arXiv:2304.00284v1 [math-ph] 1 Apr 2023

Sundman 变换与替代切结构

Jos´e F. Cari˜nena[1*]、Eduardo Mart´ınez[2†]和 Miguel C. Mu˜noz-Lecanda[3‡]萨拉戈萨大学理论物理系及 IUMA，Pedro Cerbuna 12，E-50009 萨拉戈萨，西班牙[2]萨拉戈萨大学应用数学系及 IUMA，Pedro Cerbuna 12，E-50009 萨拉戈萨，西班牙[3]加泰罗尼亚理工大学数学系，北校区，C-3 楼，Jordi Girona 街 1 号，E-08034 巴塞罗那，西班牙

摘要

本文提出一种几何方法，用基本函数定义适用于二阶微分方程组的 Sundman 变换，并说明必须借助定义 Sundman 变换的函数改变切结构。作为该理论的其他应用之一，我们研究二阶微分方程组的可线性化性，尤其是其中最简单的情形：单个二阶微分方程。文中通过若干实例阐释了这一理论。

数学主题分类（2010）：34A34, 37N05, 53C15,70F16

PACS编号：02.30.Hq, 02.40.Yy, 02.40.Hw, 02.40.Ky,45.10.Na

关键词：Sundman变换、切丛、正则化，

1 引言

由 Levi-Civita 引入的无穷小时间重新参数化 [1, 2], 通常称为 Sund- man 变换 [3], ，曾被用于 [4] 将二维开普勒问题正则化；事实证明，它在处理微分方程组理论中的许多不同问题及相关物理问题方面非常有效。至少从

*电子邮箱：jfc@unizar.es

†电子邮箱：emf@unizar.es

‡电子邮件：miguel.carlos.munoz@upc.edu

几何视角来看，这种变换非常引人入胜，因为在自治系统的表达式中时间并不显式出现；而用于处理自治一阶微分方程组的广义 Sundman 变换，可用于研究微分方程组的线性化 [5] 以及微分方程组的数值解（参见例如 [6, 7, 8]）。这些广义 Sundman 变换还被用于解决经典力学中的许多有趣问题（参见例如 [9, 10, 11, 12]）以及天体力学中的问题 [13, 14, 15, 16, 17]。

研究一阶微分方程自治系统的几何方法非常有用，其研究成果澄清了理论中的许多问题。此外，由于这种方法具有内在性，所得结果不依赖于特定的坐标选择，因此可以将其推广到无限维系统（尽管会遇到一些拓扑困难）。因此，这类系统可由可微流形 M上的一个向量场来取代，而其解集则对应于该向量场在局部坐标系中的积分曲线集。时间充当积分曲线的参数。最近已有研究表明 [18] ，Sundman 无穷小时间重新参数化应理解为动力向量场的改变，即将其替换为一个共形向量场。文献 [18]对这种几何解释进行了更为详尽的分析。

另一方面，研究二阶微分方程自治系统不仅出于其本身的数学意义，也因为它们在经典力学中发挥着关键作用，并且通过含时薛定谔方程，在量子力学的谱问题中也至关重要。通常的处理方法是将一个由 n二阶微分方程组成的系统化为由 $2n$ 一阶微分方程组成的系统；用几何语言来说，就是将这类二阶微分方程系统与其切丛 TM上的一类特殊向量场 X联系起来，这类向量场属于二阶微分方程向量场，以下简称 SODE 向量场。接着，可以尝试以类似的方式，在 SODE 向量场的框架下考虑 Sundman 变换，即将描述该自治系统的 SODE 向量场 X 变为向量场 fX。然而，问题在于，除非 $f = 1$， fX 便不再是 SODE 向量场，因此需要进行更为谨慎的分析。幸运的是，替代切结构有助于解决这一问题（例如参见 [17]）。

本文旨在从几何观点阐明二阶微分方程组中无穷小时间重参数化的含义。第 2 节将回顾文献 [18], 中从几何视角发展起来的、一阶微分方程组的经典 Sundman 变换的一种推广；第 3 节首先概述二阶微分方程组理论的主要几何要素，以及正则拉格朗日系统的辛方法，作为初步思路，以展示切结构的重要性以及替代切结构的可能性。随后，本文给出一个有趣的替代切结构实例，用于从几何角度理解二阶微分方程组的 Sundman 变换。第 4 节从几何视角回顾线性二阶微分方程组。第 5 节介绍二阶微分方程组中 Sundman 变换的明确含义；第 6 节则进一步讨论较简单的一维问题，以及二阶微分方程的可线性化性

的相关内容，第 7 节汇集了说明性实例。最后一节给出一些总结性评论，并讨论未来的研究工作。

2 广义 Sundman 变换的几何方法

我们首先回顾 [18] 中给出的 Sundman 变换的几何推广。经典的 Sundman 变换 [3] 是将时间从 t 无穷小缩放为由 τ 给出的新的虚时间

$$dt = r\,d\tau \iff \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{r}, \tag{2.1}$$

但在 $dt = c\,r^{\alpha}\,d\tau$ 中对此进行了略微推广，其中 $c \in \mathbb{R}$ 和 α 是正常数 [8],，或者更一般地推广为 $dt = f(r)\ d\tau$ [14, 19, 20]。

我们首先考虑 [18] 中给出的一阶微分方程组的 Sundman 变换的几何推广。回想一下，如 [21], 所示，我们可以考虑一个自治的一阶微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

在由下式定义的 Sundman 变换推广下，

$$dt = f(x^1, \ldots, x^n)\ d\tau, \quad f(x^1, \ldots, x^n) > 0, \tag{2.3}$$

它形式上变为

$$\frac{dx^i}{d\tau} = f(x^1, \ldots, x^n)\ X^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

在几何方法中，系统 (2.2) 对应的向量场 X 的坐标表达式为

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.5}$$

而方程组 (2.2) 的解给出了向量场 X的积分曲线。文献 [18] 已证明，若曲线 $\gamma(t)$ 是 X的积分曲线，并且我们进行重新参数化，使新参数 τ 由以下关系定义

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{f(\gamma(t))}, \tag{2.6}$$

则重新参数化后的曲线 $\bar{\gamma}(\tau)$，满足 $\bar{\gamma}(\tau(t)) = \gamma(t)$，是向量场 $f\,X$的积分曲线，而其积分曲线是方程 (2.4) 的解。

请注意，当向量场 X 的每条积分曲线都被任意重新参数化时，我们会得到一个新的曲线族；当这些曲线是某个向量场的积分曲线时

向量场 Y时，由于这两个向量场 X 和 Y 具有相同的运动局部常数，它们生成相同的一维分布，并且至少在局部存在一个不为零的函数 f，使得 $Y = fX$。我们已经验证，对于由 Sundman 变换定义的重新参数化，情况确实如此，因此 f 就是定义该 Sundman 变换的函数。因此，从这一几何观点来看，广义 Sundman 变换（2.3）对应于将向量场 X 替换为与其共形¯相关的向量场 $X = fX$。

值得注意的是，相对于新时间而言的“速度”有所不同，因此根据（2.3），新速度 $\bar{v}$ 与旧速度 $\bar{v}^i = f\,v^i$相关。

在 [15] 中，人们对这种“无穷小时间缩放”的重新诠释被用于处理 Bond 和 Janin 在 [13] 中描述的卫星理论。广义 Sundman 变换有许多应用，更多详情可见 [18]。

3 替代　切结构及其应用 s

3.1 切结构与拉格朗日系统

拉格朗日经典力学的几何表述利用了速度相空间 [22, 23, 24, 25]的切结构。

回顾一下，给定一个 n 维流形 Q，其切丛 $TQ = \bigcup_{m\in Q} T_mQ$ 可以赋予向量丛结构 τ_Q: $TQ \to Q$，其中纤维 $\tau_Q^{-1}(m) = T_mQ$ 是 n 维实线性空间。切丛 TQ 上通常的坐标图由其底流形 Q 上的坐标图诱导而来。给定 Q 的坐标图 (U,φ)，我们可以通过切映射 $\phi = T\varphi$ 在 $\mathcal{U} = \tau_Q^{-1}(U)$ 上诱导出一个坐标图，即 $\phi(m,v) = (\varphi(m)\ \varphi_{*m}(v))$。换句话说，如果 π^i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、$i = 1$、.....、$n$ 是每个因子上的自然投影，而 $q^i = \pi^i \circ \varphi$ 是坐标函数，即 $\varphi = (q^1,.....,q^n)$，那么我们可以在 TQ 上考虑向量场线性空间 $\mathfrak{X}(U)$ 的坐标基，通常记作 $\{\partial/\partial q^j \mid j = 1,\dots,n\}$，以及 1-形式线性空间 $\Omega^1(U)$ 的相应对偶基 $\{dq^j \mid j = 1,\dots,n\}$。于是，点 $q \in U$ 上的一个向量 v 是 $v = v^j\,(\partial/\partial q^j)|_q$，而该点上的一个余向量 ζ 是 $\zeta = p_j\,(dq^j)|_q$，其中 $v^j = \langle dq^j、\ v\rangle$ 和 $p_j = \langle \zeta、\ \partial/\partial q^j\rangle$ 分别是通常所说的速度和动量。这样，Q 的每个坐标图 (U,φ) 都为 $\tau_Q^{-1}(U) \approx U \times \mathbb{R}^n$ 上的切丛提供一个平凡化，并为余切丛 π_Q: $T^*Q \to Q$ 在 $\pi_Q^{-1}(U) \approx U \times \mathbb{R}^n$ 上提供另一个平凡化。

切丛 TQ 与 Q 上的其他向量丛一样，都关联着一个向量场 Δ，通常称为刘维尔向量场，即沿纤维膨胀的生成元。它在上述切丛坐标下的局部表达式为

$$\Delta(q,v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{3.1}$$

此外，还存在一个自然的 (1,1)型张量场，通常称为垂直自同态，或简称切结构，它满足 $\mathrm{Im}\,S = \ker\ S$，并满足一个可积性条件（稍后详述）。它的

在通常的切丛坐标下的局部坐标表达式为

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i. \tag{3.2}$$

底流形 Q 可与 τ_Q的零截面等同，而切丛 TQ 上的垂直向量场是与纤维相切的向量场，因此它们的局部表达式为

$$D(q,v) = \sum_{i=1}^{n} f^i(q,v) \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{3.3}$$

也就是说，垂直向量属于 ker S。特别地，刘维尔向量场 $\Delta \in \mathfrak{X}(TQ)$ 是垂直向量场，即 $S(\Delta) = 0$，它在零截面上消失；又由于垂直自同态 S 关于速度是 −1 次齐次的，因此

$$\mathcal{L}_\Delta S = -S. \tag{3.4}$$

此外，若 $D \in \mathfrak{X}(TQ)$ 是 TQ上由 (3.3) 给出的垂直向量场，则 $\mathcal{L}_D S = -S$当且仅当 $D(q,v) = \Delta(q,v) + c^i(q)\partial/\partial v^i$，也就是说，若 D与 Δ之差是底空间上某个向量场的垂直提升，因为

$$\mathcal{L}_D S = \sum_{i=1}^{n} \left[D, \frac{\partial}{\partial v^i} \right] \otimes dq^i = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dq^i,$$

因此 $\mathcal{L}_D S = -S$ 当且仅当

$$f^i(q,v) = v^i + c^i(q), \quad i = 1, \ldots, n.$$

请注意，这表明 Δ 是 TQ 上唯一满足 $\mathcal{L}_\Delta S = -S$ 且在零截面上消失的垂直向量场，即 $\Delta(q,0) = 0$。

切丛 TQ 上的一类特殊向量场是所谓的二阶微分方程向量场，简称 SODE 向量场。这些向量场 Γ 的特征是满足性质 $S(\Gamma) = \Delta$，这类 SODE 向量场的局部坐标表达式为

$$\Gamma(q,v) = \sum_{i=1}^{n} \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q,v) \frac{\partial}{\partial v^i} \right).$$

这类向量场被称为 SODE 向量场，是因为它们的积分曲线是方程组的解

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} &= v^i \\ \dfrac{dv^i}{dt} &= f^i(q,v) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

因此，这类曲线在底流形上的投影是二阶微分方程组 $\ddot{q}^i = f^i(q,\dot{q})$ 的解，其中 $i = 1, \ldots, n$。

拉格朗日形式介绍如下：给定一个函数 $L \in C^\infty(TQ)$，我们可以通过 $\theta_L = dL \circ S$ 在 TQ 上定义一个 1-形式 θ_L，并通过 $E_L = \Delta(L) - L$ 定义能量函数 $E_L \in C^\infty(TQ)$。它们的局部坐标表达式分别为，

$$\theta_L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v^i}\, dq^i, \qquad E_L = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \tag{3.6}$$

如果 $L \in C^\infty(TQ)$ 的拉格朗日函数满足 $\omega_L = -d\theta_L$ 非退化，即满足 $(\omega_L)^{\wedge n} \neq 0$，则称其为正则函数。在这种情况下，我们可以通过 (TQ, ω_L, E_L) 在 TQ上定义一个哈密顿动力系统，随后动力向量场 Γ（它是一个二阶常微分方程向量场）就是动力学方程的解

$$i(\Gamma)\omega_L = dE_L. \tag{3.7}$$

还要注意，如果 Γ 是一个二阶常微分方程向量场，则方程（3.7）等价于

$$\mathcal{L}_\Gamma \theta_L = dL, \tag{3.8}$$

因为 $\mathcal{L}_\Gamma \theta_L = i(\Gamma) d\theta_L + d(i(\Gamma)\theta_L)$，而当 Γ 是二阶常微分方程时，我们有 $i(\Gamma)\theta_L = \Delta L$。

关于拉格朗日力学几何方法的更多细节，参见 [22, 23,24, 25]。

3.2 切丛上的替代切结构

事实证明，使用替代结构描述力学系统对于更好地理解动力学非常有用，并带来了许多意想不到的结果，例如递归算子 [26, 27, 28] 和非诺特运动常数 [29]。替代几何结构存在的重要性和实用性已在近期的许多研究中得到展示，并在最近出版的一本书 [25]中进行了总结。

特别地， [25]第 3 章分析了流形上线性结构和向量丛结构（部分线性结构）的张量刻画。总之，流形 M 上的 *linear structure* 可由（参见 [25, 30]）一个完备向量场 $\Delta \in \mathfrak{X}(M)$ 的存在性来刻画：该向量场只有一个非退化临界点，并且满足$\mathcal{F}_{(0)\Delta} = \mathbb{R}$且 $\mathcal{F}_{(1)\Delta}$能够分离导子，其中 $\mathcal{F}_\Delta^{(k)}$是流形 M上的函数集合，定义如下：

$$\mathcal{F}_\Delta^{(k)} = \{ f \in \mathcal{F}(M) \mid \Delta f = k\, f \}, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

回顾一下，若对于任意两个不同的导子 D_1 和D_2，都存在一个函数 $f \in \mathcal{F}_\Delta^{(1)}$ 使得 $D_1 f \neq D_2 f$，则称 $\mathcal{F}_\Delta^{(1)}$ 能够分离导子。

这个向量场 Δ称为刘维尔向量场。类似地，给定一个 n 维流形 M，若存在一个完备向量场 Δ（也称为刘维尔向量场），使得 M 上满足 $\Delta(m) = 0$ 的点集 m 是一个 k 维子流形 Q，函数集 $\mathcal{F}_\Delta^{(0)}$ 构成一个阿贝尔代数，其谱为 Q，且方程$\Delta f = f$有 $n-k$ 个函数独立的纤维线性函数（见 [30]），则称该流形为 *vector bundle* 。在这种情况下，$d\mathcal{F}_{(0)\Delta}$和 $d\mathcal{F}_{(1)\Delta}$张成 1-形式 $\Omega^1(M)$，构成一个 $\mathcal{F}_{(0)\Delta}$-模；换言之， Δ定义了，

至少局部地，一个部分线性结构和一个淹没 $\pi : M \to Q$。可以选择底流形上的局部坐标 $(x^1, \ldots, x^k)$ 以及纤维上的局部坐标 $(y^1, \ldots, y^{n-k})$，使得（见 [25]）

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n-k} y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{3.9}$$

我们所关注的特殊情形是切丛结构。流形 M 上的近切结构这一概念在 [31] 和 [32] 中被引入，定义为流形 M 上的一个 (1,1)型张量场 S，使得在每一点 $p \in M$，线性映射 $S_p : T_pM \to T_pM$ 的核与其像重合。由此可知，$S^2 = 0$，且 M 必须是偶数维的，dim $M = 2n$。这是 [33], 中给出的更一般定义的一个特殊情形，其研究在二十世纪七十年代 [33, 34, 35, 36, 37] 受到了关注。

如果其 Nijenhuis 张量 N_S 消失，则称近切结构 S 是可积的。我们回顾一下，流形 M 上的 (1,1)型张量场 T 的 Nijenhuis 张量 N_T 是一个由下式给出的 (1,2) 型张量场

$$N_T(X_1, X_2) = [T(X_1), T(X_2)] + T^2([X_1, X_2]) - T([T(X_1), X_2]) - T([X_1, T(X_2)]),\ \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.10}$$

因此，当 $T = S$ 时，如 $S^2 = 0$ 所示，

$$N_S(X_1, X_2) = [S(X_1), S(X_2)] - S([S(X_1), X_2]) - S([X_1, S(X_2)]), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M),$$

因此，$N_S = 0$ 当且仅当对每个向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ [38],

$$\mathcal{L}_{S(X)} S = -(\mathcal{L}_X S) \circ S,$$

因为，对于每个向量场 $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\mathcal{L}_{S(X)} S)(Y) = [S(X), S(Y)] - S([S(X), Y]),$$

and

$$(\mathcal{L}_X S)(S(Y)) = \mathcal{L}_X(S(S(Y))) - S([X, S(Y)]) = -S([X, S(Y)]).$$

值得注意的是，$N_S = 0$条件意味着由$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ker $S =$ Im S定义的垂直分布是对合的，因为若 $X, Y \in$ ker $S =$ Im S，则存在 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$使得 $S(X) = X$ 且 $S(Y) = Y$，于是

$$[X, Y] = [S(\widetilde{X}), S(\widetilde{Y})] = S([S(\widetilde{X}), \widetilde{Y}]) + S([\widetilde{X}, S(\widetilde{Y})]),$$

即 $[X, Y]$ 属于 S的像，而它与 ker S相同，因此由 ker S 定义的分布是对合的，进而按照弗罗贝尼乌斯的意义是可积的。回顾一下，弗罗贝尼乌斯定理指出，分布 $\mathcal{D}$ 当且仅当它是对合的时才是可积的，即$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$。在这种情况下，流形分解为叶片，这些叶片是 $\mathcal{D}$的积分子流形；可积分布称为叶状结构。

正如 [38], 所指出的，至少在局部，这种叶状结构的积分子流形是纤维化 π 的纤维：$M \to Q$ 其中 Q 是一个 n 维流形。垂直向量

场在 Q 上投影为零向量场，因此其取值属于 ker S。那么，若 $X_1 \in \mathfrak{x}(M)$ 和 $X_2 \in \mathfrak{x}(M)$ 是投影到同一个向量场 $X \in \mathfrak{x}(Q)$ 上的可投影向量场，由于 $X_2 - X_1$ 是垂直向量场，$S(X_1) = S(X_2)$，也就是说，$X_1 - X_2 \in$ ker S。因此，若 $\bar{}$ $X \in \mathfrak{x}(M)$ 投影到向量场 $X \in \mathfrak{x}(Q)$ 上，那么 $S(X)$ 仅依赖于 X。

引理 3.1。

i) 若 $X \in$ ker S，且向量场 $Y \in \mathfrak{x}(M)$ 可投影，则 $[X, Y] \in$ ker S。ii) 若 X_1、$X_2 \in \mathfrak{x}(M)$ 是可投影向量场，则 $[S(X_1)\ S(X_2)] = 0$。

Proof.- i) 由于向量场 X 可投影（因为它属于 ker S），且 $Y \in \mathfrak{x}(M)$ $\bar{}$ $\bar{}$ 在 $Y \in \mathfrak{x}(Q)$ 上可投影，因此向量场 $[X, Y]$ 在 $[0, Y] = 0$ 上可投影，即 $[X, Y] \in$ ker S。

ii) Nijenhuis 张量的消失条件 $N_S(X_1, X_2) = 0$ 与结果 i) 一起表明 $[S(X_1)\ S(X_2)] = 0$，因为 $[S(X_1)\ X_2])$ 和 $[X_1, S(X_2)])$ 都属于 ker S。

□

如果 $(x^1, \ldots, x^n)$ 是 Q 上的局部坐标，我们可以在 M 上选取局部坐标 (x^i, u^i)。文献 [38] 已证明，可以通过适当选取局部坐标 u^i，使得若 $X_1, \ldots, X_n$ 是 M 上分别投影到 $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ 的向量场，如 $[S(X_i)\ S(X_j)] = 0$，则纤维上的局部坐标满足 $S(X_i) = \partial/\partial u^i$。于是，$S$ 的局部表达式为 $S = (\partial/\partial u^i) \otimes dx^i$。

不过要注意，在这一过程中，坐标 u^i 在每个纤维上只能确定到一个加法常数；也就是说，它们取决于一个起到零截面作用的选择，因为它们是微分方程组 $S(X_i)u^j = \delta_i^j$，$i, j = 1 \ldots n$ 的解，而我们可以将 u^i 改为 $\bar{u}^i = u^i + f^i(x)$。歧义函数 f^i 由零截面的选择确定。这样的选择会针对底流形 Q 上的每个坐标系 (x^i)，唯一确定 M 上的一组局部坐标 (x^i, u^i)，使得可积几乎切结构由下式给出

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes dx^i. \tag{3.11}$$

$\bar{}$给定底空间上的一个向量场，$X \in \mathfrak{x}(Q)$，存在唯一一个向量场 $X \in \mathfrak{x}(M)$，使得 $\bar{}$ X 和 X 是 π-相关的，满足关系式 $\mathcal{L}_X S = 0$，且 X 与零截面的像相切。事实上，若

$$\bar{X}(x) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.12}$$

$\bar{}$与 X X π-相关的向量场的坐标表达式为

$$X(x, u) = \sum_{i=1}^{n} \left(f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + g^i(x, u) \frac{\partial}{\partial u^i} \right),$$

且条件 $\mathcal{L}_X S = 0$ 表明

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j} - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} = 0, \quad i, j = 1 \ldots n \Longleftrightarrow g^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} u^j + c^i(x), \quad i = 1 \ldots n,$$

然后，相切条件意味着 $c^i(x) \equiv 0$，因此此类向量场的显式坐标表达式 X 为：

$$X(x,u) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{3.13}$$

¯其形式上类似于将 X 从 Q 到 M的完全提升。

此外，存在唯一确定的垂直向量场 Δ ，使得对于这样的向量场（3.13）以及零截面上的 $\Delta = 0$ ，有 $\mathcal{L}_\Delta S(X) = -S(X)$，因为此时 $S(X)$就是垂直向量场 $S(X) = \sum f^i(x)(\partial/\partial u^i)$，并且如果垂直场 $\Delta_{i=1n}$的局部表达式为 $\Delta = \sum g^i(x,u)(\partial/\partial u^i)$，则$_{i=1}$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} f^i(x)\frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_{j=1}^{n} g^j(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^j}\right] = \sum_{i,k=1}^{n} f^i(x)\frac{\partial g^k}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^k},$$

以及 $\mathcal{L}_\Delta S(X) = -S(X)$，这意味着 $\partial g^k/\partial u^i = \delta^k_i$，$i,k = 1\ldots n$，即 $g^k(x,u) = u^k + c^k(x)$，而零截面上的消失条件确定了 $c^i(x) \equiv 0$，因此Δ 的显式表达式为

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial u^i}. \tag{3.14}$$

该 v 向量场 Δ 为 π 的每个纤维提供线性空间结构： $M \to Q$.

相对于由（3.11）给出的新的可积几乎切结构，与二阶微分方程组相关的向量场具有如下形式

$$D(x,u) = \sum_{i=1}^{n} \left(u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u^i} \right),$$

并且其特征为 $S(D) = \Delta$。

可积几乎切结构的作用在 [39] 中得到了阐明，其中明确指出，近切结构只负责切丛的仿射结构，而不是其线性结构。正是向量场 Δ 选择了线性结构，如前一段所示。

3.3 一个重要的例子

上述近切结构中一个特别重要的可积的例子是切丛 τ_Q 上所提到的结构： $TQ \to Q$，其中 S 是垂直自同态（参见例如 [23]）。文献 [24]，中也展示了替代切结构，但我们将重点关注以下例子：它是更一般构造方法的一个特例。对于切丛 τ 上的向量场 $X \in \mathfrak{x}(TQ)$： $TQ \to Q$，可构造出一种

替代切结构，使得向量场 X 相对于新的切丛结构是一个二阶常微分方程向量场。

现在，给定 TQ 上的定号基本函数 $\tau_Q^* h$，满足 $h \in C^\infty(Q)$，我们可以在 TQ 上引入一个新的可积几乎切结构（$\tau_Q^* h$）¯，简称为 $S = h\,S$，因为 $\ker(h\,S) = \mathrm{Im}(h\,S)$。由 $\ker S$ 定义的垂直分布与通常由 $\ker(h\,S)$ 定义的垂直分布重合，并且叶空间集合可以与底流形 Q 认定为同一对象。若我们为 Q 选取一组局部坐标（q^1，...，q^n），并且若 X_1，...，X_n 是 TQ 上的 τ_Q-可投影向量场，分别与 $\partial/\partial q^1$，...，$\partial/\partial q^n$ 相关，那么向量场 $h\,S$（X_1）...，$h\,S$（X_n）两两对易（根据引理 3），并且存在局部坐标 $\bar{v}^1$，...，$\bar{v}^n$，使得 S（$h\,X_i$） $= h\,S$（X_i） $= \partial/\partial\bar{v}^i$，$i = 1$，...，$n$；由于 S（X_i） $= \partial/\partial v^i$，对¯零截面作相同选择，我们可以看到 $S =$（$\tau_Q^* h$） S，其局部表达式为

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \otimes dq^i = h\,S,$$

纤维坐标为 $h\,\bar{v}^i = v^i$、 $i = 1$、.....、 n。当然，向量场 $\bar{\Delta}$与通常的膨胀生成元，即标准的刘维尔向量场 Δ重合。

¯请注意，由于新的 (1,1) 型张量 S 的局部表达式与 S相似，因此条件 $N_{h\,S} = 0$ 可由 $N_S = 0$推出。

还需要指出， $\bar{v}^i$ 并非适配于原切丛结构的坐标，因为定义向量 v 的这类坐标的 1-形式 α^i 满足 $\bar{v}^i = \alpha^i(v)$，它们并非恰当形式，而是 $\alpha^i = (1/h)dq^i$；这些形式对应于所谓的拟速度（参见[40, 41, 42, 43] 及其中的参考文献）。

¯总之，从 S到 $S = h\,S$，我们在 TQ上得到了新的切结构，及其对应的刘维尔向量场 $\Delta = \Delta$，并且相对于新的切结构，还得到了二阶常微分方程向量场的新概念。

4 二阶微分方程组的线性系统

Sundman 变换最初用于处理二阶微分方程组——牛顿运动方程，并被用于研究二阶微分方程组的线性化（例如参见 [44, 45]）。我们先回顾一些与二阶微分方程自治系统的几何有关的概念。正如上一节所述，给定这样一个系统

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = X^i(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

它关联着一个一阶微分方程组

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx^i}{dt} & = & v^i \\ \dfrac{dv^i}{dt} & = & X^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) \end{array} \right. \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

其解定义了二阶微分方程向量场的积分曲线Γ 在 TQ上

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i(x,v) \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \tag{4.3}$$

也就是说，一个二阶微分方程组可以通过切丛上的二阶常微分方程向量场 Γ 来处理。此类向量场可以用多种方式刻画。例如，它们可以是 TQ, τ_{TQ} 上 $T(TQ)$ 的两种向量丛结构的截面： $T(TQ) \to TQ$和 $T\tau_Q$： $T(TQ) \to TQ$；或者，如前一节所示，也可以通过 $S(\Gamma) = \Delta$ 来刻画。不过，考虑另一种切结构时，相对于新的切结构，会得到不同的二阶微分方程向量场。

一个有趣的特殊情形是，在给定坐标系下为线性的二阶微分方程组，即由底流形 Q 上开集 U 中的坐标图诱导出的切丛图。在这种情形下，(4.3)$_n$ 中出现的 U 上的函数 X^i 必须具有如下形式： $X^i(x,v) = \sum_{j=1}^{n} (A^i{}_j\, x^j + B^i{}_j\, v^j)$，其中 $A^i{}_j$ 和 $B^i{}_j$ 为实数。用~几何术语来说，这一性质可以写成 $[\Delta, \Gamma] = 0$，其中 Δ 是 U 上的向量场，满足 $\Delta = \Delta_Q + \Delta$；这里 Δ_Q 和 Δ 是 U 上的向量场，其局部表达式分别为 $\Delta_Q = \sum_{i=1}^{n} x^i (\partial/\partial x^i)$ 和 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} v^i (\partial/\partial v^i)$，因为

$$\begin{aligned} [\tilde{\Delta}, \Gamma] &= \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \sum_{j=1}^{n} \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j(x,v) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) \right] = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \left(x^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^k} + v^j \frac{\partial X^k}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^k} \right) - \sum_{j=1}^{n} X^j(x,v) \frac{\partial}{\partial v^j}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

因此， $[\tilde{\Delta}, \Gamma] = 0$，当且仅当每个分量 X^i（对于 $= 1$，....., n）满足

$$\sum_{j=1}^{n} \left(x^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial X^i}{\partial v^j} \right) = X^i(x,v), \quad i = 1, \ldots, n,$$

根据齐次函数欧拉定理，这意味着分量 X^i 是一次齐次函数，并且这意味着（例如参见 [46], 第 213 页）存在实常数 $A^i{}_j$ 和 $B^i{}_j$，使得

$$X^i(x,v) = \sum_{j=1}^{n} (A^i{}_j\, x^j + B^i{}_j\, v^j), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

~注意，向量场 Δ 并非内蕴的，而是取决于 U上的坐标图选择。~更具体地说，向量场 Δ是 Δ_Q 的完全提升，因此，二阶常微分方程的线性这一概念取决于所使用的坐标图。还要注意，如果 Δ_Q 是全局定义的，

˜那么 Δ也是全局定义的。回想一下，这种全局定义的完备向量场 Δ_Q 的存在意味着 Q 是一个线性空间。

另一类有趣的系统是速度线性的系统，即由 (4.3) 中的函数 $X^i(x,v)$ 表征，并且存在实函数 $B^i{}_j$ 使得

$$X^i(x,v) = \sum_{j=1}^{n} B^i{}_j(x)\, v^j, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

这类纤维线性系统可以用切丛 TQ 的部分线性结构来表征，由此可以定义刘维尔向量场 Δ。事实上，对于所有指标 $i = 1, \dots, n$，如果 $\langle dv^i, [\Delta, X]\rangle = 0$，我们可以看到，二阶常微分方程向量场 Γ 是（关于速度）线性的，因为如果 Γ 是由 (4.3) 给出的二阶常微分方程，那么

$$[\Delta, \Gamma] = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,k=1}^{n} \left(v^k \frac{\partial X^j}{\partial v^k} - X^j \right) \frac{\partial}{\partial v^j},$$

因此，由于

$$\langle dv^i, [\Delta, X]\rangle = \sum_{k=1}^{n} v^k \frac{\partial X^i}{\partial v^k} - X^i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

我们看到，对于 $i = 1, \dots, n$，$\langle dv^i, [\Delta, X]\rangle = 0$ 当且仅当存在 n^2 个实基本函数 $_nA^i{}_j(x)$，使得 $X^i = \sum A^i{}_j(x)\ v^j$，也就是说，用于确定 Γ 的积分曲线的相关 $_{j=1}$ 微分方程系统的第二个子系统对于速度而言是线性的。

我们也可能关注非齐次线性二阶微分方程组的情形，此时（4.2）中向量场 X 的分量 X^i 必须具有 $X^i(x,v) = \sum \left(A^i{}_j\, x^j + B^i{}_j\, v^j \right) + C^i$ 的形式，其中 $A^i{}_j$、$B^i{}_j$ 和 C^i 为实常数；也就是说，向量场 Γ 是以下各项之和 $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_{-1}$，其中

$$\Gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} (A^i{}_j\, x^j + B^i{}_j\, v^j) \frac{\partial}{\partial v^i} \right), \quad \Gamma_{-1} = \sum_{i=1}^{n} C^i \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{4.7}$$

它们满足

$$[\tilde{\Delta}, \Gamma_0] = 0, \qquad [\tilde{\Delta}, \Gamma_{-1}] = -\Gamma_{-1},$$

˜ ˜ 因此，$[\Delta, \Gamma] = -\Gamma_{-1}$ 这意味着 $[\Delta, \Gamma]$ 是一个具有常系数的垂直向量场，满足

$$[\tilde{\Delta}, [\tilde{\Delta}, \Gamma]] = -[\tilde{\Delta}, \Gamma].$$

这一最后性质刻画了给定坐标图中与非齐次线性二阶微分方程相对应的向量场，因为这表明，如果该向量场

$_n[\tilde{\Delta}, \Gamma]$ 是一个常垂直场 $-\sum C^i \partial/\partial v^i$，并且此外 $[\tilde{\Delta}, [\tilde{\Delta}, \Gamma]] = -[\tilde{\Delta}, \Gamma]$，那么$_{i=1}$表明分量 (4.4)
X^i 满足 $\tilde{\Delta}(X^i) - X^i = -C^i$，因此，存在 $2n^2 + n_n$ 实常数 $A^i{}_j$、 $B^i{}_j$ 和 C^i，使得
$X^i = \sum \left(A^i{}_j \, x^j + B^i{}_j \, v^j \right) + C^i$。$_{j=1}$

我们的目标是研究在何种条件下，给定的二阶常微分方程组可以通过适当的 Sundman 变换转化为线性系统或速度线性系统。下一节将分析二阶常微分方程组的 Sundman 变换的性质。

请注意，我们已经刻画了可以积分的不同类型的二阶常微分方程组。这些刻画并非内在的，而是取决于是否存在适当的坐标图。

5 二阶常微分方程组的 Sundman 变换

现在让我们分析这类系统的 Sundman 变换的几何方法。由于二阶常微分方程组在几何上由二阶常微分方程向量场Γ描述，而它是切丛 TQ上的一种特殊向量场，因此，关于一阶微分方程组的理论启发我们采用类似的做法，将定义 Sundman 变换的函数乘到向量场上，从而得到变换后的向量场。然而，由于现在出现了二阶导数，这种做法或许需要修改。另一方面，乘以函数 f 后，二阶常微分方程特征性质便会丧失。这促使我们更仔细地考察这一定义。我们将证明，在一种特别重要的情况下可以克服这两个问题：定义 Sundman 变换的函数 f 是定号基本函数。此后，除非另有说明，我们均假设这一点成立。

事实上，如上所述，将 Sundman 变换 (2.3) 应用于系统 (4.2) 时，相对于新时间 $\bar{v}$ 的新速度与之前的速度之间存在关系$\bar{v}^i = f \, v^i$，这是 (2.6) 的推论，因为给定一条曲线，

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{f} \bar{v}^i \,,$$

因此，由于 f 是一个基本函数，

$$\frac{\partial}{\partial v^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{v}^j}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^j} = f \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \,.$$

这表明应在 TQ 中使用非自然坐标，即所谓的拟速度 [40, 41,42, 43], 。事实证明，拟速度非常有用，例如可用于研究查普雷金系统 [47]。在我们讨论的情形中，这相当于将 $\{f \, dx^1, \ldots, f \, dx^n\}$ 视为 τ 上的截面 $T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的 C^∞（$\mathbb{R}^n$）- 模的非完整基（见 [41, 43] 及

其中的参考文献）。 TQ 上向量场模的相应对偶基由 $\{Y_k = f^{-1}\,\partial/\partial x^k \mid k = 1, \ldots, n\}$ 构成，因此，正如

$$[Y_i, Y_j] = \left[f^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x^i}, f^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x^j} \right] = -f^{-3}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial x^j} + f^{-3}\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i},$$

i.e.

$$[Y_i, Y_j] = \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} Y_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}\, Y_j \right) = \sum_{k=1}^{j} \gamma_{ij}^k\, Y_k,$$

$_n$我们有 $[Y_i, Y_j] = \sum \gamma_{ij}^k\, Y_k$，其中 Hamel 符号 γ_{ij}^k（这是写出与拉格朗日形式中动力学演化相对应的 Hamel-$_{k=1}$Boltzman 方程所必需的）给出为

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\delta_i^k - \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\delta_j^k \right).$$

考虑到这一点，我们对流形 TQ 上的坐标系进行坐标变换

$$(x^i, v^i) \mapsto (\bar{x}^i, \bar{v}^i)\ , \quad \bar{x}^i = x^i,\ \ \bar{v}^i = f v^i\,,$$

其中我们将保 留记号 $\bar{x}^i$ 以便清晰表述。注意，通过直接计算，我们得到

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & = & \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} v^i \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}\bar{v}^i \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \\ \dfrac{\partial}{\partial v^j} & = & f \dfrac{\partial}{\partial \bar{v}^j} \end{array} \right. .$$

相应地，

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d\bar{x}^k & = & dx^k \\ d\bar{v}^k & = & \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^l}\bar{v}^k dx^l + f\, dv^k \end{array} \right. ,$$

因此，

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx^k & = & d\bar{x}^k \\ dv^k & = & \dfrac{1}{f}\left(-\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^l}\bar{v}^k\, d\bar{x}^l + d\bar{v}^k \right) \end{array} \right. .$$

因此，由式 (4.3) 给出的向量场 Γ 的新坐标表达式 is

$$\Gamma(x, \bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{v}^i}{f}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{i=1}^{n} \left(f X^i(x, \bar{v}/f) + \bar{v}^i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}\bar{v}^j \right) \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i}. \tag{5.1}$$

要分析系统（4.1）在广义 Sundman 变换（2.3）下的行为，我们可以使用运算关系

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{f}\frac{d}{d\tau}\left(\left(\frac{1}{f} \right) \frac{d}{d\tau} \right) = \frac{1}{f^2}\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{1}{f^3}\frac{df}{d\tau}\frac{d}{d\tau}, \tag{5.2}$$

a因此，如果 $x(t)$ 是（4.1）的一个解，并且新参数 τ 已给出 by

$$\tau(t) = \int^t \frac{1}{f(\eta)}\, d\eta,$$

然后 $\bar{x}(\tau)$，使得 $\bar{x}(\tau(t)) = x(t)$ 满足二阶微分方程组

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = \bar{X}^i\left(\bar{x}, \frac{d\bar{x}^i}{d\tau}\right) \quad i = 1, \ldots, n,$$

with

$$\bar{X}^i\left(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\tau}\right) = f^2\, X^i\left(\bar{x}, \frac{1}{f}\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right) + \frac{d}{d\tau}(\log f)\,\frac{d\bar{x}^i}{d\tau}, \tag{5.3}$$

连同 the 条件 $\bar{v}^i = f\, v^i$，即 $d\bar{x}^i/d\tau = f\, dx^i/dt$。该系统可以改写为 as

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}^i}{d\tau} &= f\, v^i = \bar{v}^i \\ \dfrac{d\bar{v}^i}{d\tau} &= f^2\, X^i\left(\bar{x}, \dfrac{1}{f}\,\bar{v}\right) + \dfrac{d}{d\tau}(\log f)\,\bar{v}^i \end{cases}. \tag{5.4}$$

这表明，在广义 Sundman 变换下，式（4.3）所给出的向量场 Γ 的积分¯曲线的像，是由 $\Gamma(\bar{x}, \bar{v})$ 所给出的向量场的积分曲线

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{v}) = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{f}\bar{v}^j \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j}\bar{v}^i + f^2 X^i\left(\bar{x}, \frac{1}{f}\,\bar{v}\right)\right)\frac{\partial}{\partial \bar{v}^i}, \tag{5.5}$$

与（5.1）进行简单比较可得

$$\bar{\Gamma}(\bar{x}, \bar{v}) = f(\bar{x})\Gamma(\bar{x}, \bar{v}), \tag{5.6}$$

因此我们看到，在 Sundman 变换的作用下，式（4.3）所给出的相关¯二阶常微分方程向量场 Γ 被函数 $f \in C^\infty(Q)$，$\Gamma = f\,\Gamma$ 所乘。此外，¯注意到，新的向量场 $\Gamma = f\,\Gamma$ 不再是二阶常微分方程向量场。然而，在 Sundman 变换中 f 为常符号基本¯函数这一非常重要的特殊类别，即 $f \in C^\infty(Q)$，显然，关于与 S 通过 $\bar{S} = f^{-1}\,S$ 相关的新切结构 $\bar{S}$，新的向量场 $\Gamma = f\,\Gamma$ 是一个二阶常微分方程向量场。因此，Sundman 变换不仅相当于将向量场 Γ 乘以函数 f，还要考虑¯一个新的切结构；于是，关于由下式定义的新切结构，向量场 Γ 现在是一个二阶常微分方程向量场

$$\bar{S} = f^{-1}S = f^{-1}\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dx^j\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \otimes d\bar{x}^j\,,$$

配有刘维尔向量场

$$\bar{\Delta} = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \frac{\partial}{\partial \bar{v}^j} = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial v^j} = \Delta\,.$$

¯总之，如果 Γ 是通常切丛结构下的二阶常微分方程向量场，那么 Γ 就是由 $S = (1/f)S$定义的¯切结构下的二阶常微分方程向量场。

¯因此，从拟坐标中的向量场 Γ 的表达式 (5.5) 可以清楚地看出，在较简单且相关的情形下，当 X^i 是基本函数时，新向量场在关联坐标图中不是线性的。反过来，在一般情形下，可以尝试在可能的情况下确定函数 f，使向量场 Γ 关于相应关联拟坐标系的纤维坐标呈线性，即它在新的切结构中是纤维线性的。

还要注意，如果我们依次对系统 (4.2) 应用两个由函数 $f_1 \in C^\infty(Q)$ 和 $f_2 \in C^\infty(Q)$ 分别确定的 Sundman 变换 (2.3)，所得系统与应用由乘积 $f_2\, f_1 \in C^\infty(Q)$ 定义的 Sundman 变换所得到的系统相同，并且变换后的向量场相对于新的切结构 $\bar{S} = f_2^{-1}\, f_1^{-1}\, S$ 是一个二阶常微分方程向量场。此外，由于正实函数构成阿贝尔乘法李群，与 f^{-1} 对应的 Sundman 变换是由 f 定义的 Sundman 变换的逆元。

根据前面的讨论，对于任意二阶常微分方程向量场 Γ，可能存在一个¯正的基本函数 f，使得向量场 Γ（相对于新的近切结构 $\bar{S} = f^{-1}\, S$，它是一个二阶常微分方程向量场）在新的切结构下是线性的，或关于速度线性的。请注意，当我们考虑由函数 $f \in C^\infty(Q)$ 表征的 Sundman 变换（2.3）时，不仅要将给定的向量场 Γ变换为 Γ，还要将切丛结构 S改为 $\bar{S} = f^{-1}\, S$。不过，此时还有一个由拟坐标 $(x^i, \bar{v}^i)$ 确定的关于 TQ 的新坐标图。问题在于，何时可以选择函数 f，使变换后的向量场 Γ相对于改变后的切丛结构是纤维线性的。当函数 f 满足 $[\Delta, \Gamma] = 0$时，即可实现这一点。此外，有时也可以选择函数 f，使得向量场 Γ 对应于一个非齐次线性微分方程组。最后值得注意的是，运动常数往往可以用来使约化系统呈线性，即使原系统是非线性的；下文将通过一个示例加以说明。

根据式 (5.4) 中的第二个方程，在给定的 Sundman 变换下得到的新拟坐标关于新时间 τ 的时间演化为

$$\frac{d\bar{v}^i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} f \frac{\partial f}{\partial x^j} v^j\, v^i + f^2\, X^i(x, v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j} \bar{v}^j\, \bar{v}^i + f^2\, X^i\left(\bar{x}, \frac{\bar{v}}{f}\right), \tag{5.7}$$

¯因此， Γ 的积分曲线在底流形上的投影是二阶微分方程组的解

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{d\tau^2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j} \frac{d\bar{x}^j}{d\tau}\right) \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} + f^2 X^i\left(\bar{x}, \frac{1}{f}\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right). \tag{5.8}$$

6 标量二阶常微分方程的线性化

6.1 经典力学中的一个例子

本节考虑自治一维二阶常微分方程组的情形，即 $n = 1$。鉴于其在力学中的实用性，我们首先考虑 $X^1 = F$ 为基本函数的最简单情形。然后，由表达式（5.7）可得到对应于 $\Gamma = v\,\partial/\partial q + F(q)\ \partial/\partial v$的向量场的积分曲线方程:

$$\frac{d\bar v}{d\tau} = \frac{1}{f} f'(q)\,\bar v\,\bar v + f^2\,F(q), \tag{6.1}$$

其中， q 是 1 维流形 Q上的局部坐标。

对于由势函数 $\mathcal{V}$定义的系统这一特例，其中 $F = -\mathcal{V}'$，相应的二阶常微分方程向量场 Γ 在坐标 (q, v) 下，以及变换后的向量场$\bar\Gamma = f\,\Gamma$ 在坐标 $(\bar q, \bar v)$ 下，分别为

$$\Gamma(q,v) = v\frac{\partial}{\partial q} - \mathcal{V}'(q)\frac{\partial}{\partial v}\,, \qquad \bar\Gamma(\bar q,\bar v) = \bar v\frac{\partial}{\partial \bar q} + \left(\frac{f'}{f}\bar v^2 - f^2\mathcal{V}'(\bar q)\right)\frac{\partial}{\partial \bar v}\,.$$

但已知能量函数 $E = \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{V} = \frac{1}{2}(\bar v/f)^2 + \mathcal{V}$是一个守恒量；如果我们只研究能量为 E时的运动,

$$\frac{d\bar v}{d\tau} = f f'(q)\,2(E-\mathcal{V}) - f^2\,\mathcal{V}'(q) = \frac{d}{dq}\left(f^2(E-\mathcal{V})\right), \tag{6.2}$$

那么，当且仅当存在常数 A、 B和 C，使得 $f^2(E-\mathcal{V}) = A\,q^2 + B\,q + C$时，这就是关于变量 q 的非齐次线性微分方程。由此可得最终方程

$$\frac{d\bar v}{d\tau} = 2\,A\,\bar q + B \Longrightarrow \frac{d^2\bar q}{d\tau^2} = 2\,A\,\bar q + B.$$

对于库仑–开普勒问题中给定固定角动量 ℓ 、其中 q 是径向变量 r 且 $V(r) = -k/r$ 的径向方程这一极为相关的情形，我们有

$$\mathcal{V}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}, \qquad F(r) = -\mathcal{V}'(r) = \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{k}{r^2},$$

由 $f^2\,(E-\mathcal{V}) = Ar^2 + B\,r + C$，我们得到

$$f^2\left(E + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2r^2}\right) = Ar^2 + B\,r + C,$$

i.e.

$$f^2\,E = A\,r^2, \quad f^2\,k = B\,r^2, \quad \ell^2\,f^2 = -2\,C\,r^2,$$

因此，通解是 $f(r) = r$ 的倍数，其中

$$A = E, \quad B = k, \quad C = -\frac{\ell}{2},$$

然后，变换后的二阶微分方程为：

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = 2\,E\,r + k,$$

这就是 [48] 中给出的结果。值得注意的是，Sundman 变换与 ℓ 无关，因为 $f(r)$ 与 r 成正比。

作为一个方向相反的具体例子，我们可以从描述一维谐振子时间演化的线性二阶常微分方程向量场 Γ 出发，即 $\Gamma = v(\partial/\partial x) - \omega^2\,x(\partial/\partial v)$，它对应于 $F(x) = -\omega^2 x$，也就是 $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$。在这种情况下，在由给定函数 f 定义的 Sundman 变换下，

$$\bar{\Gamma}(\bar{x},\bar{v}) = f(\bar{x})\,\Gamma(x,\bar{v}) = \bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + \left(\frac{1}{f}\frac{df}{d\bar{x}}\bar{v}^2 - f^2\,\omega^2\,\bar{x}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\,, \quad \bar{v}^i = f\,v^i,$$

其积分曲线在底流形上的投影是微分方程的解

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} - \frac{1}{f}\frac{df}{d\bar{x}}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 + f^2\,\omega^2\,\bar{x} = 0,$$

也就是说，出现了一个额外的二次阻尼项，谐振子的线性性质也因此消失。反过来，这种形式的方程可以通过由函数 f^{-1} 定义的 Sundman 变换化为谐振子。例如，若 $f(x) = x^2$，则前一个方程化为

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} + \frac{2}{\bar{x}}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 + \omega^2\,\frac{1}{\bar{x}^3} = 0,$$

也就是说，这是在阻尼二次项 [49] 作用下对应于自由运动的 Ermakov-Pinney方程。这是接下来将要分析的可线性化实例的典型代表。

6.2 广义 Sundman 变换

我们指出，从几何观点来看，只有 Sundman 变换 $dt = f(x)\,d\tau$ 才有意义，即函数 f 不依赖于 t，因为后者不是一个坐标。然而，正如第 4 节所述，在适配坐标 y中，底流形 $Q = \mathbb{R}$ 上的线性结构具有 $\Delta_Q = y\,\partial/\partial y$ 的形式，并且给定二阶常微分方程的线性特征取决于坐标 y的选择。我们在线性化过程中的研究策略，是寻找一个从原坐标到适配坐标的坐标变换 $y = \varphi(x)$，以及一个 Sundman 变换 $d\tau = h(x)\,dt$ ，使原二阶常微分方程在新坐标 y 及其速度下变为线性方程。为此，我们将分几个步骤进行，通过寻找若干坐标变换和 Sundman 变换来简化二阶常微分方程的形式。换言之，我们允许将普通坐标变换与迄今所考虑的 Sundman 变换进行复合。在这一背景下，我们将形如 $y = x$, $d\tau = h(x)\,dt$ 的变换称为纯 Sundman 变换，并将 $y = \varphi(x)$， $d\tau = dt$ 称为纯坐标变换。通过复合这类变换，我们得到一个广义Sundman变换群 (h,φ)，其定义如下：

$$y = \varphi(x), \qquad d\tau = h(x)\;dt, \tag{6.3}$$

其复合律为

$$(h_2, \varphi_2) \star (h_1, \varphi) = ((h_2 \circ \varphi_1) h_1, \varphi_2 \circ \varphi_1).$$

单位元为 (1, id)，而 (h, φ) 的逆元为 $((1/h) \circ \varphi^{-1}, \varphi^{-1})$。纯 Sundman 变换具有 $(h,$ id) 的形式，并构成一个阿贝尔不变子群；而通常的坐标变换对应于 $(1, \varphi)$ 的形式，也构成一个子群。由于每个变换都可以分解为

$$(h, \varphi) = (1, \varphi) \star (h, \mathrm{id}) = (h \circ \varphi^{-1}, \mathrm{id}) \star (1, \varphi),$$

广义 Sundman 变换的集合是一个半直积群。

6.3 广义 Sundman 变换下的线性化

如果二阶常微分方程 $\ddot{x} = X(x, \dot{x})$ 可以变换为形式为 $\ddot{x} + A(x)\dot{x} + b(x) = 0$ 的二阶常微分方程，其中 A 和 b 是实函数，那么我们称该方程在广义 Sundman 变换下可纤维线性化（或在速度上可线性化）；如果该方程可以变换为形式为 $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + Bx + C = 0$ 的二阶常微分方程，其中 α、B、$C \in \mathbb{R}$ 是某些实数，则称该方程在广义 Sundman 变换下可线性化。请注意，当 $C \neq 0$ 时，变换后的方程是一个非齐次线性方程。

考虑一个标量二阶常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{6.4}$$

即一个一般的自治二阶微分方程。为了研究这类方程的可线性化性，注意到上述广义 Sundman 变换集合的群性质表明，可能的线性化变换可以分解为先进行坐标变换、再进行纯 Sundman 变换的复合，从而得到线性方程。反过来考察这一过程，我们首先可以确定原型线性方程在纯 Sundman 变换下的像的形式。这由一维情形的一般变换法则（5.8）给出，随后可见，该像是形如以下形式的二阶常微分方程类中的一个方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_0(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + A_0(x)\frac{dx}{dt} + b_0(x) = 0, \tag{6.5}$$

即，函数 $X(x, v)$ 关于变量 $v = dx/dt$ 是至多二次的多项式，换句话说，$\partial^3 X/\partial v^3 = 0$。但是，这样的方程类在坐标变换下是不变的，因为如果我们考虑 $\bar{x} = \varphi(x)$，那么

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2x}{dt^2},$$

于是 $\bar{x}$ 满足与 (6.5) 同类型的方程。因此，我们得到第一个结果：在广义 Sundman 变换下实现纤维可线性化的必要条件是，函数 $X(x, v)$ 关于变量 $v = dx/dt$ 至多为二次多项式，

换言之，$\partial^3 X/\partial v^3 = 0$，因此在广义 Sundman 变换下可线性化的二阶微分方程必须具有 (6.5) 的形式。这类二阶微分方程在广义 Sundman 变换下保持不变，并包含非齐次速度线性方程这一子集；该子集对应于 $\gamma_0 = 0$ 的方程 (6.5)。例如，我们可以指出，在 [50],中研究的类 Rayleigh 振子

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x}^3 + g(x)\dot{x}^2 + h(x)\dot{x} + k(x) = 0,$$

在广义 Sundman 变换下不可线性化。

我们必须确定方程（6.5）中哪些是可线性化的。通过适当的纯 Sundman 变换 $x_1 = x$, $dt_1 = h(x)\,dt$，总能消去（6.5）中的速度二次项。事实上，在这种变换下，二阶常微分方程具有如下形式

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + \left(\gamma_0 + \frac{h'}{h}\right)\left(\frac{dx_1}{dt_1}\right)^2 + \frac{1}{h}A_0\frac{dx_1}{dt_1} + \frac{1}{h^2}b_0 = 0,$$

因此，新的系数为

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{h'}{h}, \qquad A_1 = \frac{A_0}{h} \qquad \text{and} \qquad b_1 = \frac{b_0}{h^2}. \tag{6.6}$$

我们可以选取线性方程 ODE 的一个非平凡解作为函数 $h = h_0(x)$

$$\frac{dh}{dx} + \gamma_0(x)h = 0,$$

其通解为 $h(x) = K\exp\left(-\int \gamma_0(x)\,dx\right)$，其中 K 为任意常数，该常数对我们的目的无关紧要。如此选取函数 h 后，经由 h 定义的纯 Sundman 变换，二阶微分方程变为如下纤维线性方程

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + A_1(x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + b_1(x_1) = 0, \tag{6.7}$$

其中 $A_1 = A_0/h_0$ 和 $b_1 = b_0/h_0^2$。因此，给定类别（6.5）中的任意二阶常微分方程都可以通过纯 Sundman 变换实现纤维线性化。

此时我们应注意，如果 A_1 和 b_1 恒等于零（即 A_0 和 b_0 都恒等于零），那么我们已经得到一个特殊的线性方程，更具体地说，

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} = 0.$$

现在考虑这样的情形：这些函数中至少有一个不是零函数。请注意，一旦得到非齐次纤维线性二阶常微分方程，我们就只能使用将非齐次纤维线性二阶常微分方程变换为新的非齐次纤维线性二阶常微分方程的 Sundman 变换。这类变换比仿射坐标变换稍微一般一些，正如下述结果所述：

引理 6.1. i) 若广义 Sundman 变换 $\bar{x} = \varphi(x) \quad d\bar{t} = h(x) \; dt$ 保持非齐次纤维线性二阶常微分方程的集合不变，则存在一个实常数 $c \neq 0$，使得

$$\frac{d\varphi}{dx} = c\, h. \tag{6.8}$$

ii) 满足 (6.8) 的 Sundman 变换 $\bar{x} = \varphi(x) \quad d\bar{t} = h(x) \; dt$ 将每个非齐次纤维线性二阶常微分方程变换为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(x)\frac{dx}{dt} + b(x) = 0 \tag{6.9}$$

非齐次纤维线性二阶常微分方程

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} + \bar{A}(\bar{x})\frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{b}(\bar{x}) = 0, \tag{6.10}$$

其中

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{1}{h(x)}A(x) \qquad and \qquad \bar{b}(\bar{x}) = \frac{c}{h(x)}b(x). \tag{6.11}$$

Proof.- i) 在 Sundman 变换 $\bar{x} = \varphi(x), \quad d\bar{t} = h(x)\, dt$ 下，有

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}v, \tag{6.12}$$

and

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{h}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}\right)v^2 + \left(\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{d^2x}{dt^2}\right]. \tag{6.13}$$

因此，若原方程如 (6.9) 所示为非齐次纤维线性方程，则变换后的方程 (6.13) 也是非齐次纤维线性方程，当且仅当 v^2 的系数为零；也就是说，当且仅当函数 $(1/h)(d\varphi/dx)$ 为常数。这就证明了条件 (6.8)。

ii) 若 Sundman 变换 $\bar{x} = \varphi(x), \quad d\bar{t} = h(x)\, dt$ 满足条件 (6.8)，则有

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{c}{h(x)}\frac{d^2x}{dt^2},$$

换句话 说，它看起来像带有以下形式的非齐次纤维线性方程 (6.10)

$$\bar{A}(\bar{x})\bar{v} + \bar{b}(\bar{x}) = \frac{c}{h(x)}\left(A(x)v + b(x)\right).$$

由于在这种情况下，根据 (6.12)，$\bar{v} = c\, v$ 我们发现

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{1}{h(x)}A(x) \qquad \text{and} \qquad \bar{b}(\bar{x}) = \frac{c}{h(x)}b(x),$$

至此，证明完毕。

□

常数 c 的具体取值不会对线性化问题产生任何影响，因此不失一般性，我们可以令 $c=1$ （或在适当情况下令 $c=-1$ ）。

该结果表明，我们只能通过特殊类型的 Sundman 变换 $x_2 = \varphi(x_1)$、 $dt_2 = h(x_1)\,dt_1$ 来变换非齐次纤维线性二阶常微分方程（6.7），其中 $\varphi(x) = \int^x h(\zeta)\,d\zeta$，因为否则，（6.7）的变换后的方程将关于纤维变量呈非线性。对于这样的变换 $dx_2/dt_2 = dx_1/dt_1$ ，变换后的二阶常微分方程的表达式为

$$\frac{d^2x_2}{dt_2^2} + \frac{1}{h(x_1)}A_1(x_1)\frac{dx_2}{dt_2} + \frac{1}{h(x_1)}b_1(x_1) = 0, \tag{6.14}$$

其中，最后两项中用 $\varphi^{-1}(x_2)$ 代入 x_1 的过程是约定的。该二阶常微分方程是线性的，当且仅当函数 A_1/h 为常数，且函数 b_1/h 关于变量 x_2 为仿射函数。在微分方程（ 6.14 ）中，我们有两种不同的情况:

a) 如果 A_1 恒等于零（回顾一下， A_0 也恒等于零），我们可以在 Sundman 变换中选择函数 h 为 $h = |b_1|$ ，于是变换后的二阶常微分方程为

$$\frac{d^2x_2}{dt_2^2} + \beta = 0,$$

其中 $\beta = \text{sign}(b)$，我们假设它为常数（否则必须将 x_2 限制在一个区间内，使 b的符号保持不变）。Sundman 变换为 $x_2 = \int^{x_1} |b(\zeta)|\,d\zeta$和 $dt_2 = |b(x_1)|\,dt_1$。或者，我们也可以采用广义 Sundman 变换$x_2 = \int^{x_1} b(\zeta)\,d\zeta$， $dt_2 = |b(x_1)|\,dt_1$，变换后的二阶常微分方程为

$$\frac{d^2x_2}{dt_2^2} + 1 = 0.$$

b) 若 A_1 不是零函数，为使 dx_2/dt_2 的系数为常数，必须取 $h(x_1) = |A_1(x_1)|$ （相差一个无关紧要的乘法常数）。因此，变换 $x_2 = \int^{x_1} A_1(\zeta)\,d\zeta$, $dt_2 = |A_1(x_1)|\,dt_1$将给定的非齐次纤维线性二阶常微分方程 (6.7) 化为以下形式

$$\frac{d^2x_2}{dt_2^2} + \alpha\frac{dx_2}{dt_2} + b_2(x_2) = 0, \tag{6.15}$$

其中 α =sign(A)（我们再次假设其为常数），并且

$$b_2(x_2) = \frac{b_1(x_1)}{|A_1(x_1)|},$$

其中我们假设右侧的 x_1 被替换为其对应的 x_2 值。

保持上述二阶常微分方程 (6.15) 形式（即非齐次、纤维线性且系数为常数 α）的广义 Sundman 变换具有如下形式 $\bar{x} = m\,x_2 + n$,

$d\bar{t} = m\,dt_2$，其中 m 和 n 为某些常数。因此，上述形式 (6.15) 的二阶常微分方程要么是线性的，要么不可线性化。显然，当且仅当 $b_2(x_2)$ 是仿射函数时，新的二阶常微分方程才是线性的。换言之，当且仅当 db_2/dx_2 为常数时，

$$\frac{db_2}{dx_2} = B \in \mathbb{R}. \tag{6.16}$$

我们来求出原始数据 γ_0、A_0 和 b_0 必须满足的条件，使得 $b_2(x_2)$ 是仿射函数。利用链式法则以及 A_1 和 b_1 的定义 (6.6)，可得

$$B = \frac{dx_1}{dx_2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{b_1}{A_1}\right) = \frac{1}{A_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{b_0}{A_0 h_0}\right) = \frac{1}{A_0^3}\left(A_0\frac{d}{dx} + \gamma A_0 - A_0'\right) b_0.$$

考虑到若 z 是实函数，

$$z = \left(A_0\frac{d}{dx} + \gamma A_0 - A_0'\right) b_0,$$

我们有

$$\frac{d}{dx}(A_0^{-3}z) = A_0^{-3}z' - 3A_0^{-4}A_0'z = A_0^{-4}(A_0 z' - 3A_0' z),$$

可将条件 (6.16) 改写为

$$\frac{dB}{dx} = \frac{1}{A_0^4}\left(A_0\frac{d}{dx} - 3A_0'\right)\left(A_0\frac{d}{dx} + \gamma_0 A_0 - A_0'\right) b_0 = 0.$$

因此，我们得到了如下可线性化条件：二阶常微分方程 (6.5) 可线性化，当且仅当函数 A_0、b_0 和 γ_0 满足

$$\left(A_0\frac{d}{dx} - 3A_0'\right)\left(A_0\frac{d}{dx} + \gamma_0 A_0 - A_0'\right) b_0 = 0.$$

注意，该条件在前两种情形下（$A_0 = b_0 = 0$，或 $A_0 \neq 0$ 和 $b_0 = 0$）也成立。此外，我们可以证明，该条件在广义 Sundman 变换下保持不变：

定理 6.1。对于以下形式的二阶常微分方程类

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + A(x)\frac{dx}{dt} + b(x) = 0,$$

令 Q 为函数

$$Q = \left(A\frac{d}{dx} - 3A'\right)\left(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A'\right) b. \tag{6.17}$$

那么，　　条件 $Q = 0$ 在广义 Sundman 变换下保持不变。

Proof.- 我们已经看到，在纯 Sundman 变换 $d\tau = h(x)\,dt$ 下，系数函数按式 (6.6) 变换：

$$\gamma \mapsto \gamma + \frac{h'}{h}, \qquad A \mapsto \frac{A}{h} \qquad \text{and} \qquad b \mapsto \frac{b}{h^2}.$$

因此，该因子

$$P = \left(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A' \right) b$$

变换为

$$\left(\frac{A}{h}\frac{d}{dx} + \left(\gamma + \frac{h'}{h} \right)\frac{A}{h} - \left(\frac{A}{h} \right)' \right)\frac{b}{h^2} = \left(\frac{A}{h}\frac{d}{dx} + \left(\gamma + \frac{h'}{h} \right)\frac{A}{h} - \frac{A'}{h} + \frac{Ah'}{h^2} \right)\frac{b}{h^2} = \frac{1}{h^3}\left(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A' \right) b,$$

即， P 变换为 P/h^3。
因此， $Q = \left(A\dfrac{d}{dx} - 3A' \right) P$ 变换为

$$\left(\frac{A}{h}\frac{d}{dx} - 3\left(\frac{A}{h} \right)' \right)\frac{P}{h^3} = \left(\frac{A}{h}\frac{d}{dx} - 3\frac{A'}{h} + 3\frac{Ah'}{h^2} \right)\frac{P}{h^3} = \frac{1}{h}\left(A\frac{d}{dx} - 3A' + 3\frac{h'}{h}A \right)\frac{P}{h^3},$$

并利用

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{h^3} \right) = \frac{1}{h^3}\,\frac{d}{dx}P - 3\frac{h'}{h}P,$$

我们可知， Q变换为

$$\frac{1}{h^4}\left(A\frac{d}{dx} - 3A' \right) P = \frac{1}{h^4}Q.$$

因此 $Q \mapsto \dfrac{1}{h^4}Q$，从而条件 $Q = 0$ 在纯 Sundman 变换下保持不变。

在通常的坐标变换 $x \mapsto \bar{x} = \varphi(x)$ 下，系数函数的变化形式为

$$A \mapsto A \qquad b \mapsto J\,b \qquad \text{and} \qquad \gamma \mapsto \frac{1}{J}\left(\gamma - \frac{J'}{J} \right),$$

其中 $J(x) = d\varphi/dx$，当然 $d/dx \mapsto (1/J)\ d/dx$，因此 $A' \mapsto (1/J)\ A'$。项 $P = \left(A\dfrac{d}{dx} + \gamma A - A' \right) b$ 变换为

$$\begin{aligned}\left(A\frac{1}{J}\frac{d}{dx} \right. &\left. + \frac{1}{J}\left(\gamma - \frac{J'}{J} \right) A - \frac{1}{J}A' \right)(J\,b) = \frac{1}{J}\left(A\frac{d}{dx} + \left(\gamma - \frac{J'}{J} \right) A - A' \right)(J\,b) \\ &= \left(A\frac{d}{dx} + \left(\gamma - \frac{J'}{J} \right) A - A' + A\frac{J'}{J} \right) b = \left(A\frac{d}{dx} + \gamma - A' \right) b,\end{aligned}$$

即， P 是不变的。

因此， $Q = \left(A\dfrac{d}{dx} - 3A' \right) P$ 被变换为

$$\left(AJ\frac{d}{dx} - 3JA' \right) P = J \left(A\frac{d}{dx} - 3A' \right) P.$$

因此， $Q \mapsto JQ$，我们可以得出结论：条件 $Q = 0$ 在纯坐标变换下也保持不变。

由于广义 Sundman 变换可以由纯坐标变换与纯 Sundman 变换复合得到，因此条件 $Q = 0$ 在广义 Sundman 变换下的不变性也随之成立。

□

与线性二阶常微分方程的特殊情形一样，我们有 $Q = 0$，这表明给定条件也是必要的。总结这些结果，我们证明了以下结论。

定理 6.2. i) 二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, \frac{dx}{dt} \right)$$

可通过 Sundman 变换 $y = \varphi(x)$， $d\tau = h(x)\,dt$ 化为纤维线性形式，当且仅当它具有以下形式：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x)\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + A(x)\frac{dx}{dt} + b(x) = 0. \tag{6.18}$$

此外，它总可以变换为常系数 α 形式

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \alpha\frac{dy}{d\tau} + \beta(y) = 0,$$

其中 $\alpha = \operatorname{sign}(A)$（约定 $\alpha = 0$ if $A = 0$）。

ii) 二阶微分方程可线性化，当且仅当它具有以下形式，且系数 $\gamma(x)$、 $A(x)$ 和 $b(x)$ 满足 (6.18)

$$Q \equiv \left(A\frac{d}{dx} - 3A' \right) \left(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A' \right) b = 0. \tag{6.19}$$

具体而言：

- 如果 $A = 0$ 且 $b = 0$，那么该二阶常微分方程可以变换为以下形式

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = 0 \tag{6.20}$$

通过 Sundman 变换

$$y = x, \qquad d\tau = \exp\left(-\int^x \gamma(\zeta)\,d\zeta \right) dt. \tag{6.21}$$

- 如果 $A = 0$ 且 $b \neq 0$，那么二阶常微分方程可以变换为如下形式

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 1 = 0 \tag{6.22}$$

通过 Sundman 变换

$$y = \int^x b(\zeta) \exp\left(2\int^\zeta \gamma(\eta)\, d\eta\right) d\zeta, \qquad d\tau = |b(x)| \exp\left(\int^x \gamma(\zeta)\, d\zeta\right) dt. \tag{6.23}$$

- 如果满足 $A \neq 0$ 且条件（6.19）成立，则该二阶常微分方程可变换为以下形式

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \alpha\frac{dy}{d\tau} + By + C = 0, \tag{6.24}$$

其中 $\alpha = \text{sign}(A)$，通过 Sundman 变换

$$y = \int^x A(\zeta) \exp\left(\int^\zeta \gamma(\eta)\, d\eta\right) d\zeta, \qquad d\tau = |A(x)|\, dt. \tag{6.25}$$

□

7 Sundman 变换下可线性化系统的一些示例

本节通过一些具体示例说明可线性化系统的理论：

示例 7.1（Ermakov-Pinney [49]）。再次考虑微分方程

$$\ddot{x} + \frac{2}{x}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{x^3} = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

因此 $\gamma(x) = 2/x$, $A(x) = 0$ 且 $b(x) = \omega^2/x^3$。因此它是 Sundman 可线性化的，并可通过式 (6.23) 给出的变换化为形式 (6.22)

$$y = \omega^2 x^2, \qquad d\tau = \frac{\omega^2}{x}\, dt.$$

例 7.2（球面 [51] 上的测地线）。考虑一个完全类似的微分方程

$$\ddot{x} = 2\dot{x}^2 \cot x + \sin x \cos x,$$

因此 $\gamma(x) = -2\cot x$, $A(x) = 0$ 且 $b(x) = -\sin x \cos x$。它可通过式 (6.23) 给出的变换实现 Sundman 可线性化

$$y = \frac{1}{2\sin^2(x)}, \qquad d\tau = |\cot(x)|\, dt,$$

而变换后的二阶常微微分方程再次为 (6.22)。

例 7.3. 考虑微分方程 *[52]*

$$\ddot{x} + \frac{1}{x}\dot{x}^2 + x\,\dot{x} + \frac{1}{2} = 0, \tag{7.1}$$

因此 $\gamma(x) = 1/x$, $A(x) = x$ 以及 $b(x) = 1/2$。条件 $Q = 0$ 显然满足，因为

$$\left(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A'\right) b = \left(x\frac{d}{dx}\right)(1/2) = 0,$$

因此它是 Sundman 可线性化的。若考虑区间 $x > 0$，则由 (6.25) 给出的 Sundman 变换

$$y = \frac{1}{3}x^3, \qquad d\tau = x\,dt$$

将给定的二阶常微分方程变换为 (6.24) 所给出的形式,

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{2} = 0.$$

注意，方程 (7.1) 无法通过点变换线性化，因为它不满足 Lie 判据，但它是 Sundman 可线性化的。

例 7.4。作为前一个例子的推广，我们考虑微分方程

$$\ddot{x} + \frac{1}{x}\dot{x}^2 + x\,\dot{x} + b(x) = 0.$$

条件 $Q = 0$ 为

$$\left(A\frac{d}{dx} - 3A'\right)\left(A\frac{d}{dx} + \gamma\,A - A'\right) b = (\Delta_{\mathbb{R}} - 3)\Delta_{\mathbb{R}} b = 0,$$

其中 $\Delta_{\mathbb{R}} = x\partial/\partial x$。因此，当且仅当 $\Delta_{\mathbb{R}} b$ 是三次齐次的，即 $\Delta_{\mathbb{R}} b = 3k_1x^3$，且 $k_1 \in \mathbb{R}$, 从而 $b(x) = k_1x^3 + k_2$。由此可知，上述形式中更一般的、可通过 Sundman 变换线性化的二阶常微分方程为 $\ddot{x} + \frac{1}{x}\dot{x}^2 + x\dot{x} + k_1x^3 + k_2 = 0$。将该方程线性化的 Sundman$x$变换为 $y = \frac{1}{3}x^3$, $d\tau = |x|\,dt$。

例 7.5. Li ´énard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0, \tag{7.2}$$

以及广义 Sundman 变换的存在性

$$y = \varphi(x), \quad d\tau = F(x)\ dt,$$

能够将给定方程变换为

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 3\frac{dy}{d\tau} + y^3 + 2y = 0,$$

在 *[53]* 中进行了研究。

此外，还得到了从原方程导向线性方程的广义 Sundman 变换

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \sigma\frac{dy}{d\tau} + y = 0$$

也可以找到。

请注意，(7.2) 是主方程的一个特例

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x)\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + A(x)\frac{dx}{dt} + b(x) = 0, \tag{7.3}$$

其中 $\gamma(x) = 0$, $A(x) = f(x)$，且 $b(x) = g(x)$。还要回顾一下，可线性化条件为

$$Q \equiv \Big(A\frac{d}{dx} - 3A'\Big)\Big(A\frac{d}{dx} + \gamma A - A'\Big)b = 0, \tag{7.4}$$

在我们的这个特例中，它变为

$$\left(f(x)\frac{d}{dx} - 3f'(x)\right)\left(f(x)\frac{d}{dx} - f'(x)\right)g = 0,$$

因此

$$f^2\,g'' - f\,f''\,g - 3f\,f'\,g' + 3f'^2 g = 0.$$

于是，给定函数 f 后，函数 g 可以是变量 g 的线性二阶微分方程的解的线性空间中的任意函数。但由于 $g = f$ 是该方程的一个解，我们可以引入变量代换 $g = f\,\zeta$，从而得到方程 $f\,\zeta'' - f'\,\zeta' = 0$，这表明通解为

$$\zeta = k_1\int^x f(\xi)\,d\xi + k_2,$$

因此，可线性化条件蕴含函数 g 为

$$g(x) = k_1\,f(x)\int^x f(\xi)\,d\xi + k_2\,f(x),$$

这与 *[53]* 中定理2的结果一致。

该例可用于研究含有耗散项的 Li´énard 型方程。如 *[54]* 中所述，微分方程

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x}^2 + g(x)\,\dot{x} + h(x) = 0 \tag{7.5}$$

可通过纯 Sundman 变换 $d\tau = F(x)\,dt$ 化简为 Li´enard 方程。事实上，如果 *(7.2).*

$$F(x) = \exp\left(-\int^x f(\xi\,d\xi\right)$$

(7.5) 变为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \tilde{g}(x)\frac{dx}{d\tau} + \tilde{h}(x) = 0, \tag{7.6}$$

with

$$\tilde{g}(x) = g(x)\exp\left(\int^x f(\xi\, d\xi\right), \qquad \tilde{h}(x) = h(x)\exp\left(2\int^x f(\xi\, d\xi\right).$$

这一过程正是从 (6.5) 推导到 (6.7) 所采用的方法，并表明 (7.5) 在 Sundman 变换下的可线性化性归结为相应方程 (7.6) 的可线性化性。

8 结论与展望

本文发展了基于基本函数的二阶微分方程组 Sundman 变换几何方法。研究表明，与一阶微分方程组的情形一样，该方法实质上是用相应的共形相关动力向量场替代原动力向量场；但额外的代价是将通常的切丛结构替换为一种新的切结构，该结构取决于定义 Sundman 变换的基本函数，使得变换后的动力向量场相对于这一新切结构成为二阶常微分方程向量场。研究基于在切丛上使用拟坐标；事实证明，相对于新的切丛结构，这些拟坐标实际上是真正的切丛坐标。作为应用，我们研究了二阶微分方程的线性化，其中不仅考虑标准的 Sundman 变换，还考虑了同时涉及坐标变换的推广形式，因为线性取决于坐标的选择。最后，我们通过若干示例阐释了这一理论。

等价于欧拉-拉格朗日二阶微分方程组的二阶微分方程组是一类重要的特殊系统，因为它们在许多物理问题中具有重要意义，因此值得深入研究。尤其值得关注的是描述黎曼流形上的测地运动（M, g）的系统，以及更一般的自然系统（也称为力学型系统），其中存在可由势函数导出的力 V。这促使人们研究共形相关度量下的测地运动 [55]，以及涉及势函数的类似问题。这些问题已被证明与经典超可积系统的研究密切相关（参见 [56, 57] 及其中的参考文献）。

参考文献

[1] Levi-Civita, T.: 《关于受限三体问题中的奇异轨迹与碰撞》，《纯粹与应用数学年刊》9，1–32（1904）。[2] Levi-Civita, T.: 《论受限三体问题的定性解》，《数学学报》30，305–327（1906）。[3] Sundman, K.F.: 《关于三体问题的回忆录》，《数学学报》36，105–179（1913）。

[4] Levi-Civita, T.：《论三体问题的正则化》，《数学学报》42，99–144（1920）。[5] Duarte, L.G.S., Moreira, I.C., and Santos, F.C.：《非点变换下的线性化》，Journal of Physics A: Mathematical and General 27，L739–L743（1994）。[6] Blanes, S., and A. Iserles, A.：《求解哈密顿系统的显式自适应辛积分器》，Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 114，297–317（2012）。[7] Cirilli, S., Hairer, E., and Leimkuhler, B.：《自适应 Verlet 方法的渐近误差分析》，《BIT 数值数学》39，25–33（1999）。[8] Nacozy, P.：《关于时间变换和局部截断误差的讨论》，Celestial Mechanics 13，495–501（1976）。[9] Bohlin, K.：《关于二体问题及三体问题中的一种新积分法》，《天文学通报》28，113–119（1911）。[10] Borisov, A.V., and Mamaev, I.S.：《平面与曲空间中可积系统之间的关系》，Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 99，253–260（2007）。[11] González–León, M.A., Mateos–Guilarte, J., and de la Torre Mayado, M.：《球面上的双固定中心问题中的轨道》，《规律与混沌动力学》22，520–542（2017）。[12] Molero, F.J., Crespo, F., and Ferrer, S.：《关于欧拉方程重新参数化的注记》，《动力系统定性理论》16，453–466（2017）。[13] Bond, V.R., and Janin, G.：《以任意自变量表示的正则轨道要素》，Celestial Mechanics 23，159–172（1981）。[14] Bond, V.R.：《二体问题的变换》，Celestial Mechanics 35，1–7（1985）。[15] Cariñena, J.F., Ibort, L.A., and Lacomba, E.：《作为无穷小正则变换的天体力学时间缩放》，Celestial Mechanics 42，201–213（1988）。[16] Cariñena, J.F., Clemente-Gallardo, J., Jover-Galtier, J.A., and Marmo, G.：《从动力学到切丛几何：开普勒问题的应用》，《国际几何方法与现代物理学杂志》14，1750047（2017）。[17] Ciaglia, F.M., Marmo G. and Schiavone, L.：《从经典轨迹到量子对易关系》，载于《经典与量子物理》，G. Marmo 编，第9章，第163–185页。《施普林格物理学会议录》229，2019。[18] Cariñena, J.F., Martínez, E., and Muñoz-Lecanda, M.C.：《无穷小时间重新参数化及其应用》，《非线性数学物理学杂志》29，523–555（2022）。[19] Ferrer, S., and Sein-Echaluce, M.L.：《论 Szebehely-Bond 方程：受扰二体问题的广义 Sundman 变换》，Celestial Mechanics 32，333–347（1984）。

[20] Szebehely, V., 和 Bond, V.：将受扰二体问题变换为未受扰谐振子，Celestial Mechanics 30, 59–69 (1983).[21] Pellegrini, E., Russell, R.P., 和 Vittaldev, V.： F 和 G 利用 Sundman 变换求解 Stark 问题和开普勒问题的泰勒级数解，Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 118, 355–378 (2014).[22] Crampin, M.：欧拉–拉格朗日方程的微分几何及拉格朗日动力学中的逆问题，Journal of Physics A: Mathematical and General 14, 2567–2575 (1981).[23] Crampin, M.：拉格朗日动力学的切丛几何，Journal of Physics A: Mathematical and General 16, 3755–3772 (1983).[24] de Filippo, S., Landi, G. Marmo, G., 和 Vilasi, G.：定义切丛结构的张量场，Annales de l'I.H.P. Physique Th´eorique 50, 205–218 (1989).[25] Cari˜nena, J.F., Ibort, A., Marmo, G., 和 Morandi, G.： *Geometry from Dynamics: Clas-sical and Quantum*。施普林格，多德雷赫特，2015.[26] Grifone, J., 和 Mehdi, M.M.：完全可积系统中守恒定律的存在性及递归算子的刻画，美国数学会汇刊 349, 4609–4633 (1997).[27] Magri, F.：可积哈密顿方程的一个简单模型，《数学物理杂志》19, 1156–1162 (1978).[28] Magri, F., 和 Morosi, C.: *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian sys-tems*，研究报告 5/19，米兰大学 (1984).[29] Cari˜nena, J.F., 和 Ibort, L.A.：非诺特运动常数，Journal of Physics A: Mathematical and General 16, 1–7 (1983).[30] Ibort, A., 和 Marmo, G.：可积系统与超可积系统的几何，《理论数学物理》172, 1109–1117 (2012).[31] Clark, R.S., 和 Bruckheimer, M.：关于近切结构，巴黎科学院报告 251, 627–629 (1960).[32] Eliopoulos, H.A.：可微流形上的近切结构，巴黎科学院报告 255, 1563–1565 (1962).[33] Houh, C.S.：关于由满足 $F^2 = 0$的(1,1)型张量场 F 所定义的结构，加拿大数学通报 16, 447–449 (1973).[34] Brickell, F., 和 Clark, R.S.：可积近切结构，微分几何杂志 9, 557–563 (1974).[35] Clark, R.S., 和 Goel, D.S.：关于近切流形的几何，Tensor 24, 243–252 (1972).

[36] Grifone, J.：近切结构与联络，I, II。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊 22, 287–334, 291–338 (1972).[37] Yano, K., 和 Davies, E.T.：近切流形的微分几何，纯粹与应用数学年刊 103, 131-160 (1975).[38] Crampin, M.：用近切结构定义欧拉–拉格朗日场，《物理学快报A辑》95, 466–468 (1983).[39] Crampin, M., 和 Thompson, G.：仿射丛与可积近切结构，剑桥哲学学会数学论文集 98, 61–71 (1985).[40] Heard, W.B.： *Rigid Body Mechanics*, Wiley-VCH，2006.[41] Cari˜nena, J.F., Nunes da Costa, J.M., 和 Santos, P.：从李代数丛结构的角度看拟坐标，《物理学杂志A：数学与理论》40, 10031–10048 (2007).[42] Cari˜nena, J.F., Gheorghiu, I., Mart´ınez, E., 和 Santos, P.：拟坐标中的维里定理与李代数丛形式，《国际几何方法与现代物理学杂志》11, 1450055 (2014).[43] Cari˜nena, J.F., 和 Santos, P.：雅可比乘子与Hamel形式，《物理学杂志A：数学与理论》54, 225203 (2021).[44] Moyo, S., 和 Meleshko, S.V.：广义 Sundman 变换在两个二阶常微分方程线性化中的应用，《非线性数学物理学杂志》18 S1, 213–236 (2011).[45] Johnpillai, A.G., 和 Mahomed, F.M.：利用广义 Sundman 变换对一类 Liénard 型方程及其推广进行线性化，《应用数学与信息科学》7, 2355–2359 (2013).[46]I. Kol´aˇr, P.W. Michor, 和 J. Slov´ak, *Natural Operations in Differential Geometry*，施普林格出版社，2013.[47] Bolsinov, A.V., Borisov, A.V., 和 Mamaev, I.S.：Chaplygin约化乘子定理的几何化，《非线性》28, 2307–2318 (2015).[48] Kavle, H., Offin, D., 和 Portaluri, A.：通过Conley–Zehnder指标研究开普勒轨道，《动力系统定性理论》20, 10 (2021).[49] Reid, J.L., 和 Ray, J.R.：Ermakov系统、非线性叠加及非线性运动方程的解，《数学物理杂志》21, 1583–1587 (1980).[50] Sinelshchikov, D.I.：类 Rayleigh 振子的可线性化条件，《物理学快报A辑》384, 126655 (2020).

[51] Harrison, B.K.：用微分形式重新探讨一个古老问题：方程 $y'' = f(x, y, y')$ 何时以及如何线性化？，乌克兰国家科学院数学研究所论文集 43，第 1 部分，27–35（2002）。[52] Nakpim, W. 和 Meleshko, S.V.：利用广义 Sundman 变换对二阶常微分方程进行线性化，SIGMA 6，051（2010）。[53] Kudryashov, N.A. 和 Sinelshchikov, D.I.：关于 Li´enard 方程可积性的判据，《应用数学快报》57，114–120（2016）。[54]Kudryashov, N.A. 和 Sinelshchikov, D.I.：Li´enard 型方程的新型非标准拉格朗日量，《应用数学快报》63，124–129（2017）。[55] Tsamparlis, M.、Paliathanasis, A.、Basilakos, S. 和 Capozziello, S.：共形相关度量与拉格朗日量及其在宇宙学中的物理诠释，《广义相对论与引力》45，2003–2022（2013）。[56] Cari˜nena, J.F.、Santander, M. 和 Ra˜nada, M.F.：具有共形欧几里得度量的三维哈密顿系统的超可积性：与振子相关和开普勒相关的系统，《物理学杂志A：数学与理论》54，105201（2021）。[57] Cari˜nena, J.F.、Santander, M. 和 Ra˜nada, M.F.：三维曲率空间上的超可积性：球面 S^3 和双曲空间 H^3上的与振子相关和开普勒相关的系统，《物理学杂志A：数学与理论》54，365201（2021）。