arXiv:2304.00262v2 [cs.SC] 9 May 2023

多个单变量多项式的 B´ezout 子结式的两种变体

Weidong Wang 和 Jing Yang*

HCIC数学与物理学院、广西应用数学中心、
广西民族大学，中国南宁 530006

摘要

本文为多个多项式构建了两种 B´ezout 子结式公式变体，即混合 B´ezout 子结式多项式和非齐次 B´ezout 子结式多项式。我们并未简单地将 Diaz-Toca 和 Gonzalez-Vega 于 2004年 为两个多项式提出的 B´ezout 子结式公式变体推广到任意数量的多项式，而是提出了一种新方法，为一组一元多项式构造两种 B´ezout 型子结式多项式。实验结果表明，在计算多项式子结式时，B´ezout 型子结式公式优于其他已知公式，其中非齐次 B´ezout 型公式表现最佳。

1 引言

结式和子结式是结式理论中最重要的对象，该理论有许多应用（例如，[1,7,14,19,20]）。鉴于它们的重要性，研究人员已从理论和实践两方面对结式、子结式及其变体开展了广泛研究 [3, 5, 6, 8, 11, 12, 15, 17, 18]。结式理论的重要课题之一是结式多项式和子结式多项式的表示。结构优良的表示往往能为理论发展和后续应用带来诸多便利，其中，子结式多项式的行列式公式是一类具有突出优点的表示，尤其有利于理论发展和高效算法的设计。正因如此，自这一概念提出以来，人们构造了多种子结式多项式的行列式公式，包括西尔维斯特型 [16,17], 贝祖型´巴内特型 [13],

*通讯作者：yangjing0930@gmail.com

等等 [10]。然而，经典子结式多项式只针对两个多项式定义。在 [12], Hong 和 Yang 将两个多项式的子结式多项式概念推广到多多项式情形，并为推广后的子结式多项式给出了三类行列式公式，即西尔维斯特型、贝祖型和巴内特型公式。这些子结式多项式各自具有有趣的结构。通过发掘其中隐藏的结构，有望开发出各种高效计算子结式多项式的算法。研究表明，在计算多个单变量多项式的最大公因式时，贝祖矩阵及其称为混合贝祖矩阵的变体，比 Barnett 矩阵表现更佳。在 [2], Asadi 等人提出了一种基于（混合）贝祖矩阵的推测性方法，用于计算多元多项式环上的子结式链。为了高效计算多个多项式的子结式多项式，需要利用已知子结式的形式，并据此开发新的公式。

本文提出了多个单变量多项式的两种新型B´ezout子结式矩阵，即混合B´ezout子结式矩阵和非齐次B´ezout子结式矩阵。研究表明，这两个矩阵的行列式分别等价于以根定义的子结式多项式。证明思路借鉴自 [12] ，并以更易理解的方式进行了重新表述。与多个多项式的广义B´ezout子结式多项式相比，本文给出的两种变体通常具有更低的次数。我们还比较了使用已知的五种子结式公式计算多项式子结式的效率。结果表明，B´ezout公式及其两种变体的表现优于西尔维斯特型和巴内特型公式。在三种B´ezout型公式中，非齐次B´ezout的表现最佳。通过性能分析发现，在构造子结式矩阵时，混合B´ezout矩阵在三者中占主导地位，因此在用于计算子结式时具有很高的优化潜力。

本文结构如下。第 2 节回顾 Bézout 矩阵及其两种变体（即混合 Bézout 矩阵和非齐次 Bézout 矩阵），以及多个多项式的子结果多项式的相关概念。本文的主要结果在第 3 节中给出，证明见第 4 节。第 5 节报告实验结果并给出进一步的讨论。

2 预备知识

我们先简要介绍两个一元多项式的 B´ezout 型子结果多项式及其两个变体。随后回顾多个单变量多项式的子结果多项式这一概念。我们采用其中一个给定多项式的根式表达来定义子结果多项式，因为这对推理非常有帮助。除非另有说明，本文其余部分出现的多项式均为有理数域上的一元多项式，记作 $\mathbb{Q}$，其中 x 为

变量。

2.1 两个多项式的 Bézout 型子结式及其变体

现在回顾两个多项式的 B´ezout 矩阵和 B´ezout 结式的概念，以及它们的两个不变量，包括混合 B´ezout 矩阵/结式和非齐次 B´ezout 矩阵/结式。在本小节余下部分中，我们假设 A，$B \in \mathbb{Q}[x]$ 的次数分别为 m 和 n，其中 $m \geq n$。具体而言，

$$\begin{aligned} A &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 \\ B &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

定义 1. ´和 $Bez(A, B)$ 关于 x 的 ***Bézout*** 矩阵 A 和 B 定义为

$$\mathrm{Bez}(A,B) := \begin{bmatrix} c_{m-1,0} & \cdots & c_{m-1,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{0,0} & \cdots & c_{0,m-1} \end{bmatrix}$$

其中$c_{i,j}$由下式给出

$$\frac{A(x)B(x) - A(y)B(x)}{x-y} = \sum_{i,j=0}^{m-1} c_{i,j}x^i y^j \tag{1}$$

$\mathrm{Bez}(A, B)$ 的行列式称为 A 和 B 关于 x的 ***Bézout*** 结式。

定义 2. ´和 $H(A, B)$ 关于x 的混合 ***Bézout*** 矩阵 A 和 B 定义为

$$H(A,B) := \left[\begin{array}{cccccc} b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline f_{1,m} & f_{1,m-1} & \cdots & \cdots & f_{1,2} & f_{1,1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ f_{n,m} & f_{n,m-1} & \cdots & \cdots & f_{n,2} & f_{n,1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\} m-n \text{ rows} \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right\} n \text{ rows} \end{array}$$

其中 $f_{r,\ j}$ 是下列多项式的系数

$$\begin{aligned} k_r &= (a_m x^{r-1} + \cdots + a_{m-r+1})(b_{n-r}x^{m-r} + \cdots + b_0 x^{m-n}) \\ &\quad - (a_{m-r}x^{m-r} + \cdots + a_0)(b_n x^{r-1} + \cdots + b_{n-r+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} f_{r,j}x^{m-j} \end{aligned}$$

在关于 $j=1$、...、m 的项中。 $H(A,B)$ 的行列式称为关于 x 的 A 与 B 的混合 *B´ezout* 结式。

定义 3. 关于 x 的 A 和 B 的非齐次 *B´ezout* 矩阵 $N(A,B)$ 定义如下：

$$N(A,B) := \left[\begin{array}{cccccc} b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & \cdots & c_{n-1,m-2} & c_{n-1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & \cdots & c_{0,m-2} & c_{0,m-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} m-n \text{ rows} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n \text{ rows} \end{array}$$

其中，$c_{i,j}$ 如式 (1) 所示。 $N(A,B)$ 的行列式称为关于 x 的 A 和 B 的非齐次 *B´ezout* 结式。

2.2 多个多项式的子结果内根

以下记号用于陈述 Hong 和 Yang 在 [12]中给出的多个一元多项式的子结式定义。

记号 4.

- $F = (F_0, F_1, \ldots, F_t) \subset \mathbb{Q}[x]$;
- $d_i =$ 次数 F_i;
- $F_0 = a_{0d_0} \prod_{j=1}^{d_0} (x - \alpha_i)$;
- $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t) \in \mathbb{N}^t$;
- $|\delta| = \delta_1 + \cdots + \delta_t \leq d_0$;
- $V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{d_0-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{d_0-1} \\ & & \cdots\cdots & \\ 1 & \alpha_{d_0} & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-1} \end{bmatrix}$。

根据上述记号，我们回顾一下多个单变量多项式的第 δ 个子结果多项式的概念，该概念是根据第一个多项式的根定义的。

定义 5. F 的广义 δ 阶子结果多项式 S_δ 定义为

$$S_\delta(F) := a_{0d_0}^{\delta_0} \det M_\delta / \det V$$

其中

- $M_\delta = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1^0 F_1(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_1(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_1-1} F_1(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_1-1} F_1(\alpha_{d_0}) \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \hline \alpha_1^0 F_t(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_t(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_t-1} F_t(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_t-1} F_t(\alpha_{d_0}) \\ \hline \alpha_1^0(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0(x-\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\varepsilon-1}(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\varepsilon-1}(x-\alpha_{d_0}) \end{array}\right]$;
- $\delta_0 = \max(d_1+\delta_1-d_0, \ldots, d_t+\delta_t-d_0, 1-|\delta|)$;
- $\varepsilon = d_0 - |\delta|$.

定义5中的 S_δ 有理表达式应按以下方式理解，否则当 F 不是无平方因子的时，分母将为零。

(1) 将 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 视为不定元，并进行精确除法，得到一个关于 $\alpha_1, \ldots, , \alpha_n$的对称多项式。

(2) 将 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 赋值为 F的根，并计算该多项式。

因此， S_δ 本质上是关于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_0}$ 的多项式，尽管它以有理函数的形式呈现。此外，注意到 S_δ 关于$\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_0}$ 是对称的，因此可以将其写成关于 F中多项式系数的多项式。事实上，Hong 和 Yang 给出了 S_δ的三种系数表示形式，包括西尔维斯特型、B´ézout 型和 Barnett 型子结式。特别地，下面给出了 F 的 B´ézout 型子结式的显式公式。B´ézout 型子结式的构造启发我们采用一种有望构造混合 B´ézout 型和非齐次 B´ézout 型子结式的方法。

定理 6。 假设 $d_0 =$最大值$_{0\le i\le t}\, d_i$ 且 $\delta \neq (0, \ldots, 0)$。令

$$\mathrm{Bez}_\delta(F) := \left[\begin{array}{ccccc} R_1 & R_2 & \cdots & R_t & X_{\delta,d_0} \end{array}\right]^T$$

其中

- R_i *consists of the first* δ_i *columns of* $\mathrm{Bez}(F_0, F_i)$, *and*

- $X_{\delta,d_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & x \\ & & -1 \\ & & \\ & & \end{array}\right]}_{d_0-|\delta| \ columns} \Bigg\} d_0 \ rows$

于是我们有

$$S_\delta = a_{0d_0}^{\delta_0-|\delta|} \det \mathrm{Bez}_\delta(F).$$

3 主要结果

在本节中，我们提出一种构造一组一元多项式的混合 B´ezout 矩阵和非齐次 B´ezout 子结式矩阵的新方法，该方法不同于 Diaz-Toca 和 Gonzalez-Vega 在 [10] 中提出的方法。我们将证明，这两个矩阵的行列式与给定多项式组的子结果多项式相同。

在 [12], Hong 和 Yang 提出了一种方法，可根据多个多项式的 B´ezout 矩阵 Bez(F_0, F_1) . . . , Bez(F_0, F_t) 构造其 B´ezout 子结式矩阵。沿用类似思路，我们将在下文为多于两个一元多项式构造混合 B´ezout 子结式矩阵和非齐次 B´ezout 子结式矩阵。为陈述主要结果，我们假设$F_i = a_{id_i}x^{d_i} + \cdots + a_{i0}$对于 $i = 0, 1, \ldots, t$，其中 $d_0 = \max_{0\le i\le t} d_i$且

$$\mathrm{Bez}(F_0, F_i) = \begin{bmatrix} c_{d_0-1,0}^{(i)} & \cdots & c_{d_0-1,d_0-1}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{0,0}^{(i)} & \cdots & c_{0,d_0-1}^{(i)} \end{bmatrix}$$

定义 7. 给定 $F = (F_0, F_1, \ldots, F_t)$ 其中 $F_i = \sum_{j=0}^{d_i} a_{ij}x^j$， F的广义第 δ 阶混合 *B´ezout* 子结式矩阵 H_δ 定义为

$$H_\delta(F) := \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_t & X_{\delta,d_0} \end{bmatrix}^T$$

其中， R_i 是通过选取 $H(F_0, F_i)$ 的前 δ_i 行得到的子矩阵的转置，也就是说，

$$R_i = \left[\begin{array}{ccccc} a_{i0} & \cdots & a_{id_i} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{i0} & \cdots & a_{id_i} \\ \hline f_{1,d_0}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{1,2}^{(i)} & f_{1,1}^{(i)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ f_{\delta_i+d_i-d_0,d_0}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{\delta_i+d_i-d_0,2}^{(i)} & f_{\delta_i+d_i-d_0,1}^{(i)} \end{array}\right]^T \begin{array}{l} \Big\} \min(\delta_i, d_0-d_i) \ rows \\ \Big\} \max(0, \delta_i+d_i-d_0) \ rows \end{array}$$

且 $f_r^{(i)}$，j 是下列多项式的系数

$$\begin{aligned} k_r^{(i)} &= (a_{0d_0}x^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1})(a_{id_i-r}x^{d_0-r} + \cdots + a_{i0}x^{d_0-d_i}) \\ &\quad - (a_{0d_0-r}x^{d_0-r} + \cdots + a_{00})(a_{id_i}x^{r-1} + \cdots + a_{id_i-r+1}) \qquad (2) \\ &= \sum_{j=1}^{d_0} f_{r,j}^{(i)} x^{d_0-j} \end{aligned}$$

在关于 $j = 1$、.....、d_0的项 x^{d_0-j} 中。

定义 8. 给定 $F = (F_0, F_1, \ldots, F_t)$，其中 $F_i = \sum_{j=0}^{d_i} a_{ij}x^j$，第 δ 个非齐次 *B´ezout* 子结式矩阵 N_δ F 的广义形式定义为

$$N_\delta(F) := \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_t & X_{\delta,d_0} \end{bmatrix}^T$$

其中 R_i 是通过选取 $N(F_0, F_i)$ 的前 δ_i 行得到的子矩阵的转置，即：

$$R_i = \left[\begin{array}{ccccc} a_{i0} & \cdots & a_{id_i} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{i0} & \cdots & a_{id_i} \\ \hline c_{d_i-1,0}^{(i)} & \cdots & \cdots & c_{d_i-1,d_0-2}^{(i)} & c_{d_i-1,d_0-1}^{(i)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_{d_0-\delta_i,0}^{(i)} & \cdots & \cdots & c_{d_0-\delta_i,d_0-2}^{(i)} & c_{d_0-\delta_i,d_0-1}^{(i)} \end{array}\right]^T \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \min(\delta_i, d_0 - d_i) \ rows \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \max(0, \delta_i + d_i - d_0) \ rows \end{array}$$

注记 9. 矩阵 $H_\delta(F)$ 和 $N_\delta(F)$ 可以视为 *Li* 在 *[16]* 中为两个一元多项式的西尔维斯特型子结果多项式所构造的子结式矩阵的一种推广。

定理 10 (主要结果)。 我们有

(1) $S_\delta(F) = c \cdot$ 行列式 $H_\delta(F)$,
(2) $S_\delta(F) = c \cdot$ 行列式 $N_\delta(F)$，其中 $c = a^{\delta_0 - \sum_{i=1}^t \max(0,\ \delta_i + d_i - d_0)\ 0 d_0}$。

注记 11。

（*1*）本文构造 *B´ezout* 型子结式变体的方法与 *[10]* 中的方法不同之处在于，我们选取行来构造子结式矩阵，而后者选取列。在二多项式情形下，这两种方法得到的子结式多项式相同。

(2) 注意到 $\max(0、\ \delta_i + d_i - d_0) \le \delta_i$，因此 $\sum_{i=1}^t \max(0、\ \delta_i + d_i - d_0) \le |\delta|$。因此，与 *[12]*, 中提出的广义 *B´ézout* 子结式多项式相比，本文提出的两种 *B´ézout* 型子结式多项式的不变量通常具有更小的次数。

例12。 考虑 $F=(F_0、\ F_1、\ F_2)$，其中

$$\begin{aligned}F_0&=a_{05}x^5+a_{04}x^4+a_{03}x^3+a_{02}x^2+a_{01}x+a_{00},\\F_1&=a_{14}x^4+a_{13}x^3+a_{12}x^2+a_{11}x+a_{10},\\F_2&=a_{24}x^4+a_{23}x^3+a_{22}x^2+a_{21}x+a_{20}.\end{aligned}$$

以及 $a_{05}a_{14}a_{24}\neq 0$。设 $\delta=(2,2)$。根据定义*7*和定义*8*,

$$H_\delta(F)=\begin{bmatrix}a_{10}&-a_{00}a_{14}&a_{20}&-a_{00}a_{24}&x\\a_{11}&-a_{01}a_{14}+a_{05}a_{10}&a_{21}&-a_{01}a_{24}+a_{05}a_{20}&-1\\a_{12}&-a_{02}a_{14}+a_{05}a_{11}&a_{22}&-a_{02}a_{24}+a_{05}a_{21}&0\\a_{13}&-a_{03}a_{14}+a_{05}a_{12}&a_{23}&-a_{03}a_{24}+a_{05}a_{22}&0\\a_{14}&-a_{04}a_{14}+a_{13}a_{05}&a_{24}&-a_{04}a_{24}+a_{23}a_{05}&0\end{bmatrix}^T,$$

$$N_\delta(F)=\begin{bmatrix}a_{10}&-a_{00}a_{14}+a_{04}a_{10}&a_{20}&-a_{00}a_{24}+a_{04}a_{20}&x\\a_{11}&-a_{01}a_{14}+a_{04}a_{11}+a_{05}a_{10}&a_{21}&-a_{01}a_{24}+a_{04}a_{21}+a_{05}a_{20}&-1\\a_{12}&-a_{02}a_{14}+a_{04}a_{12}+a_{05}a_{11}&a_{22}&-a_{02}a_{24}+a_{04}a_{22}+a_{05}a_{21}&0\\a_{13}&-a_{03}a_{14}+a_{04}a_{13}+a_{05}a_{12}&a_{23}&-a_{03}a_{24}+a_{04}a_{23}+a_{05}a_{22}&0\\a_{14}&a_{13}a_{05}&a_{24}&a_{23}a_{05}&0\end{bmatrix}^T.$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned}\delta_0&=\max(\delta_1+d_1-d_0,\delta_2+\tilde{d_2}-d_0,1-(\delta_1+\delta_2))=1,\\c&=a_{05}^{\delta_0-(\max(0,\delta_1+d_1-d_0)+\max(0,\delta_2+d_2-d_0))}=a_{05}^{-1}.\end{aligned}$$

根据定理 *10*，我们有

$$S_\delta(F)=a_{05}^{-1}\cdot\det H_\delta(F)=a_{05}^{-1}\cdot\det N_\delta(F).$$

若用 F 的 *B´ezout* 子结式矩阵计算 $S_\delta(F)$，则根据定理 *6*,

$$S_\delta(F)=a_{05}^{-3}\cdot\det \mathrm{Bez}_\delta(F),$$

这表明 $\det \mathrm{Bez}_\delta(F)$ 的次数高于 $\det\ H_\delta(F)$ 和 $\det\ N_\delta(F)$。

4 证明

本节给出定理 10 的证明。

4.1 定理10-(1)的证明

证明。 根据定义 5，我们只需证明

$$S_\delta(F)\cdot\det V=c\cdot\det(H_\delta(F)\cdot V)$$

接下来我们将继续化简 $H_\delta(F)\cdot V$ 的行列式。

考虑乘积 $H_\delta(F)\cdot V$:

$$H_\delta(F)\cdot V=\begin{bmatrix}R_1^T\\ \vdots\\ R_t^T\\ X_{\delta,d_0}^T\end{bmatrix}\cdot V=\begin{bmatrix}R_1^TV\\ \vdots\\ R_t^TV\\ X_{\delta,d_0}^TV\end{bmatrix}$$

其中

$$R_i=\left[\begin{array}{ccccc}a_{i0} & \cdots & a_{id_i} & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{i0} & \cdots & a_{id_i}\\ \hline f_{1,d_0}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{1,2}^{(i)} & f_{1,1}^{(i)}\\ \vdots & & & \vdots & \vdots\\ f_{\delta_i+d_i-d_0,d_0}^{(i)} & \cdots & \cdots & f_{\delta_i+d_i-d_0,2}^{(i)} & f_{\delta_i+d_i-d_0,1}^{(i)}\end{array}\right]^T\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\min(\delta_i,d_0-d_i)\text{ rows}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\max(0,\delta_i+d_i-d_0)\text{ rows}\end{matrix}$$

同时，我们将 $S_\delta(F)$ 的分母 M_δ 划分为 $t+1$ 部分，即

$$M_\delta(F)=\begin{bmatrix}M_1\\ \vdots\\ M_t\\ X_\varepsilon\end{bmatrix}\tag{3}$$

其中

$$M_i=\begin{bmatrix}\alpha_1^0F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0F_i(\alpha_{d_0})\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{\delta_1-1}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_1-1}F_i(\alpha_{d_0})\end{bmatrix}$$

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}\alpha_1^0(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0(x-\alpha_{d_0})\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{\varepsilon-1}(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\varepsilon-1}(x-\alpha_{d_0})\end{bmatrix}$$

我们将证明存在一个 $\delta_i\times\delta_i$ 矩阵 T_i，使得 $T_iM_i=R_i^TV$和$X_{\delta,\ d_0}^TV=X_\varepsilon$。

1. 证明 $T_iM_i=R_i^TV$。

注意,

$$R_i^TV=\left[\begin{array}{ccc}\alpha_1^0(a_{i0}\alpha_1^0+\cdots+a_{id_i}\alpha_1^{d_i}) & \cdots & \alpha_{d_0}^0(a_{i0}\alpha_{d_0}^0+\cdots+a_{id_i}\alpha_{d_0}^{d_i})\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{d_0-d_1-1}(a_{i0}\alpha_1^0+\cdots+a_{id_i}\alpha_1^{d_i}) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_1-1}(a_{i0}\alpha_{d_0}^0+\cdots+a_{id_i}\alpha_{d_0}^{d_1})\\ \hline f_{1,d_0}^{(i)}\alpha_1^0+\cdots+f_{1,1}^{(i)}\alpha_1^{d_0-1} & \cdots & f_{1,d_0}^{(i)}\alpha_{d_0}^0+\cdots+f_{1,1}^{(i)}\alpha_{d_0}^{d_0-1}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{\delta_i+d_i-d_0,d_0}^{(i)}\alpha_1^0+\cdots+f_{\delta_i+d_i-d_0,1}^{(i)}\alpha_1^{d_0-1} & \cdots & f_{\delta_i+d_i-d_0,d_0}^{(1)}\alpha_{d_0}^0+\cdots+f_{\delta_i+d_i-d_0,1}^{(1)}\alpha_{d_0}^{d_0-1}\end{array}\right]$$

从上述矩阵中，我们可以得出以下观察结果：

- $a_{i0}\alpha_j^0 + \cdots + a_{id_i}\alpha_j^{d_i} = F_i(\alpha_j)$;
- $f_{r,d_0}^{(i)}\alpha_j^0 + \cdots + f_{r,1}^{(i)}\alpha_j^{d_0-1} = k_r^{(i)}(\alpha_j)$.

因此我们有

$$R_i^T V = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1^0 F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_{d_0}) \\ \hline k_1^{(i)}(\alpha_1) & \cdots & k_1^{(i)}(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\delta_i+d_i-d_0}^{(i)}(\alpha_1) & \cdots & k_{\delta_i+d_i-d_0}^{(i)}(\alpha_{d_0}) \end{array}\right]$$

回顾 (2)。将 $x = \alpha_i$ 代入其中，我们得到：

$$\begin{aligned} k_r^{(i)}(\alpha_j) &= (a_{0d_0}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1})(a_{id_i-r}\alpha_j^{d_0-r} + \cdots + a_{i0}\alpha_j^{d_0-d_i}) \\ &\quad - (a_{0d_0-r}\alpha_j^{d_0-r} + \cdots + a_{00})(a_{id_i}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{id_i-r+1}) \\ &= (a_{0d_0}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1})(a_{id_i-r}\alpha_j^{d_0-r} + \cdots + a_{i0}\alpha_j^{d_0-d_i}) \\ &\quad + (a_{0d_0}\alpha_j^{d_0} + \cdots + a_{0d_0-r+1}\alpha_j^{d_0-r+1})(a_{id_i}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{id_i-r+1}) \\ &= (a_{0d_0}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1}) \cdot (a_{i0}\alpha_j^{d_0} + \cdots + a_{i0}\alpha_j^{d_0-d_i}) \\ &= \alpha_j^{d_0-d_i} F_i(\alpha_j)(a_{0d_0}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1}) \end{aligned}$$

由此立即可得

$$R_i^T V = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1^0 F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_{d_0}) \\ \hline \alpha_1^{d_0-d_i} F_i(\alpha_1) G_0(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i} F_i(\alpha_{d_0}) G_0(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i} F_i(\alpha_1) G_{\delta_i+d_i-d_0-1}(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i} F_i(\alpha_{d_0}) G_{\delta_i+d_i-d_0-1}(\alpha_{d_0}) \end{array}\right]$$

其中 $G_r(\alpha_j) = a_{0d_0}\alpha_j^{r-1} + \cdots + a_{0d_0-r+1}$。我们继续通过一系列行变换来化简 $R_i^T V$ 的下半部分（其有 $\max(0,\ \delta_i + d_i - d_0)$ 行）。

注意到

$$\begin{bmatrix} G_0(\alpha_j) \\ G_1(\alpha_j) \\ \vdots \\ G_{\delta_i+d_i-d_0-1}(\alpha_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0d_0} & & & \\ a_{0d_0-1} & a_{0d_0} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{02d_0-\delta_i-d_i+1} & \cdot & \cdots & a_{0d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j^0 \\ \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^{\delta_i+d_i-d_0-1} \end{bmatrix}$$

我们立即得到

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{d_0-d_i}F_i(\alpha_1)G_{i,0}(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i}F_i(\alpha_{d_0})G_{i,0}(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i}F_i(\alpha_1)G_{i,\delta_i+d_i-d_0-1}(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i}F_i(\alpha_{d_0})G_{i,\delta_i+d_i-d_0-1}(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0d_0} & & & \\ a_{0d_0-1} & a_{0d_0} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{02d_0-\delta_i-d_i+1} & \cdot & \cdots & a_{0d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{d_0-d_i}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i}F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_i-1}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_i-1}F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix}$$

因此，令

$$\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} a_{0d_0} & & & \\ a_{0d_0-1} & a_{0d_0} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{02d_0-\delta_i-d_i+1} & \cdot & \cdots & a_{0d_0} \end{bmatrix}$$

其阶为 $\max(0,\ \delta_i + d_i - d_0)$。然后

$$R_i^T V = \begin{bmatrix} I_i & \\ & \tilde{T}_i \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1^0 F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i-1}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i-1}F_i(\alpha_{d_0}) \\ \hline \alpha_1^{d_0-d_i}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i}F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_i-1}F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_i-1}F_i(\alpha_{d_0}) \end{array}\right]$$

其中 I_i 的阶为 $\min(\delta_i,\ d_0 - d_i)$。令 $T_i = \begin{bmatrix} I_i & \\ & \tilde{T}_i \end{bmatrix}$。则 T_i 的阶为 δ_i，且 $R_i^T V = T_i M_i$。

2. 证明 $X_{\delta,\ d_0}^T V = X_\varepsilon$。

通过执行以下矩阵乘积即可轻松验证：

$$X_{\delta,d_0}^T V = \begin{bmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{bmatrix}_{\varepsilon \times d_0} \begin{bmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{d_0}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-1} & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^0(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0(x-\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\varepsilon-1}(x-\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{\varepsilon-1}(x-\alpha_{d_0}) \end{bmatrix} X_\varepsilon$$

综上，我们得到

$$\begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & T_t & \\ & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_t \\ X_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T V \\ \vdots \\ R_t^T V \\ X_{\delta,d_0} V \end{bmatrix} = H_\delta(F) \cdot V$$

最后，对等式左右两边取行列式，得到如下结果：

$$\prod_{i=1}^{t} \det T_i \cdot \det M_\delta = \det H_\delta(F) \cdot \det V$$

其中

$$\det T_i = \det \begin{bmatrix} I_i & \\ & \tilde{T}_i \end{bmatrix} = \det \tilde{T}_i$$

回顾一下， T_i 的阶为 $\max(0, \delta_i + d_i - d_0)$，且是一个下三角矩阵，其对角元素为 a_{0d_0}。因此

$$\det \tilde{T}_i = a_{0d_0}^{\max(0,\delta_i+d_i-d_0)}$$

由此得到 $\det T_i = a^{\max(0,\delta_i+d_i-d_0)}_{0d_0}$。然后容易推出

$$\begin{aligned} S_\delta(F) &= a_{0d_0}^{\delta_0} \cdot \det M_\delta / \det V \\ &= a_{0d_0}^{\delta_0} \det H_\delta(F) \Big/ \prod_{i=1}^{t} \det T_i \\ &= a_{0d_0}^{\delta_0 - \sum_{i=1}^{t} \max(0,\delta_i+d_i-d_0)} \det H_\delta(F) \end{aligned}$$

□

4.2 定理 10-(2) 的证明

证明。 根据定义 5，我们只需证明

$$S_\delta(F) \cdot \det V = c \cdot \det(N_\delta(F) \cdot V)$$

接下来，我们将继续简化 $N_\delta(F) \cdot V$ 的行列式。

考虑乘积 $N_\delta(F) \cdot V$。我们有

$$N_\delta(F) \cdot V = \begin{bmatrix} R_1^T \\ \vdots \\ R_t^T \\ X_{\delta,d_0}^T \end{bmatrix} \cdot V = \begin{bmatrix} R_1^T V \\ \vdots \\ R_t^T V \\ X_{\delta,d_0}^T V \end{bmatrix}$$

其中

$$R_i = \left[\begin{array}{cccccc} a_{i0} & \cdots & a_{id_i} & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_{i0} & \cdots & & a_{id_i} \\ \hline c^{(i)}_{d_i-1,0} & \cdots & \cdots & c^{(i)}_{d_i-1,d_0-2} & & c^{(i)}_{d_i-1,d_0-1} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c^{(i)}_{d_0-\delta_i,0} & \cdots & \cdots & c^{(i)}_{d_0-\delta_i,d_0-2} & & c^{(i)}_{d_0-\delta_i,d_0-1} \end{array}\right]^T \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}\min(\delta_i, d_0-d_i) \text{ rows} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}\max(0, \delta_i+d_i-d_0) \text{ rows} \end{array}$$

与（3）中的做法相同，我们将 M_δ $S_\delta(F)$ 的分母划分为 $t+1$ 个部分，记为 M_1、…、M_t、X_{ε° 根据定理 10-1 的证明，$X^T_{\delta\text{、}d_0}V = X_{\varepsilon^\circ}$ 剩下只需证明，对于某个 $\delta_i \times \delta_i$ 矩阵 T_i，$R_i^T V = T_i M_i$。

注意，

$$R_i^T V = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1^0 F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_{d_0}) \\ \hline C^{(i)}_{d_i-1}\cdot\bar{\alpha}_1 & \cdots & C^{(i)}_{d_i-1}\cdot\bar{\alpha}_{d_0} \\ \vdots & & \vdots \\ C^{(i)}_{d_0-\delta_i}\cdot\bar{\alpha}_1 & \cdots & C^{(i)}_{d_0-\delta_i}\cdot\bar{\alpha}_{d_0} \end{array}\right]$$

其中

$$C_k^{(i)}\cdot\ \bar{\alpha}_j = \left[\begin{array}{cccc} c^{(i)}_{k,0} & c^{(i)}_{k,1} & \cdots & c^{(i)}_{k,d_0-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \alpha_j^0 \\ \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^{d_0-1} \end{array}\right]$$

现在我们将 $R_i^T V$ 划分为两个块，即，

$$R_i^T V = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

with

$$U_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^0 F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^0 F_i(\alpha_{d_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_1) & \cdots & \alpha_{d_0}^{d_0-d_i-1} F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} C^{(i)}_{d_i-1}\cdot\bar{\alpha}_1 & \cdots & C^{(i)}_{d_i-1}\cdot\bar{\alpha}_{d_0} \\ \vdots & & \vdots \\ C^{(i)}_{d_0-\delta_i}\cdot\bar{\alpha}_1 & \cdots & C^{(i)}_{d_0-\delta_i}\cdot\bar{\alpha}_{d_0} \end{bmatrix}$$

我们继续通过一系列行变换来简化 U_2（其有 $\max(0, \delta_i - d_0 + d_i)$ 行）。

回忆一下， [12, 引理 35] 指出

$$C_k^{(i)} \cdot \bar{\alpha}_j = a_{0d_0} F_i(\alpha_j)(-1)^{d_0-k-1} e_{d_0-k-1}^{(j)}$$

其中， $e_\ell^{(j)}$ 表示在 α_1， α_2，……， α_{j-1}，α_{j+1}，……， α_{d_0} 上的第 ℓ 个初等对称函数。将上式代入 U_2 并提出因子 a_{0d_0}，得到

$$U_2 = a_{0d_0} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1)(-1)^{d_0-d_i} e_{d_0-d_i}^{(1)} & \cdots & F_i(\alpha_{d_0})(-1)^{d_0-d_i} e_{d_0-d_i}^{(d_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ F_i(\alpha_1)(-1)^{\delta_i-1} e_{\delta_i-1}^{(1)} & \cdots & F_i(\alpha_{d_0})(-1)^{\delta_i-1} e_{\delta_i-1}^{(d_0)} \end{bmatrix}$$

根据 [12, 引理 36],

$$e_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k e_{j-k} \alpha_i^k = [(-1)^0 e_j \ (-1)^1 e_{j-1} \ \cdots \ (-1)^j e_0 \ 0 \ \cdots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i^0 \\ \alpha_i^1 \\ \vdots \\ \alpha_i^{d_0-1} \end{bmatrix}$$

其中， e_ℓ 是 α_1、……、α_{d_0} 上的第 ℓ 个初等对称多项式，约定 $e_0^{(i)} := 0$。记 $[(-1)^0 e_j (-1)^1 e_{j-1} \ \cdots (-1)^j e_0 \ 0 \ \cdots \ 0]$，其中 $\bar{e}_j$。那么 $e_j^{(i)} = \bar{e}_j \bar{\alpha}_i$，因此

$$\begin{aligned} U_2 &= a_{0d_0} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1)(-1)^{d_0-d_i} \bar{e}_{d_0-d_i} \bar{\alpha}_1 & \cdots & F_i(\alpha_{d_0})(-1)^{d_0-d_i} \bar{e}_{d_0-d_i} \bar{\alpha}_{d_0} \\ \vdots & & \vdots \\ F_i(\alpha_1)(-1)^{\delta_i-1} \bar{e}_{\delta_i-1} \bar{\alpha}_1 & \cdots & F_i(\alpha_{d_0})(-1)^{\delta_i-1} \bar{e}_{\delta_i-1} \bar{\alpha}_{d_0} \end{bmatrix} \\ &= a_{0d_0} \begin{bmatrix} (-1)^{d_0-d_i} \bar{e}_{d_0-d_i} \\ \vdots \\ (-1)^{\delta_i-1} \bar{e}_{\delta_i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \cdots & \bar{\alpha}_{d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到 $\bar{e}_{d_0-d_i}$，……， $\bar{e}_{\delta_i-1}$ 的最后 $d_0 - \delta_i$ 列全为零，将这些列截去，并将所得向量记为 $\tilde{e}_{d_0-d_i}$，……， $\tilde{e}_{\delta_i-1}$。由于这些零列抵消了 $\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \cdots & \bar{\alpha}_{d_0} \end{bmatrix}$ 的最后 $d_0 - \delta_i$ 行，得到

$$U_2 = \tilde{T}_i \begin{bmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{d_0}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_i-1} & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix}$$

其中

$$\tilde{T}_i = a_{0d_0} \begin{bmatrix} (-1)^{d_0-d_i} \tilde{e}_{d_0-d_i} \\ \vdots \\ (-1)^{\delta_i-1} \tilde{e}_{\delta_i-1} \end{bmatrix}$$

˜容易看出， T_i 的阶为 $\max(0, \delta_i - d_0 + d_i) \times \delta_i$。
另一方面，可以观察到

$$U_1 = \begin{bmatrix} I_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{d_0}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_i - 1} & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_i - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix}$$

其中， I_i 的阶为 $\min(\delta_i, d_0 - d_i)$。我们构造

$$T_i = \left[\begin{array}{c|c} I_i & 0 \\ \hline \tilde{T}_i & \end{array}\right]$$

由此可得

$$R_i^T V = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{d_0}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{\delta_i - 1} & \cdots & \alpha_{d_0}^{\delta_i - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_i(\alpha_{d_0}) \end{bmatrix} = T_i M_i$$

最后将 $R_i^T V$ 合并在一起，得到如下结果:

$$N_\delta(F) \cdot V = \begin{bmatrix} R_1^T V \\ \vdots \\ R_t^T V \\ X_{\delta, d_0}^T V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 M_1 \\ \vdots \\ T_t M_t \\ X_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & T_t & \\ & & & I_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_t \\ X_\varepsilon \end{bmatrix}$$

其中， I_ε 是 ε阶单位矩阵。对两边取行列式，得到

$$\det N_\delta(F) \cdot \det V = \prod_{i=1}^{t} \det T_i \cdot \det M_\delta$$

进一步计算可得

$$\det T_i = \det \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \tilde{T}_i & \end{array}\right] = a_{0 d_0}^{\sum_{i=1}^{t} \max(0, \delta_i - d_0 + d_i)}$$

这立即意味着

$$S_\delta(F) = a_{0 d_0}^{\delta_0} \det M_\delta / \det V = a_{0 d_0}^{\delta_0} \cdot \det N_\delta(F) \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{t} \det T_i} = c \cdot \det N_\delta(F)$$

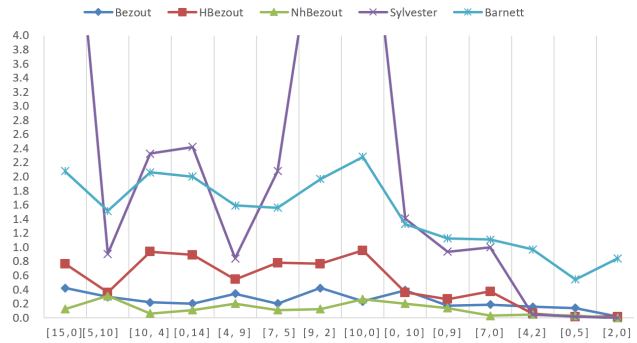
其中

$$c = a_{0 d_0}^{\delta_0 - \sum_{i=1}^{t} \max(0, \delta_i - d_0 + d_i)}$$

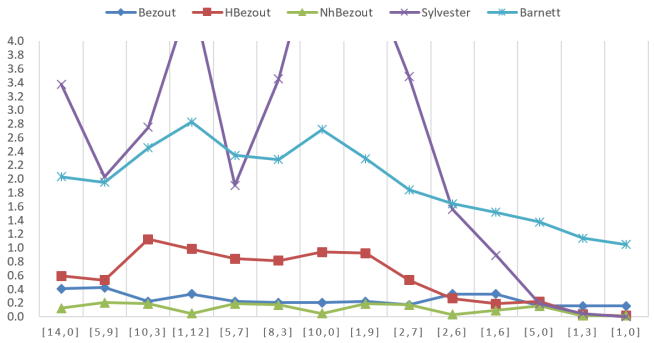
□

5 实验结果

本节通过一系列示例，考察采用不同子结式公式计算子结式多项式的效率。涉及的公式包括 Sylvester 型、Barnett 型、B´ezout 型，以及本文提出的两种变体。示例均在配备 Intel Core i7-10710U 处理器和 16.0G 内存的个人电脑上运行。具体而言，比较从两个方面展开：一是在多项式组随 δ 变化时，计算不同子结式多项式所需的时间；二是计算多项式组子结式多项式各阶段所耗费的时间。



(a) 多项式的次数为 (15,12,9)



(b) 多项式的次数为 (14,12,12)

图 1：使用所列公式计算两组多项式的 S_δ 所需时间（其中，混合型 B´ezout 和非齐次型 B´ezout 分别简称为 HBezout 和 NhBezout；横轴表示以秒计的耗时。）

图 1 展示了两个多项式组的计算成本随 δ 变化的情况。相关多项式的次数分别为 (15,12, 9) 和 (14, 12, 12)，而

参数个数均为 2。考虑到两例中可能的δ总数分别为 120 和 136，逐一列出并不现实。因此，我们为每种情况选取了 14 δ。下方图 1 用不同颜色的虚线描述了时间变化。可以看出，三种 Bézout 型公式的表现优于另外两种（即 Sylvester 型和 Barnett 型）。此外，非齐次 Bézout 型耗时最少。

为了更好地了解三种 B´ezout 型公式的时间效率，我们进一步对它们进行了性能分析。通过分析程序，我们发现有两项操作占用了大部分运行时间，即矩阵生成和行列式计算。表 1 展示了 10 个测试示例中各项操作所耗费的时间。表中列出的总耗时是所有可能的 δ' 的耗时总和，涉及的参数个数均为 2。可以看出，在大多数情况下，非齐次 B´ezout 公式的耗时在三种公式中最少，而混合型 B´ezout 的表现最差。不过，仔细观察后发现，与另外两种公式相比，生成混合型 B´ezout 矩阵几乎不耗费时间。行列式计算几乎占用了全部时间。因此，自然会引出一个问题：能否充分利用混合型 B´ezout 矩阵的结构，高效地计算其行列式？这是一个值得进一步研究的有趣课题。

表 1：使用三种 Bézout 型子结式公式计算 S_δ 时两个关键步骤的耗时（秒）统计（其中 T 为总耗时， M 为生成子结式矩阵的耗时， D 为计算行列式的耗时）

$d=$	B´ézout			非齐次 B´ézout			混合型 B´ézout		
deg F	T	M	D	T	M	D	T	M	D
(12,11,10)	11.300	6.155	5.097	7.509	2.237	5.240	40.412	0.000	40.334
(12,11,10)	11.193	6.886	4.327	7.155	2.278	4.861	40.876	0.000	40.719
(13,10,10)	7.934	4.764	3.155	5.547	2.128	3.387	22.423	0.000	22.392
(13,10,10)	7.151	4.027	3.124	5.350	2.526	2.824	21.346	0.000	21.299
(16,12,10)	33.030	23.890	9.125	26.797	7.780	19.017	120.701	0.000	120.544
(16,12,10)	32.167	23.246	8.906	25.510	6.362	19.116	119.450	0.016	119.263
(13,12,12)	12.418	8.781	3.622	4.750	2.031	2.704	48.396	0.000	48.302
(13,12,12)	11.316	8.397	2.919	4.200	1.563	2.637	47.029	0.000	46.951
(14,10,5)	9.036	5.860	3.161	7.815	1.686	6.129	17.045	0.000	16.998
(14,10,5)	6.020	3.548	2.472	6.298	1.237	5.061	15.727	0.000	15.649

致谢。 作者的研究工作得到国家自然科学基金（项目编号：12261010 和 11801101）、广西自然科学基金（项目编号：AD18126010）以及广西民族大学自然科学培育项目（项目编号：2022MDKJ001）的资助。

参考文献

[1] Dennis S Arnon、George E Collins 和 Scott McCallum。柱面代数分解 I：基本算法。*SIAM* 计算杂志，13(4):865–877，1984。[2] Mohammadali Asadi、Alexander Brandt、David J. Jeffrey 和 Marc Moreno Maza。利用 B´ezout 矩阵构造子结式链。载于 Fran¸cois Boulier、Matthew England、Timur M. Sadykov 和 Evgenii V. Vorozhtsov 编，科学计算中的计算机代数，第 29–50 页，尚，2022。施普林格国际出版公司。[3] Stephen Barnett。多个多项式的最大公因式。载于剑桥哲学学会数学会刊，第 70 卷，第 263–268 页。剑桥大学出版社，1971年。[4] Stephen Barnett。多项式与线性控制系统。Marcel Dekker 公司，1983年。[5] Alin Bostan、Carlos D'Andrea、Teresa Krick、Agn`es Szanto 和 Marcelo Valdettaro。重根情形下的子结式：一种极端情形。线性代数及其应用，529:185–198，2017年。[6] George E Collins。子结式与约化多项式余式序列。美国计算机协会会刊 *(JACM)*，14(1):128–142，1967年。[7] George E Collins 和 Hoon Hong。用于量词消去的部分柱面代数分解。《符号计算杂志》，12(3):299–328，1991年。[8] David A Cox 和 Carlos D'Andrea。子结式与形状引理。*arXiv* 预印本 *arXiv:2112.10306*，2021年。[9]Gema M Diaz-Toca 和 Laureano Gonzalez-Vega。通过类贝祖矩阵得到的 Barnett 关于多个一元多项式最大公因式的定理。《符号计算杂志》，34(1):59–81，2002年。[10] Gema M Diaz-Toca 和 Laureano Gonzalez-Vega。子结式的若干新表达式及其应用。工程、通信与计算中的应用代数，15(3):233–266，2004年。[11] Hoon Hong 和 Jing Yang。一元多项式重数结构的一个条件。《符号计算杂志》，104:523–538，2021年。[12] Hoon Hong 和 Jing Yang。多个单变量多项式的子结式。*arXiv* 预印本 *arXiv:2112.15370*，2021年。[13] Xiaorong Hou 和 Dongming Wang。利用 B´ezout 矩阵构造子结式。载于计算机数学，第 19–28 页。世界科学出版社，2000年。

[14] Deepak Kapur、Tushar Saxena 和 Lu Yang。使用 Dixon 结式进行代数与几何推理。载于国际符号与代数计算研讨会论文集，第 99–107 页，1994 年。[15] Alain Lascoux 和 Piotr Pragacz。子结式与多重 Schur 函数的双 Sylvester 和。《符号计算杂志》，35(6)：689–710，2003 年。[16] Yong-Bin Li。构造子结式的新方法。《应用数学与计算》，183(1)：471–476，2006 年。[17] Sylvester。论两个有理整函数的 Syzygetic 关系理论，包括其在 Sturm 函数理论以及最大代数公因式理论中的应用。《哲学学报》，143：407–548，1853 年。[18] Akira Terui。递归多项式余式序列及其子结式。《代数学杂志》，320(2)：633–659，2008 年。[19] Dongming Wang。将多项式系统分解为简单系统。《符号计算杂志》，25(3)：295–314，1998 年。[20] Dongming Wang。计算三角系统和正规系统。《符号计算杂志》，30(2)：221–236，2000 年。