arXiv:2304.00278v1 [math.LO] 1 Apr 2023

最小坏数组的逻辑强度

Anton Freund、Fedor Pakhomov 和 Giovanni Sold`A

Abstract. 本文研究更优拟序这一概念的逻辑学方面。该概念由 C. Nash-Williams（*Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 1965 & 1968年）引入。更优拟序理论中的一个核心工具是极小坏数组引理。我们证明，从逆数学这一数理逻辑框架的角度来看，该引理具有异常强的力量。具体而言，在基础理论 ATR_0之上，它等价于 Π^1_2-归纳集存在原理。

1. Introduction

若一个带有序关系 $\leq_Q$ 的拟序 Q 是良拟序，则任意无限序列 q_0、q_1.....在 Q 中都存在 $i < j$，使得 $q_i \leq_Q q_j$。良拟序拥有一套深刻的理论 [4]，其中图子式定理 [16] 是一项巍峨的成就。良拟序的一个局限在于，它们在无穷运算下缺乏闭包性质。特别地，R. Rado [14] 构造了一个良拟序 Q，使得当我们规定

$$X \leq_{\mathcal{P}(Q)} Y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{for any } p \in X \text{ there is a } q \in Y \text{ with } p \leq_Q q.$$

为确保这类闭包性质，C. Nash-Williams [11, 12] 引入了限制性更强的“良拟序”概念，我们在下文回顾这一概念。作为一个著名的应用，我们提及 R. Laver 关于 Fra¨ıss´e 猜想的证明 [5]：在 σ-散线性序上的嵌入关系是一个良序，甚至是一个良拟序。良拟序理论中的一个核心工具是极小坏数组引理，它也称为先行原理。在本文中，我们运用逻辑学方法证明，该原理的任何证明都必然需要异常强的集合存在公理。下文将给出这一结果的精确表述。

我们先介绍定义良拟序概念所需的一些记号。集合 V 的有限子集和可数无限子集的全体分别记作 $[V]^{<\omega}$ 和 $[V]^{\omega}$。$[\mathbb{N}]^{<\omega} \cup [\mathbb{N}]^{\omega}$ 中的集合均视为按递增次序枚举它们的序列。对于这类序列，我们写作 $s \sqsubset t$，表示 s 是 t 的真初始段。请注意，这意味着 s 是有限的。对于最小元素为 x 的 $X \in [\mathbb{N}]^{\omega}$，令 $X^- := X \setminus \{x\}$。下文中，我们使用中缀记法 $p\,R\,q$ 表示 $(p,q) \in R$。

定义 1.1. 考虑一个集合 Q，其上配有二元关系 R。所谓 Q-数组，是指一个映射 $f : [V]^{\omega} \to Q$，且具有 $V \in [\mathbb{N}]^{\omega}$，并且满足如下意义下的连续性：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06A06, 03B30, 03F35.*Key words and phrases.* 更优拟序、极小坏数组、 Π^1_2-概括公理、逆向数学。Anton Freund 的研究工作获得德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号 460597863。Fedor Pakhomov 和 Giovanni Sold`a 的研究工作获得 FWO 资助项目 G0F8421N 的资助。

每个 $X \in [V]^\omega$ 都存在一个 $s \sqsubset X$，使得 f 在 $\{Y \in [V]^\omega \mid s \sqsubset Y\}$上为常值。若不存在 $X \in [V]^\omega$使得 $f(X)\ R\, f(X^-)$，则称这样的 f为 R-坏的。若没有 Q-数组是 R-坏的，我们就称 R 是 Q 上的更好关系。更优拟序是指这样一种拟序：其序关系是底集上的更好关系。

说明任意良拟序都是良拟序是有益的。在命题 2.2 的证明中，我们将隐含地确认 $Q \mapsto \mathcal{P}(Q)$ 保持良拟序。尽管 [13, 17] 中提到了并非拟序的更好关系，但这类关系尚未得到广泛研究。我们将在一个中间论证中考察它。需要指出的是，任意更好关系都是自反的。

给定的良拟序定义实质上确实与最初基于块的定义相吻合。我们回顾一下，以 $V \in [\mathbb{N}]^\omega$ 为基的块是一个集合 $B \subseteq [V]^{<\omega}$，其中任意 $X \in [V]^\omega$ 在 B 中都有唯一的初始段，该初始段可能为空。后者确保可以将基恢复为 $\bigcup B$。任意函数 $f_0 : B \to Q$，若定义在以 V 为基的块 B 上，则会诱导出一个 Q-数组 f： $[V]^\omega \to Q$, 其定义为对于满足 $s \sqsubset X$ 的 $s \in B$， $f(X) = f_0(s)$。连续性意味着任意数组都以这种方式诱导出来。在下文中，我们将隐含地假设所有数组都被视为定义在块上的函数。这样做的优点是数组成为可数对象，这一点将与我们的逻辑学分析相关。稍后，我们将简要讨论良拟序的另一个等价定义，即用特殊的块来定义；这些特殊的块称为屏障。另一个等价定义归功于 S. Simpson [18]，他将所有博雷尔可测函数都视为数组。在我们的逻辑学分析中，我们不会考虑 Simpson 的这一定义。

讨论完更优拟序的定义后，我们来介绍极小坏数组引理中出现的概念。

定义 1.2. 设 R 是集合 Q 上自反二元关系的一种部分排序，若它是 Q 上的良基偏序 $\leq'$，且 $p\,R\,q \leq' r$ 蕴含 $p\,R\,r$，则称其为该关系的部分排序。给定这样的排序以及 Q-数组 f: $[V]^\omega \to Q$ 和 g: $[W]^\omega \to Q$，我们用 $f \leq' g$ 表示 $V \subseteq W$，并且对所有 $X \in [V]^\omega$，都有 $f(X) \leq' g(X)$。如果对所有 $X \in [V]^\omega$，甚至都有 $f(X) <' g(X)$，则记作 $f <' g$。若一个 Q-数组 g 是 R-坏的，并且不存在 R-坏的 Q-数组 $f <' g$，则称它是$\leq'$-极小的 R-坏数组。

请注意，当 $\leq'$ 是 R 的部分排序且后者是自反的时， $q \leq' r$ 蕴含 $q\,R\,r$。反过来，如果 R 是传递的，且 $q \leq' r$ 蕴含 $q\,R\,r$，那么 $p\,R\,q \leq' r$ 蕴含 $p\,R\,r$。因此，对于拟序而言，我们所说的部分排序与通常的定义一致。命题 2.2 和定理 3.5 的证明表明，这一定义适用于非传递关系。现在我们可以介绍更优拟序理论中的一个核心工具。

极小坏数组引理（“辛普森版本”）。考虑一个拟序 Q，以及 Q 上序关系 $\leq_Q$ 的部分排序 $\leq'$。只要 f_0 是一个 $\leq_Q$-坏Q-数组，就存在一个 Q-数组 $f \leq' f_0$，它是 $\leq'$-极小的 $\leq_Q$-坏数组。

这里给出的版本与 Simpson [18], 的版本一致，不过如上所述，后者采用了更大一类博雷尔可测数组。Laver [6]给出了数组之间关系 $<'$ 的另一种定义。由此得到极小坏数组引理的另一种变体，我们稍后将其称为 Laver 版本。在这两种情况下，我们都有一个适用于拟序的版本，并且可以自然地推广到自反关系。我们将看到，我们的结果适用于所有这些版本。

我们的逻辑分析是在逆向数学的框架内进行的。关于这一领域的全面介绍，请参阅 H. Friedman [3]的奠基论文以及 S. Simpson [19]的教科书。为了较为非正式地说明一个核心思想，我们指出，每一类 $\mathcal{C}$ 性质（更确切地说，是二阶算术公式）都会导出一个称为 $\mathcal{C}$-概括的公理原则；该原则断言，对于任意来自 $\mathcal{C}$的 φ，集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ 都存在。理论若由 $\mathcal{C}$-概括及关于自然数的一些基本事实公理化，便记作 $\mathcal{C}$-CA_0。重要的情形包括：可由算法判定的性质类 Δ^0_1 、算术性质类 Π^0_∞ （由量化有限对象而非无限对象的公式给出）、余解析性质类 Π^1_1 ，以及形式为 $\forall X \subseteq \mathbb{N}$： $\psi(n, X)$ 的解析 ψ所对应的性质类 Π^1_2 。理论 Δ^0_1-CA_0 和 Π^0_∞-CA_0 通常分别记作 RCA_0（递归概括）和 ACA_0 （算术概括）。我们还将遇到 ATR_0 ，即算术超限递归理论；它允许沿任意良序迭代算术概括。

要在逆向数学中分析一个给定定理，通常需要确定一个类 $\mathcal{C}$ ，使得 $\mathcal{C}$-概括原则与所讨论的定理等价。如果能在一个足够弱的基础理论上证明这种等价关系，那么它就具有参考价值。一个常见的选择是 RCA_0, ，但我们主要将 ATR_0 作为基础理论。这是合理的，因为辛普森版本的极小坏数组引理通常与开拉姆齐定理结合使用，而后者在 RCA_0 上等价于算术超限递归。

现在，数学概念和逻辑框架都已确定，我们可以陈述本文的主要结果。

定理 1.3. 以下命题在 ATR_0 上等价：

(i) Π^1_2-概括原则；(ii) 辛普森版本的极小坏数组引理（如上所述）；(iii) Laver 版本的极小坏数组引理（如第 3 节所述）。

现在让我们将我们的结果置于其背景中。在关于逆向数学的教材中，Simpson [19] 指出：“大量普通数学定理都可以在 ACA_0, 中证明，而在例外情形中，大多数可以在 Π^1_1-CA_0中证明。”在 [8] 中证明了， Π^1_1-归纳与良拟序理论中的极小坏序列引理等价。极小坏数组对应于 Π^1_2-归纳，这或许并不完全出人意料，因为 A. Marcone [8] 已经证明，更优拟序的概念是 Π^1_2-完备的。然而，Marcone 本人提出了一个弱得多的猜想，即极小坏数组引理无法在 Π^1_1-CA_0 中证明（见 [9]中的问题 2.19）。正如 M. Rathjen [15]所表述的， Π^1_2-归纳的强度远远超过 Π^1_1-归纳的强度。在对拓扑学中一个定理的分析中，C. Mummert 和 S. Simpson [10] 断言，他们发现了“第一个这样的核心数学定理：它可以在二阶算术中证明，并且蕴含 Π^1_2 归纳。”因此，得出极小坏数组引理具有非凡的公理强度这一结论，似乎是合理的。

2. 从极小坏数组到 Π12-概括

本节中，我们从辛普森版本的极小坏数组引理推导出 Π^1_2-概括，这将得到引言中定理 1.3 的第一个蕴含。

我们将关键地运用 Marcone 的结果：更优拟序这一概念是 Π^1_2-完备的。虽然 Marcone 没有指定基础理论，但不难验证他的证明可以推出以下结论。

命题 2.1（[7]）。考虑二阶算术语言中的一个 Π^1_2 公式 $\varphi(n)$，其中可能还带有其他参数。理论 ACA_0 证明，对于参数的任意取值，都存在一个集合族 Q_n 和自反二元关系 R_n，使得当且仅当 R_n 是 Q_n 上的更好关系时，$\varphi(n)$ 成立。

Marcone 还证明，可以根据 M. Pouzet [13] 的构造，将命题中的关系 R_n 转化为拟序。不过，后者使用了以局部极小坏数组形式出现的 Π^1_1 理解。在任何情况下，我们稍后都会构造一个非传递关系，即使每个 R_n 都是传递的也是如此。接下来，为了归约到拟序，我们将使用以下结果。它加强了 Pouzet 的结果；Pouzet 的结果只涵盖 $\leq'$ 是恒等关系的情形。由于 (ii) 中的极小坏数组已给定，因此我们不需要更强的基础理论。

命题 2.2（ATR_0）。当 $\leq'$ 是集合 Q上的自反关系 R 的部分排序时，存在 Q 上的良基偏序 $\leq_Q$，使以下陈述成立：

（i）有 $\leq' \subseteq \leq_Q \subseteq R$。（ii）对于任意 $\leq_Q$-极小的 $\leq_Q$-坏数组 $f\colon [V]^\omega \to Q$，存在一个集合 $W \in [V]^\omega$，使得将 f 限制在 $[W]^\omega$ 上所得的关系是 R-坏的。

证明。鉴于部分排序是良基的，我们找到一个良序（α，$\preceq$）以及一个双射 $o\colon Q \to \alpha$，使得 $p \leq' q$ 蕴含 $o(p) \preceq o(q)$。注意，Pouzet 最初的证明中 $\leq'$ 是恒等关系，该证明基于一个满足 $\alpha = \omega$的任意枚举。沿用 Pouzet 的做法，我们规定

$$p <_Q q \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{we have } o(p) \prec o(q) \text{ and } p\,R\,q \\ \text{and } r <_Q p \text{ implies } r <_Q q \text{ for all } r \in Q, \end{cases}$$

这相当于对 $o(p)$ 进行递归。显然，这会得到一个包含于 R中的良基偏序。为证明（i），我们假设 $p <' q$。鉴于 $<'$是 R的部分排序，我们有 $p\,R\,q$，并且还有 $o(p) \prec o(q)$。为了得到 $p <_Q q$，我们证明 $r <_Q p$ 蕴含 $r <_Q q$。我们对 $o(r)$ 进行归纳。给定 $r <_Q p$，我们有 $o(r) \prec o(p) \prec o(q)$，以及 $r\,R\,p <' q$。关键在于，后者蕴含 $r\,R\,q$，这是由于我们对并非拟序的关系定义了部分排序。对于 $r' <_Q r <_Q p$，根据归纳假设，我们得到 $r' <_Q q$，从而可以得出 $r <_Q q$。现在考虑 f：如（ii）中的 $[V]^\omega \to Q$。根据开拉姆齐定理，我们首先找到 $V' \in [V]^\omega$，使得对于所有 $X \in [V']^\omega$，都有 $o(f(X)) \preceq o(f(X^-))$（参见 Theorem 4.9 以及 [9]的 Lemma 3.1）。考虑幂集 $\mathcal{P}(Q)$，其上的序由 $\leq_Q$ 所诱导，正如引言中所述。我们来看这个数组

$$h : [V']^\omega \to \mathcal{P}(Q) \quad \text{with} \quad h(X) = \{r \in Q \mid r <_Q f(X)\}.$$

请注意，当我们有 $\alpha = \omega$时，集合 $h(X)$是有限的，这与 Pouzet 的原始证明一致。对于 $W \in [V']^\omega$，h 在 $[W]^\omega$ 上的限制不可能是坏的。若它是坏的，我们就可以根据 $\mathcal{P}(Q)$ 上的序的定义，选取值 $g(X) \in h(X)$，使得对所有 $r \in h(X^-)$都有 $g(X) \not\leq_Q r$。鉴于 $g(X^-) \in h(X^-)$，由此得到的数组 $g\colon [W]^\omega \to Q$将是 $\leq_Q$-坏的。但由于 $g(X) \in h(X)$，我们还会有 $g(X) <_Q f(X)$，这与 f的极小性相悖。再次应用开拉姆齐定理，我们因此可以找到一个 $W \in [V']^\omega$，使得对所有 $X \in [W]^\omega$，$h(X) \leq_{\mathcal{P}(Q)} h(X^-)$成立。给定满足 $X \in [W]^\omega$的 $r <_Q f(X)$，现在可以论证 $r \in h(X)$推出 $r \leq_Q r'$

对于某个 $r' \in h(X^{-})$，其中我们有 $r' <_Q f(X^{-})$，因而 $r <_Q f(X^{-})$。由此可得，对 $X \in [W]^{\omega}$而言， $f(X) \leq_Q f(X^{-})$等价于 $f(X)\ R\, f(X^{-})$。鉴于 f 是 $\leq_Q$-坏的，它在 $[W]^{\omega}$上必定也是 R-坏的，正如所需。□

以下推论表明，针对拟序的极小坏数组引理蕴含了一个针对自反关系的同一引理版本。

推论 2.3（ATR_0）。假设拟序的极小坏数组引理的辛普森版本。考虑集合 Q 上自反关系 R 的部分排序 $\leq'$。如果 R 是 Q 上的无更优关系，那么存在一个 Q- 数组，它是 $\leq'$- 极小的 R-坏数组。

证明。考虑前一个命题中的 $\leq_Q \subseteq R$。鉴于 R 是无更优关系，我们得到一个 $\leq_Q$-坏数组 f_0。针对拟序的极小坏数组引理给出一个数组 $f' \leq_Q f_0$，它是 $\leq_Q$-极小的 $\leq_Q$-坏数组。根据前一个命题，我们可以将 f' 限制为一个 f-坏数组 R。后者确实必定是 $\leq'$-极小的 R-坏数组，因为一个 R-坏的 $g <' f$ 会是带有 $g <_Q f \leq_Q f'$ 的 $\leq_Q$-坏数组。□

需要指出的是，前面的证明得出 $f \leq_Q f_0$，但未必得出 $f \leq' f_0$，因此我们得到的只是一个看似较弱的、针对自反关系的极小坏数组引理版本。下一节将给出完整版本的直接证明。现在我们推导主要结果的第一个方向。

定理 2.4（ATR_0）。Π^1_2-理解原则可由辛普森版本的极小坏数组引理推出。

证明。给定一个可能带有参数的 Π^1_2 公式 $\varphi(n)$，我们考虑命题 2.1 中的集合 Q_n 和自反关系 R_n。我们需要构造集合

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid R_n \text{ is a better relation on } Q_n\}.$$

令 ω^* 为底集是 $\mathbb{N}$、序关系为 $\leq^* = \{(m,n) \mid m \geq n\}$ 的序。对于每个 n，我们考虑不交并 $Q^*_n = Q_n \cup \omega^*$ 及其上的关系

$$R^*_n = R_n \cup \leq^* \cup \{(q,m) \mid q \in Q_n \text{ and } m \in \omega^*\}.$$

现在定义 Q 为长度为 $l(\sigma)$、元素取自 $\sigma_i \in Q^*_i$ 的序列 $\sigma = \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{l(\sigma)-1} \rangle$ 的集合。为了在 Q 上定义自反关系 R，我们规定

$$\sigma\, R\, \tau \quad \Leftrightarrow \quad \text{either } l(\sigma) \geq l(\tau) \text{ or there is } i < l(\sigma) < l(\tau) \text{ with } \sigma_i\, R^*_i\, \tau_i.$$

那么， R 是无更优关系。事实上，通过设定 $f_i(X) = \min(X) \in \omega^*$，我们得到 R^*_i-坏数组 $f_i : [\mathbb{N}]^{\omega} \to Q^*_i$。一个 R-坏的 Q-数组由下式给出

$$X \mapsto \langle f_0(X), \ldots, f_n(X) \rangle \quad \text{for} \quad n = \min(X).$$

对于 σ、$\tau \in Q$，我们规定：当且仅当 $l(\sigma) = l(\tau)$，并且满足 $\sigma_i = \tau_i$或 $\sigma_i \in Q_i$ 且对每个 $i < l(\sigma)$都有 $\tau_i \in \omega^*$ 时， $\sigma \leq' \tau$成立。显然，这给出了 R的一个部分排序。根据前面的推论，我们现在可以考虑一个 $f : [V]^{\omega} \to Q$，它是 $\leq'$-极小的 R-坏数组。正如引言中所述，我们可以将这个数组视为一个映射 $f : B \to Q$，其定义在以 V为基的块 B 上。对于 s、$t \in B$，如果存在一个 $X \in [V]^{\omega}$ 满足 $s \sqsubset X$ 和 $t \sqsubset X^{-}$，则写作 $s \lhd t$。f 是坏的，意味着对于任意 $s \lhd t$， $f(s)\ R\, f(t)$都不成立。我们证明

$$R_i \text{ is a better relation on } Q_i \quad \Leftrightarrow \quad f(s)_i \in \omega^* \text{ for all } s \in B \text{ with } i < l(f(s)).$$

这里， $f(s)_i$指序列 $f(s) \in Q$ 的第 i 项。一旦确立了这种等价关系，便可通过算术概括构造出上述集合 X。我们先假设 R_i 是 Q_i 上的更好关系。为导出矛盾，

我们假设，对于某个满足 $i < l(f(s))$ 的 $s \in B$， $f(s)_i \in Q_i$成立。令 B/s为所有满足以下条件的 $t \in B$ 构成的块： s 中的最大数严格小于 t中的最小数。由 $t \in B/s$ 可得，存在 $r^i \in B$ 满足 $s = r^0 \lhd \ldots \lhd r^n = t$（考虑某个满足 $s \cup t \sqsubset X$ 的 $X \in [V]^\omega$）。由于对所有 $j < n$， $f(r^j)\ R\ f(r^{j+1})$ 必定不成立，我们得到 $l(f(r^j)) < l(f(r^{j+1}))$，并可归纳地得到 $f(r^j)_i \in Q_i$。因此，我们有 $i < l(f(s)) < l(f(t))$，且 $f(t)_i \in Q_i$。然而，数组 $B/s \ni t \mapsto f(t)_i \in Q_i$ 是 R_i- 坏的，这与我们的假设矛盾。对于等价关系的另一个方向，我们假设对所有满足 $i < l(f(s))$ 的 $s \in B$， $f(s)_i \in \omega^*$ 都成立。取 B 中的一个 $r^0 \lhd \ldots \lhd r^i$。如上所述，我们可归纳地得到 $j \leq l(f(r^j))$，从而对所有 $s \in B/r^i$，都有 $i < l(f(s))$。换言之，若 $V' \in [V]^\omega$ 是 B/r^i 的基，则对所有 $X \in [V']^\omega$，都有 $i < l(f(X))$，且 $f(X)_i \in \omega^*$。为导出矛盾，现在我们假设 R_i 不是更好关系。令 $h\colon [W]^\omega \to Q_i$ 为一个 R_i-坏数组。我们可以假设 $W \subseteq V'$。为定义 $g\colon [W]^\omega \to Q$，我们规定有 $l(g(X)) = l(f(X))$，并且

$$g(X)_j = \begin{cases} h(X) & \text{if } j = i, \\ f(X)_j & \text{if } i \neq j < l(g(X)). \end{cases}$$

这就得到一个 R-坏数组 $g <' f$，与极小性相矛盾。 □

3. 从 Π12-理解到极小坏数组

本节中，我们首先证明，辛普森版本的极小坏数组引理可由 Laver [6]提出的另一个版本推出。接着，我们证明，Laver 版本可由 Π^1_2-理解推出。结合定理 2.4，这就完成了引言中定理 1.3 的证明。

到目前为止，我们大多将数组视为定义域为 $[V]^\omega$的连续函数，其中 $V \subseteq \mathbb{N}$是某个无限集合，尽管我们已约定，这些数组由定义在块上的函数表示。换言之，虽然不同的块可以表示同一个连续函数，但此前的大多数讨论并不依赖于代表元的选择。这与下文形成鲜明对比：数组定义其上的块是数据中至关重要的一部分。需要指出的是，以下定义取自 [6], ，其中 $\leqslant$ 写作 $\sqsupseteq$。

定义 3.1. 对于块 B和 C，若满足 $\bigcup B \subseteq \bigcup C$且每个 $t \in B$ 都存在一个 $s \in C$ 使得 $s \sqsubseteq t$，则记作 $B \leqslant C$。若此条件成立且还有 $B \not\subseteq C$，则记作 $B \lessdot C$。给定数组 $f\colon B \to Q$ 和 $g\colon C \to Q$，以及集合 Q 上的偏序 $\leq'$，若满足 $B \leqslant C$，并且对于 $t \in B \cap C$有 $f(t) = g(t)$，对于 $C \ni s \sqsubset t \in B$有 $f(t) <' g(s)$，则记作 $f \leqslant' g$。若还满足 $B \lessdot C$，则记作 $f \lessdot' g$。

显然， $\lessdot$ 在块上是传递的，而且不难推出 $\lessdot'$ 在数组上是_传递的。还可以证明， $B \lessdot D$ 可由 $B \lessdot C \leqslant D$ 推出（但不能由 $B \leqslant C \lessdot D$推出），由此可得数组上的类似结论。

极小坏数组引理（「Laver 版本」）。设集合 Q 上的自反关系 R 具有部分排序 $\leq'$。对于任意 R-坏 Q-数组 f_0（定义为块上的函数），都存在一个 R-坏 Q-数组 $f \leqslant' f_0$，使其不包含任何 R-坏 Q-数组 $g \lessdot' f$。

所给版本确实与 Laver [6], 提出的版本一致，唯一的区别是后者要求 R 是拟序，并使用屏障而非块。为了说明以块表述的版本蕴含以屏障表述的版本，我们回顾一下：在 ATR_0 中可以证明，任意块 B 都包含一个屏障 $B' \subseteq B$（参见 [8]

并比较 [1]，其中给出了在弱得多的理论 WKL_0中得到的相关结果）。给定定义在某个块上的极小坏数组 $f \leq' f_0$，我们便可找到一个定义在屏障上的限制 $f' \leq' f$。根据上述观察，我们得到 $f' \leq' f_0$；而一个坏的 $g \lessdot' f'$将验证 $g \lessdot' f$，这与 f 是极小的这一假设相矛盾。同样，若将 Laver 版本的极小坏数组引理表述为关于屏障而非块的命题，以下命题依然成立。一旦证明 Π^1_2-归纳概括蕴含适用于块的 Laver 版本，所得的循环蕴含关系便可确保适用于块与屏障的版本等价。同理，我们得知，适用于拟序的版本等价于适用于一般自反关系的版本。值得注意的是，基础理论 RCA_0 足以推出以下关于块的结果。我们选择了一个更强的基础理论，以纳入上述与屏障的联系。

命题 3.2 (ATR_0)。Laver 版本的极小坏数组引理蕴含辛普森版本。

证明。给定一个坏的 Q-数组 f_0，Laver 版本给出一个坏的 $f \leq' f_0$，它不含任何坏的 $g \lessdot' f$。根据定义 1.2，可以直接推出 $f \leq' f_0$。为证明辛普森版本成立，我们假设 $g <' f$ 是坏的，并导出一个矛盾。记 $f\colon\ B \to Q$，以及 $g\colon\ C \to Q$，分别表示块 B 和 C，其中 $\bigcup C \subseteq \bigcup B$。需要注意的是，除非每个 $t \in C$ 都有一个满足 $s \sqsubset t$ 的 $s \in B$，否则我们无法立即得到矛盾的 $g \lessdot' f$。对于 $X \subseteq \mathbb{N}$ 和 $s \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$，令 X/s 为 X 中所有大于 s 的每个元素的数所组成的集合。当 $n \in \mathbb{N}/s$ 成立时，我们记作 $s^\frown n = s \cup \{n\}$。现在令

$$B_0 = \{s \in B \,|\, \text{there is } t \in C \text{ with } t \sqsubseteq s \subset \bigcup C\},$$
$$C' = \{t \in C \,|\, \text{there is } s \in B \text{ with } s \sqsubset t\} \cup \{s^\frown n \,|\, s \in B_0 \text{ and } n \in \bigcup C/s\}.$$

显然，C' 是一个块，且具有 $\bigcup C' = \bigcup C$。我们考虑

$$g' : C' \to Q \quad \text{with} \quad g'(t) = \begin{cases} g(t) & \text{when there is } s \in B \text{ with } s \sqsubset t, \\ g(t') & \text{when } t = s^\frown n \text{ with } C \ni t' \sqsubseteq s. \end{cases}$$

注意，g 和 g' 从 $[\bigcup C]^\omega$ 到 Q诱导出相同的连续函数。特别地，g' 是坏的。为了得到所需的矛盾，我们验证 $g' \lessdot' f$。首先注意，我们有 $C' \lessdot B$ 以及 $B \cap C' = \emptyset$。给定 $B \ni s \sqsubset t \in C'$，我们取一个满足 $t \sqsubset X$的集合 $X \in [\bigcup C]^\omega$。通过考察诱导出的连续函数，我们看到 $g <' f$ 蕴含

$$g'(t) = g'(X) = g(X) <' f(X) = f(s),$$

正如定义 3.1 所要求的那样。 □

在本节余下部分，我们将证明，Π^1_2-理解足以完成 R. Fra¨ıss´e [2] 所给出的极小坏数组引理的证明。

定义 3.3。设 B 和 C 是满足 $C \leq B$的块。我们定义

$$E(C, B, n) = \{t \in B \,|\, t \subseteq [0, n] \cup \bigcup C \text{ but } t \not\subseteq \bigcup C\} \quad \text{for } n \in \mathbb{N},$$
$$M(C, B) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{there is } t \in B \text{ with } t \subseteq \bigcup C \text{ but } t \notin C \text{ and } \max t = n\}.$$

如果有 $M(C, B) \neq \emptyset$，或者等价地有 $C \lessdot B$，我们记 $m(C, B) = \min M(C, B)$。

下面将用到以下基本构造。需要指出的是，我们有 $C \cap E(C,B,n) = \emptyset$，因为 $t \in E(C,B,n)$ 蕴含 $t \not\subseteq \bigcup C$，从而 $t \notin C$。所给出的证明与 Fra¨ıss´e [2]，的证明非常接近，不同之处在于我们使用块而不是屏障。我们将其列出，以使本文自成一体。

引理 3.4 (RCA_0)。假设 $C \lessdot B$ 是块，并且我们有 $n \leq m(C,B)$。那么 $D := C \cup E(C,B,n)$ 是一个块，且满足 $C \trianglelefteq D \lessdot B$ 和 $m(C,B) = m(D,B)$。

证明。我们先证明 D 是一个块。显然，$\bigcup D \supseteq \bigcup C$ 是无限的。为导出矛盾，我们假设存在 $t \sqsubset s$，满足 $s,t \in D$。那么 s 和 t 不可能同时来自 C，也不可能同时来自 $E(C,B,n) \subseteq B$。对于 $t \in E(C,B,n)$，我们会得到 $s \supset t \not\subseteq \bigcup C$，从而得到 $s \notin C$。在剩下的情形中，我们有 $t \in C$和 $s \in E(C,B,n)$。由 $C \lessdot B$，我们便能找到一个 $s' \in B$，满足 $s' \sqsubseteq t \sqsubset s \in B$，这与 B 是一个块的假设相矛盾。因此，D 是一个 $\sqsubseteq$-反链。现在考虑一个无限集 $X \subseteq \bigcup D$。我们要证明 X 在 D中有一个初始段。鉴于 $X \subseteq \bigcup B$，我们可以选取一个 $t \in B$，使 $t \sqsubset X$成立。首先假设我们有 $t \not\subseteq \bigcup C$。根据 $E(C,B,n)$ 的定义，$\bigcup D \setminus \bigcup C$的所有元素都不大于 n。因此我们有 $t \subseteq [0,n] \cup \bigcup C$，从而得到 $t \in E(C,B,n) \subseteq D$。现在假设我们有 $t \subseteq \bigcup C$。如果有 $t \in C \subseteq D$，那么结论成立。因此我们假设 $t \notin C$。后者蕴含 $n \leq m(C,B) \leq$ 的最大值为 t。由 $\bigcup D \subseteq [0,n] \cup \bigcup C$，我们得到 $X \subseteq t \cup \bigcup C \subseteq \bigcup C$。由于 C是一个块，我们可以找到一个 $s \in C \subseteq D$，满足 $s \sqsubset X$。

显然，$C \lessdot B$蕴含 $C \trianglelefteq D \lessdot B$。为完成证明，我们证明 $M(C,B) = M(D,B)$。对于满足 $t \in B \setminus C$但不满足 $t \subseteq \bigcup C$的最大 $t \in M(C,B)$，我们得到 $t \notin E(C,B,n)$，进而得到 $t \notin D$但不满足 $t \subseteq \bigcup D$，由此可得最大 $t \in M(D,B)$。反过来，考虑满足 $s \in B \setminus D$ 但不满足 $s \subseteq \bigcup D \subseteq [0,n] \cup \bigcup C$的最大 $s \in M(D,B)$。由于 $s \not\subseteq \bigcup C$会推出 $s \in E(C,B,n) \subseteq D$，因此必有 $s \subseteq \bigcup C$。又由于我们还知道 $s \notin D \supseteq C$，故可得最大 $s \in M(C,B)$。□

我们以如下结果为本文作结。结合定理 2.4 和命题 3.2，它给出一系列循环蕴含，从而确立定理 1.3。

定理 3.5（RCA_0）。 Π^1_2-概括公理蕴含 Laver 版本的极小坏数组引理。

证明。回顾一下，Π^1_2-概括公理等价于如下原理：自然数集的任意子集都包含在某个可数编码的 β_2-模型中（参见 [19] 的定理 VII.6.9 和 VII.7.4）。这里，β_2-模型是指一个 ω-模型，其中 Π^1_2-语句具有绝对性。借助 β_2-模型，将 Fra¨ıss´e [2, 7. 3.5] 给出的极小坏数组引理证明形式化是很直接的。我们提供详细证明，既是为了方便读者，也是为了验证该论证适用于一般自反关系，而不只是拟序。

对于集合 Q 上自反二元关系 R 的部分排序 $\leq'$，我们考虑一个 R-坏数组 $f_0 : B_0 \to Q$，其定义域是一个块。我们选取一个包含 f_0 的 β_2-模型 $\mathcal{M}$。断言给定数组 g 是极小的 R-坏数组，其复杂度为 Π^1_2，因为要断言某个潜在 $f \lessdot' g$ 的定义域是一个块，需要用到一个 Π^1_1-公式。假设极小坏数组引理不成立，那么任何满足 $g \leq' f_0$ 的 R-坏数组 $g \in \mathcal{M}$，都将存在一个满足 $f \in \mathcal{M}$ 的 R-坏数组 $f \lessdot' g$。我们打算构造一个满足 $f_{i+1} \lessdot' f_i$ 的 R-坏数组序列 $f_i \leq' f_0$，并使其满足以下附加性质；记 B_i 为 f_i 的定义域所在的块：

(i) 对任意 $n \in \bigcup B_i$ with $n \leq m(B_{i+1}, B_i)$，我们都有 $n \in \bigcup B_{i+1}$；(ii) 对任意 R- 坏的 g：对于满足 $g \lessdot' f_i$ 的 $C \to Q$，我们有 $m(B_{i+1}, B_i) \leq m(C, B_i)$。

根据与上文相同的考量， f_i 与 f_{i+1} 之间所指示的关系具有 Π^1_2 的复杂度。现在，Π^1_2-可定义性蕴含 Σ^1_2-依赖选择，但不蕴含Π^1_2-选择（见 [19]中的定理 VII.6.9 和注 VII.6.3 ）。我们很快将证明，任意 $f_i \in \mathcal{M}$ 都具有一个满足给定性质的 $f_{i+1} \in \mathcal{M}$ 。一旦完成这一点，我们就可以在 β_2模型 $\mathcal{M}$ 中对其求值，从而降低 Π^1_2-条件的量词复杂度。然后， Σ^1_2-依赖选择足以得到所需的数组序列 f_i。为了更加经济，可以在编码模型 $\mathcal{M}$ 中选取表示合适 f_i 的最小指标。

正如承诺的那样，现在我们证明，每个 R-坏 $f_i \leq' f_0$ 于 $\mathcal{M}$ 中都存在一个具有上述性质的 $f_{i+1} \in \mathcal{M}$。我们已经注意到， $\mathcal{M}$ 包含一个 R-坏数组 $f\colon\ B \to Q$ ，其中有 $f \lessdot' f_i$；至少在不存在低于 f_0 的极小 R-坏数组时是如此。我们选取这样一个满足 $m(B, B_i)$ 尽可能小的 f ，也就是说， $\mathcal{M}$ 不包含这样的 R-坏数组 $g\colon\ C \to Q$ ，其中有 $g \lessdot' f_i$ ，且 $m(C, B_i) < m(B, B_i)$。根据 Π^1_2-绝对性，这个极小性条件也适用于不属于 $\mathcal{M}$ 的 g 。因此， f 满足 (ii)，但可能不满足 (i)。为了满足后者，我们修改 f。难点在于必须保留 (ii)。我们将看到，对于 $f_{i+1}\colon\ B_{i+1} \to Q$ ，这一点成立，其中有

$$B_{i+1} = B \cup E(B, B_i, m(B, B_i)),$$
$$f_{i+1}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if } t \in B, \\ f_i(t) & \text{if } t \in E(B, B_i, m(B, B_i)). \end{cases}$$

首先注意到，根据绝对性， f_{i+1} 属于 $\mathcal{M}$ ，因为它可由 f 和 f_i算术定义。根据前一引理，B_{i+1} 是一个具有 $B \leq B_{i+1} \lessdot B_i$和 m 的块：$= m(B_{i+1}, B_i) = m(B, B_i)$。由于这一最后等式，(ii)仍然成立。为说明我们得到 $f_{i+1} \lessdot' f_i$，注意到 $B_i \ni s \sqsubset t \in B_{i+1}$ 迫使 $t \in B$成立，因为我们有 $E(B, B_i, m) \subseteq B_i$。剩下要证明的是， f_{i+1}是 R-坏的，并且满足(i)。

为证明 f_{i+1} 是 R-坏的，我们通过矛盾进行论证。假设我们有s、 $t \in B_{i+1}$，满足 $s \lhd t$和 $f_{i+1}(s)\, R\, f_{i+1}(t)$。由于 f和 f_i是坏的，我们不可能有 s、 $t \in B$或 s、 $t \in B_i$。对于另外两种情形，我们先假设 $s \in B$且 $t \in E(B, B_i, m) \subseteq B_i$。鉴于我们有 $B \lessdot B_i$且 $B \cap E(B, B_i, m) = \emptyset$，我们找到一个 $s' \in B_i$ ，满足 $s' \sqsubset s$。根据 $m = m(B, B_i)$的定义，我们可以得出 $m \leq \max s'$ 。由 $t \subseteq [0, m] \cup \bigcup B$和 $s' \subseteq s \subseteq \bigcup B$，我们现在得到 $t \subseteq \bigcup B$，从而有 $t \notin E(B, B_i, m)$，这与我们的假设相矛盾。现在假设我们有$s \in E(B, B_i, m) \subseteq B_i$和 $t \in B$。我们找到一个 $t' \in B_i$，满足 $t' \sqsubseteq t$，因而得到 $s \lhd t'$。鉴于 $f \lessdot' f_i$，我们得到

$$f_i(s) = f_{i+1}(s)\, R\, f_{i+1}(t) = f(t) \leq' f_i(t').$$

关键在于，根据我们对不必传递的关系的部分排序的定义，我们得到 $f_i(s)\, R\, f_i(t')$ f_i 是坏的。因此现在产生了矛盾。

为了证明 (i)，我们考虑一个带有 $n \leq m = m(B_{i+1}, B_i)$ 的 $n \in \bigcup B_i$。由于 $B \subseteq B_{i+1}$，除非有 $n \notin \bigcup B$，否则我们就完成了证明。在后一种情况下，我们可以找到一个带有 $n \in t \subseteq [0, m] \cup \bigcup B$ 的 $t \in B_i$。因此我们有 $t \in E(B, B_i, m) \subseteq B_{i+1}$，特别是有 $n \in \bigcup B_{i+1}$，如所需。

在假设不存在低于 f_0 的极小 R-坏数组的情况下，我们已经证明存在一个 R-坏数组序列 $f_{i+1} \lessdot' f_i \leq' f_0$ ，该序列满足上述 (i) 和 (ii)。借助这个序列，我们现在将证明，毕竟存在一个低于 f_0 的极小 R-坏数组。首先证明函数 p 的一些性质： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ，其中 $p(i)\colon = m(B_{i+1}, B_i)$。

断言。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $|p^{-1}(\{n\})| \leq 2^n$。

断言的证明。由于只有 2^n 个满足 $\max t = n$ 的集合 $t \subseteq [0,n]$，我们只需证明同一个 t 不可能同时见证 $p(i) = n$ 和 $p(j) = n$ 对于 $i < j$。假设 $p(i) = n$ 由满足 $t \subseteq \bigcup B_{i+1}$ 但不满足 $t \notin B_{i+1}$ 的 $t \in B_i$ 见证。由于 B_{i+1} 是一个块，我们可以找到一个与 t $\sqsubset$-可比较的 $t' \in B_{i+1}$。鉴于 $B_{i+1} \preccurlyeq' B_i$，我们可以取一个满足 $s \sqsubseteq t'$ 的 $s \in B_i$。这迫使 $s = t$，因此得到 $t \sqsubset t'$。现在，如果 t 确实见证了 $p(j) = n$，我们将得到 $t \in B_j$。由于 $B_j \preceq' B_{i+1}$，我们可以选取一个满足 $s' \sqsubseteq t \sqsubset t' \in B_{i+1}$ 的 $s' \in B_{i+1}$，这与 B_{i+1} 是一个块这一事实相矛盾。$\diamond$

我们还需要以下内容。

断言。函数 p 是单调不减的。

断言的证明。令 $p(i+1) =$为最大值 s，满足 $s \in B_{i+1} \backslash B_{i+2}$ 和 $s \subseteq \bigcup B_{i+2}$。根据 $B_{i+1} \preccurlyeq B_i$，我们找到一个 $t \in B_i$，使得 $t \sqsubseteq s$。我们分两种情况说明如何得出结论。首先假设 $t \sqsubset s$。于是有 $t \subseteq s \subseteq \bigcup B_{i+1}$，但 $t \notin B_{i+1}$，从而得到最大值 $t \in M(B_{i+1}, B_i)$，因此

$$p(i) = m(B_{i+1}, B_i) \leq \max t < \max s = p(i+1).$$

现在假设我们有 $t = s$。由此得到 $t \in B_i \backslash B_{i+2}$ 和 $t \subseteq \bigcup B_{i+2}$，从而获得 $\max t \in M(B_{i+2}, B_i)$，因此

$$p(i) = m(B_{i+1}, B_i) \leq m(B_{i+2}, B_i) \leq \max t \leq \max s = p(i+1),$$

其中第一个不等式由上面的 (ii) 得出。 $\diamond$

令 H 为 p的值域。上面的第一个断言意味着 H 是无限的。利用第二个断言，我们证明对于任意 $i \in \mathbb{N}$都有 $H \subseteq \bigcup B_i$。鉴于 $B_{i+1} \preccurlyeq B_i$，只需证明对于 $i \geq j$，$p(j) \in H$ 包含于 $\bigcup B_i$ 中。首先注意到，对于某个 $t \in B_j$，有 $p(j) = m(B_{j+1}, B_j) = \max t$，从而得到 $p(j) \in t \subseteq \bigcup B_j$。归纳地，假设 $p(j) \in \bigcup B_i$ 且 $i \geq j$。这里，后者确保我们有 $p(j) \leq p(i) = m(B_{i+1}, B_i)$，因此根据上面的 (i) 得到 $p(j) \in \bigcup B_{i+1}$。现在考虑集合

$$C = \{t \in [H]^{<\omega} \mid \text{there is } i \in \mathbb{N} \text{ with } t \in B_j \text{ for all } j \geq i\}.$$

由于所有的 B_j 都是块，因此 C 显然是一个 $\sqsubset$-反链。为证明它是一个块，我们考虑任意集合 $X \in [H]^\omega$。由 $H \subseteq \bigcup B_i$，我们可以选取一个 $s_i \in B_i$，使得对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $s_i \sqsubset X$。由于我们有 $f_{i+1} \preccurlyeq' f_i$，可得 $s_{i+1} \sqsubseteq s_i$ 和 $f_{i+1}(s_{i+1}) \leq' f_i(s_i)$，其中后一个等式当且仅当 $s_i = s_{i+1}$ 时成立。鉴于 $\leq'$ 是良基的，$f_i(s_i)$ 的值确实必须稳定下来。因此，我们找到一个 $i \in \mathbb{N}$，使得 $j \geq i$ 蕴含 $s_i = s_j \in B_j$。这就得到 $s_i \in C$，从而可以得出 C 是一个块。

现在考虑 $g\colon\ C \to Q$，其中对于 $t \in B_i \cap C$ 有 $g(t) = f_i(t)$；根据上一段，这一定义是良好的。直接可以证明 g 是 R-坏的，并且对于任意 $i \in \mathbb{N}$ 我们都有 $g \leq' f_i$（事实上我们得到 $g \prec' f_i$）。为完成证明，我们证明 g 是极小的。为导出矛盾，假设 $h\colon\ D \to Q$ 是 R-坏的，且 $h \prec' g$。根据定义 3.1 之后的段落，对于任意 $i \in \mathbb{N}$，我们得到 $h \prec' f_i$。记 $m(D,C) = \max t$，其中 $t \in C$ 且 $t \subseteq \bigcup D$，但 $t \notin D$。当 $j \in \mathbb{N}$ 足够大时，我们同时有 $t \in B_j$ 和 $m(D,C) < p(j)$。于是得到

$$m(D, B_j) \leq \max t = m(D, C) < p(j) = m(B_{j+1}, B_j),$$

这与上述性质 (ii) 矛盾。 $\square$

References

1. Peter Cholak、Alberto Marcone 和 Reed Solomon, *Reverse mathematics and the equivalence of definitions for well and better quasi-orders* **69** 2004 ,

《符号逻辑杂志》（），第 3 期，683 712–。2. Roland Fra¨ıss´e, *Theory of relations*，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1986年。3. Harvey Friedman,
Some systems of second order arithmetic and their use，《国际数学家大会论文集》，温哥华 1974（Ralph Duncan James 编），第 1 卷，加拿大数学大会，1975年，第 235–242 页。4. Joseph Kruskal, *The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept*，《组合理论杂志》A辑 13（1972年），第 3 期，297–305。5. Richard Laver,

——— *On Fraïssé's order type conjecture* **93** 1971 1, ,
89 111

《数学年刊》（），第 – 期。6. , *Better-quasi-orderings and a class of trees*，《基础与组合学研究》（Gian-Carlo Rota 编），《数学进展与补充研究》第 1 卷，学术出版社，1978年，第 31–48 页。7. Alberto Marcone, *Foundations of BQO theory*，《美国数学学会汇刊》345（1994年），第 2 期，641–660。8. , *On the logical strength of Nash-Williams' theorem on transfinite sequences*，《逻辑学：从基础到应用》（W. Hodges、M. Hyland、C. Steinhorn 和 J. Truss 编），牛津大学出版社，~~1996年~~，第 327–351 页。9. ,
WQO and BQO theory in subsystems of second order arithmetic，《逆向数学 2001》（Stephen Simpson 编），《逻辑讲义》第 21 卷，剑桥大学出版社，2005年，第 303–330 页。10. Carl Mummert 和 Stephen Simpson, *Reverse Mathematics and Π^1_2 Comprehension*，《符号逻辑通报》11（2005年），第 4 期，526–533。11. Crispin St. J. A. Nash-Williams,
On well-quasi-ordering infinite trees，《剑桥哲学学会数学学报》61（1965年），697–720。12. ,
On better-quasi-ordering transfinite sequences，《剑桥哲学学会数学学报》64（1968年），273–290。13. Maurice Pouzet, *Graphs and posets with no infinite independent set*，《集合与逻辑中的有限与无限组合学》（N. Sauer、R. Woodrow 和 B. Sands 编），北约高级研究所科学系列 C辑，第 411 卷，Springer，1993年，第 313–335 页。14. Richard Rado,
Partial well-ordering of sets of vectors，Mathematika 1（1954年），89–95。15. Michael Rathjen, *The art of ordinal analysis*，《国际数学家大会论文集》，马德里 2006（Marta Sanz-Sol´e、Javier Soria、Juan Luis Varona 和 Joan Verdera 编），第 2 卷，欧洲数学学会，2006年，第 45–69 页。16. Neil Robertson 和 Paul D. Seymour,
Graph minors. XX. Wagner's conjecture，《组合理论杂志》B辑 92（2004年），第 2 期，325–357。17. Saharon Shelah, *Better quasi-orders for uncountable cardinals*，《以色列数学杂志》42（1982年），第 3 期，177–226。18. Stephen Simpson, *Bqo theory and Fraïssé's conjecture*，R. Mansfield 和 G. Weitkamp 所著《递归集合论的递归方面》一书中的章节，牛津大学出版社，1985年，第 124–138 页。19. Stephen G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*，《逻辑视角》，剑桥大学出版社，2009年。

Anton Freund, University of Würzburg, Institute of Mathematics, Emil-Fischer-Strasse 40, 97074 Würzburg, Germany*Email address*: anton.freund@uni-wuerzburg.de

Fedor Pakhomov and Giovanni Soldà, Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281 S8, 9000 Ghent, Belgium
Email address: fedor.pakhomov@ugent.be, giovanni.a.solda@gmail.com