arXiv:2304.00273v2 [math.RA] 1 Jun 2023

Zinbiel超代数*

Luisa Mar´ıa C amacho†, Amir Fern´andez Ouaridi‡, Ivan Kaygorodov§& Rosa M. Navarro ¶

摘要：本文将 Zinbiel 代数的研究扩展到 Zinbiel 超代数。特别地，我们证明，任意域上的所有 Zinbiel 超代数都与 Zinbiel 代数一样是幂零的。此外，由于幂零代数或超代数中最重要的情形是幂零指数最大的代数或超代数，我们研究了复数空丝状Zinbiel超代数，即唯一的单生成代数，并证明它在同构意义下唯一。随后，我们刻画了自然分次丝状超代数，并给出了低维分类。

关键词：Zinbiel 超代数、对偶Leibniz超代数、幂零超代数、代数分类。

MSC2020：主要分类 17A30；次要分类 17A70。

目录

引言 2 1. 预备知识与基本定义 3 1.1. Zinbiel 代数 3 1.2. Zinbiel 超代数 4 2. 零丝状 Zinbiel 超代数 5 3. 自然分次丝状 Zinbiel 超代数 8 4. 低维复 Zinbiel 超代数的分类 13 4.1. 3维 Zinbiel 超代数 14 5. 有限维 Zinbiel 超代数是幂零的 17 参考文献 19

*本研究的第一部分得到西班牙经济与竞争力部的资助，项目编号 PID2020- 115155GB-I00（含欧盟欧洲FEDER资助）；同时获得 FCT UIDB/MAT/00212/2020、UIDP/MAT/00212/2020 项目资助，以及西班牙政府通过大学部设立的“Margarita Salas”项目资助，该项目由欧盟 NextGenerationEU 资助。本研究的第二部分由俄罗斯科学基金会通过项目 22-71- 10001 资助。

†塞维利亚大学应用数学系 I，西班牙塞维利亚；lcamacho@us.es

‡科英布拉大学数学中心，葡萄牙科英布拉；加的斯大学，西班牙雷亚尔港；amir.fernandez.ouaridi@gmail.com §CMA-UBI，贝拉内陆大学，葡萄牙科维良；莫斯科基础与应用数学中心，俄罗斯莫斯科；圣彼得堡大学，俄罗斯；kaygorodov.ivan@gmail.com

¶埃斯特雷马杜拉大学数学系，西班牙卡塞雷斯；rnavarro@unex.es

引言

Loday 引入了一类由一个双线性运算生成的对称模，并规定一条关系，使得每个由三个元素构成的左结合积都等于若干右结合积的线性组合：$(a_1a_2)a_3 = \sum x_\sigma a_{\sigma(1)}(a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)})$；这类模称为参数化单$_{\sigma\in\mathbb{S}_3}$关系模。对于参数 $\{x_\sigma\}$的某种特定取值，如果该模的每个分量都是对称群的正则表示，则称其为正则的；等价地，在向量空间 V上相应的自由代数作为分次向量空间同构于 V的张量代数。Bremner 和 Dotsenko 对代数闭域上零特征下的所有正则参数化单关系模进行了分类。事实上，他们证明每个这样的模都同构于以下五种模之一：左幂零模、结合模、莱布尼茨模、Zinbiel 模和 Poisson 模 [6]。于是，如果代数 Z 满足恒等式$(xy)z = x(yz + zy)$，则称其为（左）Zinbiel 代数。Loday 于 [26]引入了 Zinbiel 代数。在 Koszul 对偶下，Zinbiel 代数的模与 Leibniz 代数的模互为对偶。Zinbiel 代数也称为前交换代数 [25] 和时序代数 [24]。值得注意的是，Zinbiel 代数等价于交换 Dendriform 代数 [3]。此外，Zinbiel 代数构成右交换代数簇的一个真子簇，而每个 Zinbiel 代数在采用交换子乘法后都会给出一个 Tortkara 代数 [16]。Zinbiel 代数也提供了长度缓慢增长的代数的一个例子 [19]。近期，文献 [18] 引入了匹配 Zinbiel 代数的概念，并在文献 [21]中研究了单项式和二元 Zinbliel 代数的定义恒等式。此外，Zinbiel 代数还出现在 rack 上同调 [14], 、数论 [12] 的研究以及笛卡尔微分范畴 [20]的构造中。因此，可以说近年来，代数和模的研究背景下对 Zinbiel 代数的研究兴趣浓厚，例见 [1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 15–18, 21–23, 27–30]。

自由 Zinbiel 代数恰好是洗牌积代数 [27], ，至今仍受到一定关注 [13]。Naurazbekova 证明，在零特征域上，自由 Zinbiel 代数就是关于对称化乘法的自由结合交换代数（无单位元），并找到了它们的自由生成元；她还构造了二生成自由 Zinbiel 代数的子代数实例，这些子代数是可数秩的自由 Zinbiel 代数[28]。幂零代数在 Zinbiel 代数类中发挥着重要作用。因此，Dzhumadildaev 和 Tulenbaev 证明了每个有限维复 Zinbiel 代数都是幂零的 [17]；Towers 将这一结果推广到了任意域 [30]。Naurazbekova 和 Umirbaev 证明，在零特征下，Zinbiel 代数簇的任意真子簇都是幂零的 [29]。文献 [1, 7] 对幂零指数较大的有限维 Zinbiel 代数进行了分类。文献 [22] 计算了三维 Zinbiel 代数的中心扩张，文献 [9] 则计算了丝状 Zinbiel 代数的中心扩张。文献 [23] 给出了复四维 Zinbiel 代数簇中所有退化的描述，文献 [4] 给出了复五维 Zinbiel 代数的几何分类。此后，Ceballos 和 Towers 研究了 Zinbiel 代数中维数最大的阿贝尔子代数和理想 [11]。

因此，本文的主要目标是将 Zinbiel 代数的研究拓展到 Zinbiel 超代数。为此，我们证明，任意域上的所有 Zinbiel 超代数都与 Zinbiel 代数一样是幂零的。需要指出的是，幂零超代数中最重要的情形是具有最大幂零指数的超代数，因此我们考察零丝状和丝状两种情形。对于前者，也就是唯一的单生成情形，我们证明其在同构意义下唯一。对于后者，我们刻画了任意维数下的自然分次情形。需要注意的是，在所有分次中，对于幂零代数或超代数而言，最重要的是自然分次，它来自由降中心序列所定义的滤过。最后，我们通过给出低维分类，完成了对 Zinbiel 超代数的研究。

1. Preliminaries and basic definitions

1.1. Zinbiel 代数。我们首先回顾有关 Zinbiel 代数的一些定义和基本结果。

定义 1。如果代数 Z 满足恒等式，则称其为 Zinbiel 代数

$$(xy)z = x(yz + zy).$$

对于给定的 Zinbiel（超）代数 Z，定义如下序列：

$$\mathbf{Z}^1 = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}^{k+1} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^k.$$

定义 2。如果存在 $s \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathbf{Z}^s = 0$，则称 Zinbiel（超）代数 Z 为幂零代数。满足此性质的最小数值 s 称为（超）代数 Z 的幂零指数。

不难看出，任意 n 维幂零 Zinbiel（超）代数的幂零指数不超过数值 $n + 1$。由于域上的每个有限维 Zinbiel 代数都是幂零的 [30], ，因此研究具有最大幂零指数的代数，即零丝状代数，是完全合理的。

定义3. 一个 n维 Zinbiel（超）代数 Z 若满足 $\dim \mathbf{Z}^i = n+1-i$，则称其为零丝状。 .

注意，一个 Zinbiel 代数是零丝状的，当且仅当它是单生成的。复零丝状Zinbiel代数的分类已在 [2]中给出。

定理4. 任意 n维零丝状 Zinbiel 代数都同构于下述代数：

$$e_i e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}.$$

在得到上述 Zinbiel 代数后，接下来需要考虑的情形是丝状。记 L_x 为元素 x上的左乘法算子。于是，对于算子L_x，定义了一个降序序列 $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$，其中 $n_1 + \ldots + n_k = n$，它由算子 L_x 的 Jordan块的维数组成。在此类序列的集合中，我们考虑字典序，即若存在 i 使得 $n_i < m_i$，且当 $j < i$时有 $n_j = m_j$，则 $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k) < C(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$。

定义 5. 序列 $C(\mathbf{Z}) = \max\{C(x) : x \in \mathbf{Z}^1 \backslash \mathbf{Z}^2\}$ 称为 Zinbiel 代数 Z 的特征序列。

定义 6. 若 p-丝状 Zinbiel 代数 Z 满足 $C(\mathrm{Z}) = (n-p, 1, \underbrace{\ldots\ 1},)$，则称其为 p-丝状。若 $p=0$ (respec-p
别地， $p=1$），则称 Z 为零丝状（分别称为丝状）Zinbiel 代数。

设 Z 是一个幂零指数为 s 的有限维复Zinbiel代数。考虑 $\mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}^i/\mathrm{Z}^{i+1}$，并将其记为 $\mathrm{gr}(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}_1 \oplus \mathrm{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Z}_{s-1}$。容易验证 gr(Z) 是一个分次Zinbiel代数。若 Z 与 gr(Z) 同构，则称 Z 为自然分次的。文献 [2] 给出了复自然分次丝状Zinbiel代数的分类：

定理7. 任意 n 维（$n \geq 5$）自然分次复丝状Zinbiel代数都同构于以下代数：

$$e_i e_j = C^j_{i+j-1} e_{i+j}, \quad for \quad 2 \leq i+j \leq n-1.$$

近期，文献 [5] 研究了对称（左对称和右对称）Zinbiel超代数。因此，我们摘录以下有关（左）Zinbiel超代数的结果，以下将其简称为Zinbiel超代数。

1.2. Zinbiel 超代数。Zinbiel 代数的超版本可以按通常方式得到。

定义 8. 设 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间，其上定义了一个双线性映射，使得 $\mathrm{Z}_i\mathrm{Z}_j \subset \mathrm{Z}_{i+j}$。若对所有齐次的 $x, y, z \in \mathrm{Z}_{\bar{0}} \cup \mathrm{Z}_{\bar{1}}$，均满足

$$(xy)z = x\big(yz + (-1)^{|y||z|} zy\big).$$

通常，对于 $x \in \mathrm{Z}_{\bar{0}} \cup \mathrm{Z}_{\bar{1}}$，定义 Z 上相应的自同态 $L_x(y) = xy$，对所有$y \in \mathrm{Z}_{\bar{0}} \cup \mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 成立；该自同态称为由 x 给出的左乘法。

注 9. 正如任何 Zinbiel 代数都是右交换代数，任何 Zinbiel 超代数也都是右交换超代数。具体而言，对任意齐次的 x, y 和 z，均满足超恒等式：

$$(xy)z = (-1)^{|y||z|}(xz)y.$$

接下来，我们将 Zinbiel 代数的定义和初步结果推广到 Zinbiel 超代数。因此，对于给定的 Zinbiel 超代数 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$，我们定义如下序列：

$$\mathbf{Z}^1 = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}^{k+1} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^k.$$

值得注意的是，也可以定义如下两个序列：

$$\mathbf{Z}^1_{\bar{0}} = \mathbf{Z}_{\bar{0}}, \quad \mathbf{Z}^{k+1}_{\bar{0}} = \mathbf{Z}_{\bar{0}}\mathbf{Z}^k_{\bar{0}} \quad \text{and} \quad \mathbf{Z}^1_{\bar{1}} = \mathbf{Z}_{\bar{1}}, \quad \mathbf{Z}^{k+1}_{\bar{1}} = \mathbf{Z}_{\bar{0}}\mathbf{Z}^k_{\bar{1}}.$$

在本文的最后一节中，我们将证明，任意域上的所有 Zinbiel超代数都是幂零的，因此，研究零丝状和丝状对于理解有限维Zinbiel超代数至关重要。

接下来，遵循李超代数和莱布尼茨超代数幂零理论的思路（例如参见 [8] 及其中的参考文献），我们引入超代数的特征序列和丝状性概念。首先，我们用 L_x 表示齐次

偶元素 $x \in \mathrm{Z}_{\bar{0}}$上的左乘法算子。因此，我们有： $L_x:\ \mathrm{Z}_{\bar{0}} \to \mathrm{Z}_{\bar{0}}$，并用 $C_0(x)$表示算子 L_x 作用于$\mathrm{Z}_{\bar{0}}$时 Jordan块维数按降序排列所成的序列。同理，由于 $L_x:\ \mathrm{Z}_{\bar{1}} \to \mathrm{Z}_{\bar{1}}$，我们用 $C_1(x)$表示算子 L_x 作用于$\mathrm{Z}_{\bar{1}}$时 Jordan块维数按降序排列所成的序列。接下来，按照字典序，我们给出如下定义。

定义 10. 序列

$$C(\mathbf{Z}) = \left(\max_{x \in \mathbf{Z}_{\bar{0}} \setminus \mathbf{Z}_{\bar{0}}^2} C_0(x) \,\middle|\, \max_{y \in \mathbf{Z}_{\bar{0}} \setminus \mathbf{Z}_{\bar{0}}^2} C_1(y) \right),$$

称为 Zinbiel 超代数 Z 的特征序列。

在本文中，我们假设定义中的两个特征序列均由同一个生成元 $x \in \mathrm{Z}_{\bar{0}} \setminus \mathrm{Z}_{\bar{0}}^2$ 得到，该生成元通常称为特征元。

定义 11. 若 Zinbiel 超代数 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 满足 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) = n$ 且 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) = m$，并且其特征序列恰为 $C(\mathrm{Z}) = (n-1 \,|\, m)$，则称其为丝状。

注 12. 注意，若 Z 是丝状 Zinbiel 超代数，则 $\mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 是丝状 Zinbiel 代数。

需要指出的是，在所有分次中，对于幂零结构而言，最重要的是由降中心序列定义的滤过所导出的自然分次。近期，李超代数和 Leibniz 超代数的幂零超代数均已引入自然分次的概念。接下来，我们将这一概念推广到复 Zinbiel 超代数；它们全都是幂零的。

设 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 是一个复 Zinbiel 超代数。可以看出，前述序列 $\{\mathrm{Z}_{\bar{0}}^k\}$ 和 $\{\mathrm{Z}_{\bar{1}}^k\}$ 分别在 $\mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 和 $\mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 上定义了一个滤过。若记 $\mathfrak{z}_{\bar{0}}^i := \mathrm{Z}_{\bar{0}}^{i-1}/\mathrm{Z}_{\bar{0}}^i$ 和 $\mathfrak{z}_{\bar{1}}^i := \mathrm{Z}_{\bar{1}}^{i-1}/\mathrm{Z}_{\bar{1}}^i$，则可验证 $\mathfrak{z}_{\bar{0}}^i \mathfrak{z}_{\bar{0}}^j \subset \mathfrak{z}_{\bar{0}}^{i+j}$ 和 $\mathfrak{z}_{\bar{0}}^i \mathfrak{z}_{\bar{1}}^j \subset \mathfrak{z}_{\bar{1}}^{i+j}$.

定义 13. 给定一个复 Zinbiel 超代数 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$，考虑 $\mathfrak{z}^i = \mathfrak{z}_{\bar{0}}^i \oplus \mathfrak{z}_{\bar{1}}^i$，其中$\mathfrak{z}_{\bar{0}}^i = \mathrm{Z}_{\bar{0}}^{i-1}/\mathrm{Z}_{\bar{0}}^i$ 和 $\mathfrak{z}_{\bar{1}}^i = \mathrm{Z}_{\bar{1}}^{i-1}/\mathrm{Z}_{\bar{1}}^i$。因此，若满足以下条件，则称 Z 为自然分次的：

1. $\mathrm{gr}(\mathrm{Z}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{z}^i$ 是一个分次超代数（$\mathfrak{z}^i \mathfrak{z}^j \subset \mathfrak{z}^{i+j}$），
2. Z 与 gr(Z) 同构。

2. 零丝状 Zinbiel 超代数

定理 14. 设 Z 是一个 n 维的零丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) \neq 0$。则 Z 同构于以下超代数，该超代数仅在 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) = \dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}})$ 和 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) = \dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) + 1$ 的情形下出现：

$$e_{2k+1}e_{2l} = C_{k+l}^k e_{2k+2l+1}, \quad e_{2k}e_{2l} = C_{k+l-1}^l e_{2k+2l}, \quad e_{2k+1}e_{2l+1} = C_{k+l}^l e_{2k+2l+2},$$

其中 e_{2k}、$e_{2l} \in \mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 且 e_{2k+1}、$e_{2l+1} \in \mathrm{Z}_{\bar{1}}$.

证明。显然，每个零丝状 Zinbiel 超代数都是单生成的。若它由一个偶元素生成，则其奇部分为零。因此，我们可以假设该超代数由一个奇元素 e_1 生成，然后按照处理零丝状 Zinbiel 代数的相同方式，可以考虑：

$$e_2 := e_1e_1, \quad e_3 := e_1(e_1e_1), \quad \dots, \quad e_n := e_1(e_1 \dots (e_1(e_1e_1))).$$

我们注意到，上述元素是线性无关的。这一事实使我们能够将$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 视为超代数 Z 的一组基，其中 e_{2k+1} 为奇基向量， e_{2k} 为偶基向量。此外，我们只有两种可能性：要么 $\dim(Z_{\bar{0}}) = \dim(Z_{\bar{1}})$，要么 $\dim(Z_{\bar{1}}) = \dim(Z_{\bar{0}}) + 1$。

注意，根据构造，我们有

$$e_1e_i = e_{i+1}. \tag{1}$$

现在，我们通过归纳法证明

$$e_{2k}e_1 = 0 \text{ and } e_{2k+1}e_1 = e_1e_{2k+1} = e_{2k+2}. \tag{2}$$

对于 $k = 1$，通过考虑以下 Zinbiel 超恒等式，方程成立：

$$e_2e_1 = (e_1e_1)e_1 = e_1(e_1e_1) - e_1(e_1e_1) = 0$$

然后

$$e_3e_1 = (e_1e_2)e_1 = e_1(e_2e_1) + e_1(e_1e_2) = e_1e_3$$

假设方程对于 k成立，于是

$$e_{2k+2}e_1 = (e_1e_{2k+1})e_1 = e_1(e_{2k+1}e_1) - e_1(e_1e_{2k+1}) = 0$$

然后

$$e_{2k+3}e_1 = (e_1e_{2k+2})e_1 = e_1(e_{2k+2}e_1) + e_1(e_1e_{2k+2}) = e_1e_{2k+3}$$

因此，对于 $k + 1$，我们得到方程（2）。下面我们也通过归纳法证明以下方程

$$e_{2k}e_2 = ke_{2k+2},\ e_{2k+1}e_2 = (k+1)e_{2k+3},\ e_2e_{2k} = e_{2k+2},\ e_2e_{2k+1} = 0. \tag{3}$$

Th通过考察以下 Zinbiel 超恒等式，可知对于 $k = 1$，这些方程成立 ：

$$\begin{array}{rcccccccl}
e_2e_2 & = & (e_1e_1)e_2 & = & e_1(e_1e_2) + e_1(e_2e_1) & = & e_1e_3 & = & e_4, \\
e_3e_2 & = & (e_1e_2)e_2 & = & e_1(e_2e_2) + e_1(e_2e_2) & = & 2e_5, & & \\
0 & = & (e_2e_1)e_2 & = & e_2(e_1e_2) + e_2(e_2e_1) & = & e_2e_3, & &
\end{array}$$

假设对于 k，这些方程成立，则我们得到关于 $k + 1$ 的方程：

$$\begin{array}{rcccccl}
e_{2(k+1)}e_2 & = & (e_1e_{2k+1})e_2 & = & e_1(e_{2k+1}e_2) + e_1(e_2e_{2k+1}) & = & (k+1)e_{2(k+1)+2}, \\
e_2e_{2(k+1)} & = & (e_1e_1)e_{2k+2} & = & e_1(e_1e_{2k+2}) + e_1(e_{2k+2}e_1) & = & e_{2(k+1)+2}, \\
e_{2(k+1)+1}e_2 & = & (e_1e_{2k+2})e_2 & = & e_1(e_{2k+2}e_2) + e_1(e_2e_{2k+2}) & = & ((k+1)+1)e_{2(k+1)+3}, \\
0 & = & (e_2e_1)e_{2k+2} & = & e_2(e_1e_{2k+2}) + e_2(e_{2k+2}e_1) & = & e_2e_{2(k+1)+1}.
\end{array}$$

接下来，根据方程（2）以及 $e_{2k}e_{2l}$ 是 e_{2k+2l} 的倍数这一事实，我们得到

$$0 = (e_{2k}e_{2l})e_1 = e_{2k}(e_{2l}e_1) + e_{2k}(e_1e_{2l}) = e_{2k}e_{2l+1},$$

因此　得到方程 $e_{2k}e_{2l+1}=0$. 接下来，我们用归纳法证明该方程　　n

$$e_{2k+1}e_{2l}=C_{k+l}^{k}e_{2k+2l+1}. \tag{4}$$

由等式 (1) 可得，对于 $k=0$ 及任意 l，方程 (4) 成立。现在，假设对于 k 及任意 l，方程 (4) 成立。考虑到等式 (3)，我们得到，对于 $k+1$ 及任意 l，方程 (4) 也成立：

$$e_{2(k+1)+1}e_{2l}=\tfrac{1}{k+1}(e_{2k+1}e_2)e_{2l}=\tfrac{1}{k+1}\big(e_{2k+1}(e_2e_{2l})+e_{2k+1}(e_{2l}e_2)\big)=\tfrac{1+l}{k+1}e_{2k+1}e_{2l+2},$$

但由于 $e_{2k+1}e_{2l+2}=C_{k+l+1}^{k}e_{2k+2l+3}$，于是

$$\tfrac{1+l}{k+1}C_{k+l+1}^{k}=\tfrac{(1+l)(k+l+1)!}{(k+1)k!(l+1)!}=\tfrac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!}=C_{(k+1)+l}^{k+1},$$

由此便完成了等式 (4) 的证明。类似地，我们证明方程

$$e_{2k+1}e_{2l+1}=C_{k+l}^{l}e_{2k+2l+2}. \tag{5}$$

由等式 (1) 可得，对于 $k=0$ 及任意 l，方程 (5) 成立。假设对于 k 及任意 l，方程 (5) 成立。根据等式 (3)，我们得到，对于 $k+1$ 及任意 l，方程 (5) 也成立：

$$e_{2(k+1)+1}e_{2l+1}=\tfrac{1}{k+1}(e_{2k+1}e_2)e_{2l+1}=\tfrac{1}{k+1}\big(e_{2k+1}(e_2e_{2l+1})+e_{2k+1}(e_{2l+1}e_2)\big)=\tfrac{1+l}{k+1}e_{2k+1}e_{2l+3},$$

但由于 $e_{2k+1}e_{2l+3}=C_{k+l+1}^{l+1}e_{2k+2l+4}$，于是

$$\tfrac{1+l}{k+1}C_{k+l+1}^{l+1}=\tfrac{(1+l)(k+l+1)!}{(k+1)k!(l+1)!}=\tfrac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!}=C_{(k+1)+l}^{l},$$

由此完成了等式（5）的证明。最后，我们证明最后一个等式

$$e_{2k}e_{2l}=C_{k+l-1}^{l}e_{2k+2l},\quad k\geq 1,\ l\geq 1. \tag{6}$$

等式（3）导出对于 $k=1$ 和任意 l 都成立的方程（6）；假设方程（6）对于 k 和任意 l 成立，根据等式（3），我们得到它对于 $k+1$ 和任意 l 也成立：

$$e_{2(k+1)}e_{2l}=\tfrac{1}{k}(e_{2k}e_2)e_{2l}=\tfrac{1}{k}(e_{2k}\big(e_2e_{2l})+e_{2k}(e_{2l}e_2)\big)=\tfrac{1+l}{k}e_{2k}e_{2l+2}$$

但由于 $e_{2k}e_{2l+2}=C_{k+l}^{l+1}e_{2k+2l+2}$，于是

$$\tfrac{1+l}{k}C_{k+l}^{l+1}=\tfrac{(1+l)(k+l)!}{(k-1)!k(l+1)!}=\tfrac{(k+l)!}{k!l!}=C_{(k+1)+l-1}^{l},$$

wh这就完成了等式 (6) 的证明，也完成了定理的证明。　　.

□

3. 自然分次丝状 Zinbiel 超代数

引理 15. 设 Z 是一个复自然分次丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) = n$,$n \geq 5$，$\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) = m$。则 $\mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 存在一组基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，$\mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 存在一组基 $\{f_1, \ldots, f_m\}$，使得其乘法表如下:

$$\begin{aligned} &e_i e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1, \\ &e_1 f_j = f_{j+1}, \qquad\quad 1 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

证明。设 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 为自然分次丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) = n$、$\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) = m$。分别取 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 和 $\{f_1, \ldots, f_m\}$ 为 $\mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 和 $\mathrm{Z}_{\bar{1}}$ 的基。由定义可知，$\mathrm{Z}_{\bar{0}}$ 是一个自然分次 Zinbiel 代数，因此对于 $n \geq 5$，由 [2] 可完全确定其乘积$e_i e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}$，其中 $2 \leq i+j \leq n-1$.。由于 e_1 是上述特征元，因此不失一般性，可设 $e_1 f_j = f_{j+1}$、$1 \leq j \leq m-1$. □

–1我们使用以下概念 $\prod_{k=0} f(k) := 1$.

定理 16. 设 Z 为复自然分次丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{0}}) = n$、($n \geq 5$)，以及 $\dim(\mathrm{Z}_{\bar{1}}) = m$、($m > 3$)。则 Z 同构于以下超代数之一:

$$\mathfrak{nf}_1 \ : \ \begin{cases} e_i e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-1. \\ e_i f_j = \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(j+k-1)}{(i-1)!} f_{j+i}, \quad f_j e_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(j+k-2)}{i!} f_{j+i}, & 1 \leq i \leq n-1. \\ e_n f_1 = f_2, \qquad\qquad f_1 e_n = -f_2. \end{cases}$$

$$\mathfrak{nf}_2^{\alpha} \ : \ \begin{cases} e_i e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-1. \\ e_i f_j = \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(\alpha+j+k)}{(i-1)!} f_{j+i}, \quad f_j e_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\alpha+j+k-1)}{i!} f_{j+i}, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$\mathfrak{nf}_3 \ : \ \begin{cases} e_i e_j = C_{i+j-1}^{j} e_{i+j}, & 2 \leq i+j \leq n-1. \\ e_i f_j = \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(2-m+j+k)}{(i-1)!} f_{j+i}, \quad f_j e_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(1-m+j+k)}{i!} f_{j+i}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ e_n f_{m-1} = f_m. \end{cases}$$

如果 $m \geq n-2$，超代数 Z 要么与前面的某个超代数同构，要么与下面两个超代数之一同构:

$$\mathfrak{nf}_4 \ : \ \begin{cases} e_ie_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \le i+j \le n-1. \\ e_if_j = \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(n-3+j+k)}{(i-1)!}f_{j+i}, \quad f_je_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(n-4+j+k)}{i!}f_{j+i}, & 1 \le i \le n-1. \\ f_1f_{n-2} = e_{n-1}. \end{cases}$$

$$\mathfrak{nf}_5 \ : \ \begin{cases} e_ie_j = C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & 2 \le i+j \le n-1. \\ e_if_j = \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(3-n+j+k)}{(i-1)!}f_{j+i}, \quad f_je_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(2-n+j+k)}{i!}f_{j+i}, & 1 \le i \le n-1. \\ e_nf_{n-2} = f_{n-1}, \qquad f_1f_{n-2} = e_{n-1}. \end{cases}$$

证明。现在考虑 $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathsf{Z}_{\bar{1}}$ 复自然分次丝状 Zinbiel 超代数，其 $\dim(\mathsf{Z}_{\bar{0}}) = n$, $n \ge 5$ 且 $\dim(\mathsf{Z}_{\bar{1}}) = m$，其中 $m \ge 3.$。于是，存在一组基$\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m\}$，并且根据 $m < n-1$、$m = n-1$ 或 $m > n-1$，我们有以下几种可能。

$$\underbrace{\langle e_1, e_n, f_1\rangle}_{\mathfrak{z}^1} \oplus \underbrace{\langle e_2, f_2\rangle}_{\mathfrak{z}^2} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\langle e_m, f_m\rangle}_{\mathfrak{z}^m} \oplus \underbrace{\langle e_{m+1}\rangle}_{\mathfrak{z}^{m+1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\langle e_{n-1}\rangle}_{\mathfrak{z}^{n-1}}$$

$$\underbrace{\langle e_1, e_n, f_1\rangle}_{\mathfrak{z}^1} \oplus \underbrace{\langle e_2, f_2\rangle}_{\mathfrak{z}^2} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\langle e_{n-1}, f_{n-1}\rangle}_{\mathfrak{z}^{n-1}}$$

$$\underbrace{\langle e_1, e_n, f_1\rangle}_{\mathfrak{z}^1} \oplus \underbrace{\langle e_2, f_2\rangle}_{\mathfrak{z}^2} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\langle e_{n-1}, f_{n-1}\rangle}_{\mathfrak{z}^{n-1}} \oplus \underbrace{\langle f_n\rangle}_{\mathfrak{z}^n} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\langle f_m\rangle}_{\mathfrak{z}^m}$$

我们将一起研究这三种情况。我们考虑 $f_1e_1 = \alpha f_2$。利用 Zinbiel 超恒等式进行归纳法可得:

$$\begin{array}{rclrcll} e_if_j & = & \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(\alpha+j+k)}{(i-1)!}f_{j+i}, & f_je_i & = & \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\alpha+j+k-1)}{i!}f_{j+i}, & 1 \le i \le n-1, \\ f_1e_n & = & c_1f_2. & e_nf_j & = & b_jf_{j+1}, & 1 \le j \le m-1. \end{array}$$

对于任意三个齐次元素 a、b、$c \in \mathsf{Z}$，我们定义

$$\mathfrak{sz}\{a,b,c\} := (ab)c - a\big(bc + (-1)^{|a||b|}cb\big).$$

现在，对基元素应用 Zinbiel 超恒等式，可得以下关系。

$$\begin{array}{lcl} \Big\{\mathfrak{sz}\{e_n, e_1, f_j\} = 0\Big\}_{2\le j\le m-1} & \Rightarrow & (\alpha+j-1)b_j = 0 \\ \Big\{\mathfrak{sz}\{e_n, f_j, e_1\} = 0\Big\}_{1\le j\le m-2} & \Rightarrow & (\alpha+j)b_j = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{b_j = 0,\ 2 \le j \le m-2} \\ \Big\{\mathfrak{sz}\{f_1, e_n, e_1\} = 0\Big\} & \Rightarrow & (\alpha+1)c_1 = 0, \end{array}$$

$$\Big\{\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_2,e_n,e_1\}=0\Big\} \qquad \Rightarrow\ \ (\alpha+2)(c_1+b_1)=0,\ \ \Rightarrow \boxed{c_1=-b_1}$$

因此， $f_1e_n=-b_1f_2$ 和 $f_je_n=0$ 与 $2\le j\le m-1$. 。然后，我们得到以下乘积：

$$\begin{array}{lllllll}
e_ie_j &=& C^j_{i+j-1}e_{i+j}, & & & & 2\le i+j\le n-1,\\
e_if_j &=& \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(\alpha+j+k)}{(i-1)!}f_{j+i}, & f_je_i &=& \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\alpha+j+k-1)}{i!}f_{j+i}, & 1\le i\le n-1,\\
e_nf_1 &=& b_1f_2, & e_nf_{m-1} &=& b_{m-1}f_m, & \\
f_1e_n &=& -b_1f_2, & f_je_n &=& 0, & 2\le j\le m-1,
\end{array}$$

其中 $(\alpha+1)b_1=(\alpha+m-2)b_{m-1}=0$.
最后，只需计算乘积 $f_if_j=h_{ij}e_{i+j}$.我们用归纳法计算它们：

- 步骤 1：我们有：

$$\begin{array}{lll}
f_1f_1 &=& h_{11}e_2,\\
f_2f_1 &=& (e_1f_1)f_1=e_1(f_1f_1)-e_1(f_1f_1)=0,\\
f_1f_2 &=& h_{12}e_3.
\end{array}$$

此外，我们有

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1,f_1,e_1\}=0 &\Rightarrow& 2h_{11}=(a+1)h_{12},\\
\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1,e_1,f_1\}=0 &\Rightarrow& (\alpha+1)h_{12}=0 \quad\Rightarrow\ \ h_{11}=(a+1)h_{12}=0.
\end{array}$$

- 步骤 2：现在，我们可以写成：

$$\begin{array}{lllllllll}
 & & f_1f_1 &=& f_2, & & f_2f_1 &=& 0,\\
 & & f_1f_2 &=& h_{12}e_3, & & f_1f_3 &=& h_{13}e_4,\\
f_2f_2 &=& (e_1f_1)f_2 &=& e_1(f_1f_2)-e_1(f_2f_1) &=& h_{12}(e_1e_3) &=& h_{12}e_4,\\
f_3f_1 &=& (e_1f_2)f_1 &=& e_1(f_2f_1)-e_1(f_1f_2) &=& -h_{12}(e_1e_3) &=& -h_{12}e_4,
\end{array}$$

其中 $(\alpha+1)h_{12}=0$. 应用 Zinbiel 超恒等式，得到：

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1,f_2,e_1\}=0 &\Rightarrow& 3h_{12}=(\alpha+2)h_{13},\\
\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1,e_1,f_2\}=0 &\Rightarrow& (\alpha+2)h_{13}=\alpha h_{12}.
\end{array}$$

因此，将以下方程联立：

$$\left.\begin{array}{lll}
(\alpha+1)h_{12} &=& 0\\
3h_{12} &=& (\alpha+2)h_{13}\\
(\alpha+2)h_{13} &=& \alpha h_{12}
\end{array}\right\}\Rightarrow h_{12}=0,\ (\alpha+2)h_{13}=0.$$

- 步骤 3：我们假设

$$\begin{array}{rcll} f_i f_{k+1-i} & = & 0, & 2 \le i \le k, \\ f_1 f_k & = & h_{1k} e_{k+1}, & \\ f_1 f_{k+1} & = & h_{1\,k+1} e_{k+2}, & \\ f_{k+1} f_1 & = & (e_1 f_k) f_1 & = & e_1(f_k f_1) - e_1(f_1 f_k) = -h_{1k}(e_1 e_{k+1}) = -h_{1k} e_{k+2}, \\ f_2 f_k & = & (e_1 f_1) f_k & = & e_1(f_1 f_k) - e_1(f_k f_1) = h_{1k}(e_1 e_{k+1}) = h_{1k} e_{k+2}, \\ f_k f_2 & = & (e_1 f_{k-1}) f_2 & = & e_1(f_{k-1} f_2) - e_1(f_2 f_{k-1}) = 0, \\ f_i f_{k+2-i} & = & (e_1 f_{i-1}) f_{k+2-i} & = & e_1(f_{i-1} f_{k+2-i}) - e_1(f_{k+2-i} f_{i-1}) = 0, \end{array}$$

(by induction hypothesis).

其中 $(\alpha + k - 1)h_{1k} = 0$.

现在，我们应用 Zinbiel 超恒等式，得到：

$$\begin{array}{rcrcl} \mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1, f_k, e_1\} = 0 & \Rightarrow & (k+1)h_{1k} & = & (\alpha + k)h_{1\,k+1}, \\ \mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1, e_1, f_k\} = 0 & \Rightarrow & (\alpha + k)h_{1\,k+1} & = & a h_{1k}. \end{array}$$

因此，将以下方程联立：

$$\left.\begin{array}{rcl} (\alpha + k - 1)h_{1k} & = & 0 \\ (k+1)h_{1k} & = & (\alpha + k)h_{1\,k+1} \\ (\alpha + k)h_{1\,k+1} & = & \alpha h_{1k} \end{array}\right\} \Rightarrow h_{1k} = 0,\ (\alpha + k)h_{1\,k+1} = 0.$$

这一过程是有限的，因此我们得到 $f_1 f_m = h_{1m} e_{m+1}$（其余部分 $f_i f_j = 0$），其中 $(\alpha + m - 1)h_{1m} = 0$，若 $m < n - 2$，且 $f_1 f_{n-2} = h_{1\,n-2} e_{n-1}$（其余部分 $f_i f_j = 0$），其中 $(\alpha + n - 3)h_{1\,n-2} = 0$，若 $m \ge n - 2$。在 $m < n - 2$ 的情况下：$\mathfrak{s}\mathfrak{Z}\{f_1, f_m, e_1\} = 0$ 给出 $h_{1m} = 0$.

因此，该 Zinbiel 超代数具有以下乘法表：

$$\begin{array}{rcllrcll} e_i e_j & = & C^j_{i+j-1} e_{i+j}, & & & & & 2 \le i + j \le n - 1, \\ e_i f_j & = & \frac{\prod_{k=0}^{i-2}(\alpha+j+k)}{(i-1)!} f_{j+i}, & f_j e_i & = & \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\alpha+j+k-1)}{i!} f_{j+i}, & & 1 \le i \le n-1, \\ e_n f_1 & = & b_1 f_2, & e_n f_{m-1} & = & b_{m-1} f_m, & & m \ge n-2 \\ f_1 e_n & = & -b_1 f_2, & f_1 f_{n-2} & = & h e_{n-1}, & & \end{array}$$

当 $m \ge n - 2$. 时，我们考虑 $(\alpha + 1)b_1 = (\alpha + m - 2)b_{m-1} = 0$ 和 $(\alpha + n - 3)h = 0$。我们可以区分以下情况：

情形 1：$b_1 \ne 0$. 在这种情形下，我们有 $\alpha = -1$ 和 $b_{m-1} = 0$. 如果 $m \ge n - 2$，我们还有 $h = 0$.于是得到 Zinbiel 超代数 $\mathfrak{nf}_1$.情形 2：$b_1 = 0$ 和 $b_{m-1} = 0$. 在这种情形下，我们得到一族 Zinbiel 超代数 $\mathfrak{nf}_2^{\alpha}$.情形 3：$b_1 = 0$ 和 $b_{m-1} \ne 0$. 于是，$\alpha = 2 - m$. 我们有超代数 $\mathfrak{nf}_3$.

现在，我们考虑 $m>3$ 和 $m\geq n-2$. 分析上述情形可知，在情形 2 中有一个新的超代数（当 $\alpha=n-3$ 和 $h\neq 0$时，我们可以考虑 $h=1$），$\mathfrak{nf}_4$；在情形 3 中还有另一个新的超代数（当$m=n-1$、 $\alpha=3-n$和 $h\neq 0$时，我们可以考虑 $h=1$），$\mathfrak{nf}_{5^\circ}$ □

接下来，我们研究特殊情形 $m=3$. 现考虑 Z 为一个复自然分次丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(Z_{\bar{0}})=n$、 $n\geq 5$ $\dim(Z_{\bar{1}})=3$。那么，存在一个基$\{e_1,\ldots,e_n,f_1,f_2,f_3\}$，并且其分次为:

$$\underbrace{\langle e_1、\ e_n、\ f_1\rangle}_{\mathfrak{Z}^1}\ \oplus\ \underbrace{\langle e_2、\ f_2\rangle}_{\mathfrak{Z}^2}\ \oplus\ \underbrace{\langle e_3、\ f_3\rangle}_{\mathfrak{Z}^3}\ \oplus\ \underbrace{\langle e_4\rangle}_{\mathfrak{Z}^4}\ \oplus\ \underbrace{\langle e_5\rangle}_{\mathfrak{Z}^5}\ \oplus\ \cdots$$

定理 17. 设 Z 为一个复自然分次丝状 Zinbiel 超代数，且 $\dim(Z_{\bar{0}})=n$、$(n\geq 5)$，以及 $\dim(Z_{\bar{1}})=3$. 那么，Z 同构于以下超代数中的一个:

- 若 $n>5$，则 Z 同构于 $\mathfrak{nf}_1$、 $\mathfrak{nf}_2^{\alpha}$、 $\mathfrak{nf}_3$，或

$$\mathfrak{a}_1:\begin{cases} e_ie_j=C_{i+j-1}^{j}e_{i+j}, & 2\leq i+j\leq n-1,\\ e_1f_1=f_2, & e_1f_2=f_3, & f_1e_1=-f_2,\\ e_nf_1=f_2, & e_nf_2=f_3, & f_1e_n=-f_2. \end{cases}$$

- 若 $n=5$，则 Z 同构于 $\mathfrak{nf}_1$、 $\mathfrak{nf}_2^{\alpha\neq -2}$、 $\mathfrak{nf}_3$、 $\mathfrak{a}_1$，或

$$\mathfrak{a}_2:\begin{cases} e_ie_j=C_{i+j-1}^{j}e_{i+j}, & 2\leq i+j\leq n-1,\\ f_1e_1=-2f_2, & f_2e_1=-f_3, & f_1e_2=f_3,\\ e_1f_1=f_2, & e_1f_2=f_3, & e_2f_1=-f_2,\quad f_1f_{n-2}=e_{n-1}. \end{cases}$$

证明。与一般情形类似（见定理 16 的证明），我们得到 Z 同构于

$$\begin{array}{llllllllll} e_ie_j &=& C_{i+j-1}^{j}e_{i+j}, & 2\leq i+j\leq n-1, & & & & & & \\ f_1e_1 &=& af_2, & f_1e_2 &=& \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}f_3, & f_2e_1 &=& (\alpha+1)f_3, & e_nf_1 &=& b_1f_2,\\ e_1f_1 &=& f_2, & e_2f_1 &=& (\alpha+1)f_2, & e_1f_2 &=& f_3, & e_nf_2 &=& b_2f_3,\\ f_1e_n &=& -b_1f_2, & (f_1f_3=he_4, & \text{if } & n=5.), & & & & & \end{array}$$

其中 $(\alpha+1)b_1=(\alpha+1)b_2=0$，且当 $n=5.$时 $(\alpha+2)h=0$

首先，我们考虑 $n>5.$。可以区分以下几种情形:

- $b_1\neq 0$ 且 $b_2\neq 0.$。在这种情况下， $\alpha=-1$，通过换基，我们可以考虑 $b_1=b_2=1$，从而得到超代数 $\mathfrak{a}_1$.
- $b_1\neq 0$ 和 $b_2=0.$ 这种情形与一般情形类似，我们得到 $\mathfrak{nf}_1$.
- $b_1=0.$ 这种情形与一般情形类似，我们得到 $\mathfrak{nf}_3$ （当 $b_2\neq 0$ 时）和 $\mathfrak{nf}_2^{\alpha}$ （当 $b_2=0$ 时）

现在，我们考虑 $n=5$，得到一个新乘积和一个新限制。通过类似的研究，可以得到陈述中的超代数。□

4. C低维复数 Zinbiel 超代数的分类 S

引理18. 给定一个类型为 $(n-1, 1)$ 的 n 维 Zinbiel 超代数 Z，即 $\dim(Z_{\bar{0}}) = n-1$且 $\dim(Z_{\bar{1}}) = 1$，则 $Z_{\bar{0}}Z_{\bar{1}} = Z_{\bar{1}}Z_{\bar{0}} = \{0\}$。此外，$Z_{\bar{1}}Z_{\bar{1}}$ 是 $\mathrm{Ann_L}(Z_{\bar{0}})$ 的一个子空间。

证明。设 e_1、...、e_{n-1} 是 $Z_{\bar{0}}$ 的一组基，f_1 是 $Z_{\bar{1}}$ 的一组基。对于 a_i、$b_i \in \mathbb{C}$ 和 $i = 1$、...、$n-1$，分别记为 $e_i f_1 = a_i f_1$ 和 $f_1 e_i = b_i f_1$。一方面，对于 $i = 1$、...、$n-1$，我们有

$$(e_i f_1)e_i = e_i(f_1 e_i) + e_i(e_i f_1); \quad a_i b_i f_1 = a_i b_i f_1 + a_i^2 f_1.$$

因此，我们有 $a_i = 0$，以及 $Z_{\bar{0}}Z_{\bar{1}} = \{0\}$。

另一方面，由于 $Z_{\bar{0}}$ 是一个 Zinbiel 代数，它是幂零的。设 $Z_{\bar{0}}^s = 0$，并通过归纳法进行。对于 $x \in Z_{\bar{0}}^{s-1}$，我们有

$$(f_1 x)x = f_1(xx + xx) = 2f_1(xx),$$

由于 $xx \in Z_{\bar{0}}^s = \{0\}$，我们得到 $(f_1 x)x = 0$，这意味着 $f_1 x = 0$，因此可以写成 $f_1 Z_{\bar{0}}^{s-1} = \{0\}$。现在，设 $f_1 Z_{\bar{0}}^{s-k+1} = \{0\}$，则对于 $x \in Z_{\bar{0}}^{s-k}$，我们有 $(f_1 x)x = 2f_1(xx) = 0$，因为 $xx \in Z_{\bar{0}}^{s-k+1}$。因此，$f_1 x = 0$，并且我们有 $f_1 Z_{\bar{0}}^{s-k} = \{0\}$。对于 $k = s-1$，我们得出 $Z_{\bar{1}}Z_{\bar{0}}^1 = Z_{\bar{1}}Z_{\bar{0}} = \{0\}$。

此外，对于 $Z_{\bar{0}}$，我们有 $(f_1 f_1)x = f_1(f_1 x) + f_1(x f_1) = 0$。因此，$(f_1 f_1) \in \mathrm{Ann_L}(Z_{\bar{0}})$，并且 $Z_{\bar{1}}Z_{\bar{1}}$ 是 $\mathrm{Ann_L}(Z_{\bar{0}})$ 的一个子空间，其中 $\mathrm{Ann_L}(Z_{\bar{0}}) = \{x \in A : \ xZ_{\bar{0}} = 0\}$。□

反之，直接验证即可。

注19。给定一个 $(n-1)$-维 Zinbiel 代数 $Z_{\bar{0}}$。如果我们构造一个超代数 Z，使得 $Z_{\bar{0}}Z_{\bar{1}} = Z_{\bar{1}}Z_{\bar{0}} = \{0\}$，并且使 $Z_{\bar{1}}Z_{\bar{1}}$ 成为 $\mathrm{Ann_L}(Z_{\bar{0}})$ 的一个子空间，那么，Z 是一个类型为 $(n-1, 1)$ 的 Zinbiel 超代数。

注20. 设 Z 是一个非零的 n 维 Zinbiel 超代数，类型为 $(n-1, 1)$，且 $Z_{\bar{0}}$ 是零代数。那么它同构于 $Z_{n,\,0}$：$f_1 f_1 = e_1$，只需选择 ϕ：$A \to A_{n,\,0}$ 使得$\phi(f_1 f_1) = e_1$。由此可得二维Zinbiel超代数的分类。

我们重新得到 n 维 Zinbiel 代数的分类 [2,4],，因为后续将需要它 .

定理21. 设有一个 n 维、对于 $n \le 3$ 而言非平凡的 Zinbiel 代数，那么它同构于以下情形之一

- 如果 $n = 2$，那么它是
  - $\mathfrak{Z}_{2,1}$：$e_1 e_1 = e_2$.
- 如果 $n = 3$，那么它同构于 $\mathfrak{Z}_{3,1} = \mathfrak{Z}_{2,1} \oplus \mathbb{C}$ 或同构于
  - $\mathfrak{Z}_{3,\,2}$：$e_1 e_1 = e_2, e_1 e_2 = \frac{1}{2}e_3, e_2 e_1 = e_3$.
  - $\mathfrak{Z}_{3,\,3}$：$e_1 e_2 = e_3, e_2 e_1 = -e_3$.
  - $\mathfrak{Z}_{3,4}$：$e_1 e_1 = e_3, e_1 e_2 = e_3, e_2 e_2 = \beta e_3$.
  - $\mathfrak{Z}_{3,\,5}$：$e_1 e_1 = e_3, e_1 e_2 = e_3, e_2 e_1 = e_3$.

在我们的分类中，不考虑非真超代数。因此，类型（n, 0）（对应于 Zinbiel 代数）和类型（0, n）（零代数）均不予考虑。此外，我们也不考虑满足 $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_1^2 = 0$ 的超代数，因为它们是分裂代数。

4.1. 3维Zinbiel超代数。

4.1.1. (1, 2)型超代数。 设 $\{e_1, f_1, f_2\}$ 是超代数 $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathsf{Z}_{\bar{1}}$ 的一组基。由于 $\mathsf{Z}_{\bar{0}}$ 是平凡一维代数，我们得到 Z 的如下乘法表：

$$e_1 f_i = a_i^1 f_1 + a_i^2 f_2, f_i e_1 = b_i^1 f_1 + b_i^2 f_2, f_i f_j = c_{ij} e_1,$$

其中 $1 \le i,\ j \le 2$。我们逐一考察各种情形，得到关于结构常数的变量方程：

$\mathfrak{Z}\{e_1, e_1, f_1\} = 0 \Rightarrow (a_1^1)^2 + a_1^1 b_1^1 + a_1^2 a_1^2 + a_1^2 b_1^2 = 0$ 和 $a_1^1 a_1^2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, e_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_1^1 a_2^1 + a_1^1 b_2^1 + a_2^1 a_2^2 + a_2^2 b_2^2 = 0$ 和 $a_1^2 a_2^1 + a_1^2 b_2^1 + (a_2^2)^2 + a_2^2 b_2^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_1, e_1\} = 0 \Rightarrow (a_1^1)^2 + a_1^2 a_2^1 - a_1^2 b_2^1 + a_2^1 b_1^2 = 0$ 和

$a_1^1 a_1^2 - a_1^1 b_1^2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_1^1 - a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_2, e_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 a_2^1 + a_1^1 b_2^1 + a_2^1 a_2^2 - a_2^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^2 - a_2^2 b_2^1 = 0$ 和 $a_1^2 a_2^1 + a_1^2 b_2^1 - a_2^1 b_1^2 + (a_2^2)^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_1, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{11} + a_1^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{12} + a_1^2 c_{22} = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_2, f_1\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{11} + a_2^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{e_1, f_2, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{12} + a_2^2 c_{22} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, e_1, e_1\} = 0 \Rightarrow (b_1^1)^2 + b_1^2 b_2^1 = 0$ 和 $b_1^1 b_1^1 + b_1^2 b_2^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, e_1, e_1\} = 0 \Rightarrow b_1^1 b_2^1 + b_2^1 b_2^2 = 0$ 和 $b_1^2 b_2^1 + (b_2^2)^2 = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, e_1, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{11} + a_1^2 c_{12} + b_1^2 c_{12} - b_1^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, e_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{11} + a_2^2 c_{12} - b_1^1 c_{12} - b_1^2 c_{22} + b_2^1 c_{11} + b_2^2 c_{12} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, e_1, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{21} + a_1^2 c_{22} + b_1^1 c_{21} + b_1^2 c_{22} - b_2^1 c_{11} - b_2^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, e_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{21} + a_2^2 c_{22} - b_2^1 c_{12} + b_2^1 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_1, e_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{11} + a_1^2 c_{12} + b_1^1 c_{11} + b_1^2 c_{12} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_2, e_1\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{11} + a_2^2 c_{12} + b_2^1 c_{11} + b_2^2 c_{12} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_1, e_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{21} + a_1^2 c_{22} + b_1^1 c_{21} + b_1^2 c_{22} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_2, e_1\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{21} + a_2^2 c_{22} + b_2^1 c_{21} + b_2^2 c_{22} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_1, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{11} = 0$ 和 $a_1^2 c_{11} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{11} - b_1^1 c_{12} + b_1^1 c_{21} = 0$ 和 $a_2^2 c_{11} - b_1^2 c_{12} + b_1^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_2, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{12} + b_1^1 c_{12} - b_1^1 c_{21} = 0$ 和 $a_1^2 c_{12} + b_1^2 c_{12} - b_1^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_1, f_2, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{12} = 0$ 和 $a_2^2 c_{12} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_1, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{21} = 0$ 和 $a_1^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_1, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{21} - b_2^1 c_{12} + b_2^1 c_{21} = 0$ 和 $a_2^2 c_{21} - b_2^2 c_{12} + b_2^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_2, f_1\} = 0 \Rightarrow a_1^1 c_{22} + b_2^1 c_{12} - b_2^1 c_{21} = 0$ 和 $a_1^2 c_{22} + b_2^2 c_{12} - b_2^2 c_{21} = 0$

$\mathfrak{Z}\{f_2, f_2, f_2\} = 0 \Rightarrow a_2^1 c_{22} = 0$ 和 $a_2^2 c_{22} = 0$。

通过求解方程组，我们得到 Z 的以下几种可能情况之一：

(a) $f_1f_1 = \lambda_{11}e_1$, $f_1f_2 = \lambda_{12}e_1$, $f_2f_1 = \lambda_{21}e_1$, $f_2f_2 = \lambda_{22}e_1$.
(b) $f_1e_1 = \mu f_1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}\mu f_2$, $f_2e_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\mu f_1 - \mu f_2$, $f_1f_1 = \lambda_{11}e_1$,
$f_1f_2 = \lambda_{12}e_1$ $f_2f_1 = \lambda_{12}e_1$ — , ,
$f_2f_2 = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}}e_1$.(c) $e_1f_1 = \mu f_1 - \frac{\mu^2}{\mu'}f_2$, $e_1f_2 = \mu' f_1 - \mu f_2$.
(d) $e_1f_1 = \mu f_1 - \frac{\mu\nu}{\nu'}f_2$,$e_1f_2 = \frac{\mu\nu'}{\nu}f_1 - \mu f_2$, $f_1e_1 = \nu f_1 - \frac{\nu^2}{\nu'}f_2$,
$f_2e_1 = \nu' f_1 - \nu f_2$.(e)$f_1e_1 = \mu f_2$, $f_1f_1 = \mu' e_1$.(f)$f_2e_1 = \mu f_1$,
$f_2f_2 = \mu' e_1$.(g)$e_1f_1 = \mu f_2$, $f_1e_1 = \mu' f_2$.(h)$e_1f_2 = \mu f_1$,
$f_2e_1 = \mu' f_1$.

引理 22. 上述八种情形的同构类可归结为对情形 (a)、(e) 和 (g) 的研究。

(1) 超代数 (e) 与 (f) 同构。(2) 超代数 (g) 与 (h) 同构。
(3) 当 $\mu' = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}}$ 时，超代数 (b) 与 (e) 同构。(4) 当
$\mu' = 0$ 时，超代数 (c) 与 (g) 同构。(5) 当 $\mu' = \nu$ 时，
超代数 (d) 与 (g) 同构。

证明. 陈述 (1) 和 (2) 显然成立。陈述 (3)、(4) 和 (5) 分别可通过以下映射证明。

$$\begin{array}{llll} \phi_1(e_1) = e_1, & \phi_1(e_2) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}e_2, & \phi_1(e_3) = e_2 + e_3, \\ \phi_2(e_1) = e_1, & \phi_2(e_2) = \frac{\mu}{\mu'}e_2 + \frac{\mu}{\mu'}e_3, & \phi_2(e_3) = e_2, \\ \phi_3(e_1) = e_1, & \phi_3(e_2) = e_2, & \phi_3(e_3) = \frac{\nu'}{\nu}e_2 - \frac{\nu'}{\nu}e_3. \end{array}$$

□

接下来，我们研究其余情形。
情形 (a) 根据参数的不同，等价于以下某一种情形。

- 如果 $\lambda_{11} \neq 0$ 和 $\lambda_{12} \neq \lambda_{21}$。现在，选择
$$\phi(e_1) = \frac{\lambda_{11}}{(\lambda_{12}-\lambda_{21})^2}e_1, \phi(e_2) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}-\lambda_{12}}e_2 \text{ and } \phi(e_3) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}-\lambda_{12}}e_2 + e_3,$$
then
$$\mathbf{z}_{3,1}^{\alpha} : f_1f_1 = e_1, \quad f_2f_1 = e_1, \quad f_2f_2 = \alpha e_1.$$
- 如果 $\lambda_{11} \neq 0$ 和 $\lambda_{12} = \lambda_{21}$。然后，通过选择映射
$$\phi(e_1) = \lambda_{11}^{-1}e_1, \phi(e_2) = e_3, \phi(e_3) = -\frac{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2}}{\lambda_{11}}e_2 + \lambda_{12}\lambda_{11}^{-1}e_3,$$
我们得到
$$\mathbf{z}_{3,2} : f_1f_1 = e_1, \quad f_2f_2 = e_1.$$
注意，如果 $\lambda_{22} = \lambda_{12}^2\lambda_{11}^{-1}$，那么这等价于 (e) 中的某种情形。

- 如果 $\lambda_{11}=0$, $\lambda_{12}\neq\lambda_{21}$ 且（$\lambda_{12}\neq-\lambda_{21}$ 或 $\lambda_{22}\neq0$）。选择映射
$$\phi(e_1)=\frac{\lambda_{22}}{(\lambda_{12}-\lambda_{21})^2}e_1,\ \phi(e_2)=\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}-\lambda_{21}}e_2+e_3 \text{ and } \phi(e_3)=\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}-\lambda_{21}},$$
我们得到 $\mathbf{z}_{3,1}^{\alpha}$.
- 若 $\lambda_{11}=0$ 且 $\lambda_{12}=\lambda_{21}\neq0$, 则有 $\mathbf{z}_{3,\ 2}$。
- 若 $\lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$, 则得到
$$\mathbf{z}_{3,3}: f_1f_1=e_1,$$
取 $\phi(e_1)=\lambda_{22}^{-1}e_1$、$\phi(e_2)=e_3$ 和 $\phi(e_3)=e_2$。
- 若 $\lambda_{11}=\lambda_{22}=0$ 且 $\lambda_{12}=-\lambda_{21}$。取映射
$$\phi(e_1)=\lambda_{12}^{-1}e_1,\ \phi(e_2)=e_2 \text{ and } \phi(e_3)=e_3$$
以得到
$$\mathbf{z}_{3,4}: f_1f_2=e_1,\quad f_2f_1=-e_1.$$

情形 (e) 根据参数的不同，等价于以下情况之一。

- 若 $\mu\neq0$ 且 $\mu'\neq0$, 则由下述映射可知
$$\phi(e_1)=\mu'^{-1}e_1,\ \phi(e_2)=e_2 \text{ and } \phi(e_3)=\mu^{-1}\mu'^{-1}e_3$$
表明它与下列对象同构
$$\mathbf{z}_{3,5}: f_1e_1=f_2,\quad f_1f_1=e_1.$$
- If $\mu=0$ and $\mu'\neq0$, 则取 $\phi(e_1)=\mu'^{-1}e_1$、$\phi(e_2)=e_2$ 和 $\phi(e_3)=e_3$, 我们有 $\mathbf{z}_{3}$ $_{,3}$.
- 若 $\mu\neq0$ 且 $\mu'=0$, 取 $\phi(e_1)=e_1$、$\phi(e_2)=e_2$ 和 $\phi(e_3)=\mu^{-1}e_3$，得到
$$\mathbf{z}_{3,6}: f_1e_1=f_2.$$

情形 (g) 根据参数的不同，等价于以下情况之一。

- 如果 μ' $\neq0$, 那么，对于满足 $\phi(e_1)=e_1$、$\phi(e_2)=e_2$ 以及 $\phi(e_3)=\mu'^{-1}e_3$的 ϕ，我们有 e
$$\mathbf{z}_{3,7}: e_1f_1=\alpha f_2, f_1e_1=f_2.$$
- 如果 $\mu'=0$, 取 $\phi(e_1)=e_1$、$\phi(e_2)=e_2$ 以及 $\phi(e_3)=\mu^{-1}e_3$，则得到
$$\mathbf{z}_{3,8}: e_1f_1=f_2.$$

4.1.2. (2, 1) 超代数。

- 偶部 $\mathfrak{Z}_{2,\ 0}$。于是，根据注20，我们有 $\mathbf{z}_{3,\ 0}$。
- 偶部 $\mathfrak{Z}_{2,\ 1}$。根据引理18和注19，我们有，在 $\mathfrak{Z}_{2,\ 1}$ 上构造的每个超代数都具有以下形式
$$e_1e_1=e_2,\quad f_1f_1=\lambda_2e_2.$$
选择线性映射 ϕ，使得 $\phi(e_1)=\lambda_2^{-\frac{1}{2}}e_1$、$\phi(e_2^{1})=\lambda_2^{-1}e_2$、$\phi(e_3)=e_3$, 从而得到超代数
$$\mathbf{z}_{3,9}: e_1e_1=e_2, f_1f_1=e_2.$$

综上，我们得到了 3维Zinbiel超代数的分类。

定理 23. 给定一个三维复非分裂 Zinbiel 超代数 Z，则它同构于一个 3维Zinbiel代数，或仅同构于以下代数之一。

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathbf{z}_{3,1}^{\alpha} & : & f_1f_1 & = & e_1 & f_2f_1 & = & e_1 & f_2f_2 = \alpha e_1 \\
\mathbf{z}_{3,2} & : & f_1f_1 & = & e_1 & f_2f_2 & = & e_1 & \\
\mathbf{z}_{3,3} & : & f_1f_1 & = & e_1 & & & & \\
\mathbf{z}_{3,4} & : & f_1f_2 & = & e_1 & f_2f_1 & = & -e_1 & \\
\mathbf{z}_{3,5} & : & f_1e_1 & = & f_2 & f_1f_1 & = & e_1 & \\
\mathbf{z}_{3,6} & : & f_1e_1 & = & f_2 & & & & \\
\mathbf{z}_{3,7} & : & e_1f_1 & = & \alpha f_2 & f_1e_1 & = & f_2 & \\
\mathbf{z}_{3,8} & : & e_1f_1 & = & f_2 & & & & \\
\mathbf{z}_{3,9} & : & e_1e_1 & = & e_2 & f_1f_1 & = & e_2. &
\end{array}$$

5. 有限维 Zinbiel 超代数是幂零的

众所周知，在任意域上，有限维 Zinbiel 代数都是幂零的 [30]（相关背景另见 [17] ）。一个自然的问题是，这一结论对于 Zinbiel 超代数是否也成立。例如，所有 3 维 Zinbiel 超代数都是幂零的（定理 23）。正如我们将在本节中看到的，答案是肯定的。

定义 24. 设　　给定代数 Z，我们将元素 $a \in \mathbf{Z}$ 的右湮灭子定义为　　*t*

$$RC(a) = \{x \in \mathbf{Z} : ax = 0\}.$$

引理 25. 给定一个右交换超代数 Z，对于齐次元素 $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$，有 $RC(a_1) \subseteq RC(a_1a_2)$ 。

证明. 给定 $x \in RC(a_1)$，并设 $x = x_0 + x_1$，对于 $x_i \in \mathbf{Z}_{\bar{i}}$。那么，由于 a_1 是齐次的，$a_1x = a_1x_0 + a_1x_1 = 0$ 推出 $a_1x_0 = 0$ 和 $a_1x_1 = 0$。因此，我们有

$$(a_1a_2)x = (a_1a_2)x_0 + (a_1a_2)x_1 = (a_1x_0)a_2 + (-1)^{|a_2|}(a_1x_1)a_2 = 0.$$

□

本节的第一个关键引理如下。

引理 26. 给定一个有限维 Zinbiel 超代数 Z，存在一个齐次元e 使得 $e\mathbf{Z} = 0$。

证明. 由于 $\mathbf{Z}_0$ 是一个 Zinbiel 代数，因此它是幂零的。假设其幂零指数为 N，则存在某个非零元 $e_0 \in \mathbf{Z}_{\bar{0}}^{N-1}$，使得 $e_0\mathbf{Z}_{\bar{0}} = \mathbf{Z}_{\bar{0}}e_0 = 0$。如下构造 e 。

(1) 固定 $e = e_0$。(2) 如果存在某个 $x \in \mathbf{Z}_{\bar{1}}$ 使得 $ex \neq 0$，则令 $e_0 = ex$。于是，根据 Zinbiel 超恒等式，$x \in RC(e_0)$。否则，令 $e = e_0$ 并结束迭代。(3) 从(1)重复。

注意到每次迭代中得到的元素都是齐次的，因此根据引理 25，在每次迭代中，右湮灭子都会变大。此外，由于该代数是有限维的，这一过程是有限的，因为只需对 $\mathsf{Z}_{\bar{1}}$ 的一个基运行该过程即可。因此我们得出 $RC(e) = \mathsf{Z}$，也就是说 $e\mathsf{Z} = 0$。□

Lem引理 27. 给定 Zinbiel 超代数 Z 的一个右理想 I，则 $\mathsf{Z}I$ 是一个理想 *l.*

证明. 我们有 $\mathsf{Z}(\mathsf{Z}I) \subseteq \mathsf{Z}^2I + \mathsf{Z}(I\mathsf{Z}) \subseteq \mathsf{Z}I$，且 $(\mathsf{Z}I)\mathsf{Z} \subseteq \mathsf{Z}^2I \subseteq \mathsf{Z}I$。 □

由前面的引理可得下一个结果。

引理28. 任意维数为 $n > 1$ 的 Zinbiel 超代数都有一个真分次理想。

证明. 给定一个有限维 Zinbiel 超代数 Z，根据引理 26，存在一个元素 $e \in \mathsf{Z}_{\bar{i}}$，其中 $i = 0$ 或 $i = 1$，使得 $e\mathsf{Z} = 0$。现在，若 $\mathsf{Z}e = 0$，则由 E 生成的向量空间是一个真分次理想。反之，若 $\mathsf{Z}e \neq 0$，取 $I = \mathsf{Z}e$，则由于 e 的线性张成是一个右理想，根据引理27， I 是一个理想。

为了证明它是一个真理想，我们必须证明其维数小于 n。选取 Z 的一组基 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，使得 $e_1 = E$，那么理想 I 由元素$e_1E = 0, e_2E, \ldots, e_nE$线性生成，因此其维数至多为 $n - 1$。

由于 e 是齐次的，理想 I 是分次的。 □

现在，我们可以证明本节的第一个主要结果。

引理29. 任意有限维 Zinbiel 超代数都是可解的。

证明. 设 Z 是一个有限维 Zinbiel 超代数。我们对维数n使用归纳法。若 $n = 1$，则得到平凡的一维代数，它是可解的。现在，若 $n > 1$ 且该命题对维数至多为$n-1$的情形成立，那么 A 有一个真分次理想 I，因此 I和 Z/I都是维数小于 n的 Zinbiel 超代数，故它们都是可解的。因此，Z 本身也是可解的。□

命题 30. 设 I 是有限维 Zinbiel 超代数 Z 的一个极小理想。设 J 是 Z 的一个极小右理想，且 $J \subseteq I$。那么 $I = J$。

证明. 证明与 [30, 命题 2.2] 的证明相同。 □

推论 31. 设 I 是有限维 Zinbiel 超代数 Z 的一个极小理想，则有$I\mathsf{Z} = \mathsf{Z}I = 0$。因此，有 $\dim I = 1$。

证明. 证明与 [30, 推论 2.3] 的证明相同。 □

注意到，前一个结果意味着任意有限维 Zinbiel 超代数都有非平凡湮灭子。然而，这不足以证明任意有限维 Zinbiel 超代数都是幂零的，我们还需要下面这个直接的观察。

注记 32. 设 I 是 Zinbiel 超代数 Z 的一个极小理想。假设它由某个元素 $e = e_0 + e_1 \in \mathsf{Z}$ 生成，其中 $e_i \in \mathsf{Z}_i$。注意， $e \in \mathrm{Ann}(\mathsf{Z})$。那么， $e\mathsf{Z}_{\bar{i}} = 0$ 蕴含 $e_0\mathsf{Z}_{\bar{i}} = 0$ 且 $e_1\mathsf{Z}_{\bar{i}} = 0$（分别地，$\mathsf{Z}_{\bar{i}}e = 0$ 蕴含 $\mathsf{Z}_{\bar{i}}e_0 = 0$ 且 $\mathsf{Z}_{\bar{i}}e_1 = 0$），并且我们有 $e_i \in \mathrm{Ann}(A)$。此外，$I_i = \langle e_i \rangle$ 是一个理想。进一步地，如果 $e_i \neq 0$，那么 I_i 是一个真分次理想。因此，我们有以下推论。

推论33. 任意有限维 Zinbiel 超代数 Z 都有一个分次的极小理想。此外，存在一个齐次元素 $e \in$ Z，使得 $e \in$ Ann(Z)。

最后，推论33使我们能够证明本节的主要结果。

定理34. 任意有限维 Zinbiel 超代数都是幂零的。

证明. 设 Z 是一个有限维 Zinbiel 超代数。我们对维数n进行归纳。若 $n = 1$，则得到平凡的一维代数，它是幂零的。现在，假设任意有限维 Zinbiel 超代数在维数不超过 $n - 1$ for $n > 1$时都是幂零的。由于 Z 具有一个 I 维数为一的分次理想（由一个齐次元生成），使得 Z$I = I$Z $= 0$，因此 Z$/I$是一个维数为$n-1$的 Zinbiel 超代数，所以它是幂零的。因此，Z 是幂零的。□

参考文献

1. Adashev J., Camacho L. M., G´omez-Vidal S., Karimjanov I.，具有幂零指数 $n - 3$ 的自然分次 Zinbiel代数，Linear Algebra and Its Applications，443（2014），86–104。2. Adashev J., Khudoyberdiyev A.，Omirov B.，某些 Zinbiel代数类的分类，Journal of General- ized Lie Theory and Applications，4（2010），S090601。3. Aguiar M.，预泊松代数，Letters in Mathematical Physics，54（2000），263–277。´4. Alvarez A.，Fehlberg R.，Kaygorodov I.，Zinbiel代数的代数与几何分类，Journal of Pure and Applied Algebra，226（2022），11，107106。5. Benayadi S.，Kaygorodov I., Mhamdi F.，对称Zinbiel超代数，Communications in Algebra，51（2023），1，224–238。6. Bremner M.，Dotsenko V.，正则参数化单关系拟运算的分类，Canadian Journal of Mathe- matics，69（2017），5，992–1035。7. Camacho L. M.，Ca˜nete E. M.，G´omez-Vidal S.，Omirov B.，p-丝状 Zinbiel 代数，Linear Algebra and its applications，438（2013），7，2958–2972。8. Camacho L.M., G´omez J.R.，Navarro R.M.，Omirov B.A.，某些幂零类的 Leibniz超代数分类，Acta Mathematica Sinica, English Series，26（2010），5，799–816。9. Camacho L.，Karimjanov I.，Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A.，丝状 Zinbiel 代数的中心扩张，Linear and Multilinear Algebra，70（2022），2，1479–1495。10. Camacho L.M.，Navarro R.M.，S´anchez J.M.，关于自然分次Lie与Leibniz超代数，Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，43（2020），5，3411–3435。11. Ceballos M.，Towers D.，Zinbiel代数中的最大维数阿贝尔子代数与理想，Communications in Algebra，51（2023），4，1323–1333。12. Chapoton F.，Zinbiel代数与多重ζ值，Documenta Mathematica，27（2022），519–533。13. Colmenarejo L.，Diehl J.，Sorea M.，洗牌代数中的一个二次恒等式及 de Bruijn公式的另一种证明，European Journal of Combinatorics，99（2022），103406。14. Covez S.，Farinati M.，Lebed V.，Manchon D.，rack 上同调的双代数方法，arXiv:1905.02754 15. Dokas I.，Zinbiel代数与带分裂幂的交换代数，Glasgow Mathematical Journal，52（2010），2，303–313。16. Dzhumadildaev A.，关于 q-交换子的 Zinbiel代数，Journal of Mathematical Sciences (New York)，144（2007），2，3909–3925。17. Dzhumadildaev A.，Tulenbaev K.，Zinbiel代数的幂零性，Journal of Dynamical and Control Systems，11（2005），2，195–213。

18. Gao X.，Guo L.，Zhang Yi.，交换匹配 Rota-Baxter 算子、带装饰的 shuffle 积与匹配 Zinbiel 代数，Journal of Algebra，586（2021），402–432。19. Guterman A.，Kudryavtsev D.，长度缓慢增长的代数，国际代数与计算杂志，32（2022），7，1307–1325。20. Ikonicoff S.，Pacaud Lemay J.-P.，笛卡尔微分余单子与笛卡尔微分范畴的新模型，arXiv:2108.04304 21. Ismailov N.，Mashurov F.，Smadyarov N.，单元与二元 Zinbiel 代数的定义恒等式。代数及其应用杂志，2022，DOI: 10.1142/S0219498823501657 22. Kaygorodov I.，Alvarez M.A.，Castilho de Mello T.，三维 Zinbiel 代数的中心扩张，数学研究，2021，DOI: 10.1007/s11587-021-00604-1 23. Kaygorodov I.，Popov Yu.，Pozhidaev A.，Volkov Yu.，Zinbiel代数与幂零 Leibniz 代数的退化，Linear and Multilinear Algebra，66（2018），4，704–716。[《Zinbiel 代数与幂零 Leibniz 代数的退化》更正，Linear and Multilinear Algebra，70（2022），5，993–995。] 24. Kawski M.，时序代数：组合学与控制，Journal of Mathematical Sciences (New York)，103（2001），6，725–744。25. Kolesnikov P.，预交换代数的交换子代数，数学杂志，16（2016），2，56–70。26. Loday J.-L.，Leibniz 上同调的杯积与对偶 Leibniz 代数，斯堪的纳维亚数学，77（1995），2，189–196。27. Loday J.-L.，关于准 shuffle 代数，数学手稿，123（2007），1，79–93。28. Naurazbekova A.，关于自由对偶 Leibniz 代数的结构，欧亚数学杂志，10（2019），3，40–47。29. Naurazbekova A.，Umirbaev U.，对偶 Leibniz 代数的恒等式，TWMS Journal of Pure and Applied Mathemat- ics，1（2010），1，86–91。30. Towers D.，Zinbiel代数是幂零的，代数及其应用杂志，2022，DOI: 10.1142/S0219498823501669