rk}(A) < \mathbb{S} \leq \xi$ 的 $\mathbb{S} \in SSt$。□

引理 7.26（归约）设 $C \simeq \bigvee(C_\iota)_{\iota\in J}$ 且 $\Omega \leq \mathtt{rk}(C) \leq c$。假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q} \vdash_{c,\xi}^a \Gamma, \neg C^{(\tau)}$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c,\xi}^b C^{(\tau)}, \Gamma$，其中 $SSt \cap (c, \xi] = \emptyset$。

那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_c^{a+b,\ \xi} \Gamma$。

引理 7.27（切消去）若 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash_{c+c_1,\ \xi}^a \Gamma$，且 $\Omega \leq c < \mathbb{I}$, $\forall\mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q})(c \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathtt{Q}(\mathbb{S})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathtt{Q}}])$ 和 $SSt \cap (c, \xi] = \emptyset$，则 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathtt{Q}) \vdash^{\varphi_{c_1}(a)c,\ \xi} \Gamma$。

引理 7.28（坍缩）设 $\Gamma \subset \Sigma(\Omega)$ 是无上界公式的集合。假设 $\Theta \subset \mathcal{H}_\gamma(\psi_\Omega(\gamma))$ 且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \emptyset) \vdash_{\Omega,\ 0}^a \Gamma$。令 $\beta = \psi_\Omega(\hat{a})$，其中 $\hat{a} = \gamma + \omega^a < \gamma_0$。则 $(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \Theta, \emptyset) \vdash_{\beta,\ 0}^\beta \Gamma^{(\beta,\Omega)}$ 成立。

7.5 稳定序数的消去

引理 7.29（封顶）设 $\Gamma \cup \Pi \subset \Delta_0(\mathbb{I})$ 是一个由无上界公式构成的集合。假设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathtt{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a,\ \gamma_0} \Gamma$；$\Pi^{[\cdot]}$，其中 $a, c < \mathbb{I}$, $dom(\mathtt{Q}_\Pi) \subset c$, $\Gamma = \Gamma_{\mathtt{u}} \cup \bigcup_{\mathbb{S}\in dom\ (\mathtt{Q}_\Pi)} \Gamma_{\mathbb{S}}$, $\Pi^{[\cdot]} = \bigcup_{(\mathbb{S},\ \sigma)\ \in\mathtt{Q}_\Pi} \Pi_\sigma^{[\sigma/\mathbb{S}]}$。

对于每个 $\mathbb{S} \in dom(\mathtt{Q}_\Pi)$，设 $\rho_{\mathbb{S}} = \psi_{\mathbb{S}}^{g_{\mathbb{S}}}(\delta_{\mathbb{S}})$ 为一个序数，具有一个序数 $\delta_{\mathbb{S}} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ 和一个特殊有限函数 $g_{\mathbb{S}} = m(\rho_{\mathbb{S}}) : \mathbb{I} \to \varphi_{\mathbb{I}}(0)$，使得 $\mathrm{supp}(g_{\mathbb{S}}) = \{c\}$，且 $g_{\mathbb{S}}(c) = \alpha_{\mathbb{S}} + \mathbb{I}$、$\mathbb{I}(2a+1) \leq \alpha_{\mathbb{S}} + \mathbb{I}$、$SC_{\mathbb{I}}(g_{\mathbb{S}}) = SC_{\mathbb{I}}(c, \alpha_{\mathbb{S}}) \subset \mathcal{H}_0(SC_{\mathbb{I}}(\delta_{\mathbb{S}})) \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，参见 (55) 和 (67)。另设 $\widehat{\Pi} = \bigcup_{(\mathbb{S},\sigma)\in\mathtt{Q}_\Pi} \Pi_\sigma^{(\sigma)}$，$\widehat{\Gamma} = \Gamma_{\mathtt{u}}^{(\mathtt{u})} \cup \bigcup_{\mathbb{S}\in dom(\mathtt{Q}_\Pi)} \Gamma^{(\rho_{\mathbb{S}})}$。

设 Q 为一个有限族，满足 $\gamma_0 \geq \gamma$，使得 $\mathsf{Q}(\mathbb{S}) = \mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S}) \cup \{\rho_\mathbb{S}\}$ 对于 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi) = dom(\mathsf{Q})$、$\rho_\mathbb{S} \in \mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}+\mathbb{I}}(0)$ 对于 $\mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q})$，以及 $\alpha_\mathbb{S} + \mathbb{I} \leq \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} \leq \delta_\mathbb{S} < \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} + \mathbb{I}$。另有 $e_\mathbb{S}^\mathsf{Q} = \rho_\mathbb{S} + 1$。

假设 $\forall \mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi)(\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta])$，$\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S}) \subset \rho_\mathbb{S}$，$\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_{\rho_\mathbb{S}}$，$\mathsf{p}_0(\sigma) \leq \mathsf{p}_0(\rho_\mathbb{S}) = \delta_\mathbb{S}$ 且 $SC_\mathbb{I}(m(\sigma)) \subset \mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}}[\Theta \cup \{\mathbb{S}\}]$ 对每个 $(\mathbb{S}, \sigma) \in \mathsf{Q}_\Pi$，$\forall \{\mathbb{U} < \mathbb{S}\} \subset dom(\mathsf{Q}_\Pi)(\rho_\mathbb{S} \in M_{\rho_\mathbb{U}})$ 都成立，并且 Q 有间隙 2^a。

那么 $(\mathcal{H}_\gamma,\ \Theta_\Pi,\ \mathsf{Q}) \vdash^a_{c,\gamma_0,c} \widehat{\Gamma}, \widehat{\Pi}$ 对 $\Theta_\Pi = \Theta \cup \bigcup \mathsf{Q}_\Pi$ 成立。

注 7.30 当 $\alpha_\mathbb{S} = \mathbb{I}(2a)$ 且 $\Theta = \emptyset$，$\delta_\mathbb{S} < \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} + \mathbb{I}$ 表示自然和 $\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}$ #a#c。那么 $\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_{\rho_\mathbb{S}}$ 且 $\{a, c\} \subset \mathcal{H}_0(SC_\mathbb{I}(\delta_\mathbb{S}))$。因此，(55) 对 $\rho_\mathbb{S}$ 成立。也就是说，$SC_\mathbb{I}(g_\mathbb{S}) = \{c, \alpha_\mathbb{S} + \mathbb{I}\} \subset \mathcal{H}_0(SC_\mathbb{I}(\delta_\mathbb{S})) \subset \mathcal{H}_{\delta_\mathbb{S}}(SC_\mathbb{I}(\delta_\mathbb{S}))$ 成立。

令 $\mathbb{U} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi) \cap \mathbb{S}$。根据（58），我们有 $\{\gamma_0, \mathbb{S}, a, c\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{U})}]$。我们打算针对 $n = \#\{\mathbb{T} \in dom(\mathsf{Q}) : \mathbb{T} \geq \mathbb{S}\}$，令 $\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} = \gamma_0 + \mathbb{I} \cdot 2^a \cdot n$。于是，由（64）和（65），有 $\{\mathbb{S}, a, c, \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{U})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathsf{Q}}]$。

另一方面，我们有 $\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S}) \subset \rho_\mathbb{S}$，且 $\rho_\mathbb{S} = \mathsf{max}(\mathsf{Q}(\mathbb{S}))$，即 $\partial\mathsf{Q} = \{\rho_\mathbb{S} : \mathbb{S} \in dom(\mathsf{Q}_\Pi)\}$。此外，对于 $\mathbb{U} \leq \mathbb{S}$，$(g_\mathbb{S}) \subset \mathcal{H}_0(\{\mathbb{S}, a, c, \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}\} \cup \Theta) \subset M_{\rho_\mathbb{U}} = \mathcal{H}_{\delta_\mathbb{U}}(\rho_\mathbb{U})$。因此，根据 $\delta_\mathbb{S}$，有 $\rho_\mathbb{S} \in M_{\rho_\mathbb{U}}$ for $\mathbb{U} < \mathbb{S}$，$\gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} + \mathbb{I} \leq \gamma_\mathbb{U}^\mathsf{Q}$。此外，由于 $\rho_\mathbb{S} < \mathbb{S} < \rho_\mathbb{U}$，有 $\rho_\mathbb{S} \in M_{\rho_\mathbb{U}}$ for $\mathbb{U} > \mathbb{S}$。

引理 7.29 的证明。这可按照 Capping 6.44 中的方法，对 a 作归纳得到。我们在证明中将 $\vdash^a_{c,\gamma_0,c}$ 记作 $\vdash^a_c$。根据假设，我们有 $\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S}) \subset \rho_\mathbb{S}$ and $\Theta \subset M_{\rho_\mathbb{S}}$。因此 $\Theta = \Theta^{(\rho_\mathbb{S})} = \Theta_{\partial\mathsf{Q}}$ and $\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{S})} = \Theta_{\mathsf{Q}(\mathbb{S})}$。另一方面，根据 (57)，我们有 $\mathsf{k}(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$，并且对于 $\sigma \in \bigcup \mathsf{Q}_\Pi$，有 $\mathsf{k}(\Pi_\sigma) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\sigma)}]$。因此 (63) 和 (66) 成立。根据假设、(58) 和 (59)，对于每个 $\{\mathbb{U} \leq \mathbb{S}\} \subset dom(\mathsf{Q}) = dom(\mathsf{Q}_\Pi)$，我们都有 $\{\gamma, a, c, \gamma_0, \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}, \mathbb{S}\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathsf{Q}_\Pi(\mathbb{U})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathsf{Q}}]$。因此 (64) 和 (65) 成立。此外，对于 (67)，我们有 $SC_\mathbb{I}(m(\rho_\mathbb{S})) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$ and $\gamma \leq \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q}$。

情形 1。首先考虑最后一步推理为 (stbl(S)) 的情形：我们有一个后继稳定序数 $\mathbb{S}$、一个序数 $a_0 < a$、一个 $\bigwedge$-公式 $B(0) \in \Delta_0(\mathbb{S})$，以及一个项 $u \in Tm(\mathbb{I})$，其中 $\mathbb{S} \leq \mathsf{rk}(B(u)) < c$。

对于每个满足 $\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\sigma$ 且 $\mathsf{p}_0(\sigma) \geq \gamma_0$ 的序数 σ

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a_0}_c \Gamma, B(u);\ \Pi^{[\cdot]}\ (\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \{\mathbb{S}, \sigma\};\ \mathsf{Q}_\Pi \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) \vdash^{*a_0}_c \Gamma;\ \neg B(u)^{[\sigma/\mathbb{S}]}, \Pi^{[\cdot]}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathsf{Q}_\Pi) \vdash^{*a}_c \Gamma; \Pi^{[\cdot]}}$$

令 h 为特殊有限函数，使得 $\mathsf{supp}(h) = \{c\}$ 且 $h(c) = \mathbb{I}(2a_0+1)$。于是，由 $h(c) = \mathbb{I}(2a_0+1) < \mathbb{I}(2a) \leq \alpha_0 = (g_\mathbb{S})'(c)$，有 $h_c = (g_\mathbb{S})_c = \emptyset$ 且 $h^c <^c_\mathbb{I} (g_\mathbb{S})'(c)$。令 $\mathrm{R} = \mathsf{Q} \cup \{(\mathbb{S}, \rho_\mathbb{S})\}$ 且 $\sigma \in H^\mathrm{R}_{\rho_\mathbb{S}}(h, c, \gamma_\mathbb{S}^\mathrm{R}, \Theta^{(\rho_\mathbb{S})} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial\mathsf{Q}})$，其中 $\Theta^{(\rho_\mathbb{S})} \cup \Theta_{\partial\mathsf{Q}} = \Theta$。

例如，令 $\sigma = \psi^h_{\rho_\mathbb{S}}(\delta_\mathbb{S} + \eta)$，其中 $\eta = \mathsf{max}(\{1\} \cup E_\mathbb{S}(\Theta))$。由 $\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset M_\rho$ 可得 $\Theta \cup \{\mathbb{S}\} \subset \mathcal{H}_{\delta_\mathbb{S}}(\sigma) = M_\sigma$，并且 $\{\delta_\mathbb{S}, a_0, c\} \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta]$。令 $\rho_\mathbb{U} \in \partial\mathrm{R}$。我们断言 $\sigma \in M_{\rho_\mathbb{U}}$。若 $\mathbb{U} \geq \mathbb{S}$，则 $\sigma < \rho_\mathbb{U}$。令 $\mathbb{U} < \mathbb{S}$。根据假设，我们有 $\rho_\mathbb{S} \in M_{\rho_\mathbb{U}}$，而 $\sigma \in M_{\rho_\mathbb{U}}$ 由 $\{c, a_0, \delta_\mathbb{S}\} \cup \Theta \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta] \subset \mathcal{H}_{\delta_\mathbb{U}}(\rho_\mathbb{U})$ 和 $\delta_\mathbb{S} + \eta < \gamma_\mathbb{S}^\mathsf{Q} + \mathbb{I} \leq \gamma_\mathbb{U}^\mathsf{Q} \leq \delta_\mathbb{U}$ 得出。因此，$\sigma \in H^\mathrm{R}_{\rho_\mathbb{S}}(h, c, \gamma_\mathbb{S}^\mathrm{R}, \Theta^{(\rho_\mathbb{S})} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial\mathsf{Q}})$。

由于假设 Q 有间隙 2^a，我们可以假设 R $\cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}$，并且 R 也有间隙 2^{a_0}。

归纳假设推出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathrm{R}) \vdash_c^{a_0} \widehat{\Gamma}, B(u)^{(\rho_\mathbb{S})} \widehat{\Pi}$，且对于 $u^{[\sigma/\mathbb{S}]} \in Tm(\mathbb{S})$ 和 $B(u^{[\sigma,\mathbb{S}]}) \equiv B(u)^{[\sigma,\mathbb{S}]}$，可得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi \cup \{\mathbb{S}, \sigma\}, \mathrm{R} \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) \vdash_c^{a_0} \widehat{\Gamma}, \neg B(u)^{(\sigma)}, \widehat{\Pi}$，其中 $\rho_\mathbb{S} > \sigma \in M_{\rho_\mathbb{S}}$，并且根据 (59)，当 $\mathrm{rk}(B(u)) \geq \mathbb{T}$ 时，$\mathrm{k}(B(u)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{q}_\Pi}(\mathbb{T})] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathrm{q}}]$。因此，根据 $\Theta_{\mathrm{R}(\mathbb{T})} = \Theta_{\mathrm{q}_\Pi}(\mathbb{T})$，由 (59) 可得 $\mathrm{k}(B(u)) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{R}(\mathbb{T})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathrm{q}}]$。此外，对于每个 $\mathbb{T} < c$, $\Theta_{\mathrm{q}_\Pi}(\mathbb{S})$，我们有 $\mathbb{S} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{q}(\mathbb{T})}] \cup \Theta_{\partial \mathrm{q}} \subset M_{\rho_\mathbb{S}}$（对应 (68)），$\rho_\mathbb{S} < e_\mathbb{S}^{\mathrm{q}}$（对应 (r0)），$\mathrm{rk}(B(u)) < c$，以及 $s(\rho_\mathbb{S}) \leq c$（对应 (r1)）。

我们通过一次推理得到 $(\mathbf{rfl}_\mathbb{S}(\rho_\mathbb{S}, c, h, c))$

$$\frac{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathrm{R}) \vdash_c^{a_0} \widehat{\Gamma}, B(u)^{(\rho_\mathbb{S})} \widehat{\Pi} \quad (\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi \cup \{\mathbb{S}, \sigma\}, \mathrm{R} \cup \{(\mathbb{S}, \sigma)\}) \vdash_c^{a_0} \widehat{\Gamma}, \neg B(u)^{(\sigma)}, \widehat{\Pi}}{(\mathcal{H}_\gamma, \Theta_\Pi, \mathrm{q}) \vdash_c^{a} \widehat{\Gamma}, \widehat{\Pi}}$$

在右上序列中，σ 遍历消解类 $\sigma \in H^{\mathrm{R}}_{\rho_\mathbb{S}}(h, c, \gamma^{\mathrm{R}}_\mathbb{S}, \Theta^{(\rho_\mathbb{S})} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial \mathrm{q}})$。

情形 2。当最后一步推理是一个 (cut) 时：存在 $a_0 < a$ 和 C，使得 $\mathrm{rk}(C) < c$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathrm{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, \neg C; \Pi^{[\cdot]}$，并且 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathrm{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a_0} \Gamma, C; \Pi^{[\cdot]}$。归纳假设接着一个以未设上界的切割公式 $C^{(\mathfrak{u})}$ 为切割公式的 (cut)，即可得到该引理。

情况 3. 第三，最后一步推理引入了一个 $\bigvee$-公式 A in Γ。令 $A \simeq \bigvee (A_\iota)_{\iota \in J}$。于是 $A^{(\rho_\mathbb{S})} \in \Gamma^{(\rho_\mathbb{S})\,\mathbb{S}}$。存在一个 $\iota \in J$、一个序数 $a(\iota) < a$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta; \mathrm{Q}_\Pi) \vdash_c^{*a(\iota)} \Gamma, A_\iota; \Pi^{[\cdot]}$。我们可以假设 $\mathrm{k}(\iota) \subset \mathrm{k}(A_\iota)$，并断言 $\iota \in [\partial \mathrm{Q}]J$ with $\rho_\mathbb{S} \in \partial \mathrm{Q}$。根据 (57)，对于 $\Theta_{\partial \mathrm{q}} = \Theta$ 和 $\gamma \leq \gamma_0 \leq \gamma^{\mathrm{q}}_\mathbb{S} \leq \delta_\mathbb{S} \leq \mathrm{p}_0(\rho_\mathbb{S})$，我们得到 $\mathrm{k}(\iota) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathrm{q}}] \subset M_{\partial \mathrm{q}}$。

归纳假设给出 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash_c^{a(\iota)} \widehat{\Gamma}, (A_\iota)^{(\rho_\mathbb{S})} \widehat{\Pi}$。$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash_c^{a} \widehat{\Gamma}, \widehat{\Pi}$ 可由一个 $(\bigvee)$ 得出。

其他情形可由归纳假设如封顶 6.44 中所示得到 . □

引理 7.31（重新封顶）

设 $\mathbb{S}$ 为后继稳定序数，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^a_{c_1, \mathbb{S}, \gamma_0, b_2} \Pi, \Gamma$ 其中 Q 是关于 γ_0, b_2, $\Gamma \cup \Pi \subset \Delta_0(\mathbb{U})$ 的有限族，并且 $\widehat{\Gamma} = \bigcup\{\Gamma^{(\rho)}_\rho \colon \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\}$，其中每个 $\theta \in \widehat{\Gamma}$ 或者是一个 $\bigvee$-公式，或者是 $\mathrm{rk}(\theta) < \mathbb{S}$，$\mathrm{Q}^t \subset \mathrm{Q}$ 满足 $\mathrm{Q}^t(\mathbb{S}) \subset \mathrm{Q}(\mathbb{S})$，其中 $dom(\mathrm{Q}^t) \subset \{\mathbb{S}\}$ 且 $\forall \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})(s(\rho) > \mathbb{S})$；此外，$\mathrm{Q}^f$ 是一个族，满足 $\mathrm{Q}^f(\mathbb{S}) = \mathrm{Q}(\mathbb{S}) \setminus \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})$，并且 $\mathrm{Q}^f(\mathbb{T}) = \mathrm{Q}(\mathbb{T})$，对 $\mathbb{T} \neq \mathbb{S}$ 均成立。Π 是一个公式集合，使得对于每个 $A^{(\tau)} \in \Pi$，$\tau \in \{\mathfrak{u}\} \cup \bigcup \mathrm{Q}^f$。

令 $\max\{s(\rho) \colon \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\} \leq b_1$ 和 $\omega(b, a) = \omega^{\omega^b} a$。对于每个 $\rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})$，令 $\mathbb{S} \leq b^{(\rho)} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathrm{q}}]$ 满足 $\mathrm{rk}(\Gamma_\rho) < b^{(\rho)} < s(\rho)$，并且 $\kappa(\rho)$ 是序数，使得 $\kappa(\rho) \in H^{\mathrm{q}}_\rho(h^{b^{(\rho)}}(m(\rho); \omega(b_1, a)) \; b_2, \gamma^{\mathrm{q}}_\mathbb{S}, \Theta^{(\rho)} \cup \{\mathbb{S}\} \cup \Theta_{\partial \mathrm{q}})$。假设$\forall \mathbb{T} \leq \mathbb{S}(b_1 \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{q}(\mathbb{T})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial \mathrm{q}}])$。

那么 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}^\kappa) \vdash^{\omega(b_1, a)}_{c_{b_1}, \mathbb{S}, \gamma_0, b_2} \Pi, \widehat{\Gamma}_\kappa$ 成立，其中 $\widehat{\Gamma}_\kappa = \bigcup\{\Gamma^{(\kappa(\rho))}_\rho \colon \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\}$, $c_{b_1} = \max\{c_1, b_1\}$, $\mathrm{Q}^\kappa = \mathrm{Q}^f \cup \{(\mathbb{S}, \kappa(\rho)) \colon \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\}$, $\gamma^{\mathrm{q}^\kappa}_\mathbb{T} = \gamma^{\mathrm{q}}_\mathbb{T}$, $e^{\mathrm{q}^\kappa}_\mathbb{T} = e^{\mathrm{q}}_\mathbb{T}$ 对于 $\mathbb{T} \neq \mathbb{S}$ 和 $e^{\mathrm{q}^\kappa}_\mathbb{S} = \max(\{\tau \in \mathrm{Q}^f(\mathbb{S}) \colon s(\tau) > \mathbb{S}\} \cup \{\kappa(\rho) \colon \rho \in \mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\}) + 1$。

$e^{\mathrm{q}^\kappa}_\mathbb{S} < e^{\mathrm{q}}_\mathbb{S}$ 当 $\mathrm{Q}^t = \{(\mathbb{S}, \rho) \in \mathrm{Q} \colon s(\rho) > \mathbb{S}\} \neq \emptyset$ 时成立。

证明。通过对 b_1 进行主归纳，并像 Recapping 6.47 中那样对 a进行辅助归纳，即可证明。□

引理 7.32（消去一个稳定序数）
设 $\mathbb{S}=\mathbb{T}^{\dagger}$ 是一个后继稳定序数，并设 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{Q})^{\vdash^{a}_{\mathbb{S},\ \mathbb{S},\ \gamma_0,\ b_1}\ \Pi,\widehat{\Gamma}}$，其中 Q 是关于 γ_0 的有限族，且 $b_1\geq\mathbb{S}$, $\Pi\subset\Delta_0(\mathbb{I})$，$\Gamma\subset\Delta_0(\mathbb{S})$，$\widehat{\Gamma}=\bigcup\{\Gamma^{(\rho)}_{\rho}:\ \rho\in\mathrm{Q}(\mathbb{S})\}$，并且 $\mathrm{Q}^t=\{(\mathbb{S},\tau)\in\mathrm{Q}:\ s(\tau)>\mathbb{S}\}$，$\mathrm{Q}^f=\mathrm{Q}\setminus\mathrm{Q}^t$。$\Pi$是一个公式集合，满足对每个 $A^{(\tau)}\in\Pi$，$\tau\in\{\mathrm{u}\}\cup\bigcup_{\mathbb{U}<\mathbb{S}}\mathrm{Q}(\mathbb{U})$。

令 $\tilde{a}=\varphi_{b_1+e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}}(a)$，$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}\restriction\mathbb{S}=\{(\mathbb{T},\rho)\in\mathrm{Q}:\ \mathbb{T}<\mathbb{S}\}$ 且 $\gamma_1=\gamma^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}<\gamma_0+\mathbb{I}^2$。

于是，对于 γ_1、b_1，Q_1 是一个有限族，并且 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)^{\vdash^{\tilde{a}}_{\mathbb{T},\ \mathbb{T},\ \gamma_1,\ b_1}\ \Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}}$ 对 $\Gamma^{(\mathrm{u})}=\bigcup\{\Gamma^{(\mathrm{u})}_{\rho}:\ \rho\in\mathrm{Q}(\mathbb{S})\}$ 成立。

证明。按照引理 6.48，对 $e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}$ 作主归纳，并对 a 作辅助归纳即可看出。当 $\mathbb{S}\in dom(\mathrm{Q})$ 时，由定义 7.19，对于 $\gamma_1=\gamma^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}$，我们有 $\mathrm{Q}(\mathbb{S})\subset\mathcal{H}_{\gamma_1}$ 和 $e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}\in\mathcal{H}_{\gamma_1}$。$\mathrm{Q}_1$ 对于 γ_1,b_1 是一个有限族。于是，由 (64)，对每个 $\mathbb{T}\in dom(\mathrm{Q}_1)$，$\gamma_1\in\mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{Q}_1(\mathbb{T})}]\cap\mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathrm{Q}}]$。

首先假设 $\mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\neq\emptyset$。对于每个 $\rho\in\mathrm{Q}^t(\mathbb{S})$，令 $\kappa(\rho)$ 为一个序数，使得 $\kappa(\rho)\in H^{\mathrm{Q}}_{\rho}(h^{\mathbb{S}}(m(\rho);\ \omega(b_1,a))\ b_1,\gamma^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}},\Theta^{(\rho)}\cup\{\mathbb{S}\}\cup\Theta_{\partial\mathrm{Q}})$，其中 $\omega(b,a)=\omega^{\omega^b}a_0$。由重新封顶7.31，我们得到 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{Q}^\kappa)\vdash^{\omega(b_1,a)}_{b_1,\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi,\widehat{\Gamma}_\kappa$。根据切消去 7.27，结合 $SSt\cap(\mathbb{S},\mathbb{S}]=\emptyset$，可得对于 $a_1=\varphi_{b_1}(\omega(b_1,a))$，有 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{Q}^\kappa)\vdash^{a_1}_{\mathbb{S},\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi,\widehat{\Gamma}_\kappa$，其中 $e^{\mathrm{Q}^\kappa}_{\mathbb{S}}=\max\{\kappa(\rho):\ \rho\in\mathrm{Q}^t(\mathbb{S})\}+1<e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}$。归纳假设给出 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}_1}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$，其中 $\tilde{a}_1=\varphi_{b_1+e^{\mathrm{Q}^\kappa}_{\mathbb{S}}}(a_1)<\varphi_{b_1+e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}}(a)$ 且 $\gamma_1=\gamma^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}$。

下文假设 $\mathrm{Q}^t(\mathbb{S})=\emptyset$。
情形 1。首先，令 $\{\neg A^{(\sigma)},A^{(\sigma)}\}\subset\Pi\cup\widehat{\Gamma}$ with $\sigma\in\{\mathrm{u}\}\cup\bigcup\mathrm{Q}$ 且 $d=\mathrm{rk}(A)<\mathbb{S}$，由（重言式）得。若 $d<\mathbb{T}$，则 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}}_{\mathbb{T},\ \mathbb{T},\ \gamma_1,\ b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$，由（重言式）得。

令 $\mathbb{T}\leq d<\mathbb{S}$。于是，由重言式 7.24 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{2^d}_{0,\ \mathbb{T},\ \gamma_1,\ b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$，并且由 $\tilde{a}>\mathbb{S}>d$ 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}}_{0,\ \mathbb{T},\ \gamma_1,\ b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$。
情形 2。其次，考虑最后一步推理为 $(\mathrm{rfl}_{\mathbb{U}}(\rho,d,f,b_1))$ 的情形。若 $\mathbb{U}\leq\mathbb{T}$，则先用 SIH，再用 $(\mathrm{rfl}_{\mathbb{U}}(\rho,d,f,b_1))$，即可得到该引理。令 $\mathbb{U}=\mathbb{S}$。

令 $g=m(\rho)$ 和 $s(\rho)\geq d\in$ 支集(g)。令 $\mathrm{R}=\mathrm{Q}\cup\{(\mathbb{S},\rho)\}$ 且 $\gamma_1=\gamma^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}$。我们有一个序列 $\Delta\subset\bigvee_{\mathbb{S}}(d)$ 和一个序数 $a_0<a$，使得 $\mathrm{rk}(\Delta)<d\leq s(\rho)$，并且对于每个 $\delta\in\Delta$，$(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{R})\vdash^{a_0}_{\mathbb{S},\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi,\widehat{\Gamma},\neg\delta^{(\rho)}$。另一方面，我们有 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta\cup\{\sigma\},\mathrm{R}\cup\{(\mathbb{S},\sigma)\})\vdash^{a_0}_{\mathbb{S},\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi,\widehat{\Gamma},\Delta^{(\sigma)}$，其中 $\sigma\in H^{\mathrm{Q}}_{\rho}(f,b_1,\gamma^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}},\Theta^{(\rho)}\cup\{\mathbb{S}\}\cup\Theta_{\partial\mathrm{Q}})$，$f$ 是一个特殊有限函数，使得 $s(f)\leq b_1$, $f_d=g_d$, $f^d<^d g'(d)$ 且 $SC_{\mathbb{I}}(f)\subset\mathcal{H}_{\gamma^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}}}[\Theta^{(\rho)}]$。

情形 2.1. $s(\rho)\leq\mathbb{S}$：于是 $\Delta\subset\Delta_0(\mathbb{S})$。设 $\tilde{a}_0=\varphi_{b_1+e^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}}}(a_0)$。SIH 推出，对于每个 $\delta\in\Delta$，有 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}_0}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})},\neg\delta^{(\mathrm{u})}$；对于 $\sigma\in\mathcal{H}_{\gamma^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}}+\mathbb{I}}=\mathcal{H}_{\gamma_1}$，有 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta\cup\{\sigma\},\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}_0}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})},\Delta^{(\mathrm{u})}$。通过若干次 (cut) 推理，对于一个 $p<\omega$，我们得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\tilde{a}_0+p}_{\mathbb{S}\ \mathbb{T},\ ,\gamma_1,b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$。利用 $SSt\cap(\mathbb{T},\mathbb{T}]=\emptyset$，切消去 7.27 得出 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{\varphi_{\mathbb{S}}(\tilde{a}_0+p)}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1}\Pi,\Gamma^{(\mathrm{u})}$，其中 $\varphi_{\mathbb{S}}(\tilde{a}_0+p)<\tilde{a}=\varphi_{b_1+e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}}(a)$ 由 $b_1+e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}>\mathbb{S}$ 得出。情形 2.2. $s(\rho)>\mathbb{S}$：于是 $\mathbb{S}\notin dom(\mathrm{Q})$ 和 $\Gamma=\emptyset$。我们有 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{R})\vdash^{a}_{\mathbb{S},\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi$。设 $\mathrm{R}^t=\{(\mathbb{S},\rho)\}$。重新封顶 7.31 得出 $(\mathcal{H}_\gamma,\Theta,\mathrm{R}^\kappa)\vdash^{\omega(b_1,a)}_{\mathbb{S},\mathbb{S},\gamma_0,b_1}\Pi$ 和 $e^{\mathrm{R}^\kappa}_{\mathbb{S}}=\kappa+1<\rho<e^{\mathrm{R}}_{\mathbb{S}}$。MIH 推出 $(\mathcal{H}_{\gamma_1},\Theta,\mathrm{Q}_1)\vdash^{a_1}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1}\Pi$，其中 $a_1=\varphi_{b_1+e^{\mathrm{R}^\kappa}_{\mathbb{S}}}(\omega(b_1,a))<\varphi_{b_1+e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}}(a)=\tilde{a}$ 由 $e^{\mathrm{R}^\kappa}_{\mathbb{S}}<\mathbb{S}=e^{\mathrm{Q}}_{\mathbb{S}}$ 得出。

情况 3. 最后一步推理是一个 (⋀)：我们有 $a(\iota) < a$, $A^{(\rho)} \in \widehat{\Gamma}$，并且对于每个$\iota \in [\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J$，若 $A \simeq \bigwedge(A_\iota)_{\iota\in J}$，则有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta \cup \mathrm{k}(\iota), \mathrm{Q}) \vdash^{a(\iota)}_{\mathbb{S}\,\mathbb{S}}, ,_{\gamma_0,b_1} \Pi, \widehat{\Gamma}, (A_\iota)^{(\rho)}$。由于 $A \in \Delta_0(\mathbb{S})$，我们得到对于 $\rho \in$，$\mathrm{k}(A) \subset \mathcal{H}_\gamma[\Theta^{(\rho)}] \cap \mathbb{S} \subset M_\rho \cap \mathbb{S} = \rho$。这意味着 $A \in \Delta_0(\rho)$，并且 $[\rho]J = J$。因此 $[\mathrm{Q}]_{A^{(\rho)}} J = [\mathrm{Q}_1]_{A^{(\mathrm{u})}} J$。SIH 推出，对于每个 $\iota \in [\mathrm{Q}]_A J$，有 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta \cup \mathrm{k}(\iota), \mathrm{Q}_1) \vdash^{\tilde{a}(\iota)}_{\mathbb{T}\,\mathbb{T}}, ,_{\gamma_1,b_1} \Pi, \Gamma^{(\mathrm{u})}, (A_\iota)^{(\mathrm{u})}$，其中$\tilde{a}(\iota) = \varphi_{b_1+e^{\mathrm{q}}_{\mathbb{S}}}(b + a(\iota)) < \tilde{a}$。一个 (⋀) 推出 $(\mathcal{H}_{\gamma_1}, \Theta, \mathrm{Q}_1) \vdash^{\tilde{a}}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_1,b_1} \Pi, \Gamma^{(\mathrm{u})}$。

其余情形由 SIH 可知。 □

定义 7.33 我们如下定义带帽公式 $A^{(\rho)}$ 的 S-秩 $\mathrm{srk}(A^{(\rho)})$。令 $\mathrm{srk}(A^{(\mathrm{u})}) = 0$，且对 $\rho \prec \mathbb{S} \in SSt$，$\mathrm{srk}(A^{(\rho)}) = \mathbb{S}$。

$\mathrm{srk}(\Gamma) = \max\{\mathrm{srk}(A^{(\rho)}) : A^{(\rho)} \in \Gamma\}$。

引理 7.34（稳定序数消去）
设 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a}_{\xi,\ \xi,\ \gamma_0,\ b_1} \Gamma$，且 $\mathrm{srk}(\Gamma) \leq \mathbb{S} < \xi \leq b_1 < \mathbb{I}$，其中 $\mathbb{S}$ 或为稳定序数，或为满足 $\forall \mathbb{U} \in dom(\mathrm{Q}_\mathbb{S})(\mathbb{S} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{Q}(\mathbb{U})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathrm{Q}}])$ 的 $\mathbb{S} = \Omega$，其中 $\mathrm{Q}_\mathbb{S} = \mathrm{Q} \restriction \mathbb{S}$。

那么存在一个序数 $\gamma_0 \leq \gamma_\mathbb{S} < \gamma_0 + \mathbb{I}^2$，使得对于 $\gamma_\mathbb{S}, b_1$，$\mathrm{Q}_\mathbb{S}$ 是一个有限族，并且对 $f(\xi, a) = \varphi_{b_1+\xi+1}(a)$，$(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{S}) \vdash^{f(\xi,a)}_{\mathbb{S}\,\mathbb{S}}, ,\ _{\gamma_\mathbb{S},\ b_1} \Gamma$ 成立。

证明。对 ξ 作主归纳，并对 a 作辅助归纳。由 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a}_{\xi,\xi,\gamma_0,b_1} \Gamma$ 中的 (64) 和 (65)，可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{S}) \vdash^{f(\xi,a)}_{\mathbb{S}\,\mathbb{S}}, ,_{\gamma_\mathbb{S},b_1} \Gamma$ 中的 (64)。情形 1。考虑最后一步推理是针对某个 $\mathrm{a}\mathbb{T} = \mathbb{U}^\dagger \leq \xi$ 的 $(\mathrm{rfl}_\mathbb{T}(\rho, d, f, b_1))$ 的情形。如果 $\mathbb{T} \leq \mathbb{S}$，则由 SIH 可得引理。设 $\mathbb{S} < \mathbb{T} \in dom(\mathrm{R})$，其中 $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \{(\mathbb{T}, \rho)\}$。由 (64) 可得 $\forall \mathbb{U} \in dom(\mathrm{Q}_\mathbb{T})(\mathbb{T} \in \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\mathrm{Q}(\mathbb{U})}] \cap \mathcal{H}_\gamma[\Theta_{\partial\mathrm{Q}}])$。设 Δ 是句子的有限集，使得对每个 $\delta \in \Delta$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{R}) \vdash^{a_0}_{\xi,\xi,\gamma_0,b_1} \Gamma, \neg\delta^{(\rho)}$，且对每个 $\sigma \in H^{\mathrm{q}}_\rho(f, b_1\gamma^{\mathrm{R}}_\mathbb{T}, \Theta^{(\rho)} \cup \{\mathbb{T}\} \cup \Theta_{\partial\mathrm{Q}})$，$(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{R} \cup \{(\mathbb{T}, \sigma)\}) \vdash^{a_0}_{\xi,\xi,\gamma_0,b_1} \Gamma, \Delta^{(\sigma)}$，并且 $a_0 < a$。我们有 $\mathrm{srk}(\delta^{(\rho)}) = \mathrm{srk}(\Delta^{(\sigma)}) = \mathbb{T}$。由 SIH，存在一个 $\gamma_\mathbb{T} < \gamma_0 + \mathbb{I}^2$，使得对于 $a_1 = f(\xi, a_0) = \varphi_{b_1+\xi+1}(a_0)$，对每个 $\delta \in \Delta$，$(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{T}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{T}) \vdash^{a_1}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_\mathbb{T},b_1} \Gamma, \neg\delta^{(\rho)}$，且 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{T}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{T} \cup \{(\mathbb{T}, \sigma)\}) \vdash^{a_1}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_\mathbb{T},b_1} \Gamma, \Delta^{(\sigma)}$。对于 $a_2 = a_1 + 1$，$(\mathrm{rfl}_\mathbb{T}(\rho, d, f, b_1))$ 推出 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{T}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{T}) \vdash^{a_2}_{\mathbb{T},\mathbb{T},\gamma_\mathbb{T},b_1} \Gamma$。

另一方面，我们有 $\mathrm{srk}(\Gamma) \leq \mathbb{S} < \mathbb{T} = \mathbb{U}^\dagger \leq \xi$。根据引理 7.32，取一个 $\gamma_\mathbb{U} < \gamma_\mathbb{T} + \mathbb{I}^2 = \gamma_0 + \mathbb{I}^2$，使得 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{U}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{U}) \vdash^{a_3}_{\mathbb{U},\ \mathbb{U},\ \gamma_\mathbb{U},\ b_1} \Gamma$，其中 $a_3 = \varphi_{b_1+e^{\mathrm{q}_1}_\mathbb{T}}(a_2) = \varphi_{b_1+e^{\mathrm{q}_1}_\mathbb{T}}(f(\xi, a_0) + 1) < \varphi_{b_1+\xi+1}(a) = f(\xi, a)$ 根据 $e^{\mathrm{q}_1}_\mathbb{T} \leq \mathbb{T} \leq \xi$。如果$\mathbb{S} = \mathbb{U}$，那么我们就完成了。令 $\mathbb{S} < \mathbb{U}$，满足 $\mathbb{U} < \xi$。然后根据 MIH，取一个 $\gamma_\mathbb{S}$，使得 $(\quad \mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}}\ \Theta\ _{\mathbb{S}}\ \vdash^{a_4}_{\mathbb{S}\,\mathbb{S}\,\gamma_\mathbb{S}\,b_1} \Gamma \quad a_4 = f\ \mathbb{U}\ a_3 = \varphi_{b_1+\mathbb{U}+1}\ a_3 < \varphi_{b_1+\xi+1}\ a\ =, , \mathrm{Q}), , , ,$ 对于 $(,)$ $f\ \xi\ a \quad \mathbb{U} < \xi$ $(\,)\,(\,)\,(,)$ 根据。

情形 2。接下来考虑最后一步推理是对切割公式 $C^{(\sigma)}$ wth $\mathrm{rk}(C) < \xi$ and $\mathbb{T} = \mathrm{srk}(C^{(\sigma)}) \leq \xi$ 的 (cut) 的情形。存在一个序数 $a_0 < a$，使得 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a_0}_{\xi,\xi,\gamma_0,b_1} \Gamma, \neg C^{(\sigma)}$ and $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathrm{Q}) \vdash^{a_0}_{\xi,\xi,\gamma_0,b_1} C^{(\sigma)}, \Gamma$。

令 $\mathbb{U} = \max\{\mathbb{S}, \mathbb{T}\}$。首先假设 $\mathbb{U} < \xi$。根据 SIH，取一个 $\gamma_\mathbb{U}$，使得 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{U}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{U}) \vdash^{a_1}_{\mathbb{U},\mathbb{U},\gamma_\mathbb{U},\ b_1} \Gamma, \neg C^{(\sigma)}$ 且 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{U}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{U}) \vdash^{a_1}_{\mathbb{U},\mathbb{U},\gamma_\mathbb{U},b_1} C^{(\sigma)}, \Gamma$，其中 $a_1 = f(\xi, a_0) = \varphi_{b_1+\xi+1}(a_0)$。一个 (cut) 得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{U}}, \Theta, \mathrm{Q}_\mathbb{U}) \vdash^{a_1+1}_{\xi\,\mathbb{U}}, ,_{\gamma_\mathbb{U},b_1} \Gamma$。切消去

7 27 $SSt \cap\ \mathbb{U}\ \mathbb{U}] = \emptyset$ $\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{U}}\ \Theta\ _{\mathbb{U}} \vdash^{a_2}_{\mathbb{U}\,\mathbb{U}\,\gamma_\mathbb{U}\,b_1} \Gamma$ $a_2 = \varphi_\xi\ a_1 +$。与 $(, $ 得到 $(, ,$
1 $\mathbb{U} = \mathbb{S}$
$\mathrm{Q}), , , ,$ 其中 $(\,)$ a a $(\,) = f(\xi,)$，根据 $\xi < b_1 + \xi + 1$。如果 $,,$ 那么结论成立。令

$\mathbb{U} = \mathbb{T} > \mathbb{S}$。根据 MIH 和 $\mathbb{U} < \xi$，我们得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{S}) \vdash^{a_3}_{\mathbb{S},\ \mathbb{S},\ \gamma_\mathbb{S},\ b_1} \Gamma$，其中存在一个 $\gamma_\mathbb{S}$，并且 $a_3 = f(\mathbb{U}, a_2) = \varphi_{b_1+\mathbb{U}+1}(a_2) < \varphi_{b_1+\xi+1}(a) = f(\xi, a)$，根据 $\mathbb{U} < \xi$。

其次，设 $\mathbb{T} = \mathbb{U} = \xi = \mathbb{W}^\dagger > \mathbb{S}$。则 $C \in \Delta_0(\mathbb{T})$。由引理 7.32，取一个 $\gamma_\mathbb{W}$，使得 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{W}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{W}) \vdash^{\tilde{a}_0}_{\mathbb{W},\mathbb{W},\gamma_\mathbb{W},b_1} \Gamma, \neg C^{(\mathfrak{u})}$ 且 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{W}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{W}) \vdash^{\tilde{a}_0}_{\mathbb{W},\mathbb{W},\gamma_\mathbb{W},b_1} C^{(\mathfrak{u})}, \Gamma$，其中 $\tilde{a}_0 = \varphi_{b_1+e^{\mathfrak{Q}}_\mathbb{T}}(a_0)$。一个 (*cut*) 得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{W}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{W}) \vdash^{\tilde{a}_0+1}_{\mathbb{T}\ \mathbb{W}}, ,_{\gamma_\mathbb{W},b_1} \Gamma$，并且由切消去 7.27 可得 $(\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{W}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{W}) \vdash^{a_4}_{\mathbb{W},\mathbb{W},\gamma_\mathbb{W},b_1} \Gamma$，其中 $a_4 = \varphi_\mathbb{T}(\tilde{a}_0+1)$ 且 $SSt \cap (\mathbb{W}, \mathbb{W}] = \emptyset$。由 MIH 取一个 $\gamma_\mathbb{S}$，使得对于 $\mathbb{W} < \xi \quad a_5 = f\ \mathbb{W}\ a_4 = \varphi_{b_1+\mathbb{W}+1}\ a_4 < \varphi_{b_1+\xi+1}\ a \quad \mathbb{W} < \xi\ \ \mathbb{T} = \xi <$，($b_1 + \xi + 1 \quad a_5 e^{\mathfrak{Q}}_\mathbb{T} \leq \mathbb{T} = \xi < \xi + 1 \quad a_0 < a$ $\mathcal{H}_{\gamma_\mathbb{S}}, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{S}) \vdash^{}_{\mathbb{S}\ ,\mathbb{S},\gamma_\mathbb{S},b_1} \Gamma$，且 (,) ( ) ( ) 由 , , and .

情况 3。存在一个 A，使得 $\{\neg A^{(\rho)}, A^{(\rho)}\} \subset \Gamma$ 且 $\mathsf{srk}(A^{(\rho)}) \leq \mathbb{S}$，并且 $d = \mathsf{rk}(A) < \mathbb{T} \leq \xi$，对于一个由 (重言式) 得到的 $\mathbb{T} \in SSt$。我们可以假设 $d \geq \mathbb{S}$。于是，根据重言式 7.24，有 $(\mathcal{H}_\gamma, \Theta, \mathsf{Q}_\mathbb{S}) \vdash^{2d}_{0\ ,\mathbb{S},\gamma_0,b_1} \Gamma$，并且该引理由 $d < \xi < f(\xi, a)$ 得证。

其他情况可由 SIH 得出。 □

定理 7.35 假设 KPω + Π_1-收集 + $(V = L) \vdash \theta^{L_\Omega}$ 对于一个 Σ_1-句子 θ成立。那么$L_{\psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{I}+1})} \models \theta$ 成立。

证明。令 $S_\mathbb{I} \vdash \theta^{L_\Omega}$ 对于一个 Σ-句子 θ。由嵌入 7.16，选取一个 $m > 0$，使得 $(\mathcal{H}_\mathbb{I}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*\mathbb{I}\cdot 2+m}_{\mathbb{I}+m} \theta^{L_\Omega}$。切消去 7.17 得到 $(\mathcal{H}_\mathbb{I}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*a}_\mathbb{I} \theta^{L_\Omega}$，对于$a = \omega_m(\mathbb{I}\cdot 2+m) < \omega_{m+1}(\mathbb{I}+1)$。接着，坍缩 7.18 得到 $(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \emptyset; \emptyset) \vdash^{*\beta}_\beta \theta^{L_\Omega}$，对于 $\beta = \psi_\mathbb{I}(\hat{a}) \in LS$，其中 $\hat{a} = \omega^{\mathbb{I}+a} = \omega_{m+1}(\mathbb{I}\cdot 2 + m) > \beta$。随后，封顶 7.29 得到 $(\mathcal{H}_{\hat{a}+1}, \emptyset, \emptyset) \vdash^{\beta}_{\beta,\beta,\gamma_0,\beta} \theta^{L_\Omega}$，其中 $\gamma_0 = \hat{a} + 1$ 且 $\theta^{L_\Omega} \equiv (\theta^{L_\Omega})^{(\mathfrak{u})}$。

设 $\alpha = \varphi_{\beta\cdot 2+1}(\beta)$成立。由引理 7.34，我们得到 $(\mathcal{H}_{\gamma_\Omega}, \emptyset, \emptyset) \vdash^{\alpha}_{\Omega,\Omega,\gamma_\Omega,\beta} \theta^{L_\Omega}$ 对某个 $\gamma_\Omega < \gamma_0 + \mathbb{I}^2$成立。这意味着 $(\mathcal{H}_{\gamma_\Omega}, \emptyset, \emptyset) \vdash^{\alpha}_{\Omega,0,\gamma_\Omega,\beta} \theta^{L_\Omega}$。对于带有 $\omega^\alpha = \alpha$ 的 $\delta = \psi_\Omega(\gamma_\Omega + \alpha)$，由坍缩 7.28 可推出 $(\mathcal{H}_{\gamma_\Omega+\alpha+1}, \emptyset, \emptyset) \vdash^{\delta}_{\delta,0,\gamma_\Omega,\beta} \theta^{L_\delta}$。切消去 7.27 给出 $(\mathcal{H}_{\gamma_\Omega+\alpha+1}, \emptyset, \emptyset) \vdash^{\varphi_\delta(\delta)}_{0,0,\gamma_\Omega,\beta} \theta^{L_\delta}$。我们看到，根据归纳法，$\theta^{L_\delta}$ 在直到 $\varphi_\delta(\delta)$ 的范围内为真，其中 $\delta < \psi_\Omega(\omega_{m+2}(\mathbb{I}+1)) < \psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{I}+1})$。

7.6 Σ^1_3-DC+BI 中的良基性证明

定理 7.36 [A∞c]
Σ^1_3-DC+BI 对每个 $\alpha < \psi_\Omega(\varepsilon_{\mathbb{I}+1})$。

为证明定理 7.36，我们引入 1-可区分集 $D_1[X]$。它由可定义集 $D[X]$ 的定义 3.5.1 得到：首先将下一个正则 α^+ 替换为下一个稳定的 $\alpha^\dagger$，其次将良基部分 $W(\mathcal{C}^\alpha(X))$ 改为最大可定义集 $\mathcal{W}^\alpha_1(X) = \bigcup\{P: D^\alpha_0[P; X]\}$相对于 α 和 X，其中若 $D^\alpha_0[P$ 则 $P \cap \alpha = X \cap \alpha; X]$，且 α 是稳定的。我们看到，$\mathcal{W} = \bigcup\{X: D_1[X]\}$ 是最大的 1-可定义且为 Σ^1_3-类。

在本小节中，我们概述 Σ^1_3-DC+BI 中良基性证明的一部分，并指出所需使用 Σ^1_3-DC 的引理。

如果对于某个 f 和 a，$\psi^f_\sigma(a)$ 属于 $OT(\mathbb{I})$，则称序数项 $\sigma \in OT(\mathbb{I})$ 为正则项。Reg 表示正则项的集合。本节需要以下

在定义可定义集时，大于序数 α 的下一个正则序数。尽管通常记作 α^+，但很难将 α^+ 与下一个稳定序数 $\alpha^\dagger$ 区分开来。因此，对于 $\alpha < \mathbb{I}$，我们记 $\alpha^{+^1} = \min\{\sigma \in SSt : \sigma > \alpha\}$，表示下一个稳定序数 $\alpha^\dagger$；对于 $\alpha^{+^0} =$，记 $\{\sigma \in Reg \min \sigma > \alpha\}$: α^+，表示下一个正则序数。若 $\alpha \geq \mathbb{I}$，令 $\alpha^{+^1} := \alpha^{+^0} := \infty$ 。当 $\alpha < \mathbb{I}$ 时，令 $\alpha^{-^1} := \max\{\sigma \in St_{\mathbb{I}} \cup \{0\} : \sigma \leq \alpha\}$ ；若 $\alpha \geq \mathbb{I}$，则令 $\alpha^{-^1} := \mathbb{I}$ 。由于 $SSt \subset Reg$，我们得到 $\alpha^{+^0} \leq \alpha^{+^1}$ 和 $\beta^{+^0} < \sigma$ ，因为每个 $\sigma \in St$ 都是正则序数的极限。

定义 7.37 $\mathcal{C}^\alpha(X)$ 是在 $+$、φ、$\{\sigma, \beta\} \cup SC_{\mathbb{I}}(f) \mapsto \psi^f_\sigma(\beta)$（对于 $\sigma > \alpha$）以及 $\rho \mapsto \mathbb{I}[\rho]$、$\rho^\dagger$（对于 $\mathbb{I}[\rho]$、$\rho^\dagger \geq \alpha$）下 $\{0, \Omega\ \mathbb{I}\} \cup (X \cap \alpha)$ 的闭包，其中 $OT(\mathbb{I})$。

定义 7.38 对于 P、$X \subset OT(\mathbb{I})$ 和 $\gamma \in OT(\mathbb{I}) \cap \mathbb{I}$，令

$$\begin{aligned}
W_0^\alpha(P) &:= W(\mathcal{C}^\alpha(P)) \\
D_0^\gamma[P; X] &:\Leftrightarrow P \cap \gamma^{-^1} = X \cap \gamma^{-^1} \,\&\, Wo[X \cap \gamma^{-^1}] \,\& \\
&\quad \forall \alpha \left(\gamma^{-^1} \leq \alpha \leq P \to W_0^\alpha(P) \cap \alpha^{+^0} = P \cap \alpha^{+^0}\right) \qquad (69) \\
\mathcal{W}_1^\gamma(X) &:= \bigcup\{P \subset OT(\mathbb{I}) : D_0^\gamma[P; X]\} \\
D_1[X] &:\Leftrightarrow Wo[X] \,\&\, \forall \gamma \left(\gamma \leq X \to \mathcal{W}_1^\gamma(X) \cap \gamma^{+^1} = X \cap \gamma^{+^1}\right) \qquad (70) \\
\mathcal{W}_2 &:= \bigcup\{X \subset OT(\mathbb{I}) : D_1[X]\}
\end{aligned}$$

如果 $D_0^\gamma[P$，则称集合 P 是关于 γ 和 X 的 0-特定集合； $X]$，而如果 $D_1[X]$，则称集合 X 是 1-可区分集。

注意，在 Σ^1_2-AC 中， $W_0^\alpha(P)$ 是 Π^1_1、$D_0^\gamma[P;\ X]$ 是 Δ^1_2，$\mathcal{W}_1^\gamma(X)$ 是 Σ^1_2，而 $D_1[X]$ 是 Δ^1_3。因此， $\mathcal{W}_2$ 是一个 Σ^1_3-类。

令 $\alpha \in P$为关于 $\gamma < \mathbb{I}$和 X的 0-可区分集 P。若 $\alpha < \gamma^{-^1}$，则 $\alpha \in X$且 $Wo[X]$。否则， $W(\mathcal{C}^\alpha(P)) \cap \alpha^{+^0} = W_0^\alpha(P) \cap \alpha^{+^0} = P \cap \alpha^{+^0}$且 $\alpha < \alpha^{+^0}$。因此， P是一个良序。

引理 7.39 (Σ^1_2-CA)
设 $Wo[X \cap \gamma^-]$。那么， $\mathcal{W}_1^\gamma(X)$ 是关于 γ和 X的最大 0-可区分集，即 $D_0^\gamma[\mathcal{W}_1^\gamma(X);\ X]$ 且 $\exists Y(Y = \mathcal{W}_1^\gamma(X))$。

证明。这可参照命题 3.9 得出。 □

引理 7.40 1. 令 X 和 Y 为 1-可区分集。

$$\mathit{Then}\ \gamma \leq X \,\&\, \gamma \leq Y \Rightarrow X \cap \gamma^{+^1} = Y \cap \gamma^{+^1}.$$

2. $\mathcal{W}_2$ 是 1-最大可区分类，即 $D_1[\mathcal{W}_2]$。
3. 对于一族 $\{Y_j\}_{j \in J}$ 1-可区分集，其并集 $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ 也是一个 1-可区分集。

引理 7.41 1. $\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2) \cap \mathbb{I} = \mathcal{W}_2 \cap \mathbb{I} = W(\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2)) \cap \mathbb{I}$。

2.（BI）对于每个 $n < \omega$, $TI[\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2) \cap \omega_n(\mathbb{I}+1)],$，也就是说，对于每个类 $\mathcal{X}$,$Prg[\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2)\ \mathcal{X}] \to \mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2) \cap \omega_n(\mathbb{I}+1) \subset \mathcal{X}$。3. 对于每个 $n < \omega$, $\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2) \cap \omega_n(\mathbb{I}+1) \subset W(\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2))$。特别地，$\{\mathbb{I}, \omega_n(\mathbb{I}+1)\} \subset W(\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(\mathcal{W}_2))$。

与定义 3.10 中一样，$\mathcal{G}^X := \{\alpha \in OT(\mathbb{I}) : \alpha \in \mathcal{C}^\alpha(X)\ \&\ \mathcal{C}^\alpha(X) \cap \alpha \subset X\}$。

引理 7.42（Σ^1_2-CA）
假设 $D_1[Y]$ 和 $\alpha \in \mathcal{G}^Y$。令 $X = \mathcal{W}^\alpha_1(Y) \cap \alpha^{+^1}$。假设下列条件 (71) 和 (72) 之一成立。那么 $\alpha \in X$ 和 $D_1[X]$。特别地，$\alpha \in \mathcal{W}_2$ 成立。此外，若 $\alpha^{-^1} \leq Y$，则 $\alpha \in Y$ 成立。

$$\forall \beta \left(Y \cap \alpha^{+^1} < \beta\, \&\, \beta^{+^0} < \alpha^{+^0} \to W^\beta_0(Y) \cap \beta^{+^0} \subset Y \right) \tag{71}$$

$$\forall \beta \geq \alpha^{-^1} \left(Y \cap \alpha^{+^1} < \beta\, \&\, \beta^{+^0} < \alpha^{+^0} \to W^\beta_0(Y) \cap \beta^{+^0} \subset Y \right)$$
$$\&\, \forall \beta < \alpha^{-^1} \exists \gamma (\beta < \gamma^{+^1}\, \&\, \gamma^{-^1} \leq Y) \tag{72}$$

证明。通过证明 $D^\alpha_0[P;\ Y], \alpha \in X$ and$D_1[X]$ for $P = W^\alpha_0(Y) \cap \alpha^{+^0} = W(\mathcal{C}^\alpha(Y)) \cap \alpha^{+^0}$，即可如引理 3.15 中那样得到这一点。□

引理 7.43 假设 $D_1[Y], \mathbb{I} > \mathbb{S} \in Y \cap (St \cup \{0\})$ 和 $\{0,\Omega\} \subset Y$。则$\mathbb{S}^{+^1} = \mathbb{S}^\dagger \in \mathcal{W}_2$。

证明。由于引理 3.15 中的条件 (72) 在 $(\mathbb{S}^{+^1})^{-^0} = (\mathbb{S}^{+^1})^{-^1} = \mathbb{S}^{+^1}$ and $\mathbb{S}^{-^1} = \mathbb{S}$ 的情况下成立，因此只需证明 $\mathbb{S}^{+^1} \in \mathcal{G}^Y$。设 $\alpha = \mathbb{S}^{+^1}$。$\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(Y)$ 可由 $\mathbb{S} \in Y \cap \alpha$ 得出。此外，$\gamma \in \mathcal{C}^\alpha(Y) \cap \alpha \Rightarrow \gamma \in Y$ 可通过对 $\ell\gamma$ 进行归纳法并使用假设 $\{0,\Omega\} \subset Y$ 得到。因此，$\alpha \in \mathcal{G}^Y$。□

引理 7.44 (Σ^1_3-DC)
如果 $\mathfrak{a}$, 那么存在一个 1-可区分集 Z 使得 $\{0, \Omega\} \subset Z$,$\alpha \in \mathcal{G}^Z$ 且 $\forall \mathbb{S} \in Z \cap (St \cup \{\Omega\})[\mathbb{S}^\dagger \in Z]$。

证明。令 $\alpha \in \mathcal{G}^{\mathcal{W}_2}$。我们有 $\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}_2)$。选取一个 1-可区分集 X_0，使得 $\alpha \in \mathcal{C}^\alpha(X_0)$。我们可以假设 $\{0,\Omega\} \subset X_0$。另一方面，根据引理 7.43，我们有$\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{W}_2) \cap \alpha \subset \mathcal{W}_2$ 以及 $\forall \mathbb{S} \in \mathcal{W}_2 \cap (St_{\mathbb{I}} \cup \{\Omega\})[\mathbb{S}^\dagger \in \mathcal{W}_2]$。由此得到

$$\begin{aligned} & \forall n \forall X \exists Y \{D_1[X] \to D_1[Y] \\ \wedge\ & \forall \beta \in OT(\mathbb{I})\, (\ell\beta \leq n \wedge \beta \in \mathcal{C}^\alpha(X) \cap \alpha \to \beta \in Y) \\ \wedge\ & \forall \mathbb{S} \in (St \cup \{\Omega\}) \left(\ell\mathbb{S} \leq n \wedge \mathbb{S} \in X \to \mathbb{S}^\dagger \in Y \right) \} \end{aligned}$$

由于 $D_1[X]$ 是 Δ^1_3，Σ^1_3-DC 推出存在一个集合 Z，使得 $Z_0 = X_0$ 并且

$$\begin{aligned} & \forall n\{D_1[Z_n] \to D_1[Z_{n+1}] \\ \wedge \quad & \forall \beta \in OT(\mathbb{I})\,(\ell\beta \leq n \wedge \beta \in \mathcal{C}^\alpha(Z_n) \cap \alpha \to \beta \in Z_{n+1}) \\ \wedge \quad & \forall \mathbb{S} \in (St \cup \{\Omega\})\left(\ell\mathbb{S} \leq n \wedge \mathbb{S} \in Z_n \to \mathbb{S}^\dagger \in Z_{n+1}\right)\} \end{aligned}$$

设 $Z = \bigcup_n Z_n$。通过对 n 作归纳法，我们可知，对每个 n，都有 $D_1[Z_n]$。引理 7.40.3 推出 $D_1[Z]$。设 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(Z) \cap \alpha$。取一个 n，使得 $\beta \in \mathcal{C}^\alpha(Z_n)$ 且 $\ell\beta \leq n$。我们得到 $\beta \in Z_{n+1} \subset Z$。因此 $\alpha \in \mathcal{G}^Z$。此外，设 $\mathbb{S} \in Z \cap (St \cup \{\Omega\})$。取一个 n，使得 $\mathbb{S} \in Z_n$ 且 $\ell\mathbb{S} \leq n$。我们得到 $\mathbb{S}^\dagger \in Z_{n+1} \subset Z$。□

注 7.45 引理 7.44 是一个 Σ^1_4-命题，其证明可在 Σ^1_3-DC 中完成。或者，我们也可以在 Σ^1_3-AC 中证明该引理，只要像 [J¨ager83] 那样为极限序数指定基本序列。

参考文献

[A04] T. Arai，借助非单调归纳定义证明良基性 I：Π^0_2-算子，《符号逻辑杂志》69 (2004)830–850。

[A09] T. Arai，《递归 Mahlo 运算的迭代》，载于《第十三届国际逻辑、方法论与科学哲学大会论文集》，C. Glymour、W. Wei 和 D. Westerstahl 编（College Publications，伦敦国王学院，2009），第 21–35 页。[A10] T. Arai，《借助非单调归纳定义的良基性证明 II：一阶算子》，《纯粹与应用逻辑年刊》162（2010），107–143。[A12] T. Arai，《序数证明论前瞻》，《日本哲学科学会年刊》20（2012），29–47。[A13] T. Arai，《弱紧致性的证明论》，《数学逻辑杂志》13（2013），1350003。[A14a] T. Arai，《一阶反射的保守性》，《符号逻辑杂志》79（2014），第 814–825 页。[A14b] T. Arai，《将证明论提升至可数序数：策梅洛–弗兰克尔集合论》，《符号逻辑杂志》79（2014），第 325–354 页。[A19] T. Arai，《一阶反射的良基性证明》，草稿，已发布于 arXiv。[A20] T. Arai，《一阶反射的简化序数分析》，《符号逻辑杂志》85（2020），1163–1185。

[A∞a] T. Arai, 《借助最大可定义集的良基性证明》，即将在《数学逻辑档案》发表。[A∞b] T. Arai, 《单个稳定序数的序数分析》，已投稿。[A∞c] T. Arai, 《Π_1-集合的序数分析》，草稿。[A∞d] T. Arai, 《Π^1_1-反射的良基性证明》，草稿。[Buchholz75] W. Buchholz, 《正规函数与序数的构造系统》。载于：Diller, J.、M¨uller, G. H.（编），《1974年基尔证明论研讨会》，《数学讲义》第 500 卷，第 4–25 页，Springer（1975）。[Buchholz86] W. Buchholz, 《一种新的证明论序数函数系统》。《纯粹与应用逻辑年刊》32, 195–208（1986）。[Buchholz92] W. Buchholz, 《局部谓词性的简化版本》，载于《证明论》，P. H. G. Aczel、H. Simmons 和 S. S. Wainer 编（剑桥大学出版社，1992），第 115–147 页。[Buchholz00]W. Buchholz，书评：A. Setzer, 《Martin-L¨of 型理论的良序证明》，《符号逻辑公报》6（2000），478–479。[J¨ager82] G. J¨ager, 《关于自然数上 Kripke–Platek 集合论的证明论》，《数学逻辑与基础档案》22（1982），121–139。[J¨ager83] G. J¨ager, 《Feferman 理论 T_0 的一个良序证明》，《数学逻辑与基础档案》23（1983），65–77。[Rathjen94] M. Rathjen, 《反射的证明论》，《纯粹与应用逻辑年刊》68（1994），181–224。[Rathjen05a] M. Rathjen, 《稳定性的序数分析》，《数学逻辑档案》44（2005），1–62。[Rathjen05b]M. Rathjen, 《无参数 Π^1_2-理解的序数分析》，《数学逻辑档案》44（2005），263–362。[Richter-Aczel74] W.H. Richter 和 P. Aczel, 《归纳定义与容许序数的反射性质》，《广义递归论》，《逻辑研究》第 79 卷，North-Holland, 1974，第 301–381 页。