arXiv:2304.00261v1 [math.DS] 1 Apr 2023

通过Koopman算子框架系统研究非线性系统的全局稳定性判据

Christian Mugisho Zagabe 和 Alexandre Mauroy*†

摘要

我们针对解析向量场非线性动力学中的平衡点全局稳定性，提出了新的充分条件。这些条件给出了直接以向量场泰勒展开系数表示的稳定性判据（例如，以一阶系数、最大系数或系数之和表示）。我们的主要假设是流为全纯，且线性化系统局部指数稳定并且可对角化。这些结果基于定义在多圆盘上的 Hardy空间中的 Koopman算子的性质。

1 引言

在动力系统理论中，刻画全局稳定性仍然是一项挑战。根据 Lyapunov 第二方法，Lyapunov函数的存在可保证全局稳定性，但一般性的构造方法寥寥无几。另一方面，对于线性系统，二次Lyapunov函数的存在是全局稳定性的充要条件。在此背景下，Koopman算子方法为非线性动力学提供了“全局线性化”（例如，参见 [1, 8]），从而可以通过线性方法分析全局稳定性 [8]。例如， [7] 使用了特定的 Koopman特征函数，得出了双曲吸引子全局稳定性的充要条件；这一结果与线性系统中众所周知的谱稳定性结果相呼应。此外， [13] 提出了一种数值方法，可从 Koopman算子的有限维近似中计算 Lyapunov函数。

本研究沿袭了上述基于Koopman算子方法的研究结果所采用的路径。然而，本研究既不使用通常未知且必须通过数值方法计算的Koopman特征函数，也不

*C.M. Zagabe 任职于那慕尔大学数学系，比利时那慕尔 5000
christian.mugisho@unamur.be
†A. Mauroy 任职于那慕尔大学数学系，比利时那慕尔 5000
alexandre.mauroy@unamur.be

依赖于可能不准确的算子近似。相反，我们的研究结果为与全纯流相关的平衡点的全局稳定性提供了充分条件，而这些条件可以通过系统向量场直接验证。在对线性化动力学作出温和假设（即指数稳定性、可对角化线性系统）的情况下，本文考察了多项式向量场这一具体情形，以及更一般的解析向量场。我们的理论发现建立在前期工作的基础上，该工作基于多圆盘Hardy空间 [14]中定义的Koopman生成元的性质。但与此前的工作不同，本文并不聚焦于切换非线性系统，并且由于采用了重新缩放的Hardy空间，所给出的稳定性条件保守性更低。此外，所得判据也更易于应用，因为它们是用可直接根据泰勒系数计算的简单量来表示的（例如一阶系数、最大系数、系数折扣和）。

本文其余部分安排如下。第2节将介绍 Koopman 算子框架，并阐述多圆盘上 Hardy空间的一些具体性质。第3节给出主要结果，第4节通过两个示例加以说明。第5节总结全文并展望未来。主要结果的证明见附录 A 和附录 B。

记号

对于多重指标记法 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$，我们定义 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$和 $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$。复数$a$ 的复共轭和实部分别记为 $\bar{a}$ 和 $\Re(a)$。向量场 F在 z 处的雅可比矩阵为 $JF(z)$。以 0 为中心、半径为$\rho > 0$ 的复多圆盘定义为

$$\mathbb{D}^n(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \rho, \cdots, |z_n| < \rho\}$$

并且 $\partial\mathbb{D}^n(\rho)$ 和 $(\partial\mathbb{D}(\rho))^n$ 分别是其边界和特征边界。特别地， $\mathbb{D}^n$ 表示单位多圆盘（即 $\rho = 1$）。

2 预备知识

我们考虑一个连续时间动力系统

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in \mathbb{D}^n(\rho), \tag{1}$$

其中 $\rho > 0$，向量场 F 满足以下假设。

假设1. 向量场 F 的分量 F_l， $l = 1, \underline{\cdots, n}$，*(i)* 在闭多圆盘 $\mathbb{D}^n$（ρ）上全纯，*(ii)* 属于 *Hardy* 空间$\mathbb{H}^2$（$\mathbb{D}^n$（ρ）（定义见下文第*2.1*节），且 *(iii)* 生成一个流 φ^t，该流在 $\mathbb{D}^n$（ρ）上全纯，并将 $\mathbb{D}^n$（ρ）映射到自身。

对于单位多圆盘的情形， [2] 给出了确保向量场满足假设1(iii)的充要条件。

此外，我们将作出以下与所研究动力学行为类型相关的额外基本假设。

假设 2. 向量场 F 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上存在一个位于原点的唯一双曲平衡点（不失一般性），即 $F(0) = 0$，且雅可比矩阵 $JF(0)$ 的特征值

~ λ_j 满足 $\Re\{\lambda_j\} < 0$。

为了研究上述动力系统的全局稳定性性质，我们将在一个适应其动力学的适当空间上定义Koopman算子。由于我们假设向量场和流具有解析性，自然会考虑解析函数空间，而一个典型的选择是多圆盘上的Hardy空间。

2.1 多圆盘上的Hardy空间

全纯函数在多圆盘 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上构成的*Hardy*空间 是如下空间

$$\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)) = \left\{ f : \mathbb{D}^n(\rho) \to \mathbb{C}, \text{holomorphic} : \|f\|^2 < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to 1^-} \int_{(\partial\mathbb{D}(\rho))^n} |f(r\omega)|^2 dm_n(\omega)$$

且 m_n 是 $(\partial\mathbb{D}(\rho))^n$ 上的归一化勒贝格测度。该空间配备的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{(\partial\mathbb{D}(\rho))^n} f(\omega)\, \bar{g}(\omega)\, dm_n(\omega),$$

因此，单项式集合 $\{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ 构成 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho))$ 上的标准正交基。下文中，单项式记为 $e_k(z) = z^{\alpha(k)}$，其中映射 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$, $k \mapsto \alpha(k)$ 表示字典序[1]。对于 f和 g，若它们属于 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho))$，且 $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k e_k$ 和 $g = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k e_k$，则该同构

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k e_k \mapsto (f_k)_{k\geq 0}$$

在 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho))$ 与 l^2-空间之间，使得范数和内积可改写为

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho^{2|\alpha(k)|} |f_k|^2 \quad \text{and} \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho^{2|\alpha(k)|} f_k\, \bar{g}_k.$$

通过在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上进行变量替换 $\phi(z) = z' = z/\rho$，映射 $f \mapsto f' = f \circ \phi$ 在两个Hardy空间 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho))$ 和 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 之间定义了一个等距映射

[1]也就是说，若 $|\alpha(k_1)| < |\alpha(k_2)|$，或者若 $|\alpha(k_1)| = |\alpha(k_2)|$ 且 $\alpha_j(k_1) > \alpha_j(k_2)$，其中 j 是满足 $\alpha_j(k_1) \neq \alpha_j(k_2)$ 的最小值

其中 $\|f'\|^2_{\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)} = \sum |f_k|^2$。关于 Hardy空间的更多详情，请读者参阅$k\in\mathbb{N}$ [9, 10, 11]。

2.2 $\mathbb{H}^2$（$\mathbb{D}^n$（ρ）上的 Koopman算子

这里将 *Koopman*算子 定义为作用于 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho))$、符号为 φ^t 的复合算子（参见例如 [4, 5, 12]）。

定义 1（Koopman半群 [6]）。 $\mathbb{H}^2$（$\mathbb{D}^n$（ρ））上的 *Koopman*算子半群（简称 *Koopman*半群）是由下式定义的线性算子族$\left(U^t\right)_{t\geq 0}$

$$U^t : \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)), \quad U^t f = f \circ \varphi^t.$$

在对流 φ^t 作压缩假设的条件下，可以证明 Koopman半群的有界性和强连续性。在本文中，我们关注 Hardy空间的求值泛函 k_z 的演化（技术细节见 [14] ），因此不要求具备上述性质。

定义 2（Koopman生成元 [6], 第 7 章）。与向量场 （1） 相关联的 *Koopman*生成元是线性算子

$$L_F : \mathcal{D}(L_F) \subset \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)), \quad L_F f := F \cdot \nabla f$$

其定义域为

$$\mathcal{D}(L_F) = \left\{ f \in \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)) : F \cdot \nabla f \in \mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n(\rho)) \right\}.$$

此外，Koopman生成元在单项式基下的表达式可由泰勒展开得到

$$F_l(z) = \sum_{|\alpha|\geq 1} a_{l,\alpha}\, z^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{l,k}\, z^{\alpha(k)} \tag{2}$$

向量场的（稍微滥用一下记号，我们将对泰勒系数的下标采用两种不同的约定，即 $a_{l,\ k} = a_{l,\ \alpha(k)}$）。文中证明了 [14] ,

$$\langle L_F e_k, e_j \rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \alpha_l(k)\, a_{l,(\alpha(j)-\alpha(k))_l} & \text{if } |\alpha(j)| \geq |\alpha(k)| \\ 0 & \text{if } |\alpha(j)| < |\alpha(k)|. \end{cases} \tag{3}$$

with

$$(\alpha(j)-\alpha(k))_l = (\alpha_1(j)-\alpha_1(k), \cdots, \alpha_l(j)-\alpha_l(k)+1, \cdots, \alpha_n(j)-\alpha_n(k)).$$

具体而言，对于总次数相同的单项式 e_k 和 e_j， $|\alpha(j)| = |\alpha(k)|$，我们有

$$\langle L_F e_k, e_j\rangle = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n} \alpha_l(j)\, a_{l,\alpha(l)} & \text{if } j = k \\ \alpha_l(k)\, a_{l,\alpha(r)} & \text{if } \alpha(j) = (\alpha_1(k), \cdots, \alpha_l(k) - 1, \cdots, \\ & \qquad \alpha_r(k) + 1, \cdots, \alpha_n(k)), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

2.3 稳定性结果

现在我们给出一个中间结果，用于证明主要稳定性结果。该结果改编自 [14], , 其中考虑的是切换系统，而不是（1）。

引理 1。 考虑满足假设 *1* 和 *2* 的非线性系统 （1）在单位多圆盘上。此外，假设雅可比矩阵 JF（0）为对角矩阵，并且存在 $\rho \in]0,\ 1]$，使得 $\mathbb{D}^n$ （ρ）关于流是正向不变的。令 $(b_{jk})_{j\geq 1,\ k\geq 1}$ 为正实数的双重序列$_\infty$，满足当 $\langle L_F e_k,\ e_j\rangle \neq 0$ 时 $b_{jk} b_{kj} > 0$，并且满足 $\sum b_{jk} \leq 1$，定义双重序列 $(Q_{jk})_{j\geq 2,\ 1\leq k\leq j-1}$，其中

$$Q_{jk} = \frac{|\langle L_F e_k, e_j\rangle|^2}{4\,|\Re\left(\langle L_F e_j, e_j\rangle\right)|\,|\Re\left(\langle L_F e_k, e_k\rangle\right)|\,b_{jk} b_{kj}} \tag{5}$$

如果 $\langle L_F e_k,\ e_j\rangle \neq 0$，否则为 $Q_{jk} = 0$。如果级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha(k)|\,\epsilon_k\,\rho^{2|\alpha(k)|} \tag{6}$$

收敛于

$$\epsilon_j > \max_{k=1,\ldots,j-1} \epsilon_k\, Q_{jk}, \tag{7}$$

则系统 (1) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$上全局渐近稳定。此外，级数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left| z^{\alpha(k)} \right|^2$$

是 $\mathbb{D}^n(\rho)$上的 *Lyapunov*函数，即 $F(z)\cdot\nabla V(z) < 0$对所有 $z \in \mathbb{D}^n(\rho) \setminus \{0\}$均成立。

证明思路与 [14] 中的类似。

注 1. 雅可比矩阵 $JF(0)$ 为对角矩阵这一假设，可以推广为 $JF(0)$ 满足可对角化条件。事实上，若存在 P，使得 $J\widehat{F}(0) = P^{-1}JF(0)P$ 为对角矩阵，则可以在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 中作变量变换 $\widehat{z} = P^{-1}z$，使新变量下的动力学 $\dot{\widehat{z}} = \widehat{F}(\widehat{z}) = P^{-1}F(P\widehat{z})$ 具有对角雅可比矩阵，且定义在包含于 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 的不变集上（参见第*4.1*节中的例子）。因此，从这里开始，我们不失一般性地假设雅可比矩阵 $JF(0)$ 为对角矩阵。此外，我们的大多数结果都可以推广到上三角雅可比矩阵；根据舒尔定理，这一性质在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中总能通过线性坐标变换实现。一般情形见 *[14]*。

3 全局稳定性判据

现在我们可以给出主要结果了。我们将分别讨论多项式向量场和解析向量场的情形。

3.1 多项式向量场的稳定性判据

考虑一个具有多项式向量场的动力系统

$$\dot{z}_l = F_l(z) = \sum_{k=1}^{r} a_{l,k}\, z^{\alpha(k)}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

我们首先定义与该多项式向量场相关的以下量。

- 令 d 为多项式 F_l的最高次数，即

$$d = \max_{k\in\mathbb{N}} \{|\alpha(k)| : a_{l,k} \neq 0 \text{ for some } l\} = |\alpha(r)|$$

- 令 K 表示非零项的数量（不计 F_l 中包含单项式 z_l 的项），即

$$K = \sum_{l=1}^{n} \#\{k \neq l : a_{l,k} \neq 0\} \tag{9}$$

  其中 # 表示集合的基数。

- 令 S 表示向量场所有分量中的最大多项式系数（同样不计 F_l 中包含单项式 z_l 的项），即

$$S = \max_{l=1,\cdots,n} \max_{\substack{k=1,\cdots,r \\ k\neq l}} |a_{l,k}|\,.$$

- 令 R 为 $JF(0)$ 的对角元素实部的最小值，即

$$R = \min_{l=1,\cdots,n} |\Re\,(a_{l,l})|\,.$$

则有以下结果。

定理 1. 考虑多圆盘 $\mathbb{D}^n(\mu)$上的多项式向量场动力系统 (8)，它在某个足够大的 $\mu > 0$ 下满足假设 *1* 和 *2*。此外，假设雅可比矩阵 $JF(0)$ 为对角矩阵。

则当满足以下条件时，(8) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上全局渐近稳定：

$$\rho < \begin{cases} \dfrac{R}{KS} & if\ KS/R \geq 1 \\ \sqrt[d-1]{\dfrac{R}{KS}} & if\ KS/R < 1 \end{cases}$$

且 $\mu > \rho$ 和 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 关于该流正向不变。

证明见附录 A。

3.2 解析向量场的稳定性判据

本节给出一个关于解析向量场动力学的结果，并将其改写为

$$\dot{z}_l = F_l(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{l,k}\, z^{\alpha(k)}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

在雅可比矩阵 $JF(0)$ 为对角矩阵的假设下。

我们首先定义与向量场的泰勒展开（2）相关的以下量。

- 令 L_μ 为向量场泰勒系数的折扣（无穷）和，即

$$L_\mu = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{|\alpha(k)|} \left| a_{l,k} \right|. \tag{11}$$

  请注意，对于所有 μ，L_μ 可能不是收敛级数；但在假设1下，对于 $\mu \leq 1$，它总是收敛的。

- 令 R 为 $JF(0)$ 的对角元素实部的最小值，即

$$R = \min_{l=1,\cdots,n} \left| \Re\left(a_{l,l}\right) \right|.$$

我们得到以下结果。

定理 2. 考虑一个由解析向量场(10)定义的动力系统，该系统满足假设 *1* 和 *2*，且定义在多圆盘 $\mathbb{D}^n(\mu)$ 上，其中 $\mu > 0$使得 L_μ 收敛。此外，假设雅可比矩阵 $JF(0)$为对角矩阵。

则(10) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上为全局渐近稳定，其中

$$\rho < \frac{\mu R}{L_\mu}, \tag{12}$$

前提是 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 相对于该流是正向不变的。

证明见附录 B。

注 2. 如果雅可比矩阵不可对角化，则上述结果可推广到雅可比矩阵为上三角形式且满足额外对角占优条件的情形

$$|a_{q,r}|^2 < \frac{1}{D^2} |\Re(a_{q,q})| |\Re(a_{r,r})|, \quad 1 \le q < r \le n$$

and

$$|a_{q,r}| < \frac{1}{D} |\Re(a_{q,q})|, \quad 1 \le q < r \le n$$

其中 D 是 $JF(0)$中上三角非对角非零项的数量。更多详情请参见 *[14]* 中的推论 *3.9* 的证明。

4 示例

本节使用我们的稳定性判据估计平衡点的吸引域。我们考虑受 [3], 启发的示例，其中作者提供了一些构造向量场的指南，这些向量场可在双圆盘 $\mathbb{D}^2$上生成全纯流。

4.1 多项式向量场

考虑向量场

$$F(z_1, z_2) = \begin{cases} a\left(z_1 - \frac{1}{ac} z_2\right) \\ a\left(z_2 - \frac{1}{ac} z_1 + b z_1^2\right), \end{cases} \tag{13}$$

其中 $a = -1/4$、 $c = 8$ 和 $b = -1/50$。该动力学系统存在平衡点 (0, 0) 和 ($-75, 150$)，因此 (0, 0) 是多圆盘$\mathbb{D}^n(\mu)$ 上唯一的平衡点，其中 $\mu < 75$。雅可比矩阵 $JF(0)$ 的特征值$a - 1/c = -3/8$ 和 $a + 1/c = -1/8$均为负，且可由矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 对角化。通过坐标变换 $\widehat{z} = P^{-1} z$，我们得到

$$\widehat{F}(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2) = \begin{cases} (a - \frac{1}{c})\widehat{z}_1 + \frac{a^2 b}{2}\left(\widehat{z}_1^2 - 2\widehat{z}_1\widehat{z}_2 + \widehat{z}_2^2\right) \\ (a + \frac{1}{c})\widehat{z}_2 + \frac{a^2 b}{2}\left(\widehat{z}_1^2 - 2\widehat{z}_1\widehat{z}_2 + \widehat{z}_2^2\right). \end{cases} \tag{14}$$

新变量下的动力学在多圆盘 $\mathbb{D}^n(\widehat{\rho})$ 中正向不变，若我们假设 $\widehat{\rho} = \rho \in]1, \mu[$，因为

- $|\widehat{z}_1| = \rho \Rightarrow \Re\left(\bar{\widehat{z}}_1 \widehat{F}_1(\widehat{z})\right) = -3\rho^2/8 - \rho^2 \Re\left(\widehat{z}_1\right)/1600 + \rho^2 \Re\left(\widehat{z}_2\right)/800 - \Re\left(\bar{\widehat{z}}_1 \widehat{z}_2^2\right)/1600 < 0$ as $\rho < 75$ and

- $|\widehat{z}_2| = \rho \Rightarrow \Re\left(\bar{\widehat{z}}_2 \widehat{F}_2(\widehat{z})\right) = -\rho^2/8 - \rho^2 \Re\left(\widehat{z}_2\right)/1600 + \rho^2 \Re\left(\widehat{z}_1\right)/800 - \Re\left(\bar{\widehat{z}}_2 \widehat{z}_1^2\right)/1600 < 0$ as $\rho < 75$.

对于向量场 $\widehat{F}$，我们计算得到 $\widehat{d} = 2$, $\widehat{K} = 6$, $\widehat{S} = a^2|b| = 1/800$ 和 $\widehat{R} = |a + 1/c| = 1/8$，因此 $KS/R = 3/50 < 1$.。由此，根据定理 1，非线性系统 (14) 在 $\mathbb{D}^2(\widehat{\rho})$ 上全局渐近稳定，且 $\widehat{\rho} < 50/3$。最后，这意味着 (13) 在 $P(\mathbb{D}^2(\widehat{\rho})) \supset \mathbb{D}^2(\widehat{\rho}) = \mathbb{D}^2(\rho)$ 上全局渐近稳定，因为 $\|P\|_\infty = 2 > 1$，且 $\rho = \widehat{\rho} < 50/3$。

4.2 解析向量场

考虑向量场

$$F(z_1, z_2) = \begin{cases} a\left(z_1 - \dfrac{2z_2^2}{c - z_2}\right) \\ a\left(z_2 - \dfrac{bz_1^2}{(d - z_1)^2}\right), \end{cases} \tag{15}$$

其中 $a = -1$、 $b = 4$、 $c = 30$ 和 $d = 20$。原点 (0, 0) 是多圆盘 $\mathbb{D}^n(\mu)$ 上唯一的平衡点，且 $\mu = 10$。假设 $\rho \in]1$，则 $\mu[, \mathbb{D}^n(\rho)$ 关于流是不变的，因为

- $|z_1| = \rho \Rightarrow \Re(\bar{z}_1 F_1(z)) = -\rho^2 + 2\Re\left(\dfrac{\bar{z}_1 z_2^2}{30 - z_2}\right) < 0$ since $1 > \dfrac{2\rho}{30 - \rho}$ and it follows that

$$\rho^2 > \frac{2\rho^3}{30 - \rho} > \frac{2\rho^3}{|30 - |z_2||} > 2\left|\frac{\bar{z}_1 z_2^2}{30 - z_2}\right| \geq 2\left|\Re\left(\frac{\bar{z}_1 z_2^2}{30 - z_2}\right)\right|$$

- $|z_2| = \rho \Rightarrow \Re(\bar{z}_2 F_2(z)) = -\rho^2 + 4\Re\left(\dfrac{\bar{z}_2 z_1^2}{20 - z_1}()^2\right) < 0$ 因为 $1 > \dfrac{}{}^4(20 - \rho)^2$，因此

$$\rho^2 > \frac{4\rho^2}{|20 - \rho|^2} > \frac{4\rho^2}{|20 - |z_1||^2} > \left|\frac{4\bar{z}_2 z_1}{(20 - z_1)^2}\right| \geq \left|\Re\left(\frac{4\bar{z}_2 z_1}{(20 - z_1)^2}\right)\right|.$$

As

$$F_1(z) = -z_1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^{k+2}}{30^{k+1}} \text{ and } F_2(z) = -z_2 + 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)z_1^{k+2}}{20^{k+2}},$$

我们得到

$$L_\mu = \left(10 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^{k+2}}{30^{k+1}}\right) + \left(10 + 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)10^{k+2}}{20^{k+2}}\right) = 73/3,$$

以及 $R = 1$。因此，由定理 2 可知，非线性系统 (15) 在 $\mathbb{D}^2(\rho)$ 上是全局渐近稳定的，且满足 $\rho < 30/73$。

5 结论与未来工作

我们利用多圆盘 Hardy空间中的 Koopman算子框架，得到了关于非线性平衡点全局稳定性的新充分条件。具体而言，我们提出了稳定性判据，可在多项式向量场及更一般的解析向量场情形下，对吸引域进行近似。这些判据具有系统性，因为只需利用向量场的泰勒展开系数即可直接验证，因此易于在工具箱中实现。

我们展望了未来工作的几个方向。我们基于Koopman算子的方法可应用于其他类型的动力系统（例如极限环动力学、一般吸引子）。此外，在某些情况下，我们的判据似乎较为保守，因此可以对其进行调整，以便在更大的多圆盘中得到稳定性结果。更重要的是，可以进一步研究我们的稳定性结果与 $\mathbb{C}^n$ 的相关性及其可能的推广。

定理 1 的证明

以下证明的思路源自 [14]中的推论3.8。

考虑变量变换 $z' = z/\mu$，它在单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上产生重缩放动力学，其向量场为

$$F'_l(z') = \sum_{k=1}^{r} \mu^{|\alpha(k)|-1} a_{l,k} z'^{\alpha(k)}. \tag{16}$$

雅可比矩阵 $JF'(0)$ 也是对角矩阵，且 $K' = K$ （见式（9））。在新坐标系中，内积（3）和（4）为

$$\left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle = \begin{cases} \mu^{|\alpha(j)|-|\alpha(k)|} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \alpha_l(k)\, a_{l,(\alpha(j)-\alpha(k))_l} & \text{if } |\alpha(j)| > |\alpha(k)| \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \alpha_l(k)\, a_{l,l} & \text{if } j = k \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{17}$$

我们的结果通过引理 1 和以下序列得以证明

$$\begin{cases} b_{jj} = (1-\xi) & \\ b_{jk} = \dfrac{\xi}{2K} & \text{if } j \neq k \text{ with } \left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle \neq 0 \text{ or } \left\langle L_{F'} e'_j, e'_k \right\rangle \neq 0 \\ b_{jk} = 0, & \text{if } j \neq k \text{ with } \left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle = 0 \text{ or } \left\langle L_{F'} e'_j, e'_k \right\rangle = 0, \end{cases} \tag{18}$$

其中 $\xi \in]0、1[$。由式（3）可知，对于固定的 j，对所有 $k \in \mathbb{N} \setminus \{j\}$，至多有 K 个非零值 $\langle L_{F'} e'_k、e'_j \rangle$，且至多有 K 个非零值 $\propto \langle L_{F'} e'_j、e'_k \rangle$，因此序列（18）满足 $\sum b_{jk} \leq 1$。$_{k=1}$ 的元素 Q_{jk}

双重序列（5）由下式给出

$$Q_{jk} = \frac{K^2 \left|\left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle\right|^2}{\xi^2 \left|\Re\left(\left\langle L_{F'} e'_j, e'_j \right\rangle\right)\right| \left|\Re\left(\left\langle L_{F'} e'_k, e'_k \right\rangle\right)\right|} \quad j < k. \tag{19}$$

此外，利用（17），我们得到以下不等式

$$\begin{aligned} \left|\left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle\right| &\leq \mu^{|\alpha(j)|-|\alpha(k)|} \sum_{l=1}^{n} \alpha_l(k) \left|a_{l,(\alpha(j)-\alpha(k))_l}\right| \\ &\leq S\mu^{|\alpha(j)|-|\alpha(k)|} |\alpha(k)| \end{aligned}$$

and

$$\left|\Re\left(\left\langle L_{F'} e'_j, e'_j \right\rangle\right)\right| = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l(j) \left|\Re\left(a_{l,\alpha(l)}\right)\right| \geq R\,|\alpha(j)|\,.$$

由上述不等式和（19）可得

$$Q_{jk} \leq \frac{K^2 S^2 \mu^{2(|\alpha(j)|-|\alpha(k)|)} |\alpha(k)|^2}{\xi^2 R^2 |\alpha(j)| |\alpha(k)|} \leq \frac{K^2 S^2}{\xi^2 R^2} \mu^{2(|\alpha(j)|-|\alpha(k)|)}$$

其中我们使用了 $|\alpha(j)| \geq |\alpha(k)|$。

若 $KS/R \geq 1$，则令 $\mu = 1$。在这种情况下，我们有

$$Q_{jk} \leq \frac{K^2 S^2}{\xi^2 R^2} \stackrel{\text{def}}{=} Q$$

对某些 $\xi \in]0,1[$ 成立。因此，取以下参数时，（7）成立：

$$\epsilon_j \sim \max_{k \in \mathcal{K}_j} \{\epsilon_k Q\} \tag{20}$$

取 $\mathcal{K}_j = \{k \in \{1,\ldots,j-1\} : \left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle \neq 0\}$。因此，序列（20）给出 $\epsilon_j = \mathcal{O}(Q^{|\alpha(j)|})$，其中 $j > 1$。由此可知，（6）以半径$\rho < 1/\sqrt{Q}$收敛，或者等价地，对某些足够大的 $\xi \in]0,1[$，有 $\rho < R/(KS)$。最后，引理 1 表明，动力学（8）在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上全局渐近稳定。

若 $KS/R < 1$，我们可以选择 $\mu > 1$。在这种情况下，我们有

$$\mu^{2(|\alpha(j)|-|\alpha(k)|)} \leq \mu^{2(d-|\alpha(1)|)} = \mu^{2(d-1)}$$

因此

$$Q_{jk} \leq \frac{K^2 S^2 \mu^{2(d-1)}}{\xi^2 R^2} \stackrel{\text{def}}{=} Q < 1$$

对于某些 $\xi \in]0,1[$，且满足$1 < \mu < \sqrt[d-1]{R/(KS)}$。由此可知，(7) 在以下条件下成立：

$$\epsilon_j \sim \max_{k \in \mathcal{K}_j} \{\epsilon_k Q\} = 1$$

对于 $j \geq 1$。因此，(6) 在半径为 $\rho' < 1$ 的范围内收敛，且由引理 1 可知，新动力学 $\dot{z}' = F'(z)$ 在 $\mathbb{D}^n(\rho')$ 上全局渐近稳定（注意，新动力学在 $\mathbb{D}^n(\rho')$ 上的不变性直接由原动力学在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上的不变性得出）。因此，原动力学 (8) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上全局~~渐近稳定~~，其中 $\rho = \mu\rho' < \sqrt[d-1]{R/(KS)}$。

B 定理 2 的证明

以下证明受到 [14] 中推论 3.9 的证明启发。

考虑变量变换 $z' = z/\mu$，由此在单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上得到向量场为 $F'(z')$ 的重缩放动力学（见前一个证明中的 (16)）。在这种情况下，雅可比矩阵 $JF'(0)$ 也是对角矩阵。

我们的结果通过引理 1 及序列得以证明

$$\begin{cases} b_{jj} = (1-\kappa) & \\ b_{jk} = 0 & \text{if } j \neq k \text{ with } |\alpha(j)| = |\alpha(k)| \text{ and } \left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle \neq 0 \\ & \qquad \text{or if } \left\langle L_{F'} e'_j, e'_k \right\rangle = 0 \\ b_{jk} = \dfrac{\kappa}{2} \dfrac{\left|\left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle\right|}{\sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_l, e'_j \right\rangle\right|} & \text{if } |\alpha(k)| < |\alpha(j)| \\ b_{jk} = \dfrac{\kappa}{2} \dfrac{\left|\left\langle L_{F'} e'_j, e'_k \right\rangle\right|}{\sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_j, e'_l \right\rangle\right|} & \text{if } |\alpha(k)| > |\alpha(j)| \end{cases}$$

其中 $\kappa \in]0, 1[$。序列 b_{jk} 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} < (1-\kappa) + \frac{\kappa}{2} \frac{\sum_{k=1}^{j} \left|\left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle\right|}{\sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_l, e'_j \right\rangle\right|} + \frac{\kappa}{2} \frac{\sum_{k=j+1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_j, e'_k \right\rangle\right|}{\sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_j, e'_l \right\rangle\right|} < 1.$$

双重序列 (5) 的元素 Q_{jk} 给出为

$$Q_{jk} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_l, e'_j \right\rangle\right| \sum_{l=1}^{\infty} \left|\langle L_{F'} e'_k, e'_l \rangle\right|}{\kappa^2 \left|\Re\left(\left\langle L_{F'} e'_j, e'_j \right\rangle\right)\right| \left|\Re\left(\langle L_{F'} e'_k, e'_k \rangle\right)\right|} & \text{if } |\alpha(k)| \neq |\alpha(j)| \\ & \text{and } \left\langle L_{F'} e'_k, e'_j \right\rangle \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{21}$$

$\sum_{l=1}^{\infty}$ 我们注意到，根据 $\sum_{l=1}^{\infty}$ 假设，$\sum \left|\left\langle L_{F'} e'_l, e'_j \right\rangle\right|$ 以及 $\sum \left|\langle L_{F'} e'_k, e'_l \rangle\right|$ 均为有限值。容易看出，对于 $|\alpha(j)| > |\alpha(k)|$，有 $Q_{jk} > 1$。

此外，由 (3)、(4) 和 (11)，可得

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \left|\left\langle L_{F'} e'_l, e'_j \right\rangle\right| &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(l) \left|a'_{p,(\alpha(j)-\alpha(l))_p}\right| \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha(l)| \sum_{p=1}^{n} \left|a'_{p,(\alpha(j)-\alpha(l))_p}\right| \\ &\leq |\alpha(j)| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n} \left|a'_{p,(\alpha(j)-\alpha(l))_p}\right| \\ &= |\alpha(j)| \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{|\alpha(j)|-|\alpha(l)|} \sum_{p=1}^{n} \left|a_{p,(\alpha(j)-\alpha(l))_p}\right| \\ &\leq L_\mu \left|\alpha(j)\right|, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty}\left|\left\langle L_{F'}e'_k,e'_l\right\rangle\right| &\le \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(k)\left|a'_{p,(\alpha(l)-\alpha(k))_p}\right| \\ &\le |\alpha(k)|\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}\left|a'_{p,(\alpha(l)-\alpha(k))_p}\right| \\ &= |\alpha(k)|\sum_{l=1}^{\infty}\mu^{|\alpha(l)|-|\alpha(k)|}\sum_{p=1}^{n}\left|a_{p,(\alpha(l)-\alpha(k))_p}\right| \\ &\le L_\mu\,|\alpha(k)|\,.\end{aligned}$$

由上述不等式和 (21) 可得

$$Q_{jk}\le\frac{L_\mu^2\,|\alpha(j)|\,|\alpha(k)|}{\kappa^2R^2\,|\alpha(j)|\,|\alpha(k)|}=\frac{L_\mu^2}{\kappa^2R^2}\stackrel{\text{def}}{=}Q$$

使得 (7) 满足，且

$$\epsilon_j\sim\max_{k\in\mathcal{K}_j}\{\epsilon_k\,Q\}\tag{22}$$

with

$$\mathcal{K}_j=\{k\in 1,\ldots,j-1:\left\langle L_{F'}e'_k,e'_j\right\rangle\neq 0\text{ for }|\alpha(k)|<|\alpha(j)|\}.$$

因此，序列 (22) 得出 $\epsilon_j=\mathcal{O}(Q^{|\alpha(j)|})$。由此可知，(6) 在半径为 $\rho'<1/\sqrt{Q}$ 的范围内收敛，或者等价地，当 $\kappa\in]0,\ 1[$ 足够大时，$\rho'<R/L_\mu$。接着，引理 1 推出动力学 $\dot{z}'=F'(z)$ 在 $\mathbb{D}^n(\rho')$ 上全局渐近稳定（注意，新动力学在 $\mathbb{D}^n(\rho')$ 上的不变性直接源于原动力学在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上的不变性）。因此，原动力学 (10) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上全局渐近稳定，其中 $\rho=\mu\rho'<\mu R/L_\mu$。

参考文献

[1] M. Budisic、R. Mohr 和 I. Mezić，应用 *Koopman* 理论，《混沌：非线性科学跨学科期刊》，2012年。[2] R.-Y. Chen 和 Z.-H. Zhou，多圆盘上无穷小生成元的参数表示，《复分析与算子理论》，10（2016年），第725–735页。[3] M. Contreras、C. De Fabritiis 和 S. Díaz-Madrigal，多圆盘上的全纯函数半群，《美国数学会会刊》，139（2011年），第1617–1624页。[4] B. D. Figura，多复变数 *Hardy* 空间上的复合算子，《数学分析与应用杂志》109，340–354（1985年）。

[5] F. Jafari，多圆盘上的有界算子与紧算子，《加拿大数学杂志》第XLII卷，第5期，1990年，第869–889页。[6] A. Lasota 和 M. C. Mackey。混沌、分形与噪声：动力系统的随机性方面。Springer-Verlag，1994年。[7] A. Mauroy 和 I. Mezić，利用 *Koopman* 算子的特征函数进行全局稳定性分析，IEEE《自动控制汇刊》，第61卷，第3356–3369页，2016年。[8] A. Mauroy、I. Mezić 和 Y. Susuki，系统与控制中的 *Koopman* 算子：概念、方法论与应用，Springer，2020年。[9] W. Rudin，多圆盘上的函数论，Benjamin，纽约，1969年。[10] W. Rudin，单位球上的函数论 $\mathbb{C}^n$，Springer-Verlag，纽约，1980年。[11]J.H Shapiro，复合算子与经典函数论。，Springer Science+Business Media New York，1993年。[12] A. G. Siskasis，解析函数空间上的复合算子半群：综述1991年数学主题分类。主要分类：47D03、47B38；次要分类：47B37、30C45。[13] A. Mauroy、A. Sootla 和 I. Mezić。用于全局稳定性分析的 Koopman 框架。载于 A. Mauroy、Y. Susuki 和 I. Mezić 编，系统与控制中的 *Koopman* 算子，第35–58页。Springer，2020年。[14]C. M. Zagabe 和 A. Mauroy，*Koopman* 算子框架下切换非线性系统的一致全局稳定性，https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05529。