arXiv:2304.00281v1 [physics.class-ph] 1 Apr 2023

负反射的奇特案例

B. Meirbekova[1,2],L. Morini[3],M. Brun[4],和 G. Carta[4]

[1]哈萨克斯坦共和国教育和科学部数学与数学建模研究所，普希金街 125 号，050010 阿拉木图，哈萨克斯坦[2]阿斯塔纳信息技术大学计算机工程系，永久国家大道 55/11 号，010000 阿斯塔纳，哈萨克斯坦[3]卡迪夫大学工程学院，帕雷德街，卡迪夫 CF24 3AA，英国[4]卡利亚里大学机械、化学与材料工程系，卡利亚里，09123，意大利

摘要

本文首次展示了简单机械结构中的负反射 现象。该结构是嵌入线性弹性基体中的固定夹杂物光栅。针对面外剪切波的数值分析表明，存在某些频率，使大部分入射能量以负角度反射。该效应关于一条直线呈对称分布，而这条直线不平行于光栅结构的法线方向。针对不同入射角的模拟以及能量通量计算表明，在广泛的载荷条件下都能实现负反射 。

关键词：负反射、高斯光束、斯涅尔-笛卡尔定律、弹性超材料、能量通量。

1 引言

当入射波以斜入射方式照射在两种连续介质之间的表面上时，会产生折射（或透射）波和反射波。归功于斯涅尔和笛卡尔的定律[1]，确定了折射和反射条件[3]。首先，透射波（ω_{T}）和反射波（ω_{R}）的弧频率必须等于入射单色波的角频率 ω_{I} 。其次，透射波（$\mathbf{k}_{\mathrm{T}}$）和反射波（$\mathbf{k}_{\mathrm{R}}$）的波矢必须位于由入射波矢 $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$ 和表面法线$\mathbf{n}$所确定的入射面内，且三个波矢在入射面内沿表面切向方向$\mathbf{t}$ 的分量必须相同，即$\mathbf{k}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{k}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{k}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{t}$ （见图1）。

由此得到了斯涅尔-笛卡尔定律的经典形式：

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{I}}}{c_{\mathrm{I}}} = \frac{\sin\theta_{\mathrm{T}}}{c_{\mathrm{T}}}\,, \qquad \theta_{\mathrm{I}} = \theta_{\mathrm{R}}\,, \tag{1}$$

其中， θ_{I}、 θ_{T} 和 θ_{R} 分别是相对于表面法线 $\mathbf{n}$测量的入射角、透射角和反射角，而 c_{I} 和 c_{T} 是由该表面分隔的两种介质的相速度。因此，表示入射波和透射波的光线位于相对于该直线的两侧

[1]关于斯涅尔-笛卡尔定律历史起源的研究见 [1, 2]。其中记述了古希腊的托勒密、十一世纪的伊本·海赛姆，以及十四世纪的卡迈勒丁·法里西所作的贡献。早在斯涅尔和笛卡尔之前二十年，托马斯·哈里奥特和开普勒就已知晓折射定律。

该直线垂直于入射点处的表面。此外，反射波的方向相对于垂直于表面的直线呈镜像，即角度 θ_{R} 为正。

通过改变入射角（最大至临界角）和相速度，可以调节透射能量和反射能量的大小，以及相应波的相位。不过， θ_{T} 和 θ_{R} 始终遵循斯涅尔-笛卡尔定律 (1)。

在弹性力学的矢量问题或各向异性介质中，入射角 θ_{I} 与反射角 θ_{R} 并不相等。前一种情况下，弹性问题的张量性质会导致每个入射波产生多个纵向和横向偏振的透射波和反射波[4]；而当入射波与反射波的偏振不同时，角度 θ_{I} 和 θ_{R} 也不同。此外，各向异性会使透射波和反射波的波矢发生偏转[5, 3, 6]。在上述两种情况下，透射角和反射角都受到表面连续性条件的约束。

如果将两种介质之间的表面替换为具有有限厚度的直线均匀界面，那么每条射线穿过界面时都会发生偏移，而界面内的多重反射会产生额外偏移的透射波和反射波。尽管如此，反射角和透射角仍遵循上述定律。当界面为由均匀介质构成的层状结构时，也会观察到相同的定性效应[7, 8]。

我们强调，在此前讨论的所有情形中，透射角和反射角的正负号都无法改变，始终为正。

Veselago[9],在电磁学中提出了获得负折射角的可能性，并指出，当电容率和磁导率均为负时，折射率也为负。这一设想后来被 Pendry[10] 用于提出首个基于负折射的完美透镜模型。

通过设计微结构界面，人们实现了负折射率材料的实际应用，使得有效负折射能够作为均匀化过程的结果实现[11]。不同领域已提出多种可产生负折射的模型 [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]。

虽然负折射问题已得到解决，但负反射是否存在仍是一个尚未解决的问题。本文展示了在一个简单的力学系统中可以实现负反射角。我们研究了在均匀弹性介质中传播的面外剪切波，该介质包含一个由固定孔洞重复阵列构成的界面，并通过数值计算证明了负反射的存在。

2 模型描述

2.1 控制方程

我们研究时间谐波面外剪切波透过由固定孔洞方形分布构成的光栅界面的传播。位移矢量表示为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中， $u(\mathbf{x})$ 是面外分量，而 $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}}$ 表示面内位置向量。为简化符号，未标出对角频率 ω 的依赖关系。

对于线性弹性、各向同性且均匀的介质，面外位移 u 满足经典亥姆霍兹方程

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \beta^2 u(\mathbf{x}) = 0\,, \tag{3}$$

其中， $\beta = \omega\sqrt{\rho/\mu}$ 是频率参数， ρ 是质量密度， μ 是剪切模量， Δ 是拉普拉斯算子。

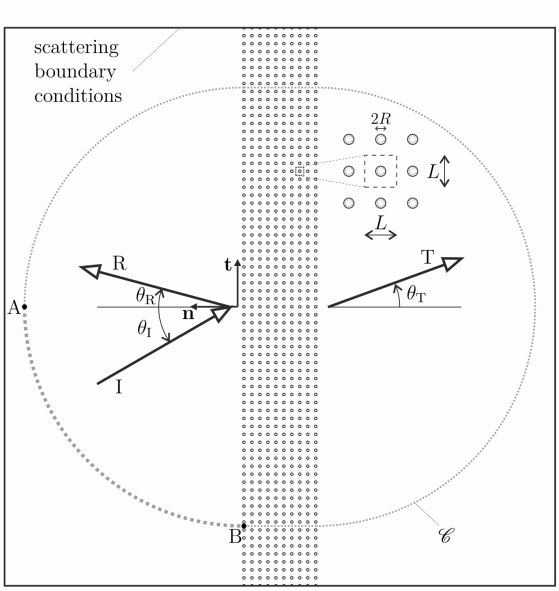

图1：机械模型。界面由方形分布的固定圆形孔洞构成，半径为 $R = 5$ 毫米。方形晶胞的边长为 $L = 1$ 米。图中标出了相应波的入射角 θ_{I}、反射角θ_{R} 和透射角 θ_{T} 。灰色虚线表示用于评估能量通量的轮廓线。

如图1所示，界面由规则方形排列的固定孔洞构成。每个孔洞均为圆形，半径为 $R = 5$ 毫米；孔洞中心的位置定义为

$$\mathbf{Y}(h_1, h_2) = h_1\mathbf{a}^{(1)} + h_2\mathbf{a}^{(2)}\,, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{a}^{(1)} = (L\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{a}^{(2)} = (0\ \ L)^{\mathrm{T}}$ 为晶格矢量，$L = 1$ 米。此外，$(h_1,\ h_2)^T$ 是一个多重指标向量[19],，其中 $h_1 = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 9$ 且 $h_2 \in \mathbb{Z}$。施加狄利克雷条件

$$u(Y_1 + R\cos\theta, Y_2 + R\sin\theta) = 0\,, \qquad 0 \le \theta < 2\pi\,, \tag{5}$$

于孔洞边界上。

2.2 透射问题

为了展示负反射，我们采用一个入射高斯波束[20] ，其以入射角 θ_{I} 传播，表示为

$$u_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = U\sqrt{\frac{w_0}{w(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})}}\mathrm{Exp}\left[\frac{-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2}{w^2(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})} - \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathrm{i}\,\beta\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2}{2R(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})} + \mathrm{i}\frac{\eta(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x})}{2}\right]. \tag{6}$$

在式（6）中，$\mathbf{m} = (\cos\theta_{\mathrm{I}}\ \sin\ \theta_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}$和 $\mathbf{p} = (-\sin\ \theta_{\mathrm{I}}\cos\ \theta_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}$ 分别表示传播方向及其正交方向，而 $\mathbf{k} = \beta\mathbf{m}$ 为波矢；此外，固定参数 $w_0 = 5$ 米和$x_0 = \beta w_0^2/2$后，可得:

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{x_0}\right)^2}\,, \qquad R(z) = z\left(1 + \frac{x_0^2}{z^2}\right)\,,$$
$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{x_0}\right)\,. \tag{7}$$

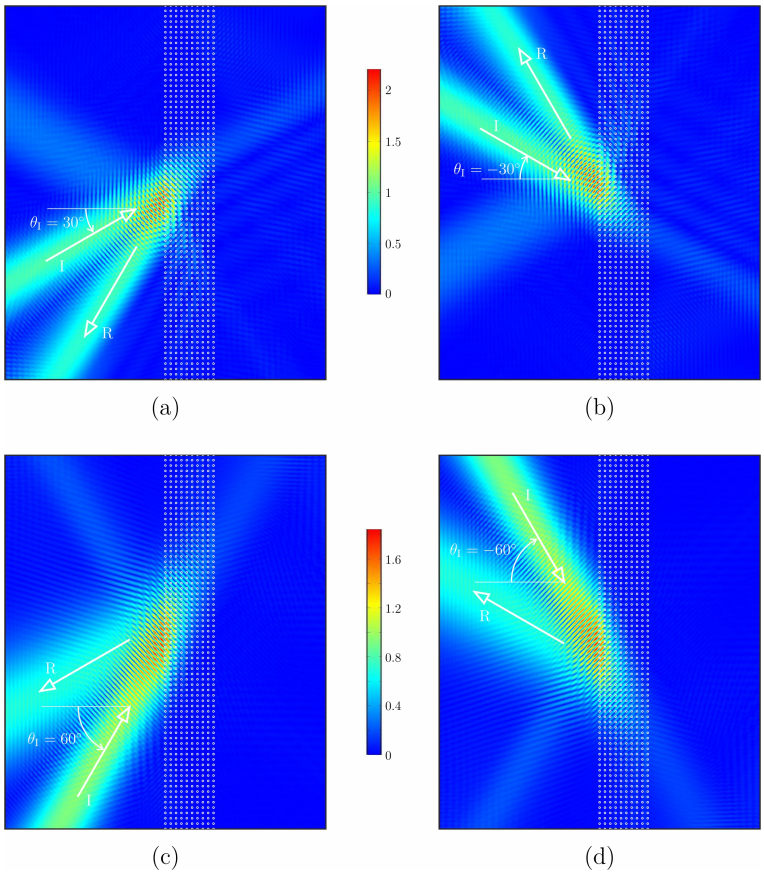

图 2：负反射。高斯光束以角度 (a) $\theta_{\mathrm{I}} = 30°$、(b) $\theta_{\mathrm{I}} = -30°$、(c) $\theta_{\mathrm{I}} = 60°$ 和 (d) $\theta_{\mathrm{I}} = -60°$ 入射时的位移振幅 $|u|$（单位：毫米）。所示结果对应的频率参数为 $\beta = 0.75\ \mathrm{m}^{-1}$。

此外， $U = 1$ 毫米定义了施加位移的振幅。

通过在*Comsol Multiphysics*（版本 5.6）中构建有限元模型，求解透射问题。模型采用包含 70×10 个孔的有限域，并在孔的边界上施加固定条件。入射场 u_{I} 由式（6）给出的高斯光束表示；通过计算确定散射场 u_{S} ，从而得到总场 $u = u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{S}}$。在模拟中，有限元矩形域的外部边缘采用无反射散射边界条件（另见图1）。

3 数值结果

3.1 呈现负反射的波形

图2展示了总位移场 $|u|$ 的振幅。结果清楚地证明了负反射的存在。

通过参数 β调节频率，可以检测到一束反射波和一束透射波，其 $\theta_{\mathrm{R}} = \theta_{\mathrm{T}} = \theta_{\mathrm{I}}$；连续介质理论预测了这些波，并且它们在图2中表现为两束振幅较小的波束。不同频率下还会出现其他效应，包括向多个方向散射、波束因界面而偏移、沿界面传播以及负折射。这些现象可在视频《负反射》中看到。

在对应于 $\beta = 0.75\ \mathrm{m}^{-1}$ （图 2）和 $\beta = 1.47\mathrm{m}^{-1}$ 的两个频率附近，会激发出另一种反射波束，其散射能量占主导；这就是与负反射相关的波束。在这种情况下，显然入射高斯波束的大部分能量都会被反射，反射波局限在一个波束内，该波束以反射角 θ_{R} 反向传播，其符号与斯涅尔-笛卡尔定律预测的相反。

这种效应似乎具有互易性：当入射角为 $\theta_{\mathrm{I}} = 30°$ 时，反射角为 $\theta_{\mathrm{R}} = -60°$ （见图 2a）；而当入射角为 $\theta_{\mathrm{I}} = 60°$时，反射角为 $\theta_{\mathrm{R}} = -30°$ （见图 2c）。

由于模型具有对称性，对于负入射角 $\theta_{\mathrm{I}} = -30°$ （图 2b）和 $\theta_{\mathrm{I}} = -60°$ （图 2d），也会出现负反射现象。

在发生负反射时，可以看出，分隔入射波和反射波的角平分线并未与界面的法线方向对齐，而是沿着倾斜 $45°$ 的方向，这是由界面的内部微结构造成的。图3进一步考察了这一现象，其中考虑了一组入射波，其角度分别为 $\theta_{\mathrm{I}} = 5°$、 $10°$、.....、 $45°$。对于所有考察的角度 θ_{I}，负反射均沿同一条角平分线发生，该角平分线位于 $45°$。此外还发现，最大反射出现在不同的频率下：图3所示的频率参数 β 从 $\theta_{\mathrm{I}} = 5°$ 时的 $\beta = 0.92\ \mathrm{m}^{-1}$ 降至 $\theta_{\mathrm{I}} = 45°$ 时的 $\beta = 0.71\ \mathrm{m}^{-1}$ 。

3.2 能量通量

为了定量衡量负反射现象，我们展示了闭合轮廓 $\mathcal{C}$ 上的能量通量图；该轮廓在图1中以灰色虚线标出。轮廓包围着 55 排孔，由两个半圆和连接这两个半圆、穿过界面的两条直线段组成。

对一个周期 $T = 2\pi/\omega$取平均后的通量为 [21, 22]

$$\phi = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sigma\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,\dot{u}^{*}\right] = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial u}{\partial n}u^{*}\right], \tag{8}$$

其中， σ 为柯西应力张量，$\mathbf{n}$ 为曲线 $\mathcal{C}$ 的内法向量，而 * 表示复共轭。

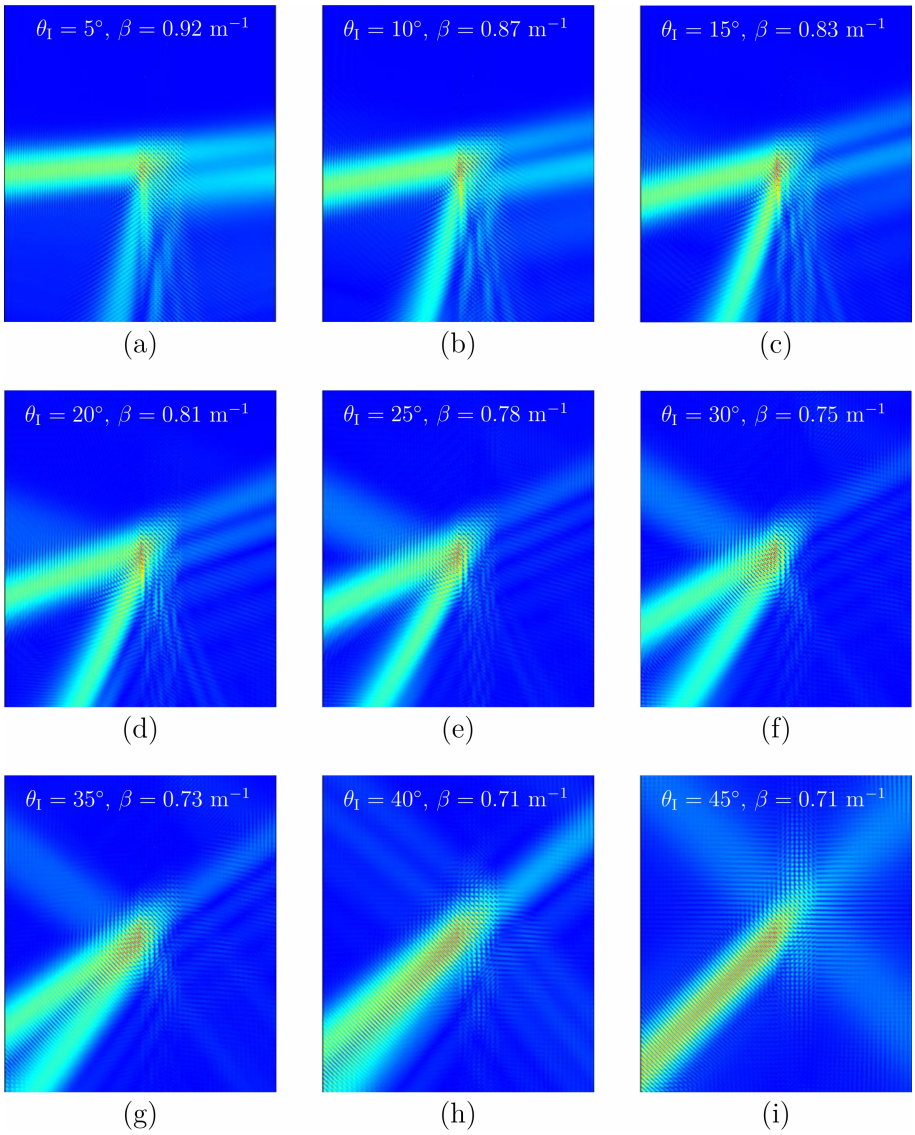

图3：不同入射角 θ_{I}、 $0° \leq \theta_{\mathrm{I}} \leq 45°$ 条件下，以及频率参数 β取不同值时总位移场的振幅。

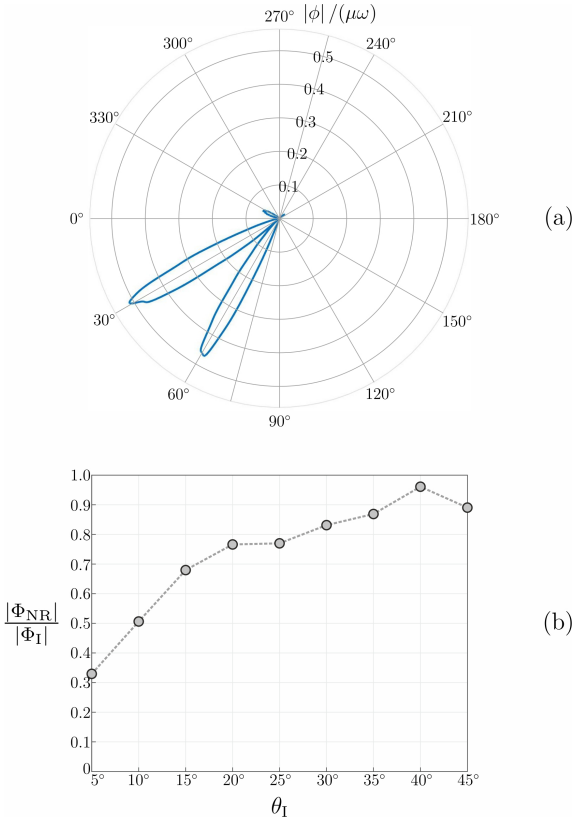

图 4：能量通量。(a) $\theta_{\mathrm{I}} = 30°$ 的归一化振幅 $|\phi|/(\mu\omega)$（单位：m^2）。(b) 不同入射角 θ_{I} 下负反射波束的相对总通量振幅 $|\Phi_{\mathrm{NR}}|/|\Phi_{\mathrm{I}}|$。

图4a所示的轮廓线 $\mathcal{C}$的两个半圆上通量振幅 $|\phi|$ 的变化表明，位于 $\theta_{\mathrm{I}} = 30^\circ$ 的入射波束被反射并向三个不同方向传播。显然，与正反射波束和正透射波束相比，负反射波束的能量占比显著更高，这证实了该频率下发生了负反射现象。

图4b给出了负反射波束的总通量 $|\Phi|_{\mathrm{NR}}$ 与入射波束的总通量 $|\Phi|_{\mathrm{I}}$ 之比。式（8）中的通量 ϕ 可拆分为入射贡献和散射贡献，如下所示：

$$\begin{aligned}\phi =& \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial(u_{\mathrm{I}}+u_{\mathrm{S}})}{\partial n}(u_{\mathrm{I}}^*+u_{\mathrm{S}}^*)\right]\\ =& \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial u_{\mathrm{I}}}{\partial n}u_{\mathrm{I}}^*+\frac{\partial u_{\mathrm{I}}}{\partial n}u_{\mathrm{S}}^*+\frac{\partial u_{\mathrm{S}}}{\partial n}u_{\mathrm{I}}^*+\frac{\partial u_{\mathrm{S}}}{\partial n}u_{\mathrm{S}}^*\right]\\ =& \phi_{\mathrm{I}}+\phi_{\mathrm{M}}+\phi_{\mathrm{S}}\,,\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\phi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial u_{\mathrm{I}}}{\partial n}u_{\mathrm{I}}^*\right] \tag{10}$$

为入射通量，

$$\phi_{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial u_{\mathrm{S}}}{\partial n}u_{\mathrm{S}}^*\right] \tag{11}$$

为散射通量，

$$\phi_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{2}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial u_{\mathrm{I}}}{\partial n}u_{\mathrm{S}}^*+\frac{\partial u_{\mathrm{S}}}{\partial n}u_{\mathrm{I}}^*\right] \tag{12}$$

为互通量。

总入射通量为

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \int_A^B \phi_{\mathrm{I}}\,dl\,, \tag{13}$$

其中，积分在图1所示轮廓线 $\mathcal{C}$ 上，介于点 A 和 B 之间进行。我们将总负反射通量定义为

$$\Phi_{\mathrm{NR}} = \int_A^B \phi_{\mathrm{S}}\,dl\,. \tag{14}$$

图4b所示结果表明，对于相对于 45°处角平分线 35° 范围内的入射角，负反射能量的相对值超过50%；当 $\theta_{\mathrm{I}} = 40^\circ$时，该值达到最高，超过95%。

总之，我们通过一系列数值模拟证明，在诸如本文所研究的简单力学系统中，可能发生负反射。负反射能量相对较大，并且在入射波的较宽角度范围内均得到验证。

致谢

B. Meirbekova 感谢 SC MES RK 提供的经费支持（基金编号：AP14972863）；G. Carta 和 M. Brun 的工作是在 GNFM-INDAM 的资助下完成的。L. Morini 感谢卡迪夫大学通过 ENGIN 2022早期职业学术基金计划提供的支持。

参考文献

[1] R. Rashed. 反射光学先驱：Ibn Sahl 论燃烧镜与透镜。《Isis》，81:464–491，1990。[2] A. Kwan，J. Dudley 和 E. Lantz。究竟是谁发现了斯涅尔定律？《物理世界》，15:64，2002。[3] M. Born 和 E. Wolf。《光学原理：传播、干涉与光的衍射电磁理论》。Pergamon Press，牛津，纽约，1980。[4] J. D. Achenbach。《弹性固体中的波传播》。McGraw-Hill，纽约，1973。[5] D. Royer 和 E. Dieulesaint。《固体中的弹性波 I》。Springer，柏林，1996。[6] J. Lekner。《反射理论》。Martinus Nijhoff Publishers，多德雷赫特，1987。[7] W. M. Ewing，W. S. Jardetzky 和 F. Press。《分层介质中的弹性波》。McGraw-Hill Book Company, Inc.，纽约，多伦多，伦敦，1957。[8] L. Brekhovskikh。《分层介质中的波》。Academic Press，剑桥，马萨诸塞州，1960。[9] V. G. Veselago。具有同时呈现负值的 ε 和 μ物质的电动力学。《苏联物理学进展》，10:509，1968。[10] J. B. Pendry。负折射可实现完美透镜。《物理评论快报》，85:3966–3969，2000。[11] D. R. Smith，W. J. Padilla，D. C. Vier，S. C. Nemat-Nasser 和 S. Schultz。具有同时呈现负磁导率和负介电常数的复合介质。《物理评论快报》，84:4184–4187，2000。[12] D. Bigoni，S. Guenneau，A. B. Movchan 和 M. Brun。具有惯性局部共振结构的弹性超材料：在成像和局域化中的应用。《物理评论B辑》，87:174303，2013。[13] D. J. Colquitt，I. S. Jones，N. V. Movchan 和 A. B. Movchan。微结构材料中弹性波的色散与局域化。《皇家学会会刊A辑》，467:2874–2895，2011。[14] M. Farhat，S. Guenneau，S. Enoch，G. Tayeb，N. V. Movchan 和 A. B. Movchan。通过近乎接触的刚性方柱方形阵列透镜成像线性表面水波的解析与数值分析。《物理评论E辑》，77:046308，2008。[15] A. C. Hladky-Hennion，J. O. Vasseur，G. Haw，C. Croënne，L. Haumesser 和 A. N. Norris。利用泡沫状金属结构实现声波负折射。《应用物理学快报》，102:144103，2013。[16] G. Bordiga，L. Cabras，A. Piccolroaz 和 D. Bigoni。通过预应力调谐实现负折射，并导引来自弯曲源的波。《应用物理学快报》，114:5084258，2019。[17] L. Morini，Y. Eyzat 和 M. Gei。准晶多层超材料中的负折射。《固体力学与物理学杂志》，124:282–298，2019。[18] Z. Chen，L. Morini 和 M. Gei。采用规范准晶层合材料实现弹性波纯负折射。《哲学学报：皇家学会A辑》，380:20210401，2022。[19] C. Kittel。《固体物理学导论》。John Wiley and Sons，纽约，1956。[20] O. Svelto。《激光原理》。Springer，纽约，2010。[21] L. Brillouin。《周期结构中的波传播：电滤波器与晶格》。Dover Publication, Inc.，纽约，1953。[22] M. J. Nieves，G. Carta，V. Pagneux 和 M. Brun。通过陀螺效应定向控制弹性晶格中的瑞利波传播。《材料前沿》，7:602960，2021。