arXiv:2304.00298v1 [math.NT] 1 Apr 2023

由 Carlitz 恒等式得到的两个新的 q-超同余式

Ji-Cai Liu 和 Wei-Wei Qi

数学系，温州大学，中国温州 325035 jcliu2016@gmail.com, wwqi2022@foxmail.com

摘要：由 Carlitz 恒等式，我们推导出两个关于分圆多项式平方模的新的 q-超同余式。这些结果最初由 Guo 猜想，并建立了 Sun 的一个超同余式的新 q-类比。

关键词： q-超同余式；分圆多项式；Carlitz 恒等式

MR 学科分类：33D15，11A07，11B65

1 引言

近年来，许多作者广泛研究了涉及中心二项式系数 $\binom{2n}{n}$ 的和的超同余式。2010年，Sun 和 Tauraso [8] 证明，对于任意奇素数 p 和正整数 r，

$$\sum_{k=0}^{p^r-1}\frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}\equiv(-1)^{\frac{p^r-1}{2}}\pmod{p}, \tag{1.1}$$

随后，Sun [7] 将其推广如下：

$$\sum_{k=0}^{p^r-1}\frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}\equiv(-1)^{\frac{p^r-1}{2}}\pmod{p^2}. \tag{1.2}$$

自然可以考虑（1.1）和（1.2）的 q-类比。为继续探讨（1.1）和（1.2）的 q相关问题，我们先回顾一些 q-级数记号。 q-二项式系数定义为

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\begin{cases}\dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} & \text{if } 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中， q移位阶乘定义为（$a;\ q$）$_n=$（$1-a$）（$1-aq$）$\cdots$（$1-aq^{n-1}$），其中 $n\geq 1$，且（$a;q$）$_0=1$。 q整数定义为 $[n]=[n]_q=$（$1-q^n$）/（$1-q$）。此外，第 n个分圆多项式定义为

$$\Phi_n(q)=\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\(n,k)=1}}(q-\zeta^k),$$

其中， ζ 表示一个本原 n次单位根。

值得一提的是，Guo 和 Zeng [4, 推论 4.2] 首次给出了 (1.1) 的一个有趣的q-类比式如下：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k}{(q;q)_k}q^k\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n^2-1}{4}}\pmod{\Phi_n(q)}, \tag{1.3}$$

其中 n 是一个奇正整数。2013年，Tauraso [9] 猜想 (1.3) 模 $\Phi_n(q)^2$,也成立，即：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k}{(q;q)_k}q^k\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n^2-1}{4}}\pmod{\Phi_n(q)^2}, \tag{1.4}$$

该结论由 Guo [2]证明。显然，在 (1.3) 和 (1.4) 中令 $n=p^r$ 和 $q\to 1$，分别可得 (1.1) 和 (1.2)。

我们指出，Wang 和 Yu [11] 将 Guo 和 Zeng 的 q-同余式 (1.3) 推广如下：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q^{2d+1};q^2)_k}{(q;q)_k}q^k\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}+d}q^{\frac{n^2-(2d+1)^2}{4}}\pmod{\Phi_n(q)},$$

其中 n 是一个奇正整数，而 d 是一个满足 $n>2|d|-1$的整数。

最近，Guo [3] 建立了 (1.1) 的两个新的 q-类比式如下：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{2k}\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pmod{\Phi_n(q)}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{2k+1}\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pmod{\Phi_n(q)}, \tag{1.6}$$

其中， n 是正奇整数。我们指出，Guo 证明 (1.5) 和 (1.6) 时所用的重要工具包括 Liu、Pan 和 Zhang 提出的 Morley 同余的 q 类比 [5] 以及 Carlitz 恒等式 [1]:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(a;q)_k(b;q)_k}{(q;q)_k}(-ab)^{n-k}q^{\frac{(n-k)(n+k-1)}{2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a;q)_{n+1}(-b)^kq^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}(1-aq^{n-k})}. \tag{1.7}$$

Guo [3, 猜想 1 和 2] 还猜想了 (1.5) 和 (1.6) 的如下推广：猜想 1.1 设 n 为正奇整数。那么，模 $\Phi_n(q)^2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{2k}\equiv\begin{cases}q^{\binom{n}{2}} & \text{if } n\equiv 1\pmod 4,\\ -q^{\binom{n+1}{2}} & \text{if } n\equiv 3\pmod 4,\end{cases} \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{2k+1}\equiv\begin{cases}q^{\binom{n+1}{2}} & \text{if } n\equiv 1\pmod 4,\\ -q^{\binom{n}{2}} & \text{if } n\equiv 3\pmod 4.\end{cases} \tag{1.9}$$

注意到 (1.8) 和 (1.9) 给出了 (1.2) 的新 q-类比。尽管 (1.8) 和 (1.9) 与 (1.4) 非常相似，但正如 Guo [3] 所提到的，“ [2] 中给出的证明 (1.4) 的方法在这里行不通”。

受 Guo 证明的启发 [3], ，我们将给出 (1.8) 和 (1.9) 的证明。

定理 1.2 q-超同余式 (1.8) 和 (1.9) 成立。

我们对 (1.8) 和 (1.9) 的证明还依赖于 Carlitz 恒等式 (1.7) 以及 Liu、Pan 和 Zhang 提出的 Morley 同余的 q-类比式 [5]。我们将在第2节和第3节分别证明 (1.8) 和 (1.9)。

2 (1.8) 的证明

在 (1.8) 两边令 $q \to q^{-1}$ ，可得 (1.8) 等价于

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k} q^{-k^2} \equiv \begin{cases} q^{-\binom{n}{2}} & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -q^{-\binom{n+1}{2}} & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \quad (2.1)$$

在 (1.7) 中取 $q \to q^2$、$a = q$、$b = -1$ 和 $n \to n-1$，可得以下恒等式（另见 [3, (2.3)]）：

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k} q^{(n-1)^2-k^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_n q^{k^2-k}}{(q^2;q^2)_k (q^2;q^2)_{n-k-1}(1-q^{2n-2k-1})} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_n q^{k^2-k}}{(q^2;q^2)_{n-1}(1-q^{2n-2k-1})} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

令 $a_{n,\ k}$ 表示（2.2）右端的求和项，即

$$a_{n,k} = \frac{(q;q^2)_n q^{k^2-k}}{(q^2;q^2)_{n-1}(1-q^{2n-2k-1})} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2}. \quad (2.3)$$

注意，对于 $0 \le k \le n-1$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} &= \frac{(1-q^{2n-2})(1-q^{2n-4})\cdots(1-q^{2n-2k})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} \\ &\equiv \frac{(1-q^{-2})(1-q^{-4})\cdots(1-q^{-2k})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} \pmod{\Phi_n(q)} \\ &= (-1)^k q^{-k^2-k}. \end{aligned}$$

此外， q-移位阶乘 $(q;q^2)_n$ 含有因子 $1-q^n$ ，它可被 $\Phi_n(q)$ 整除；并且 $(q^2;q^2)_{n-1}$($1-q^{2n-2k-1}$) 与 $\Phi_n(q)$ 互素，唯有 $k=\frac{n-1}{2}$ 例外。因此，对于 $k\neq\frac{n-1}{2}$ ，

$$a_{n,k}\equiv\frac{(-1)^k(1-q)(q;q^2)_{n-1}}{(1-q^{2k+1})(q^2;q^2)_{n-1}}\pmod{\Phi_n(q)^2}, \tag{2.4}$$

其中我们用到了如下事实：对于任意整数 s， $q^{sn}\equiv 1\pmod{\Phi_n(q)}$.

由 [10, (2.4) 和 (2.7)], , 我们有

$$\frac{(q;q^2)_{n-1}}{(q^2;q^2)_{n-1}}=\frac{(q;q^2)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}(-q;q)_{n-1}}\equiv\frac{-q[n]}{(-q;q)_{n-1}}\equiv -q[n]\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.5}$$

将 (2.5) 代入 (2.4) 右端，得到

$$a_{n,k}\equiv q(1-q^n)\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^{2k+1}}\pmod{\Phi_n(q)^2}\quad\text{for } k\neq\frac{n-1}{2}. \tag{2.6}$$

令 $b_{n,\ k}$ 表示 (2.6) 的右端，即

$$b_{n,k}=q(1-q^n)\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^{2k+1}}. \tag{2.7}$$

由 (2.2)、(2.3)、(2.6) 和 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{(n-1)^2-k^2}\\&=\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\k\neq(n-1)/2}}a_{n,k}+a_{n,(n-1)/2}\\&\equiv\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\k\neq(n-1)/2}}b_{n,k}+a_{n,(n-1)/2}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

q-类比 Morley 同余 [5, (1.5)] 的一个特例（另见 [3, (2.5)]）为

$$\begin{bmatrix}n-1\\ \frac{n-1}{2}\end{bmatrix}_{q^2}\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{1-n^2}{4}}(-q;q)_{n-1}^2\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.9}$$

由 (2.3) 和 (2.9)，我们推得

$$\begin{aligned}a_{n,(n-1)/2}&=\frac{q^{\frac{n^2-4n+3}{4}}(q;q^2)_n}{(1-q^n)(q^2;q^2)_{n-1}}\begin{bmatrix}n-1\\ \frac{n-1}{2}\end{bmatrix}_{q^2}\\&\equiv\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{-n+1}(q;q^2)_n(-q;q)_{n-1}^2}{(1-q^n)(q^2;q^2)_{n-1}}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned}$$

容易验证

$$\frac{(q;q^2)_n(-q;q)_{n-1}^2}{(1-q^n)(q^2;q^2)_{n-1}}=\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{1+q^n}.$$

因此,

$$a_{n,(n-1)/2}\equiv\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{-n+1}}{1+q^n}\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.10}$$

利用以下 q-同余式（见 [6, **(4.4)**]）：

$$\begin{bmatrix}2n\\ n\end{bmatrix}\equiv 2-n(1-q^n)\pmod{\Phi_n(q)^2},$$

我们得到

$$\begin{aligned}a_{n,(n-1)/2}&\equiv\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{-n+1}}{1+q^n}\left(2-n(1-q^n)\right)\\ &\equiv(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(q^{-n+1}+\frac{(1-n)q(1-q^n)}{2}\right)\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

接下来，我们将确定以下模 $\Phi_n(q)^2$ 的求和：

$$\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ k\ne(n-1)/2}}b_{n,k}=-q(1-q^n)\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ k\ne(n-1)/2}}\frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}. \tag{2.12}$$

注意，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ k\neq (n-1)/2}} \frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}\\
&=\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}\\
&=\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^{n-k-1}}{1-q^{2n-2k-1}}\\
&\equiv\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^k}{1-q^{2k+1}}-\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(-1)^k q^{2k+1}}{1-q^{2k+1}} \pmod{\Phi_n(q)}\\
&=\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}(-1)^k\\
&=\frac{1+(-1)^{\frac{n-3}{2}}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

由 (2.12) 和 (2.13) 可得

$$\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ k\neq (n-1)/2}} b_{n,k}\equiv -\frac{1+(-1)^{\frac{n-3}{2}}}{2}q(1-q^n) \pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.14}$$

此外，结合 (2.8)、(2.11) 和 (2.14) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{(n-1)^2-k^2}\\
&\equiv -\frac{\left(1+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\right)q(1-q^n)}{2}\\
&+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(q^{-n+1}+\frac{(1-n)q(1-q^n)}{2}\right) \pmod{\Phi_n(q)^2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

接下来，我们将分两种情况证明 (2.1)。

1 $n\equiv 1$ （模 4）情形。由（2.15）可得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{(n-1)^2-k^2}\equiv q^{1-n}+\frac{(1-n)q(1-q^n)}{2} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.16}$$

由于

$$\begin{aligned} q^{sn} &= 1-(1-q^{sn}) \\ &= 1-(1-q^n)(1+q^n+q^{2n}+\cdots+q^{(s-1)n}) \\ &\equiv 1-s(1-q^n) \pmod{\Phi_n(q)^2}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

我们有

$$\begin{aligned} q^{(n-1)^2-\binom{n}{2}} &= q^{1-n}q^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &\equiv q^{1-n}\left(1-\frac{(n-1)(1-q^n)}{2}\right) \\ &\equiv q^{1-n}+\frac{(1-n)q(1-q^n)}{2} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

注意到 (2.16) 和 (2.18) 右端的值相等。因此，(2.1) 中 $n\equiv 1 \pmod 4$ 情形的证明可由 (2.16) 和 (2.18) 得出。

情形 **2** $n\equiv 3 \pmod 4$。由 (2.15)，我们有

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-1;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{(n-1)^2-k^2} \equiv -q^{1-n}+\frac{(n-3)q(1-q^n)}{2} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{2.19}$$

利用 (2.17)，可得

$$\begin{aligned} -q^{(n-1)^2-\binom{n+1}{2}} &= -q^{1-n}q^{\frac{n(n-3)}{2}} \\ &\equiv -q^{1-n}\left(1-\frac{(n-3)(1-q^n)}{2}\right) \\ &\equiv -q^{1-n}+\frac{(n-3)q(1-q^n)}{2} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

因此，(2.1) 中 $n\equiv 3 \pmod 4$ 情形的证明可由 (2.19) 和 (2.20) 得出。

3 (1.9) 的证明

在等式 (1.9) 两边令 $q\to q^{-1}$，可得 (1.9) 等价于

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{-(k+1)^2} \equiv \begin{cases} q^{-\binom{n+1}{2}} & \text{if } n\equiv 1 \pmod 4 \\ -q^{-\binom{n}{2}} & \text{if } n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{3.1}$$

在 (1.7) 中令 $q \to q^2$、$a = q$、$b = -q^2$ 和 $n \to n-1$，可得以下恒等式（另见 [3, (2.8)]）：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k} q^{n^2-(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_n q^{k^2+k}}{(q^2;q^2)_k (q^2;q^2)_{n-k-1}(1-q^{2n-2k-1})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(q;q^2)_n q^{k^2+k}}{(q^2;q^2)_{n-1}(1-q^{2n-2k-1})} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

令 $c_{n,k}$ 表示 (3.2) 右侧的求和项，即，

$$c_{n,k} = \frac{(q;q^2)_n q^{k^2+k}}{(q^2;q^2)_{n-1}(1-q^{2n-2k-1})} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} = q^{2k} a_{n,k}. \qquad (3.3)$$

由 (2.6)、(2.7) 和 (3.3)，可得

$$\begin{aligned}
c_{n,k} &\equiv q(1-q^n)\frac{(-1)^{k+1}q^{2k}}{1-q^{2k+1}} \pmod{\Phi_n(q)^2} \\
&= (-1)^k(1-q^n) + q^{-1}b_{n,k} \quad \text{for } k \neq \frac{n-1}{2}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

由 (2.14) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0\le k\le n-1 \\ k\neq (n-1)/2}} c_{n,k} &\equiv (1-q^n) \sum_{\substack{0\le k\le n-1 \\ k\neq (n-1)/2}} (-1)^k + q^{-1} \sum_{\substack{0\le k\le n-1 \\ k\neq (n-1)/2}} b_{n,k} \\
&\equiv \left(1-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)(1-q^n) - \frac{1+(-1)^{\frac{n-3}{2}}}{2}(1-q^n) \pmod{\Phi_n(q)^2} \\
&= \frac{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2}(1-q^n). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

此外，由 (2.11) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}
c_{n,(n-1)/2} &= q^{n-1} a_{n,(n-1)/2} \\
&\equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{(1-n)(1-q^n)}{2}\right) \pmod{\Phi_n(q)^2}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

由 (3.2)、(3.5) 和 (3.6) 可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{n^2-(k+1)^2}$$

$$=\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ k\neq(n-1)/2}} c_{n,k}+c_{n,(n-1)/2}$$

$$\equiv\frac{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2}(1-q^n)+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1+\frac{(1-n)(1-q^n)}{2}\right)\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{3.7}$$

我们将分两种情况来证明 (3.1)。

情形 **1** $n\equiv 1$ （模 4）。由 (3.7)，可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{n^2-(k+1)^2}\equiv 1+\frac{(1-n)(1-q^n)}{2}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{3.8}$$

另一方面，由 (2.17) 可得

$$q^{n^2-\binom{n+1}{2}}=q^{\frac{n(n-1)}{2}}\equiv 1+\frac{(1-n)(1-q^n)}{2}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{3.9}$$

结合 (3.8) 和 (3.9)，我们完成了 (3.1) 中情形 $n\equiv 1$ （模 4）的证明).

情形 **2** $n\equiv 3$ （模 4）。在此情形下， q-同余式 (3.7) 化为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(q;q^2)_k(-q^2;q^2)_k}{(q^2;q^2)_k}q^{n^2-(k+1)^2}\equiv -1+\frac{(n+1)(1-q^n)}{2}\pmod{\Phi_n(q)^2}. \tag{3.10}$$

由 (2.17)，可得

$$\begin{aligned}-q^{n^2-\binom{n}{2}}&=-q^{\frac{n(n+1)}{2}}\\ &\equiv -1+\frac{(n+1)(1-q^n)}{2}\pmod{\Phi_n(q)^2}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

于是，(3.1) 中 $n\equiv 3$ (mod 4) 情形的证明可由 (3.10) 和 (3.11) 得出。

致谢。第一作者ได้รับ中国国家自然科学基金资助（项目编号 12171370）。

参考文献

[1] L.Carlitz，一条 q 恒等式，《斐波那契季刊》12 (1974年)，369–372.[2] V.J.W. Guo，证明 Tauraso 猜想的一个 q 同余式，《国际数论杂志》15 (2019年)，37–41。

[3] V.J.W. Guo，Sun 和 Tauraso 同余式的新 q 类比，Debrecen 数学出版物 102 (2023年)，103–109.[4] V.J.W. Guo 和 J. Zeng，涉及中心 q 二项式系数的一些同余式，《应用数学进展》45 (2010年)，303–316.[5] J. Liu、H. Pan 和 Y. Zhang，莫利同余式的推广，《微分方程进展》(2015年)，第254篇文章。[6] J.-C. Liu，关于 q 三项式系数的整除性，《拉马努金杂志》60 (2023年)，455–462.[7] Z.-W. Sun，二项式系数、卡塔兰数和卢卡斯商，《中国科学：数学》53 (2010年)，2473–2488.[8] Z.-W. Sun 和 R. Tauraso，中心二项式系数的新同余式，《应用数学进展》45 (2010年)，125–148.[9] R. Tauraso，中心二项式和同余式的一些 q 类比，《数学讨论》133 (2013年)，133–143.[10] C. Wang 和 H.-X. Ni，由某些恒等式导出的若干 q 同余式，《匈牙利数学期刊》85 (2022年)，45–51.[11] X. Wang 和 M. Yu，Sun 和 Tauraso 同余式的一些推广，《匈牙利数学期刊》85 (2022年)，240–245。