arXiv:2304.00289v1 [math.NA] 1 Apr 2023

压力稳定化连续数据同化降阶模型

Xi Li，*Youcai Xu† 和 Minfu Feng‡

摘要

我们提出了一种基于连续数据同化（CDA）的新型降阶压力稳定化策略，用于二维不可压缩纳维–斯托克斯方程。我们在压力修正投影方法中引入反馈控制项，推导出一种基于 Galerkin 投影的连续数据同化本征正交分解降阶模型（POD-ROM），该模型同时使用压力模态和速度模态来计算降阶解。与现有降阶模型相比，该模型最大的优势在于借助连续数据同化，规避了混合 POD 速度-压力空间所需的标准离散 inf-sup 条件，同时保证了降阶解的高精度；此外，经典投影法将降阶速度与降阶压力解耦，从而进一步提高了计算效率。我们给出了关于 POD 模态的无条件稳定性和收敛性结果（达到离散误差精度），并通过基准测试验证了理论结果。

关键词：降阶压力稳定化；连续数据同化；压力修正投影方法

1 引言

降阶模型（ROM）是旨在替代全阶模型（FOM）的代理模型，例如有限元方法或有限体积方法，能够以较低的计算成本获得足够准确的结果。在需要处理长时间数值模拟的情况下，时间外推是必要的；或者在物理参数/几何参数频繁变化时，会出现多参数情形。构造降阶空间和建立基于投影的降阶模型通常采用本征正交分解（POD）、贪心算法等方法，以及 Galerkin 投影或佩特罗夫–伽辽金投影。本文采用基于 Galerkin 投影的 POD 降阶模型（G-POD-ROM）。有关降阶模型的更多细节和扩展可参见[22, 37]。

降阶模型已广泛应用于许多不同领域；具体而言，在由相对少数反复出现的空间结构主导的流体领域，降阶模型已成功用于高效求解欧拉方程 [30], 对流-扩散-反应 [28], 不可压缩纳维–斯托克斯方程（NSE）[34] 以及瑞利–贝纳德对流 [6, 44], 等方程。然而，特别是在处理原始变量形式的纳维–斯托克斯方程时，若本征正交分解降阶模型采用混合有限元方法作为直接数值模拟（DNS），如何证明数据驱动的降阶混合空间之间满足某些兼容性条件，仍是一个开放问题，例如 LBB_r 条件（本征正交分解降阶模型中对应于混合有限元 inf-sup/LBB_h 条件的条件）。这会导致伪数值振荡；而在某些

*四川大学数学学院，中国四川省成都市610064（li xi@stu.scu.edu.cn）。该作者的研究工作得到中国国家自然科学基金（项目编号11971337）资助。

†四川大学数学学院，中国成都（xyc@scu.edu.cn）。

‡通讯作者。四川大学数学学院，中国四川成都610064（fmf@scu.edu.cn）。该作者的工作得到了国家自然科学基金委员会（项目编号11971337）的资助。

压力变量至关重要且不可忽略 [35]的情形下，已有研究从不同角度提出了若干技术或方法来应对这一问题，例如扩展降阶速度空间先验地基于满足 LBB_r 条件，通过 supremizer 丰富化 [4, 39], 后验地恢复降阶压力后验地通过压力泊松方程（PPE） [1, 7] ，或采用压力稳定 Petrov-Galerkin 方法 [10], ，将压力稳定项加入 G-POD-ROM[2, 20, 36, 43] ，或通过罚方法／人工压缩方法／投影方法放宽不可压缩约束 [15, 33]。这些方法各有优点，也存在一些不足；例如，supremizer 丰富化需要额外构造精确或近似的 supremizer 空间；采用压力泊松方程则会引入人工边界条件；PSPG 或其他稳定化技术则需要选择稳定化参数。在这些方法中，以消除步末速度为形式的投影方法优于上述其他方法，因为它能解耦速度-压力变量，且可模块化实现，并采用固定的压力增量参数（即 Δt，时间步长大小）。

压力修正投影方法因其解耦性、高效性和易于实现，已成为经典方法。一个自然的问题是：如何推导压力修正投影降阶模型？数据同化（DA）是指一大类将实验/观测数据纳入模拟的技术。本文采用 [3] 提出并称为连续数据同化（CDA）的一种数据同化方法，该方法将反馈控制项并入原始模型，并通过该项将模拟解引导至实验/观测数据，从而提高数值解的精度，或使原始的不适定物理模型正则化。在直接数值模拟（DNS）层面，CDA 的稳定性与收敛性已得到证明；Zerfas、Rebholz、Schneier 和 Iliescu [47] 首次将这一技术引入降阶模型，以提高降阶解的精度。精度不足也是降阶模型的主要缺陷之一，因此这一问题长期受到降阶模型领域的关注。其他类似研究包括 [17] 等。我们注意到，关于利用 CDA 获得高精度降阶解的研究并不多；上述两种成功的结合方案都旨在消去压力以求得降阶速度，随后求解 Burgers 型 Navier–Stokes 方程降阶模型。受 [42] 中关于许多重要实际应用里，G-POD-ROM 的精度不足往往表现为伪数值振荡这一论述的启发，我们使用 CDA 提高降阶压力的精度。我们发现，这样做可以规避 LBB_r 条件，从而先验地获得降阶压力。

本文提出、分析并验证了一种连续数据同化压力修正投影 G-POD-ROM（CDA-Proj-POD-ROM）。作为投影方法的一种修正方案，该方法能以较低的计算复杂度获得所需的高精度高保真解，从而缩短离线阶段的准备时间。通过 Galerkin 投影得到的降阶模型继承了速度-压力降阶变量解耦的形式，因此无需处理求解纳维–斯托克斯方程数值方案所产生的鞍点系统。降阶模型中同时引入了速度和压力 nudging 项：前者用于提高降阶速度的精度，从而保持降阶系统能量稳定；后者则通过提高降阶压力的精度，避免伪数值振荡的出现，最终实现降阶压力与速度精度同步提升。据作者所知，这是首次将连续数据同化用于 G-POD-ROM 的压力稳定技术。本文的主要贡献是提出一种新颖的替代方法，以获得稳定且高精度的降阶压力。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍本方案和分析所需的预备知识与记号。第 3 节提出我们的 CDA-Proj-POD-ROM，并给出数值分析。第4 节通过数值实验验证我们的降阶模型。最后，第 5 节总结全文并展望未来研究方向。

本文中，我们用 C 表示一个与 Δt、 h 无关的正数常数；该常数在不同位置未必相同。特别地， $C(f)$ 表示该常数与函数或参数 f 有关。

2 预备知识与符号

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界 $\partial\Omega$ 足够光滑的有界开域。 $L^p(\Omega)$ $1 \le p \le \infty$，其内积 $(\cdot,\cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|$ 均按通常方式定义。Sobolev空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其范数$\|\cdot\|_{m,p}$的定义也与文献 [5, p.23] 中的标准定义一致。此外，我们使用缩写 $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ 和 $\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_{m,2}$，它是一个带有标量积的 Hilbert空间。我们用 $H_0^1(\Omega)$ 表示在 $\partial\Omega$ 上迹为零的 $H^1(\Omega)$ 函数空间，用 $H^{-1}(\Omega)$ 表示其对偶空间。Sobolev空间的向量形式以及向量值函数均用粗体字母表示，例如 $\boldsymbol{H}^m(\Omega) := (H^m(\Omega))^2$。

我们考虑采用原始变量、满足无滑移边界条件的非定常不可压缩Navier–Stokes 方程（NSEs）：

$$\begin{aligned} &\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \text{and} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \text{in } \Omega\times(0,T], \\ &\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \text{ on } \partial\Omega, \quad \boldsymbol{u}(0,x) = \boldsymbol{u}_0(x), \text{ in } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

未知量为向量函数 $\boldsymbol{u}$（速度）和标量函数 p（压力）， $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x,\ t)$ 为已知的体力， ν 为运动黏度。

我们将自然速度空间取为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$，压力空间取为 $Q = L_0^2(\Omega)$，其中的函数在 Ω 上积分为零。在 $H_0^1(\Omega)$ 中，有 Poincar´e 不等式 [5, p.135]：存在一个仅依赖于 Ω 的常数 C_P，使得对于 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$，

$$\|v\| \le C_P\|\nabla v\|. \tag{2.2}$$

该不等式表明， $H^1(\Omega)$ 中的半范数 $|v|_1 := \|\nabla v\|$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数。设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的一族一致正则三角剖分，其意义见 [13, p.111]，且 $\overline{h} := \max_{K\in\mathcal{T}_h}\{h_K | h_K := \operatorname{diam}(K)\}$。$(\boldsymbol{X}_h, Q_h) \subset (\boldsymbol{X}, Q)$ 表示相容且满足inf–sup稳定性的有限元（FE）空间。本文考虑 $(\boldsymbol{X}_h, Q_h) = (\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_{k-1})$，计算中取 $k = 2$。由网格的拟一致性，对 $\forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h$，以下逆不等式成立

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_{W^{m,p}(K)} \le C_{\text{inv}} h_K^{n-m-d\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|\boldsymbol{v}_h\|_{W^{n,q}(K)}, \tag{2.3}$$

其中 $0 \le n \le m \le 1, 1 \le q \le p \le \infty$。该不等式对 $\forall q_h \in Q_h$ 也成立。对流项采用斜对称对流形式

$$b(u,v,w) := \frac{1}{2}(u\cdot\nabla v, w) - \frac{1}{2}(u\cdot\nabla w, v) \quad \forall u,v,w \in X.$$

可立即通过以下方式得到 b 的等价形式

$$b(u,v,w) = (u\cdot\nabla v, w) - \frac{1}{2}((\nabla\cdot u)v, w) \quad \forall u,v,w \in X,$$

并且我们将利用 b 的斜对称性，即对于 $u, v \in X$，有 $b(u,v,v) = 0$。

为了构建降阶模型（ROM），我们采用有限元方法（FEM）和一阶半隐式后向差分公式（BDF1），分别对空间和时间进行离散，以离散连续变分纳维-斯托克斯方程：对于任意 $t > 0$，求 $(\boldsymbol{u}(t)\ p(t)) \in (\boldsymbol{X}, Q)$，使得对于 $\forall(\boldsymbol{v}, q) \in (\boldsymbol{X}, Q)$，

$$\begin{cases} (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \nu(\nabla\boldsymbol{u}, \nabla\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - (p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}) = (f, \boldsymbol{v}), \\ (\nabla\cdot\boldsymbol{u}, q) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

得到以下方案，记为全阶模型（FOM）：给定初始条件 $(\boldsymbol{u}_h^0, p_h^0, p_h^{-1})$，其中 $\boldsymbol{u}_h^0 = \Pi \boldsymbol{u}_0$, Π 可以是拉格朗日插值，也可以是到有限元空间的 L^2 投影算子，时间步总数为 N。然后，对于 $n = 1, 2, \cdots, N-1$ 和 $\forall (\boldsymbol{v}_h, q_h) \in (\boldsymbol{X}_h, Q_h)$，求 $(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in (\boldsymbol{X}_h, Q_h)$，使其满足

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) + \nu\left(\nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_h\right) + b\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}_h\right) + \left(\nabla\left(2p_h^n - p_h^{n-1}\right), \boldsymbol{v}_h\right) = \left(f^{n+1}, \boldsymbol{v}_h\right), \\ \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^{n+1}, q_h\right) + \Delta t\left(\nabla\left(p_h^{n+1} - p_h^n\right), \nabla q_h\right) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

注 2.1. 对于 t 关于 p_h^{-1}，我们遵循 *[21]* 中的建议，在计算中选取 $p_h^{-1} = p_h^0$.

鉴于我们将在下一节中采用有限元解作为快照来构建降阶模型，因此在这种情况下，精确解与降阶解之间的逼近误差将由三部分组成：空间误差、时间误差和降阶模型离散误差。为了分析逼近误差的收敛性，我们需要对纳维–斯托克斯方程作出以下正则性假设。这些假设在某些现实情况下可能并不成立，但为了理论分析的需要，我们仍作此假设。

假设 2.1. 我们假设纳维–斯托克斯方程的解满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \in L^\infty\left(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega)\right) \cap H^1\left(0, T; \boldsymbol{H}^{k+1}(\Omega)\right) \cap H^2\left(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega)\right) \\ &p \in L^2\left(0, T; H^{k+1}(\Omega)\right), \ \boldsymbol{f} \in L^2\left(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

基于上述关于连续解的假设，下面的引理给出了前两项误差；这些误差已在有限元领域得到分析和验证，例如 [21]。

引理 2.1（[21] ）。全阶模型-全阶模型（*2.5*）中的有限元解满足以下最优误差估计 .

$$\begin{aligned} \max_{0 \le n \le N} \left\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}\left(t^n\right)\right\| &\le C(\boldsymbol{u}, p)\left(\Delta t + h^{k+1}\right), \\ \max_{0 \le n \le N} \left\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}\left(t^n\right)\right\|_1 + \max_{0 \le n \le N} \left\|p_h^n - p\left(t^n\right)\right\| &\le C(\boldsymbol{u}, p)\left(\Delta t + h^k\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

以下符号和引理将在后文中使用

$$\|\cdot\|_{\ell^2(L^2)} := \left(\Delta t \sum \|\cdot\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\cdot\|_{L^2(L^2)} := \left(\int_0^T \|\cdot\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

在接下来关于降阶解的收敛性分析中，我们将估计 $\|u_h^n\|_{W^{s,\infty}}$、$s = 0$、**1**。为此，我们使用修正的 Stokes 投影 s_h 作为中间变量。与经典Stokes投影 [23], 相比，该投影由 [14] 引入，旨在避免投影误差上界中出现 $1/\nu$ 。具体而言，设（u, p）为连续 Navier-Stokes 方程（2.1）在 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^{k+1}$、$p \in Q \cap H^k$、$k \ge 1$条件下的解，其中 $t \ge 0$，则（$\boldsymbol{u}$，**0**）是以下 Stokes问题的解

$$\begin{cases} -\nu \Delta \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \tilde{p} = g, \\ \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} = 0. \end{cases}$$

其右端项为

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} - \partial_t \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \nabla p.$$

将试验函数乘以上述斯托克斯方程，分部积分后，采用满足 inf-sup 条件的稳定混合有限元 $(\boldsymbol{X}_h, Q_h)$ 进行离散，可得离散解，并将其速度分量记为 $\boldsymbol{s}_h$；于是，以下界与稳定性成立

引理 2.2 (修正的 Stokes 投影的误差与稳定性估计 [36])。 对于 $\forall t \geq 0$, $(u(t)\ p(t))$表示纳维–斯托克斯方程（2.1）的解， $\boldsymbol{s}_h$ 是上述定义的混合有限元速度解。以下界成立

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s}_h\|_1 \leq Ch^k\|\boldsymbol{u}\|_{k+1}.$$

and

$$\|\boldsymbol{s}_h\|_\infty \leq C_{1,S}(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}\|_2)^{1/2}.$$

$$\|\nabla\boldsymbol{s}_h\|_\infty \leq C_{2,S}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_\infty.$$

其中三个常数 C,C_1、S,C_2、S 均与 ν 无关。

引理 2.3 （离散 Gronwall 引理[24]）。 设 k、B 和 a_j、b_j、c_j、γ_j，对于整数 $j \geq 0$，它们均为非负数，且满足

$$a_n + k\sum_{j=0}^{n} b_j \leq k\sum_{j=0}^{n}\gamma_j a_j + k\sum_{j=0}^{n} c_j + B \quad for\ n \geq 0.$$

假设对所有 j， $k\gamma_j < 1$ 均成立，并令 $\sigma_j = (1-k\gamma_j)^{-1}$。那么，

$$a_n + k\sum_{j=0}^{n} b_j \leq \exp\left(k\sum_{j=0}^{n}\sigma_j\gamma_j\right)\left\{k\sum_{j=0}^{n} c_j + B\right\} \quad for\ n \geq 0.$$

2.1 降阶模型预备知识

本文将采用本征正交分解（POD）技术生成降阶解。为此，我们首先需要在给定时间区间上运行有限元全阶模型（2.5），并收集其高保真解，以构成速度和压力快照矩阵

$$\mathcal{U} := \left\langle \boldsymbol{u}_h^1, \boldsymbol{u}_h^2, \cdots, \boldsymbol{u}_h^M \right\rangle, \quad \mathcal{P} := \left\langle p_h^1, p_h^2, \cdots, p_h^M \right\rangle,$$

对应于 M 个不同的离散时间点，且两个维度分别为 d_u、d_p。在快照矩阵中加入差分商（DQs） $\partial f^i := (f^i - f^{i-1})/\Delta t$， $i = 2,\ 3,\ \cdots,\ M$，其中函数 f 对应离散时间点 $t = t_i$，这也是一种常见做法。为简洁起见，我们仅考虑不含差分商的快照情形。关于添加差分商对降阶模型的影响，请参见[25]; [29]已证实，若要获得分片最优投影误差，则必须包含差分商。我们对速度和压力均采用 L^2 内积来构造相关矩阵 $K_u = \left((k_{i,\ j}^u)\right) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ 和 $K_p = \left((k_{i\ ,\ j}^p)\right) \in \mathbb{R}^{M\times M}$，其中:

$$k_{i,j}^u := \frac{1}{M}(\boldsymbol{u}_h^i, \boldsymbol{u}_h^j), \quad k_{i,j}^p := \frac{1}{M}(\boldsymbol{p}_h^i, \boldsymbol{p}_h^j).$$

POD 旨在寻找一个低维基，使其相对于最小二乘残差范数能够最优地逼近这些快照。按照[31]，，进行奇异值分解（SVD），并选取主导广义特征函数作为基，称为 POD 基。我们用 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{d_u} > 0$ 表示 K_u 的正特征值，用 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$、.....、$\boldsymbol{x}_{d_u} \in \mathbb{R}^M$ 表示相应的特征向量。类似地， $\{\theta_i, \boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^{d_p}$ 是 K_p 的特征对。于是，（正交归一的）POD 基可明确写为

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \frac{1}{\sqrt{M\lambda_k}}\sum_{j=1}^{M} x_k^j \boldsymbol{u}_h^j, \quad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{M\theta_k}}\sum_{j=1}^{M} y_k^j p_h^j.$$

为简单起见，我们选择 $r_u = r_p = r$ 作为降阶空间的维数，用于张成降阶速度空间和压力空间

$$\boldsymbol{X}_r = \left\langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_r \right\rangle, \quad Q_r = \left\langle \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r \right\rangle.$$

获得上述低维空间后，有限元全阶模型（2.5）通过 Galerkin 投影到（$\boldsymbol{X}_r$， Q_r）中，从而得到以下普通 POD 降阶模型（G-POD-ROM）：

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n, \boldsymbol{v}_r\right)+\nu\left(\nabla \boldsymbol{u}_r^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_r\right)+b\left(\boldsymbol{u}_r^n, \boldsymbol{u}_r^{n+1}, \boldsymbol{v}_r\right)+\left(\nabla\left(2 p_r^n-p_r^{n-1}\right), \boldsymbol{v}_r\right)=\left(\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_r\right), \\ \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_r^{n+1}, q_r\right)+\Delta t\left(\nabla\left(p_r^{n+1}-p_r^n\right), \nabla q_r\right)=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

定义 2.1。我们定义如下 L^2 正交投影算子 Π_r^u, Π_r^p

$$\left(\boldsymbol{u}-\Pi_r^u \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_r\right)=0, \ \forall \boldsymbol{v}_r \in \boldsymbol{V}_r, \quad \left(p-\Pi_r^p p, q_r\right)=0, \ \forall q_r \in Q_r.$$

$W^s, \infty, s=0,1$ 稳定性可由以下引理得到，其证明见附录。

引理 2.4。上述定义的 L^2 正交投影算子 Π_r^u在 $W^s, \infty, s=0,1$ 中是稳定的，其中$\forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{X}_h$

$$\left\|\Pi_r^u \boldsymbol{v}_h\right\|_{L^\infty} \leq C_{stab,0} \quad and \quad \left\|\nabla \Pi_r^u \boldsymbol{v}_h\right\|_{L^\infty} \leq C_{stab,1}. \tag{2.8}$$

证明。 见附录 A。 □

正如我们在本节开头所指出的，差分商的存在可以证明最优的分片投影误差 [29], ，而这一点在过去二十年中一直是假设。本文也作出同样的假设，该假设可以通过差分商加以证明；同时，差分商的出现不会损害本文中的理论和数值结果。

假设 2.2。我们有如下分片时间投影误差

$$\begin{aligned} &\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\right\|^2 \leq C \sum_{i=r_u+1}^{d_u} \lambda_i, \quad \left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|^2 \leq C \sum_{i=r_u+1}^{d_u} \lambda_i\left\|\nabla \varphi_i\right\|^2, \\ &\left\|p_h^n-\Pi_r^p p_h^n\right\|^2 \leq C \sum_{i=r_p+1}^{d_p} \theta_i, \quad \left\|\nabla\left(p_h^n-\Pi_r^p p_h^n\right)\right\|^2 \leq C \sum_{i=r_p+1}^{d_p} \theta_i\left\|\nabla \psi_i\right\|^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2 数据同化预备知识

我们将 I_H 视为满足以下条件的插值算子：对于给定的网格 $\mathcal{T}_H$ 及 $H \leq 1$,

$$\|I_H(w)-w\| \leq C_{1,H} H\|\nabla w\|, \tag{2.10}$$

$$\|I_H(w)\| \leq C_{2,H}\|w\|, \tag{2.11}$$

对于任意 $w \in H^1(\Omega)$。例如，这对投影到分片常数空间上的 L^2 成立；对于光滑函数，Scott-Zhang 插值算子或拉格朗日插值也满足这一条件。对于（未知的）真解u， $I_H(u)$表示对真解中可观测部分的近似。本文假设可以在任意时刻观测到 $I_H(u)$。我们指出，在计算层面， I_H 可以采用 Cl´ément 插值（用于 [16], ）、 [18]中的拉格朗日插值、 L^2 中的投影，以及 [19], 中的修正L^2 投影；所有这些算子都作用于分片常数空间。在下文的数值实验中，我们采用上述最后一种方法。

3 连续数据同化 POD 降阶模型与分析

我们新提出的连续数据同化 POD 降阶模型在 G-POD-ROM(2.7) 中引入反馈控制（惩罚）项，旨在将降阶解（$\boldsymbol{u}_r^{n+1}$，p_r^{n+1}）牵引至与观测数据相对应的参考解（$\boldsymbol{u}^{n+1}$，p^{n+1}）。具体而言，我们在 G-POD-ROM(2.7) 的动量方程中加入速度惩罚项，以提高降阶速度的精度；并在人工可压缩方程中加入类似项，目的相同，但其效果是可以直接求解，得到与降阶速度耦合的表格和精确的降阶压力，而无需通过某些压力恢复技术（例如压力泊松方程）在事后恢复压力 $a\ posterior$。因此，连续数据同化压力校正投影 POD 降阶模型（CDA-Proj-POD-ROM）具有如下形式：求（$\boldsymbol{u}_r^{n+1}$，p_r^{n+1}）$\in (\boldsymbol{X}_r,\ Q_r)$，使得对于$\forall(\boldsymbol{v}_r,\ q_r) \in (\boldsymbol{X}_r,\ Q_r)$，有

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^{n},\boldsymbol{v}_r\right)+\nu\left(\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1},\nabla\boldsymbol{v}_r\right)+b\left(\boldsymbol{u}_r^{n},\boldsymbol{u}_r^{n+1},\boldsymbol{v}_r\right) \\ \qquad\qquad +\left(\nabla\left(2p_r^{n}-p_r^{n-1}\right),\boldsymbol{v}_r\right)+\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}^{n+1}),I_H\boldsymbol{v}_r)=\left(\boldsymbol{f}^{n+1},\boldsymbol{v}_r\right), \\ \left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_r^{n+1},q_r\right)+\Delta t\left(\nabla\left(p_r^{n+1}-p_r^{n}\right),\nabla q_r\right)+\gamma_p(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1}),I_Hq_r)=0, \end{cases} \tag{3.12}$$

对于 $n=n_0,n_0+1,\cdots N$, $n_0\geq 1$，以及通过 Galerkin 投影得到的初始条件 $(\boldsymbol{u}_r^{n_0},p_r^{n_0},p_r^{n_0-1})$ $=(\Pi_r^u\boldsymbol{u}_r^{n_0},\Pi_r^pp_r^{n_0},\Pi_r^pp_r^{n_0-1})$，$\gamma_u,\gamma_p$ 分别是对应于速度和压力的牵引参数。

上述速度牵引同化项（压力牵引同化项）中的测试函数 $I_H\boldsymbol{v}_r$（分别为 I_Hq_r）与提出连续数据同化 [3]，的论文中的测试函数 $\boldsymbol{v}_r$ 并不完全相同，而是遵循了 [38] 中为实现高效计算和长期稳定性提出的建议。这一修改不会损害收敛性，正如 [16,18,47] 等文献中已采用并分析的那样。

3.1 稳定性

在本小节中，我们将对 CDA-Proj-POD-ROM(3.12)进行一些数值分析。首先，可以得到降阶速度和压力的以下无条件稳定性结论。

定理 3.1。假设初始解是稳定的，则对于 $n\geq n_0$ 和 $\forall\gamma_u,\ \gamma_p\geq 0$，我们有

$$\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2+\Delta t^2\|\nabla p_r^{n+1}\|^2+\nu\Delta t\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{j+1}\|^2\leq C_{init}+C_{cont},$$

其中初始数据和连续数据定义为

$$\begin{aligned} C_{init}&:=\|\boldsymbol{u}_r^1\|^2+\Delta t^2\|\nabla p_r^1\|^2+1/2\Delta t\gamma_pC_{2,H}^2\|p_r^1-p_r^0\|^2, \\ C_{cont}&:=T\left[C_P^2/\nu\|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2)}+C_{2,H}^2\left(6\gamma_p\|p\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\gamma_u\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2)}\right)\right]. \end{aligned}$$

证明。令（$\boldsymbol{v}_r,\ q_r$）$=$（$\boldsymbol{u}_r^{n+1},\ 2p_r^n-p_r^{n-1}$），利用斜对称性，方案（3.12）变为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^{n},\boldsymbol{u}_r^{n+1})+\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2+\Delta t\left(\nabla(p_r^{n+1}-p_r^{n}),\nabla(2p_r^{n}-p_r^{n-1})\right) \\ &\quad+\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}^{n+1}),I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1})+\gamma_p\left(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1}),I_H(2p_r^{n}-p_r^{n-1})\right)=(\boldsymbol{f}^{n+1},\boldsymbol{u}_r^{n+1}). \end{aligned}$$

这等价于

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n,\boldsymbol{u}_r^{n+1}\right)+\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2+\Delta t\left(\nabla(p_r^{n+1}-p_r^n),\nabla p_r^{n+1}\right)+\gamma_p\left(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1}),I_H(p_r^{n+1})\right)\\ +\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}^{n+1}),I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1})\\ =(\boldsymbol{f}^{n+1},\boldsymbol{u}_r^{n+1})+\Delta t\left(\nabla(p_r^{n+1}-p_r^n),\nabla(p_r^{n+1}-p_r^n)-\nabla(p_r^n-p_r^{n-1})\right)\\ +\gamma_p\left(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1}),I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p_r^n-p_r^{n-1})\right)\\ :=S_1+S_2+S_3.\end{aligned}$$

对于 S_1,

$$|S_1|\le\frac{C_P^2}{2\nu}\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2,$$

对于 S_2，在方案中令 $q_r=p_r^{n+1}-p_r^n$ 在 $t=t_{n+1}$ 和 $t=t_n$ 处分别取值，代入第二个方程可得

$$\begin{aligned}\left(\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n),p_r^{n+1}-p_r^n\right)+\Delta t\left(\nabla\left(p_r^{n+1}-p_r^n\right)-\nabla\left(p_r^n-p_r^{n-1}\right),\nabla(p_r^{n+1}-p_r^n)\right)\\ +\gamma_p(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1})-I_H(p_r^n-p^n),I_H(p_r^{n+1}-p_r^n))=0,\end{aligned}$$

这意味着,

$$\begin{aligned}S_2&=-\left(\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n),p_r^{n+1}-p_r^n\right)-\gamma_p(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1})-I_H(p_r^n-p^n),I_H(p_r^{n+1}-p_r^n))\\ &:=S_{21}+S_{22}.\end{aligned}$$

因此,

$$|S_{21}|=\left|\left(\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n,\nabla(p_r^{n+1}-p_r^n)\right)\right|\le\frac{1}{2\epsilon_1}\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n\|^2+\frac{\epsilon_1}{2}\|\nabla p_r^{n+1}-\nabla p_r^n\|^2,$$

and

$$\begin{aligned}S_{22}&=-\gamma_p(I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p^{n+1}-p^n),I_H(p_r^{n+1}-p_r^n))\\ &=-\frac{1}{2}\gamma_p\bigg(\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2-\|I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2+\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2\bigg).\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}S_3&=\gamma_p\left(I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1}),I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p_r^n-p_r^{n-1})\right)\\ &\le\frac{\gamma_p}{2\epsilon_2}\|I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1})\|^2+\frac{\epsilon_2}{2}\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p_r^n-p_r^{n-1})\|^2\\ &\le\frac{\gamma_p}{2\epsilon_2}\|I_H(p_r^{n+1}-p^{n+1})\|^2+\frac{\epsilon_2}{2}\gamma_p\left(\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2+\|I_H(p_r^n-p_r^{n-1})\|^2\right)\end{aligned}$$

汇总以上所有结果并重新整理，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Delta t}(\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2-\|\boldsymbol{u}_r^n\|^2)+\left(\frac{1}{2\Delta t}-\frac{1}{2\epsilon_1}\right)\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^n\|^2+\frac{1}{2}\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\Delta t\left(\|\nabla p_r^{n+1}\|^2-\|\nabla p_r^n\|^2\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2}\Delta t-\frac{\epsilon_1}{2}\right)\|\nabla p_r^{n+1}-\nabla p_r^n\|^2+(1-\epsilon_2)\frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)-I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\epsilon_2}\right)\gamma_p\|I_Hp_r^{n+1}-I_Hp^{n+1}\|^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma_p\left(\|I_Hp_r^{n+1}\|^2-\|I_Hp^{n+1}\|^2\right)+\frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1}-I_H\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2\\ \le&\frac{C_P^2}{2\nu}\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2+\frac{\epsilon_2}{2}\gamma_p\|I_H(p_r^n-p_r^{n-1})\|^2+\frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2+\frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

左侧的这些项需要保持为正值。为此，我们令 $\epsilon_1=\Delta t$ 和 $\epsilon_2=1/2$，然后将左侧的负项界定为

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\epsilon_2}\right)\gamma_p\|I_Hp_r^{n+1}-I_Hp^{n+1}\|^2\ge-\frac{1}{2}\gamma_p\|I_Hp_r^{n+1}\|-\frac{1}{2}\gamma_p\|I_Hp^{n+1}\|^2,$$

并利用估计

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \quad \Rightarrow \quad (a-b)^2 \ge \frac{1}{2}a^2 - b^2,$$

从而推导出

$$\frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n) - I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2 \ge \frac{1}{4}\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2 - \frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2.$$

于是，上述不等式变为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\Big(\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{u}_r^n\|^2\Big) + \frac{1}{2}\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\Delta t\Big(\|\nabla p_r^{n+1}\|^2 - \|\nabla p_r^n\|^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\gamma_p\Big(\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2 - \|I_H(p_r^n - p_r^{n-1})\|^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{n+1} - I_H\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \\
&\le \frac{C_P^2}{2\nu}\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2 + \gamma_p\|I_H(p^{n+1}-p^n)\|^2 + \gamma_p\|I_H p^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

乘以 $2\Delta t$，将 n 从 1 加到 n，可得

$$\begin{aligned}
&\Big(\|\boldsymbol{u}_r^{n+1}\|^2 + \Delta t^2\|\nabla p_r^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\Delta t\gamma_p\|I_H(p_r^{n+1}-p_r^n)\|^2\Big) \\
&\quad + \Delta t\sum_{j=1}^{n}\Big(\nu\|\nabla\boldsymbol{u}_r^{j+1}\|^2 + \gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{j+1}\|^2 + \gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}_r^{j+1} - I_H\boldsymbol{u}^{j+1}\|^2\Big) \\
&\le \Big(\|\boldsymbol{u}_r^1\|^2 + \Delta t^2\|\nabla p_r^1\|^2 + \frac{1}{2}\Delta t\gamma_p\|I_H(p_r^1 - p_r^0)\|^2\Big) \\
&\quad + \Delta t\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{C_P^2}{\nu}\|\boldsymbol{f}^{j+1}\|^2 + 2\gamma_p\|I_H p^{j+1}\|^2 + 2\gamma_p\|I_H(p^{j+1}-p^j)\|^2 + \gamma_u\|I_H\boldsymbol{u}^{j+1}\|^2\Big)
\end{aligned}$$

略去不必要的项，利用关于 I_H 的稳定性估计和正则性假设，证明完毕。

□

3.2 收敛

接下来证明（3.12）中的降阶解收敛于（2.5）中的高保真解，误差达到离散化误差和降阶模型投影误差的量级；随后，借助高保真解的收敛性结果引理 2.1 ，即可得出降阶解的收敛性。

我们首先将符号记为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u^n &:= \boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_r^n = \Big(\boldsymbol{u}_h^n - \Pi_r^u\boldsymbol{u}_h^n\Big) + \Big(\Pi_r^u\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_r^n\Big) \triangleq \boldsymbol{\eta}_u^n + \boldsymbol{\xi}_u^n, \text{ and} \\
e_p^n &:= p_h^n - p_r^n = \Big(p_h^n - \Pi_r^p p_h^n\Big) + \Big(\Pi_r^p p_h^n - p_r^n\Big) \triangleq \eta_p^n + \xi_p^n,
\end{aligned}$$

然后，我们可以得到

引理 3.1. 对于一个 ny $n \ge n_0$、 $n_0 \ge 1$，我们假设 $\Delta t \le \mathcal{O}(h^2)$，并且对于某个常数 C，有 th e

以下收敛性

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{e}_u^{n+1}\|^2+\nu\Delta t\|\nabla\boldsymbol{e}_u^{n+1}\|^2+\Delta t^2\|\nabla e_p^{n+1}\|^2+\frac{1}{4}\gamma_p\Delta t\sum_{j=n_0}^{n}\|e_p^{j+1}\|^2\\
\leq&\|\boldsymbol{e}_u^{n_0}\|^2+\Delta t^2\|\nabla e_p^{n_0}\|^2+\frac{1}{2}(1+C_3)\Delta t^2\|\nabla e_p^{n_0}-\nabla e_p^{n_0-1}\|^2+\nu\Delta t\|\nabla\boldsymbol{e}_u^{n_0}\|^2\\
&+CT(C_4+1)\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\lambda_i\left(1+\|\nabla\varphi_i\|^2\right)+CT(C_5+\gamma_p)\sum_{i=r_p+1}^{d_p}\theta_i\left(1+\|\nabla\psi_i\|^2\right)\\
&+CTC_6\left(h^{2k}+\Delta t^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

其中常数 C_i、 $i=3$、 $\cdots$、 6，定义见（*3.16*）。

注 3.1。 我们注意到， $\Delta t\leq\mathcal{O}\left(h^2\right)$ 在引理 *2.4* 的证明中所假设的条件（稍后将用于收敛性分析）对于降阶解而言并不难满足，因为我们的降阶模型建立在有限元解之上，而有限元解的精度需要通过假设时间尺度 Δt 和空间尺度 h 满足某些特定关系来保证，例如， $\Delta t=\mathcal{O}\left(h^{k+1}\right)$， k 是速度有限元空间的多项式次数，同时在那些经典的满足 inf-sup 稳定性的有限元对中， $k\geq1$ ；换言之，条件 $\Delta t\leq\mathcal{O}\left(h^2\right)$ 实际上已在计算中所采用的全阶模型中得到隐含。

证明。 在取 3.12 式中的 POD 降阶模型减去 2.5 式中的有限元全阶模型后，再取 $\boldsymbol{v}_h$， q_h） $=$（$\boldsymbol{v}_r$， q_r）可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{e}_u^{n+1}-\boldsymbol{e}_u^n,\boldsymbol{v}_r)+\nu(\nabla\boldsymbol{e}_u^{n+1},\nabla\boldsymbol{v}_r)+[b(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n+1},\boldsymbol{v}_r)-b(\boldsymbol{u}_r^n,\boldsymbol{u}_r^{n+1},\boldsymbol{v}_r)]\\
&\qquad-[(2p_h^n-p_h^{n-1},\nabla\cdot\boldsymbol{v}_r)-(2p_r^n-p_r^{n-1},\nabla\cdot\boldsymbol{v}_r)]+\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^{n+1}),I_H\boldsymbol{v}_r)=0,\\
&(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_u^{n+1},q_r)+\Delta t(\nabla e_p^{n+1}-\nabla e_p^n,\nabla q_r)+\gamma_p(I_H(p^{n+1}-p_r^{n+1}),I_Hq_r)=0.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

令（$\boldsymbol{v}_r$， q_r） $=$（$\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}$， $2\xi_p^n-\xi_p^{n-1}$），相加并整理可得误差方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^n,\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})+\nu\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2+\Delta t(\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n,2\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1})\\
&\quad+\gamma(I_H(p^{n+1}-p_r^{n+1}),I_H(2\xi_p^n-\xi_p^{n-1}))+\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^{n+1}),I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})\\
&=-\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}-\boldsymbol{\eta}_u^n,\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\right)-\nu(\nabla\boldsymbol{\eta}_u^{n+1},\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})-[b(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n+1},\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})-b(\boldsymbol{u}_r^n,\boldsymbol{u}_r^{n+1},\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})]\\
&\quad+(2\eta_p^n-\eta_p^{n-1},\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_u^{n+1})-\Delta t(\nabla\eta_p^{n+1}-\nabla\eta_p^n,2\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1})-(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_u^{n+1},2\xi_p^n-\xi_p^{n-1})\\
&:=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

A_1 由于 L^2 投影的正交性而消失，以下将频繁使用不等式（$a\pm b$） $^2\leq2$（a^2+b^2）、 $\forall a$、 $b\in\mathbb{R}$。首先，

$$
|A_2|\leq\nu\|\nabla\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|\cdot\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|\leq\frac{1}{2}\nu\|\nabla\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\nu\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2.
$$

同样，

$$
|A_4|\leq5\|2\nabla\eta_p^n-\nabla\eta_p^{n-1}\|^2+\frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2,
$$

and

$$
\begin{aligned}
|A_6|&=|(\boldsymbol{\eta}_u^{n+1},2\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1})|\\
&=|(\boldsymbol{\eta}_u^{n+1},(\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n)-(\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}))-(\eta_u^{n+1},\nabla\xi_p^{n+1})|\\
&\leq|(\boldsymbol{\eta}_u^{n+1},(\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n)-(\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}))|+|(\eta_u^{n+1},\nabla\xi_p^{n+1})|\\
&\leq4\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2+\frac{1}{8}(\|\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n\|^2+\|\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}\|^2)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\xi_p^{n+1}\|^2.
\end{aligned}
$$

对于 A_3，我们将对流差分离为

$$\begin{aligned}|A_3| &= |b(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_r^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) - b(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_r^n, \boldsymbol{u}_r^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1})| \\ &= |b(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) + b(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) + b(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_r^n, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1} + \boldsymbol{u}_r^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1})| \\ &\le |b(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1})| + |b(\boldsymbol{\xi}_u^n, \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1})| + |b(\boldsymbol{\eta}_u^n, \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_u^{n+1})| \\ &:= A_{31} + A_{32} + A_{33}.\end{aligned}$$

因此，利用引理2.8 可得

$$\begin{aligned}A_{31} &\le \|\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty \|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\| \|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\| + \frac{1}{2}\|\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^n\|_{L^\infty} \|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\| \|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\| \\ &\le 5\|\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \frac{5}{4}\|\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^n\|_{L^\infty}^2 \|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 \\ &\le 5C_{L^\infty}^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \frac{5C_{W^{1,\infty}}^2}{4}\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

其中常数 C_{L^∞} ，$C_{W^{1,\infty}}$定义于（A.19）和（A.20）中。通过类似的方法并利用引理2.4 ，

$$\begin{aligned}A_{32} &\le \|\nabla \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^{n+1}\|_\infty \|\boldsymbol{\xi}_u^n\| \|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\| + \frac{1}{2}\|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_u^n\| \|\Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^{n+1}\|_\infty \|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\| \\ &\le \frac{C_{stab,1} C_{W^{1,\infty}}}{2}\|\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 + \frac{C_{stab,1} C_{W^{1,\infty}}}{2}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 + \frac{C_{stab,0}^2 \cdot C_{L^\infty}^2}{8\nu}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

其中常数$C_{stab,\ 0}$，$C_{stab,\ 1}$ 定义于（A.21）和（A.22）中。类似地，

$$A_{33} \le 5C_{stab,1}^2 C_{W^{1,\infty}}^2 \|\boldsymbol{\eta}_u^n\|^2 + \frac{1}{20}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \frac{5C_{stab,0}^2 C_{L^\infty}^2}{4}\|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^n\|^2 + \frac{1}{20}\|\nabla \boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}|A_3| &\le A_{31} + A_{32} + A_{33} \\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + C_{stab,1} C_{W^{1,\infty}} + \frac{C_{stab,0}^2 C_{L^\infty}^2}{4\nu}\right)\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \frac{C_{stab,1} C_{W^{1,\infty}}}{2}\|\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 \\ &\quad + \frac{5C_{W^{1,\infty}}^2}{4}\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + 5C_{stab,1}^2 C_{W^{1,\infty}}^2 \|\boldsymbol{\eta}_u^n\|^2 + 5C_{L^\infty}^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{5C_{stab,0}^2 C_{L^\infty}^2}{4}\|\nabla \boldsymbol{\eta}_u^n\|^2.\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}|A_5| &= |-\Delta t(\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n, \nabla \xi_p^{n+1}) + \Delta t(\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n, (\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n) - (\nabla \xi_p^n - \nabla \xi_p^{n-1}))| \\ &\le |\Delta t(\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n, \nabla \xi_p^{n+1})| + |\Delta t(\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n, (\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n) - (\nabla \xi_p^n - \nabla \xi_p^{n-1}))| \\ &\le \frac{\Delta t}{2}\|\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n\|^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\nabla \xi_p^{n+1}\|^2 + 2\Delta t\|\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\Delta t\left(\|\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n\|^2 + \|\nabla \xi_p^n - \nabla \xi_p^{n-1}\|^2\right).\end{aligned}$$

对于误差方程（3.15）左端的最后一个第三项，

$$\begin{aligned}\Delta t(\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n, 2\nabla \xi_p^n - \nabla \xi_p^{n-1}) &= \Delta t(\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n, \nabla \xi_p^{n+1}) \\ &\quad - \Delta t(\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n, (\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n) - (\nabla \xi_p^n - \nabla \xi_p^{n-1})).\end{aligned}$$

对于上面的最后一项，我们使用（3.14）中的第二个方程

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{e}_u^{n+1}, \chi_r) + \Delta t(\nabla \xi_p^{n+1} - \nabla \xi_p^n, \nabla q_r) + \gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}), I_H q_r) = -\Delta t(\nabla \eta_p^{n+1} - \nabla \eta_p^n, \nabla q_r$$

将 $q_r = \xi_p^{n+1} - \xi_p^n$ 在 $t = t_{n+1}$ 处设置两次，并使 $t = t_n$ 满足

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{e}_u^{n+1}, \xi_p^{n+1} - \xi_p^n) + \Delta t(\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n, \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n) + \gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}), I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)) \\ = -\Delta t(\nabla\eta_p^{n+1} - \nabla\eta_p^n, \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n), \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{e}_u^{n}, \xi_p^{n+1} - \xi_p^n) + \Delta t(\nabla\xi_p^{n} - \nabla\xi_p^{n-1}, \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n) + \gamma_p(I_H(p^{n} - p_r^{n}), I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)) \\ = -\Delta t(\nabla\eta_p^{n} - \nabla\eta_p^{n-1}, \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n),\end{aligned}$$

也就是说，

$$\begin{aligned}&\Delta t(\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n, (\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n) - (\nabla\xi_p^n - \nabla\xi_p^{n-1})) \\ &= -(\nabla \cdot (\boldsymbol{e}_u^{n+1} - \boldsymbol{e}_u^n), \xi_p^{n+1} - \xi_p^n) \\ &\quad - \gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}) - I_H(p^n - p_r^n), I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)) \\ &\quad - \Delta t((\nabla\eta_p^{n+1} - \nabla\eta_p^n) - (\nabla\eta_p^n - \nabla\eta_p^{n-1}), \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n) \\ &:= B_1 + B_2 + B_3\end{aligned}$$

然后，

$$B_1 = (\boldsymbol{e}_u^{n+1} - \boldsymbol{e}_u^n, \nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n) \le 2\left(2\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\eta}_u^n\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1} - \boldsymbol{\xi}_u^n\|^2\right) + \frac{1}{4}\|\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n\|,$$

and

$$\begin{aligned}B_2 &= -\gamma_p(I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1}) - I_H(p^n - \Pi_r^p p_h^n), I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)) - \gamma_p\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2 \\ &\le \gamma_p\|I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1}) - I_H(p^n - \Pi_r^p p_h^n)\| \cdot \|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\| - \gamma_p\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2 \\ &\le \frac{\gamma_p}{2}\|I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1}) - I_H(p^n - \Pi_r^p p_h^n)\|^2 + \frac{\gamma_p}{2}\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2 - \gamma_p\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2 \\ &\le 2\gamma_p\left(\|I_H(p^{n+1} - p_h^{n+1})\|^2 + \|I_H\eta_p^{n+1}\|^2 + \|I_H(p^n - p_h^n)\|^2 + \|I_H\eta_p^n\|^2\right) \\ &\quad + \frac{\gamma_p}{2}\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2 - \gamma_p\|I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n)\|^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}B_3 &\le \Delta t\|(\nabla\eta_p^{n+1} - \nabla\eta_p^n) - (\nabla\eta_p^n - \nabla\eta_p^{n-1})\| \cdot \|\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n\| \\ &\le \frac{\Delta t}{\epsilon_{14}}\left(\|\nabla\eta_p^{n+1} - \nabla\eta_p^n\|^2 + \|\nabla\eta_p^n - \nabla\eta_p^{n-1}\|^2\right) + \frac{\epsilon_{14}\Delta t}{2}\|\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n\|^2 \\ &\le 8\Delta t\left(\|\nabla\eta_p^{n+1}\|^2 + 2\|\nabla\eta_p^n\|^2 + \|\nabla\eta_p^{n-1}\|^2\right) + \frac{\Delta t}{8}\|\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n\|^2.\end{aligned}$$

此外，对于式（3.15）左端的最后一个第二项，

$$\begin{aligned}\gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}), I_H(2\xi_p^n - \xi_p^{n-1})) &= \gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}), I_H\xi_p^{n+1}) \\ &\quad - \gamma_p(I_H(p^{n+1} - p_r^{n+1}), I_H(\xi_p^{n+1} - \xi_p^n) - I_H(\xi_p^n - \xi_p^{n-1})) \\ &:= B_4 - B_5,\end{aligned}$$

并且对于 B_4，我们采用与 [47] 中类似的方法进行估计，得到

$$B_4 = \gamma_p\|\xi_p^{n+1}\|^2 + \gamma_p(I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1}), I_H\xi_p^{n+1}) + \gamma_p\|I_H\xi_p^{n+1} - \xi_p^{n+1}\|^2 + 2\gamma_p(\xi_p^{n+1}, I_H\xi_p^{n+1} - \xi_p^{n+1}),$$

我们可以在此获得

$$\begin{aligned}-\gamma_p(I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1}), I_H\xi_p^{n+1}) &\le \gamma_p\|I_H(p^{n+1} - \Pi_r^p p_h^{n+1})\| \cdot \|I_H\xi_p^{n+1}\| \\ &\le 8C_{2,H}^2\gamma_p\left(\|I_H(p^{n+1} - p_h^{n+1})\|^2 + \|I_H\eta_p^{n+1}\|^2\right) + \frac{\gamma_p}{8}\|\xi_p^{n+1}\|^2\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}-2\gamma_p(\xi_p^{n+1}, I_H\xi_p^{n+1} - \xi_p^{n+1}) &\le \gamma_p\|\xi_p^{n+1}\|^2 + \gamma_p\|I_H\xi_p^{n+1} - \xi_p^{n+1}\|^2 \\ &\le 2\gamma_p C_P^2\|\nabla\xi_p^{n+1} - \nabla\xi_p^n\|^2 + 2\gamma_p C_P^2\|\nabla\xi_p^n\|^2 + \gamma_p\|I_H\xi_p^{n+1} - \xi_p^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

对于 B_5,

$$\begin{aligned}
B_5 &\le \gamma_p \|I_H(p^{n+1}-p_r^{n+1})\| \cdot \|I_H(\xi_p^{n+1}-\xi_p^n) - I_H(\xi_p^n-\xi_p^{n-1})\| \\
&\le \frac{\gamma_p}{2C_{2,H}^2}\|I_H(p^{n+1}-p_r^{n+1})\|^2 + \frac{C_{2,H}^2\gamma_p}{2}\|I_H(\xi_p^{n+1}-\xi_p^n) - I_H(\xi_p^n-\xi_p^{n-1})\|^2 \\
&\le \frac{\gamma_p}{2C_{2,H}^2}\left[3\|I_H(p^{n+1}-\Pi_r^p p_h^{n+1})\|^2 + \frac{3}{2}\|I_H\xi_p^{n+1}\|^2\right] \\
&\quad + \frac{C_{2,H}^2\gamma_p}{2}\left(\|I_H(\xi_p^{n+1}-\xi_p^n)\|^2 + \|I_H(\xi_p^n-\xi_p^{n-1})\|^2\right) \\
&\le \frac{3\gamma_p}{2C_{2,H}^2}\left[\|I_H(p^{n+1}-p_h^{n+1})\|^2 + \|I_H\eta_p^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}C_{2,H}^2\|\xi_p^{n+1}\|^2\right] \\
&\quad + \frac{\gamma_p C_{2,H}^4 C_P^2}{2}\left(\|\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n\|^2 + \|\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}\|^2\right).
\end{aligned}$$

最后，对于式（3.15）左端的最后一项，类似于对 B_4 的处理,

$$\begin{aligned}
\gamma_u(I_H(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_r^{n+1}), I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) &= \gamma_u\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + 2\gamma_u(\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}, I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) \\
&\quad + \gamma_u(I_H\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}, I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) + \gamma_u\|I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
-\gamma_u(I_H\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}, I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) &\le \frac{\gamma_u}{2}C_{2,H}^2\|\boldsymbol{\eta}_u^{n+1}\|^2 + \frac{\gamma_u}{2}C_{2,H}^2\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2, \\
2\gamma_u(\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}, I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}) &\le \frac{\gamma_u}{2}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + C_{1,H}^2H^2\gamma_u\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 + \gamma_u\|I_H\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

汇总所有结果　　如上，利用假设中的投影误差估计 2.2 并重新整理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2\right) + \frac{1}{2\Delta t}\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}-\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 + \frac{1}{2}\nu\left(\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 - \|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2\right) + \frac{1}{2}\Delta t\left(\|\nabla\xi_p^{n+1}\|^2 - \|\nabla\xi_p^n\|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Delta t\left(\|\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n\|^2 - \|\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}\|^2\right) + \frac{1}{8}\gamma_p\|\xi_p^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_p\|I_H(\xi_p^{n+1}-\xi_p^n)\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}\left[\frac{9}{2} + C_{stab,1}\cdot C_{W^{1,\infty}} + \frac{C_{stab,0}^2\cdot C_{L^\infty}^2}{4\nu} + \frac{1}{2}\gamma_u(C_{2,H}^2+1)\right]\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(C_{stab,1}C_{W^{1,\infty}} + 8\right)\|\boldsymbol{\xi}_u^n\|^2 + \frac{1}{2}\left(\Delta t + 1\right)\|\nabla\xi_p^{n+1}\|^2 + 2\gamma_p C_P^2\|\nabla\xi_p^n\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\Delta t + \frac{1}{2}\gamma_p C_{2,H}^4 C_P^2 + 2\gamma_p C_P^2\right)\|\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\gamma_p C_{2,H}^4 C_P^2\right)\|\nabla\xi_p^n-\nabla\xi_p^{n-1}\|^2 \\
&\quad + C\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\lambda_i\left[\left(\frac{25}{2} + \frac{5}{4}C_{W^{1,\infty}}^2 + 5C_{stab,1}^2\cdot C_{W^{1,\infty}}^2 + \frac{1}{2}\gamma_u\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\nu}{2} + 5C_{L^\infty}^2 + \frac{5}{4}C_{stab,0}^2\cdot C_{L^\infty}^2\right)\cdot\|\nabla\varphi_i\|^2\right] \\
&\quad + C\sum_{i=r_p+1}^{d_p}\theta_i\left[\left(4\gamma_p C_{2,H}^2 + 8C_{2,H}^4\gamma_p + \frac{3}{2}\gamma_p\right) + \left(40 + 42\Delta t\right)\|\nabla\psi_i\|^2\right] \\
&\quad + CC_{2,H}^2\left(4\gamma_p + 8C_{2,H}^2\gamma_p + \frac{3\gamma_p}{2C_{2,H}^2}\right)\left(h^{2k} + \Delta t^2\right)
\end{aligned}$$

定义

$$
\begin{aligned}
C_1 :=& \left[\frac{25}{2}+2C_{stab,1}\cdot C_{W^{1,\infty}}+\frac{C_{stab,0}^2\cdot C_{L^\infty}^2}{4\nu}+\frac{1}{2}\gamma_u\left(C_{2,H}^2+1\right)\right],\\
C_2 :=& \Delta t^{-2}\left(\Delta t+1+4\gamma_p C_P^2\right),\\
C_3 :=& 2\Delta t^{-2}\left(1+\Delta t+2\gamma_p C_{2,H}^4 C_P^2+4\gamma_p C_P^2\right),\\
C_4 :=& \max\left\{\left(\frac{25}{2}+\frac{5}{4}C_{W^{1,\infty}}^2+5C_{stab,1}^2\cdot C_{W^{1,\infty}}^2+\frac{1}{2}\gamma_u\right),\left(\frac{\nu}{2}+5C_{L^\infty}^2+\frac{5}{4}C_{stab,0}^2\cdot C_{L^\infty}^2\right)\right\},\\
C_5 :=& \max\left\{\left(4\gamma_p C_{2,H}^2+8C_{2,H}^4\gamma_p+\frac{3}{2}\gamma_p\right),\left(40+42\Delta t\right)\right\},\\
C_6 :=& C_{2,H}^2\left(4\gamma_p+8C_{2,H}^2\gamma_p+\frac{3\gamma_p}{2C_{2,H}^2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

将 $2\Delta t$ 相乘，并从 n_0 到 n求和，得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\|\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2+\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{n+1}-\nabla\xi_p^n\|^2\right)+\nu\Delta t\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n+1}\|^2\\
&\quad+\gamma_p\Delta t\sum_{j=n_0}^{n}\left(\frac{1}{4}\|\xi_p^{j+1}\|^2+\|I_H(\xi_p^{j+1}-\xi_p^j)\|^2\right)\\
\le&\left(\|\boldsymbol{\xi}_u^{n_0}\|^2+\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{n_0}\|^2+\frac{1}{2}\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{n_0}-\nabla\xi_p^{n_0-1}\|^2\right)+\frac{1}{2}C_3\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{n_0}-\nabla\xi_p^{n_0-1}\|^2+\nu\Delta t\|\nabla\boldsymbol{\xi}_u^{n_0}\|^2\\
&\quad+\Delta t\sum_{j=n_0}^{n}\left(C_1\|\xi_u^{j+1}\|^2+C_2\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{j+1}\|^2+\frac{1}{2}C_3\Delta t^2\|\nabla\xi_p^{j+1}-\nabla\xi_p^j\|^2\right)\\
&\quad+CTC_4\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\lambda_i\left(1+\|\nabla\varphi_i\|^2\right)+CTC_5\sum_{i=r_p+1}^{d_p}\theta_i\left(1+\|\nabla\psi_i\|^2\right)+CTC_6\left(h^{2k}+\Delta t^2\right)
\end{aligned}
$$

~ ~令 $C:=$最大值$\{C_1,C_2,C_3\}$，并选择 Δt 使得 $C\Delta t\le 1/2$，然后使用引理 2.3、假设2.2 并去掉不必要的项，最后基于以下事实得到最终结果：降阶模型中的初始条件是通过投影高保真解得到的，即初始近似误差$\xi_u^{n_0}=\xi_p^{n_0}=\xi_p^{n_0-1}=0$。

□

最后，根据三角不等式、引理 2.1 和引理 3.1，我们得到以下定理，该定理阐述了连续解与降阶解之间的收敛性。

定理 3.2。（CDA-Proj-POD-ROM 的误差估计）对于任意 $n\ge n_0$（$n_0\ge 1$），令 $(\boldsymbol{u}^n,\ p^n)$ 为方程（2.4）在 $t=t_n$ 处的解，$(\boldsymbol{u}_r^n,\ p_r^n)$ 表示由（3.12）得到的基于 POD 的降阶解，则假设 $\Delta t=\mathcal{O}(h^2)$，并且存在常数 C，使得以下收敛估计成立：

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}_r^n\|^2+\nu\Delta t\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}_r^n\right)\right\|^2+\Delta t^2\left\|\nabla\left(p^n-p_r^n\right)\right\|^2+\gamma_p\|p-p_r\|_{\ell(L^2)}^2\\
\le& C\left[\sum_{i=r+1}^{d_{\tilde{\boldsymbol{u}}}}\lambda_i\left(1+\|\nabla\varphi_i\|^2\right)+\sum_{i=r+1}^{d_p}\theta_i\left(1+\|\nabla\psi_i\|^2\right)+\Delta t^2+h^{2k}\right]
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

4 数值测试

本节将针对前文提出并分析的 CDA-Proj-POD-ROM（3.12），给出一些数值结果，目的有二：1）验证 POD 模态数量方面的收敛性；2）说明添加 DA项对于获得稳定且精确的降阶解的必要性。数值实验在著名的二维圆柱绕流基准问题上进行，该问题研究的是 $Re = 100$ [41]处具有圆形横截面的圆柱体非定常流动。该问题也曾用于 [11, 36, 40] 等关于纳维–斯托克斯方程中具有稳定压力的降阶模型设置。开源有限元软件包 iFEM [12] 被用于执行数值实验。

如下 [41], ，计算域为一个带圆孔的矩形通道（见图 1 顶部）：

$$\Omega = \{(0, 2.2) \times (0, 0.41)\} \backslash \left\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x} - (0.2, 0.2))^2 \leq 0.05^2\right\}.$$

抛物线型入口和出口速度分布

$$\boldsymbol{u}(0, y) = \boldsymbol{u}(2.2, y) = 0.41^{-2}(1.2y(0.41 - y), 0), \quad 0 \leq y \leq 0.41,$$

，其他边界施加无滑移条件。根据入口速度¯的平均值 $U = 1\text{m/s}$ 和圆柱体直径 $D = 0.1\,\text{m}$，所考虑的 Re 雷诺数为 $Re = 100$。密度取值为 $\rho = 1\text{kg/m}^3$，且无外部强迫，即 $\boldsymbol{f} = 0\,\text{m/s}^2$。在充分发展后的周期状态下，障碍物后方会形成涡脱落，这就是众所周知的冯·卡门涡街（见图2）。

基准参数为圆柱体处的阻力系数和升力系数。为了减小圆柱体边界上线积分带来的负面影响，我们采用 [27]中定义的体积分：

$$c_D = -\frac{2}{D\bar{U}^2}\left[\nu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_D\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_D\right) - \left(p, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_D\right)\right],$$
$$c_L = -\frac{2}{D\bar{U}^2}\left[\nu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_L\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_L\right) - \left(p, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_L\right)\right],$$

对于任意函数 $\boldsymbol{v}_D \in \boldsymbol{H}^1$（分别对应 $\boldsymbol{v}_L \in \boldsymbol{H}^1$），满足条件 $\boldsymbol{v}_D = (1, 0)^T$（分别对应 $\boldsymbol{v}_L = (0, 1)^T$），且在圆柱体边界上成立，在其他边界上为零。另一个相关的关注量是流体的动能，定义为

$$E_{Kin} = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbf{L}^2}.$$

表 1. 最终时刻 $T = 8$ 的最大阻力系数 $c_{\text{d, max}}$、最大升力系数 $c_{\text{l, max}}$ 以及压力差的定量比较：与直接数值模拟、G-ROM（即 $\gamma_u = \gamma_p = 0$）和 CDA-G-ROM（即 $\gamma_u = \gamma_p = 100$）进行比较。

	DNS	G-ROM	CDA-G-ROM	参考文献 [41]
$c_{\text{d,max}}$	3.2247	3.2380	3.2226	[3.22, 3.24]
$c_{\text{l,max}}$	1.0007	0.9902	1.0032	[0.99, 1.01]
$\Delta_{p\,(8\text{秒})}$	2.4357	2.3409	2.4359	[2.46, 2.50]

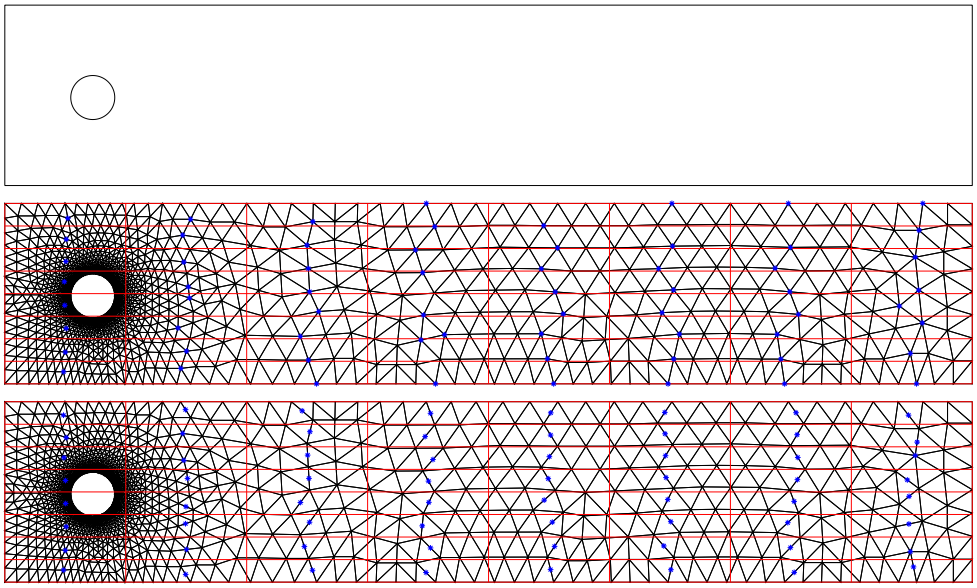


图 1. 计算域（顶部）以及带有观测位置的两个网格（黑色为细网格，红色为粗网格）： P^1 有限元节点（中部）和 P^2 有限元节点（底部）均以蓝色星标标示。[彩图请参见网站版本]

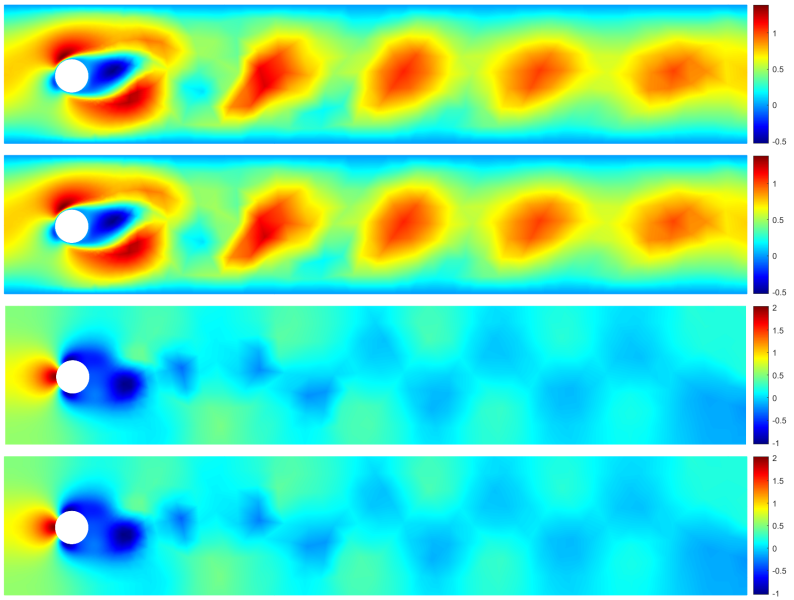


图 2. 最终时变速度（前两个子图）和压力（后两个子图）的幅值；两个子图中从上到下分别为有限元高保真解（顶部）和降阶解（底部）。[彩图请参见网站版本]

4.1 直接数值模拟、连续数据同化与 POD 模态

用于计算快照的直接数值模拟采用有限元全阶模型（2.5），空间离散化采用混合离散稳定的 $\boldsymbol{P}^2 - P^1$ Taylor-Hood元进行速度-压力离散，并使用均匀细化网格，其中速度自由度为 13496，压力自由度为 1754，$\Delta t = 1e-4$ 整个时间积分在$[0, 8]$上进行。直接数值模拟从速度和压力均为静止状态开始，即初始条件为零速度场和零压力场。正如 [26] 所述，一阶离散化会产生更不准确的结果；此外，对该基准问题中的纳维–斯托克斯方程进行完全分辨率计算需要超过 100K 个自由度，这意味着这里的模拟均为欠分辨率模拟。因此需要注意，我们不能期待本方案的解与参考解完全一致；不过，我们仍然期望两者的结果较为接近。

对于数据同化计算，我们选择 I_H 作为 L^2 在粗网格上投影到分片常数空间的算子的近似。该算子在[38]中提出，并对其稳定性和收敛性进行了分析。用于数据同化的粗网格由直径为 H 的均匀矩形网格相交构造，其中 H 表示每个矩形的宽度。对于每个粗网格单元中观测位置的选取，我们选取该粗网格单元内细有限元节点中最靠近单元中心的节点，作为粗网格上的观测位置，以获取观测数据并据此实现我们的 CDA-Proj-POD-ROM（3.12）。图1（中）以黑色显示压力的细网格，以红色显示粗网格，其中 $H = 2.2/8$（得到 64 个数据同化点）；观测点以蓝色星号标记在 P^1 有限元节点上。图 1（下）对应速度，观测点数量相同，但位于 P^2 有限元网格上。图 2 展示了速度和压力幅值；从上到下，四个子图依次对应有限元高保真速度（第一幅）、本征正交分解降阶速度（第二幅）、有限元高保真压力（第三幅），以及本征正交分解降阶压力（最后一幅）。表 1 还定量比较了直接数值模拟、G-ROM（即 $\gamma_u = \gamma_p = 0$）和 CDA-G-ROM（即 $\gamma_u = \gamma_p = 100$）的关注量；在 $r = 19$条件下，对速度和压力进行牵引同化可提高精度。

通过快照方法，在 L^2 内积下同时生成 POD 速度模态和压力模态：从 $t = 5$ 到 $t = 5.4$，连续存储每个 DNS 速度-压力解。在此期间，流动已达到时间周期状态，且时间间隔长度大于一个流动周期。换言之，我们在 $[5, 5.4]$ 上运行 FOM，然后考虑 ROM 在 $[5.4, 8]$ 上进行时间预测/外推，以检验降阶速度和压力的稳定性与精度；后一个时间间隔是用于计算快照和生成 POD 模态的时间间隔的六倍。图 3 显示了 POD 速度（λ_i、$i = 1$、$\cdots$、$71 = d_u$）和压力（θ_i、$i = 1$、$\cdots$、$75 = d_p$）特征值的衰减。我们将对应的系统能量捕获量分别记为速度的 $100\sum_{i=1}^{r_u}\lambda_i/\sum_{i=1}^{d_u}\lambda_i$ 和压力的 $100\sum_{i=1}^{r_p}\theta_i/\sum_{i=1}^{d_p}\theta_i$，并在后续 ROM 计算中采用 $r_u = r_p = 8$、19；这些 POD 模态捕获了系统速度-压力能量的 99.95% 至 99.9999% 以上。我们还指出，采集快照的时间间隔可以更短，尤其是在数据同化的帮助下；也就是说，也可以使用不准确的快照（即时间间隔小于一个流动周期），通过数据同化技术获得相对准确且稳定的降阶解。更多详情请参阅[17, 47]。

4.2 稳定性、收敛与高精度

在本小节中，我们首先通过数值实验验证前几节所得的理论结果，即稳定性和收敛性，尤其是先验压力稳定性。我们首先验证定理的结果

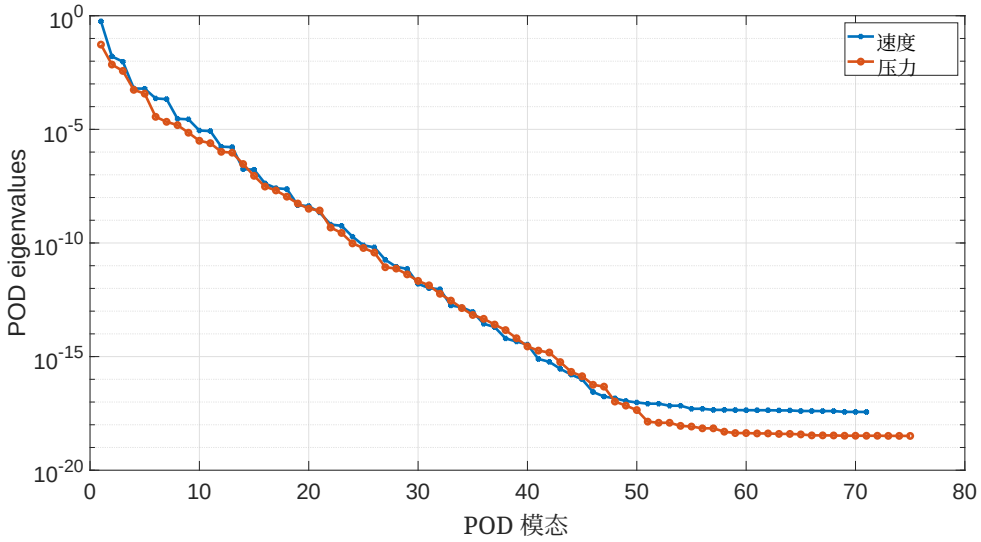


图 3. POD 速度和压力特征值

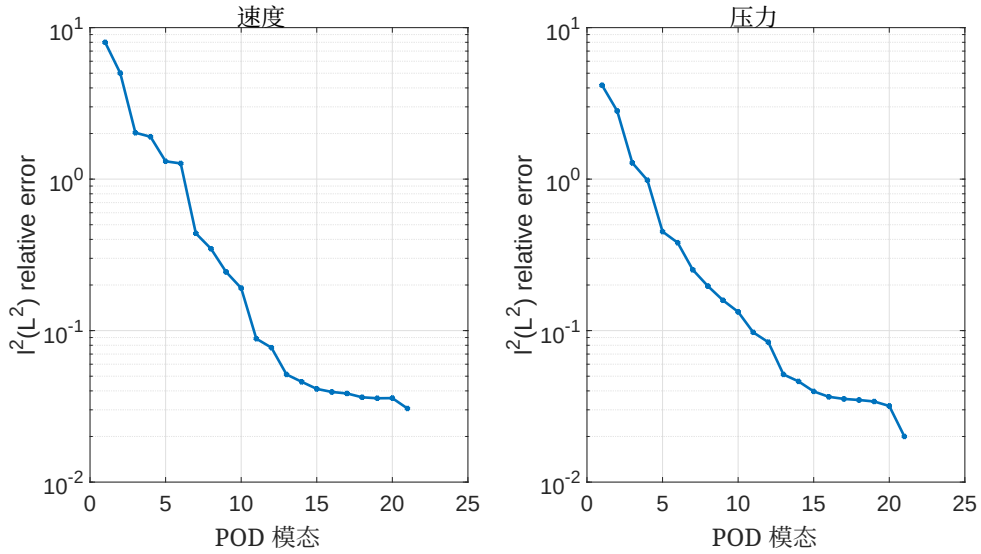


图 4. 速度（左）和压力（右）关于 POD 模态的误差收敛，其中 $\gamma_u = 100$和 $\gamma_p = 100$。

3.2，该结论指出，随着 POD 模态数量增加，降阶解的数值误差会逐渐减小，直至达到时间和空间离散误差。图4 显示，速度和压力在离散时间积分中的相对 L^2 误差均随 POD 模态数量增加而减小。图5 和图6 分别通过相对误差（图5）以及最终时刻的压力差、升力和阻力系数、动能（图6），展示了 CDA 项的必要性，分别采用 $r = 19$ 。具体而言，从图5 可以看出，在没有 CDA（即 $\gamma_u = \gamma_p = 0$）的情况下，速度相对误差持续单调增大；与此同时，如果仅添加速度 nudging 项，压力的相对误差会剧烈波动。此外，从速度的时间演化可以发现，仅添加压力 nudging 项（即 $\gamma_u = 0$， $\gamma_p = 100$）的效果不如同时添加两者（即 $\gamma_u = \gamma_p = 100$）。图6中也观察到了类似现象，其中加入速度惩罚项（即$\gamma_u \neq 0$）后，降阶速度的动能更加准确。

为了进一步说明连续数据同化（CDA）具有稳定欠分辨率降阶建模的作用，我们首先需要确定 r的最优值，即能够为 G-POD-ROM 提供最优模拟的最小 r 。所谓“欠分辨率降阶建模”，是指这样一种数值模拟：降阶模型（ROM）中的尺度（例如维数 r）不足以捕捉几乎所有尺度上的关键信息。首先，我们在图7中展示 G-POD-ROM（即 $\gamma_u = \gamma_p = 0$）中关注量的时间演化。从图中可以看出， $r = 19$ 可视为最优值。因此，我们在图8 中展示了 $r = 8$ 时出现欠分辨率降阶建模的情形，其表现为关注量逐渐偏离直接数值模拟（DNS）的结果。此时，我们发现，连续数据同化的引入使上述关注量的时间演化回到正确轨道，这意味着连续数据同化能够发挥稳定化作用，从而提供稳定且高精度的解。这类似于用有限元方法（FEM）求解对流主导问题：一种方法是细化尺度 h ，使其达到直接数值模拟的水平，但这必然会导致巨大的计算成本；另一种计算成本显著较低的方法，则是采用稳定化技术，同时令 h不至于过小。

5 结论

本文提出了一种用于稳定降阶压力的新型替代技术。该技术使 ROM 能够预先计算降阶压力，而这对于计算一些重要的关注量是必要的，例如圆柱绕流情景下物体所受的阻力和升力系数以及压力差。与其他同样能够获得稳定且高精度降阶压力的现有方法相比，该 ROM 主要在两个方面更具优势：

一方面，该方法能够预先获得稳定的降阶压力，从而无需验证混合 POD 速度-压力空间上的离散 inf-sup 条件；而这种相容性验证仍是一个悬而未决的问题。相比之下，若采用压力泊松方程技术，则需要引入人工边界条件；若采用 SUPG 或 PSPG 等压力稳定化技术，则必须选择稳定化参数。

另一方面，采用代数 nudging 后，经典投影方法的实现简单且模块化，随后 [38], 进行单网格运算，使这一新型 ROM 相较于其他耦合型或基于残差的稳定化 ROM 更高效，进一步体现了 ROM 相对于 FOM 的优势。数值分析提供了理论保证，数值实验则展示了该 ROM 在压力稳定性和高精度方面的优势。

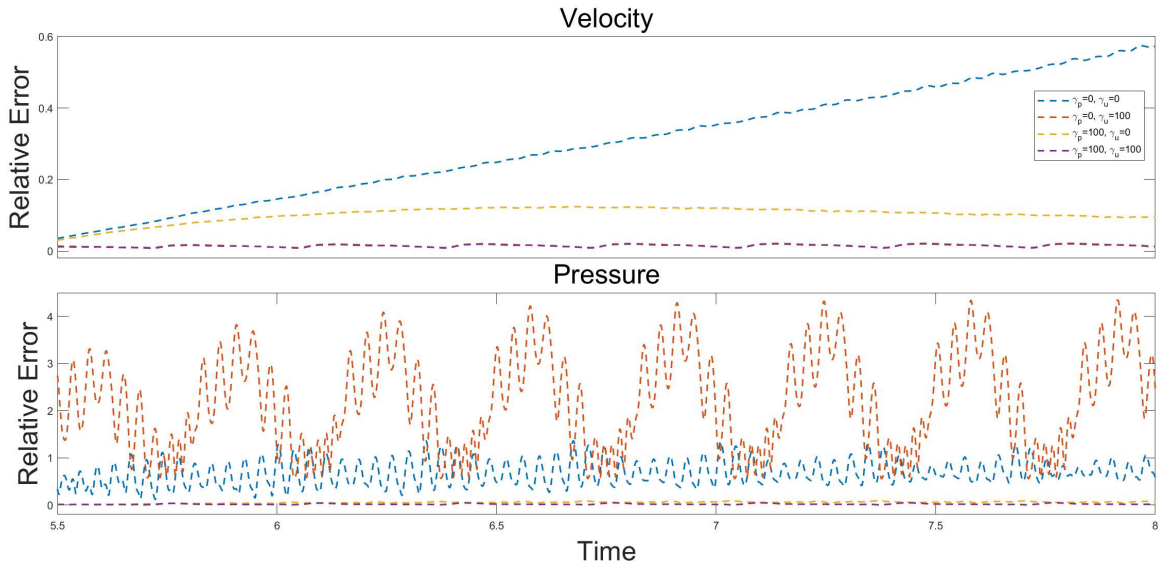


图 5. 使用 $r = 19$ 个模态、 $\gamma_u = 0$、100、$\gamma_p = 0$、100 时速度和压力相对误差的时间演化。

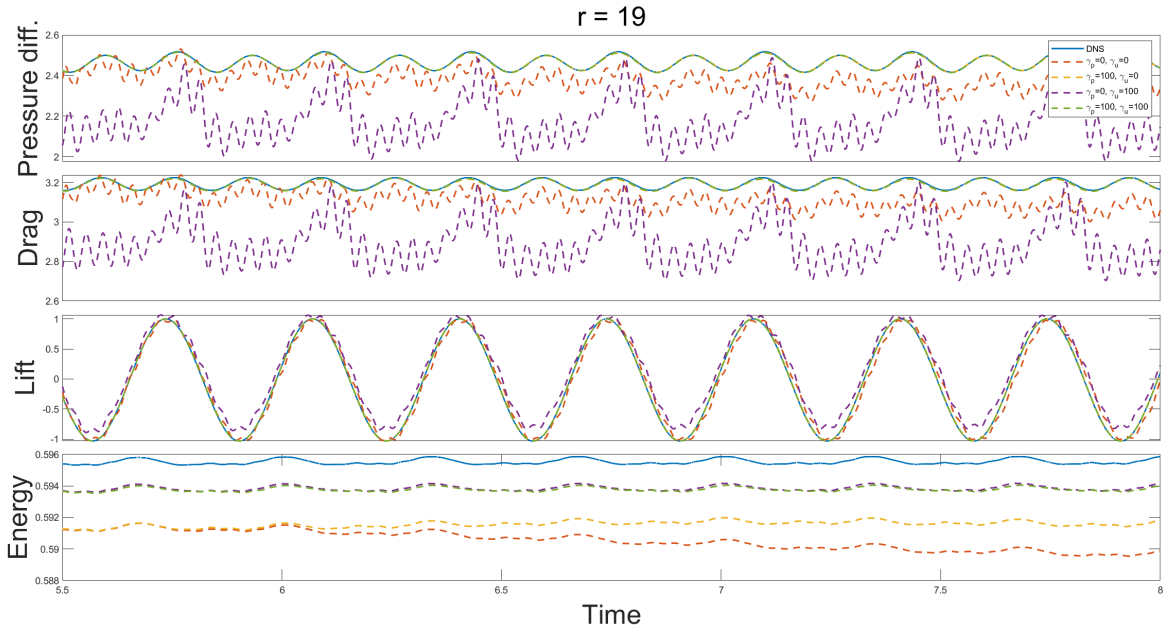


图 6. 使用 $r = 19$ 个模态、 $\gamma_u = 0$、100、 $\gamma_p = 0$、100 时最终时刻的压力差、升力和阻力系数以及动能的时间演化。

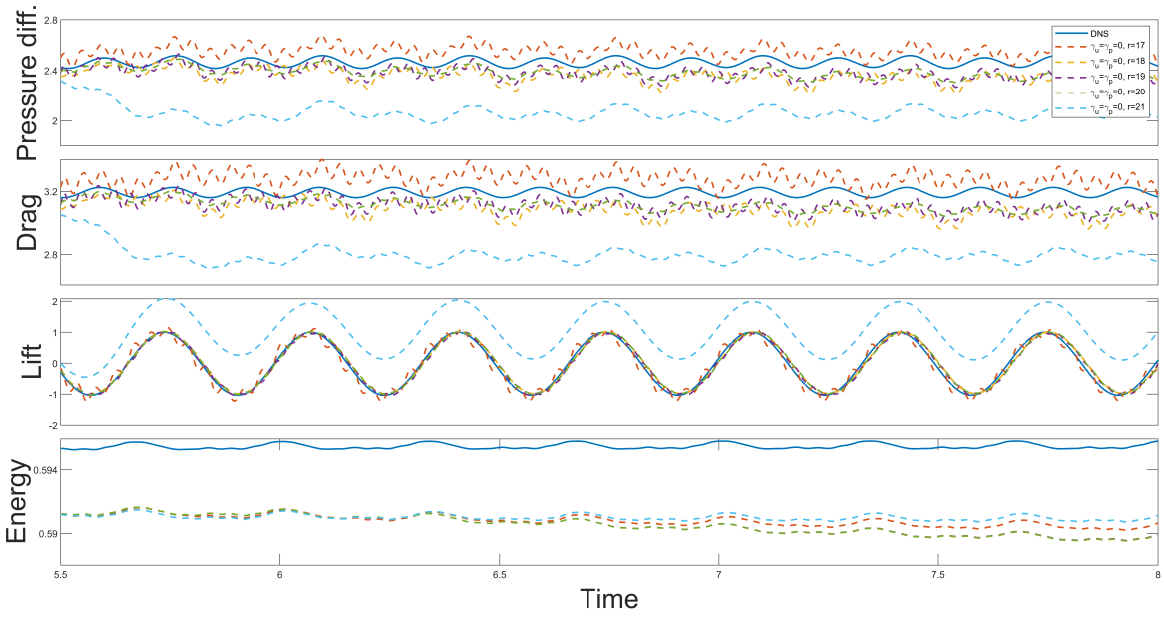


图 7. 在 $\gamma_u = \gamma_p = 0$ 处使用差值 POD 模态时，最终时刻的压力差、升力和阻力系数以及动能的时间演化。

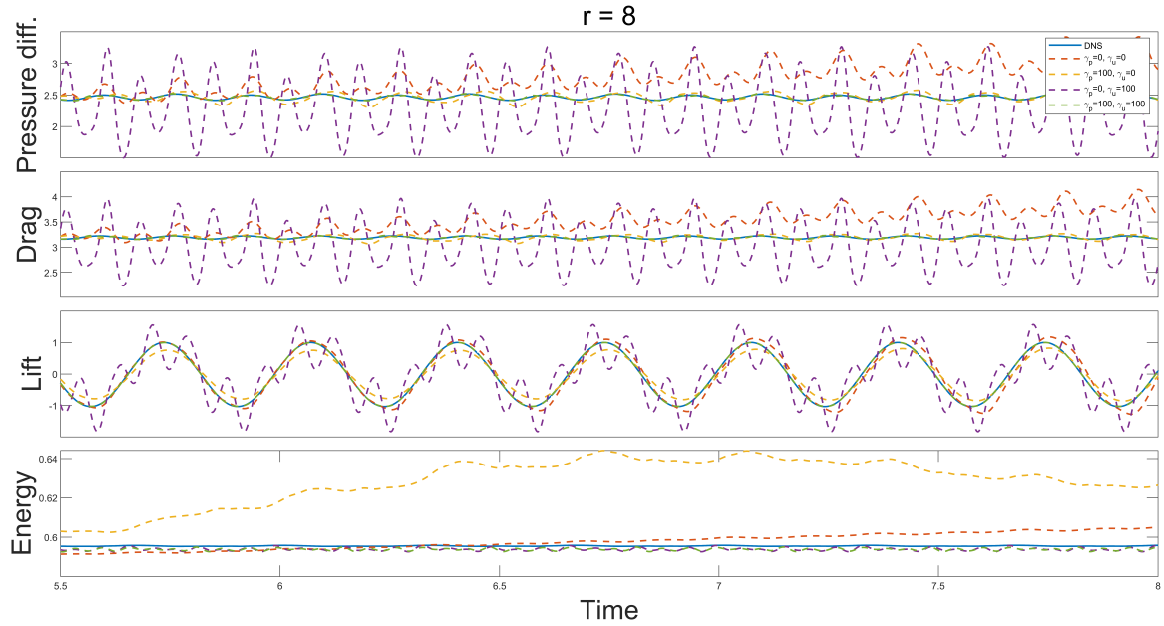


图 8. 使用 $r = 8$ 模态、 $\gamma_u = 0$、100、 $\gamma_p = 0$、100 时，最终时刻的压力差、升力和阻力系数以及动能的时间演化。

我们计划从两个方面扩展当前工作：一方面，将NSE扩展到更具实际意义的模型/方程，例如瑞利–B´纳德对流，例如 [6, 44], 从而拓宽这种基于连续数据同化的降阶模型的应用场景；另一个值得仔细考虑的想法是，对全阶模型和降阶模型之间的参数（即NSE中的黏度参数）进行敏感性分析，类似的工作包括将敏感性分析应用于连续数据同化中的[9], 全阶模型和降阶模型之间变化的参数 [45] 以及 [8]中的参数恢复。

引理2.4的证明

证明。 这里使用的技术受 [36]的启发。我们首先假设

$$\Delta t \leq Ch^2, \tag{A.18}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty &\leq \|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{s}_h^n\|_\infty + \|\boldsymbol{s}_h^n\|_\infty \\
&\leq Ch^{-1}\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{s}_h^n\| + C_{1,S}\left(\|\boldsymbol{u}^n\|\|\boldsymbol{u}^n\|_2\right)^{1/2} \\
&\leq Ch^{-1}\left(\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}^n\| + \|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{s}_h^n\|\right) + C_{1,S}\left(\|\boldsymbol{u}^n\|\|\boldsymbol{u}^n\|_2\right)^{1/2} \\
&\leq Ch^{-1}\left(h^2 + \Delta t + h^2\right) + C_{1,S}\left(\|\boldsymbol{u}^n\|\|\boldsymbol{u}^n\|_2\right)^{1/2} \\
&\leq Ch + C_{1,S}\left(\|\boldsymbol{u}^n\|\|\boldsymbol{u}^n\|_2\right)^{1/2} \\
&:= C_{L^\infty}.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

同样,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty &\leq \|\nabla(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{s}_h^n)\|_\infty + \|\nabla\boldsymbol{s}_h^n\|_\infty \\
&\leq Ch^{-1}\|\nabla(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{s}_h^n)\| + C\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_\infty \\
&\leq Ch^{-1}\left(\|\nabla(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}^n)\| + \|\nabla(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{s}_h^n)\|\right) + C\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_\infty \\
&\leq Ch^{-1}h^{-1}\left(h^2 + \Delta t\right) + C\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_\infty \\
&\leq C + C\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_\infty \\
&:= C_{W^{1,\infty}}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

此外，根据 POD 模态的定义 $\boldsymbol{\varphi}_k$、$\|\boldsymbol{\varphi}_k\| = 1$这一事实、特征值 λ_i的降序性质、特征向量 x^n 的正交性，以及 POD 基是由相关矩阵的特征值分解构造而得这一点,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_h^n - \Pi_r^u\boldsymbol{u}_h^n\| &= \left\|\sum_{i=1}^{d_u}(\boldsymbol{u}_h^n, \varphi_i)\varphi_i - \sum_{i=1}^{r_u}(\boldsymbol{u}_h^n, \varphi_i)\varphi_i\right\| = \left\|\sum_{i=r_u+1}^{d_u}(\boldsymbol{u}_h^n, \varphi_i)\varphi_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}x_i^j(\boldsymbol{u}_h^n, u_h^j)\varphi_i\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\left(\sum_{j=1}^{M}(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{u}_h^j)x_i^j\right)\varphi_i\right\| = \left\|\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}M\lambda_i x_i^n\varphi_i\right\| \\
&= \sqrt{M}\left(\sum_{i=r_u+1}^{d_u}\lambda_i|x_i^n|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{M}\sqrt{\lambda_{r_u+1}}\left(\sum_{i=r_u+1}^{d_u}|x_i^n|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{M}\sqrt{\lambda_{r_u+1}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\|_\infty &\le \|\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty + \|\boldsymbol{u}_h^n - \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\|_\infty \\ &\le C_{L^\infty} + Ch^{-1}\|\boldsymbol{u}_h^n - \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\| \\ &\le C_{L^\infty} + Ch^{-1}\sqrt{M}\sqrt{\lambda_{r_u+1}} \\ &:= C_{stab,0}.\end{aligned} \tag{A.21}$$

类似地，利用假设 2.2 和逆不等式（2.3），可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n\|_\infty &\le \|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\|_\infty + \|\nabla(\boldsymbol{u}_h^n - \Pi_r^u \boldsymbol{u}_h^n)\|_\infty \\ &\le C_{W^{0,\infty}} + Ch^{-1}\|\nabla(u_h^n - \Pi_r^u u_h^n)\| \\ &\le C_{W^{0,\infty}} + Ch^{-1}\sqrt{\sum_{i=r_u+1}^{d_u} \lambda_i \|\nabla\varphi_i\|^2} \\ &:= C_{stab,1}.\end{aligned} \tag{A.22}$$

最后，在证明结束时，我们指出，出现在两个上界常数 h^{-1} 中的因子$C_{stab、0}$、$C_{stab和1}$ 似乎会对这两个常数的稳定性产生负面影响；然而，我们注意到，另一个因子 λ_i、 $i \ge r_u + 1$ 可以减缓 h^{-1} 变得过大的趋势。在计算中，为了确保计算复杂度与降阶模型精度之间的良好平衡，h 不会太小，同时 λ_{r_u+1} 也不会太大，从而使幅值 $\mathcal{O}(h^{-1}\sqrt{\lambda_{r_u+1}})$ 保持在合理范围内。例如，在先前的研究中，对于基准测试，$h^{-1}\sqrt{\lambda_{r_u+1}} \approx \mathcal{O}(10^{-1})$ 在 [36, 40] 中；对于已知的光滑解，$h^{-1}\sqrt{\lambda_{r_u+1}} \approx \mathcal{O}(10^{-1})$ 在 [33, 46] 中。

□

参考文献

[1] Imran Akhtar、Ali H. Nayfeh 和 Calvin J. Ribbens。不可压缩流中降阶 Galerkin 模型的稳定性与扩展。Theor. Comput. Fluid Dyn., 23(3):213–237, 2009.[2] Shafqat Ali、Francesco Ballarin 和 Gianluigi Rozza。参数化稳态斯托克斯方程和纳维–斯托克斯方程的稳定化约化基方法。Comput. Math. Appl., 80(11):2399–2416, 2020.[3] Abderrahim Azouani、Eric Olson 和 Edriss S. Titi。使用一般插值观测量的连续数据同化。J. Nonlinear Sci., 24(2):277–304, 2014.[4] Francesco Ballarin、Andrea Manzoni、Alfio Quarteroni 和 Gianluigi Rozza。参数化稳态不可压缩纳维–斯托克斯方程 POD-Galerkin近似的 supremizer稳定化。Int. J. Numer. Methods Engrg., 102(5):1136–1161, 2015.[5] Susanne C. Brenner 和 L. Ridgway Scott。有限元方法的数学理论，《应用数学丛书》第15卷。Springer，纽约，第三版，2008.[6] Weihua Cai、Hanghang Ma、Yue Wang、Jianping Chen、Xin Zheng 和 Hongna Zhang。二维瑞利-贝纳德对流POD降阶模型及其闭合方案的开发。Appl. Math. Model., 66:562–575, 2019.[7] Alfonso Caiazzo、Traian Iliescu、Volker John 和 Swetlana Schyschlowa。不可压缩流速度-压力降阶模型的数值研究。J. Comput. Phys., 259:598–616, 2014.

[8] Elizabeth Carlson、Joshua Hudson 和 Adam Larios。通过连续数据同化恢复二维纳维–斯托克斯方程的参数。SIAM J. Sci. Comput., 42(1):A250–A270, 2020.[9] Elizabeth Carlson 和 Adam Larios。二维纳维–斯托克斯方程的敏感性分析及其在连续数据同化中的应用。J. Nonlinear Sci., 31(5):Paper No. 84, 30, 2021.[10] Tom´as Chac´on Rebollo、Samuele Rubino、Mourad Oulghelou 和 Cyrille Allery。不可压缩流中受基于残差的稳定化启发的POD降阶模型的误差分析。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 401(part B):Paper No. 115627, 25, 2022.[11] Tom´as Chac´on Rebollo、Samuele Rubino、Mourad Oulghelou 和 Cyrille Allery。不可压缩流中受基于残差的稳定化启发的POD降阶模型的误差分析。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 401(part B):Paper No. 115627, 25, 2022.[12] Long Chen。ifem：MATLAB中的创新有限元方法软件包。预印本，马里兰大学，2008.[13] Philippe G. Ciarlet。椭圆问题的有限元方法，《应用数学经典著作》第40卷。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，2002.[14] Javier de Frutos、Bosco Garc´ıa-Archilla、Volker John 和 Julia Novo。使用inf-sup稳定有限元求解演化型Oseen问题的grad-div稳定化。J. Sci. Comput., 66(3):991–1024, 2016.[15] Victor DeCaria、Traian Iliescu、William Layton、Michael McLaughlin 和 Michael Schneier。人工压缩降阶模型。SIAM J. Numer. Anal., 58(1):565–589, 2020.[16] Bosco Garc´ıa-Archilla 和 Julia Novo。纳维–斯托克斯方程全离散混合有限元数据同化格式的误差分析。Adv. Comput. Math., 46(4):Paper No. 61, 33, 2020.[17] Bosco Garc´ıa-Archilla、Julia Novo 和 Samuele Rubino。采用grad-div稳定化的纳维–斯托克斯方程本征正交分解数据同化格式的误差分析。J. Comput. Appl. Math., 411:Paper No. 114246, 30, 2022.[18] Bosco Garc´ıa-Archilla、Julia Novo 和 Edriss S. Titi。应用于纳维–斯托克斯方程下尺度数据同化算法的有限元方法的一致时间误差估计。SIAM J. Numer. Anal., 58(1):410–429, 2020.[19] Matthew Gardner、Adam Larios、Leo G. Rebholz、Duygu Vargun 和 Camille Zerfas。连续数据同化在二维纳维–斯托克斯方程速度-涡量形式中的应用。Electron. Res. Arch., 29(3):2223–2247, 2021.[20]Swetlana Giere、Traian Iliescu、Volker John 和 David Wells。对流占优的对流-扩散-反应方程的SUPG降阶模型。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 289:454–474, 2015.[21] J.-L. Guermond 和 L. Quartapelle。基于压力泊松方程的投影方法的稳定性与收敛性。Int. J. Numer. Methods Fluids, 26(9):1039–1053, 1998.[22]Jan S. Hesthaven、Gianluigi Rozza 和 Benjamin Stamm。参数化偏微分方程的经认证的约化基方法。《数学简明丛书》。Springer，Cham；BCAM巴斯克应用数学中心，毕尔巴鄂，2016。BCAM SpringerBriefs。

[23] John G. Heywood 和 Rolf Rannacher。非定常纳维–斯托克斯问题的有限元近似。III. 空间离散化的平滑性质和高阶误差估计。SIAM 数值分析杂志，25(3):489–512，1988。[24] John G. Heywood 和 Rolf Rannacher。非定常纳维–斯托克斯问题的有限元近似。IV. 二阶时间离散的误差分析。SIAM 数值分析杂志，27(2):353–384，1990。[25] Traian Iliescu 和 Zhu Wang。本征正交分解中是否需要快照差商? SIAM J. Sci. Comput.，36(3):A1221–A1250，2014。[26] Volker John。圆柱体周围二维时变流的阻力和升力参考值。Int. J. Numer. Methods Fluids，44(7):777–788，2004。[27] Volker John 和 Gunar Matthies。不可压缩流基准问题中的高阶有限元离散。Int. J. Numer. Methods Fluids，37(8):885–903，2001。[28] Volker John、Baptiste Moreau 和 Julia Novo。对流-扩散-反应方程的 SUPG稳定化 POD-ROM方法的误差分析。Comput. Math. Appl.，122:48–60，2022。[29] Birgul Koc、Samuele Rubino、Michael Schneier、John Singler 和 Traian Iliescu。关于本征正交分解的最优逐时误差界和差分商。SIAM J. Numer. Anal.，59(4):2163–2196，2021。[30] Elizabeth H. Krath、Forrest L. Carpenter、Paul G. A. Cizmas 和 David A. Johnston。用于可压缩流的高效本征正交分解降阶模型。J. Comput. Phys.，426:论文编号109959，22页，2021。[31] K. Kunisch 和 S. Volkwein。抛物型问题的 Galerkin本征正交分解方法。Numer. Math.，90(1):117–148，2001。[32] Adam Larios、Leo G. Rebholz 和 Camille Zerfas。IMEX-FEM 纳维–斯托克斯方程数据同化格式的全时间稳定性和精度。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，345:1077–1093，2019。[33] Xi Li、Yan Luo 和 Minfu Feng。一种用于非定常斯托克斯方程的高效 Chorin-Temam投影本征正交分解降阶模型。J. Sci. Comput.，93(3):论文编号64，26页，2022。[34] Zhendong Luo、Jing Chen、I. M. Navon 和 Xiaozhong Yang。基于本征正交分解的非定常纳维–斯托克斯方程混合有限元公式和误差估计。SIAM J. Numer. Anal.，47(1):1–19，2008/09。[35] Bernd R. Noack、Paul Papas 和 Peter A. Monkewitz。不可压缩剪切流经验 Galerkin模型中压力项表示的必要性。J. Fluid Mech.，523:339–365，2005。[36] Julia Novo 和 Samuele Rubino。不可压缩流本征正交分解稳定化方法的误差分析。SIAM J. Numer. Anal.，59(1):334–369，2021。[37] Alfio Quarteroni、Andrea Manzoni 和 Federico Negri。偏微分方程的约化基方法：导论，第92卷，Unitext。Springer，Cham，2016。

[38] Leo G. Rebholz 和 Camille Zerfas。通过代数 nudging 对演化方程进行简单高效的连续数据同化。Numer. Meth. Part Differ. Equ.，37(3):2588–2612，2021。[39] Gianluigi Rozza、D. B. Phuong Huynh 和 Andrea Manzoni。参数化几何中 Stokes流的降阶基近似与后验误差估计：inf-sup稳定性常数的作用。Numer. Math.，125(1):115–152，2013。[40] Samuele Rubino。不可压缩流基于投影的稳定化POD-ROM的数值分析。SIAM J. Numer. Anal.，58(4):2019–2058，2020。[41] M. Sch¨afer、S. Turek、F. Durst、E. Krause 和 R. Rannacher。圆柱体周围层流的基准计算，第547–566页。Vieweg+Teubner Verlag，Wiesbaden，1996。[42] William Snyder、Changhong Mou、Honghu Liu、Omer San、Raffaella DeVita 和 Traian Iliescu。降阶模型闭合：简要教程，第167–193页。Springer I nternational Publishing，Cham，2022。[43] Giovanni Stabile、Francesco Ballarin、Giacomo Zuccarino 和 Gianluigi Rozza。用于湍流的降阶变分多尺度方法。Adv. Comput. Math.，45(5-6):2349–2368，2019。[44] Yue Wang、Hanghang Ma、Weihua Cai、Hongna Zhang、Jianping Cheng 和 Xin Zheng。一种用于黏弹性流体中二维瑞利–贝纳德对流的 POD-Galerkin降阶模型。Int. Commun. Heat Mass Transf.，117，2020。[45] Zhizhang Wu 和 Zhiwen Zhang。一种用于求解参数对流-扩散方程的POD基适配迭代算法。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，391:论文编号114498，21页，2022。[46] Jing Yang 和 Zhendong Luo。用于二维非定常斯托克斯方程的本征正交分解降阶外推连续时空有限元方法。J. Math. Anal. Appl.，475(1):123–138，2019。[47] Camille Zerfas、Leo G. Rebholz、Michael Schneier 和 Traian Iliescu。流体流动的连续数据同化降阶模型。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，357:112596，18页，2019。