本文的法文版本发表于*Communications in Algebra*,
42：3768–3781，2014年 DOI:
10.1080/00927872.2013.794360

在此文件中，您可以找到从页码 E1 开始的英文版本。
当 V 是赋值整环时，在 V$[X]$ 上计算关系的算法

接着，法文版本从页码 F1 开始。
当 V 是赋值整环时，在 V$[X]$ 上的关系计算算法

读者或许会对性别交替的用法，以及“corolaire”一词的拼写感到意外；此外，文中还采用了其他一些读者并不习惯的创新。事实上，我们尽力严格遵循法国目前学校所教授和推荐的新正字法的规范。

arXiv:2304.00303v1 [math.AC] 1 Apr 2023

作者
Henri Lombardi 贝桑松数学实验室，法国国家科学研究中心 UMR 6623，勃艮第-弗朗什-孔泰大学，25030 BESANCON cedex，法国，电子邮箱：henri.lombardi@univ-fcomte.fr，网址：http://hlombardi.free.fr

Claude Quitté 数学实验室，SP2MI，Boulevard 3，Teleport 2，BP 179，86960 FUTURO-SCOPE Cedex，法国，电子邮箱：quitte@math.univ-poitiers.fr Ihsen Yengui 法克斯科学学院数学系，3000 Sfax，突尼斯，电子邮箱：ihsen.yengui@fss.rnu.tn

本文的结果已在Ducos、Monceur 和 Yengui 2016中得到改进（给出了精确界），并推广到**V**$[X_1,\dots,X_k]$ 中的环Ducos、Valibouze 和 Yengui 2015。

摘要

我们给出一种算法，用于计算任意有限生成子模的**V**-饱和，其中 **V**$[X_1,\dots,X_k]^m$ ($k \in \mathbb{N}$，$m \in \mathbb{N}^*$)，且**V** 是赋值整环。我们的算法基于“阶梯形”这一概念，从而保证其正确性。当分式域与**V** 的剩余域上的两个（希尔伯特）级数相同时，所提出的算法即告终止。作为应用，我们的算法可计算**V**$[X_1,\dots,X_k]$上的关系。

参考文献

Lionel Ducos、Annick Valibouze 和 Ihsen Yengui。计算V$[X_1,\dots,X_k]$、**V** 赋值整环上的关系。《代数杂志》，425：133–145，2015年。ISSN 0021-8693。doi：10.1016/j.jalgebra.2014.11.018。URLhttp://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.11.018。1

Lionel Ducos、Samiha Monceur 和 Ihsen Yengui。计算**V**-有限生成子模的饱和**V**$[X]^m$ 其中 **V** 是一个赋值整环。《符号计算杂志》，72：196–205，2016。ISSN 0747-7171。doi：10.1016/j.jsc.2015.02.006。网址：http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2015.02.006。1

在$\mathbf{V}[X]$是赋值整环时，计算$\mathbf{V}$ 上的关系的算法

Henri Lombardi、Claude Quitté 和 Ihsen Yengui

2014年，2023年译

摘要

我们给出一种算法，用于计算$\mathbf{V}[X]^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)中任意有限生成子模的$\mathbf{V}$饱和，其中$\mathbf{V}$ 是赋值整环。借助该算法，我们可以计算$\mathbf{V}[X]^k$中任意有限生成子模的关系模的一组有限生成元。

关键词： 饱和、相容性、关系、赋值整环、计算机代数、构造性代数。

引言 **E1**

1 有限生成V-模在自由V-模中的E22 有限生成V-模的$\mathbf{V}[X]$-饱和E53 有限生成$\mathbf{V}[X]$-模的关系模E84 附录：Magma 代码E9

参考文献 **E11**

引言

这是民间知识（例如参见（Glaz 1989年，Glaz，定理 7.3.3））：对于赋值整环 $\mathbf{V}$，环$\mathbf{V}[X]$是相干的（即，$\mathbf{V}[X]$ 的有限生成理想的关系模是有限生成的）。Glaz（1989年）给出的证明使用了一篇深奥论文中的困难结果 Raynaud 和 Gruson （1971）。然而，对于这一卓越结果，目前仍没有已知的一般算法。

对于诺特相容环 $\mathbf{R}$ （不一定是赋值整环），已知多项式环 $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 也是诺特相容环。Richman 给出了构造性证明（1974），并在著作Mines、Richman和Ruitenburg 1988年中作了详尽解释。在这种情况下，也可以使用 Buchberger 为域上的多项式环引入的格罗布纳基（例如参见 Adams 和 Loustaunau （1994年）、Hadj Kacem 和 Yengui（2010年）、Yengui （2006年））。

不过，对于域的情形，实际上并未用到诺特性，因为对于约化零维环（也称为冯·诺依曼正则环或绝对平坦环），相干性结果也很容易证明。

在 Lombardi、Schuster 和 Yengui 2012年中，给出了一种算法，用于计算$\mathbf{V}[X]$ 的有限生成理想的格罗布纳基，其中赋值整环的维数为一（不必是诺特环）。由此可得一种判定$\mathbf{V}[X]$的有限生成理想相容性的算法。

我们回顾一下（例如，参见 Mines、Richman和Ruitenburg 1988年）：如果一个环是相干的，那么任意有限表示模 M 都是相干模（即，M 的任意有限生成子模的关系模都是有限生成的）。

本文给出一种算法，无需诺特条件，也无需对克鲁尔维数作任何假设，即可计算出$\mathbf{V}[X]^k$中有限向量族的关系模的有限生成集。我们认为，这是该结果的第一个构造性证明（我们的算法是以构造性方式证明的）。

设$\mathbf{R}$是整环，$\mathbf{R}$-模 N 的子$\mathbf{R}$-模 M 在 N 中的饱和M 是 N，定义为$\mathbf{R}$-模

$$\mathrm{Sat}_{\mathbf{R},N}(M) = \{\, x \in N \mid \exists a \in \mathbf{R}^*,\, ax \in M \,\}.$$

当存在多个可能的环时，我们将明确写作“N 中 M 的 R饱和”。如果 N 是自由模（R^n， $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathrm{R}^{(I)}$， I 无限生成），通过标量扩张可得到 K-向量空间 $\mathrm{K}\otimes N \simeq \mathrm{K}^n$ 或 $\mathrm{K}^{(I)}$，其中 K 是 R 的分式域。我们还得到 $\mathrm{Sat}_{\mathrm{R},N}(M) = \mathrm{K}.M \cap N$，其中 $\mathrm{K}.M$ 是由 M 生成的 $\mathrm{K}\otimes N$ 的 K子向量空间。模 M 称为 R饱和的，当它等于其 R饱和时。一般而言，整环 R 上有限生成的 $\mathrm{R}[X]$-模在 $N = \mathrm{R}[X]^n$ 中的R饱和本身并非有限生成的 $\mathrm{R}[X]$-模；但当 R 是赋值整环 V 时，情况则是如此。

在第 1 节中，我们给出一种增量算法，用于计算自由 $\mathbf{V}$-模（其基可能是无限的）中有限生成子模的 $\mathbf{V}$-饱和。该算法并非新颖之举，但我们以一种便于使用的形式给出它，从而能够在第 2 节中计算通过对有限生成的 $\mathbf{V}[X]$-模进行 $\mathbf{V}$-饱和而得到的 $\mathbf{V}[X]$-模的有限生成集，该模是 $\mathbf{V}[X]^n$ （$n \in \mathbb{N}^*$）。

这证明了，$\mathbf{V}$-模$\mathbf{V}[X]$内部的有限生成$\mathbf{V}[X]^n$ 子模的$\mathbf{V}[X]$-饱和确实是有限生成$\mathbf{V}[X]$-模。

最后，作为一个直接的推论，我们在第3 节中得到关于有限向量族在 $\mathbf{V}[X]$ 上的 syzygy 模的有限生成集的计算，其中该有限向量族属于 $\mathbf{V}[X]^k$。

本文中，所有环都是交换的并且含单位元。

1 有限生成 V-模在自由 V-模中的饱和

术语。 本文采用Mines、Richman和Ruitenburg 1988年中使用的构造性术语，这些术语非常适合计算机代数。

对于任意环$\mathbf{R}$，我们用$\mathbf{R}^\times$ 表示$\mathbf{R}$中的单位元乘法群。若对于$\mathbf{R}$中的任意元素，我们都有一个算法来判定 $x = 0$ 还是 $x \neq 0$，则称环$\mathbf{R}$是离散的。若我们明确拥有如下蕴含关系，则称环$\mathbf{R}$ 是局部环：

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x + y \in \mathbf{R}^\times \implies (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ y \in \mathbf{R}^\times)$$

等价地，也可以问

$$\forall x \in \mathbf{R}, (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ 1 + x \in \mathbf{R}^\times)$$

非平凡局部环$\mathbf{R}$ 有唯一的极大理想，它就是雅各布森根

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{R}) = \left\{\, x \in \mathbf{R} \mid 1 + x\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^\times \,\right\}$$

(对于任意环，在经典数学中，该理想是所有极大理想的交集).

商环$\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathrm{Rad}(\mathbf{R})$是一个域，称为$R$的**剩余域**。若我们明确拥有如下析取关系，则称局部环$\mathbf{R}$ 是剩余离散的：

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{R})).$$

在这种情况下，剩余域是一个离散域；我们有一个算法，可以判定“$x = 0$ 或 x 可逆”对于 $x \in \mathbf{k}$ 是否成立。

设 I 是一个有限或无限集合，带有“离散”线性序，也就是说，我们有一个算法可以判定以下析取命题

$$i < j \quad \vee \quad i = j \quad \vee \quad i > j$$

对 $i,j \in I$。在这种情况下，对于任意环 $\mathbf{R}$，我们都有自由模 $\mathbf{R}^{(I)}$，其自然基为 $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$。如果 $\mathbf{R}$ 是离散的，那么可以判定 $\mathbf{R}^{(I)}$ 中的任意向量 $a=\sum_{i\in J} a_i\mathbf{e}_i$（$J$ 是 I 的有限部分）是否为零；若非零，则可以找到最小的 i，使得 $a_i \neq 0$。

为了确定自由模 $\mathbf{R}$ 的饱和子模 $\mathbf{R}^{(I)}$ 我们将使用引理 1.1 和 1.3。

引理 1.1。设 $\mathbf{R}$ 是一个整环，且 N 是一个无挠$\mathbf{R}$-模。若 $N=M\oplus P$，则 M 在 N中是饱和的。

在本节中，我们现在假设$\mathbf{R}$ 是一个整剩余离散局部环，其中$\mathbf{k}=\mathbf{R}/\mathrm{Rad}(\mathbf{R})$。

定义与记号 1.2。

1. 若向量 $C=\sum_i c_i\mathbf{e}_i$ 属于$\mathbf{R}^{(I)}$（视为列向量）是剩余非零的，即其中一个系数是单位，则称其为本原。此时，我们将 piv(C) 记为最小的指标 i，使得 c_i 是剩余非零的。称其为 C的主指标。我们将 cpiv(C) 记为（ C的主元系数）相应的标量 c_i。

2. 若有限个本原向量组成的族 $(C^k)_{k\in K}$ 的主元指标 piv(C^k) 两两不同，则称其处于 $\mathbf{k}$-阶梯形 。处于$\mathbf{k}$-阶梯形的族也简称为处于阶梯形。此时我们记作

$$\mathrm{piv}(C)=\left\{\,\mathrm{piv}(C^k)\mid k\in K\,\right\}.$$

若矩阵的系数属于$\mathbf{R}$，且其列向量均为本原向量并组成一个阶梯形族，则称该矩阵处于阶梯形。

3. 若 K 具有线性序，则当族 $(C^k)_{k\in K}$ 处于阶梯形，且对 K 中的 $j<k$，C^k 中指标 piv(C^j) 对应的系数为零时，称该族处于严格 $\mathbf{k}$-阶梯形 。

引理 1.3. 若有限个($C=C^k)_{k\in K}$ 个$\mathbf{R}^{(I)}$ 中的向量构成的族处于$\mathbf{k}$-阶梯形，则该族是由自身生成的$\mathbf{R}$-模 M 的一组基，并且 M 具有以下自由$\mathbf{R}$-模作为直和项

$$P=\bigoplus\nolimits_{j\in J}\mathbf{R}\,\mathrm{e}_j \quad \textit{avec } J=\{\,j\in I\mid j\notin \mathrm{piv}(C)\,\}.$$

此外，集合 $\mathrm{piv}(C)$ 与模 M无关。事实上，指标 j 属于$\mathrm{piv}(C)$，当且仅当存在 M 中的本原向量 U，使得 $\mathrm{piv}(U)=j$。

注意：引理中的两个自由$\mathbf{R}$-模始终都是 $\mathbf{R}$-饱和的，这是引理 1.1的推论。

证明。我们给出 I 为有限时的证明，一般情形类似。我们按照递增的主元指标对族 $(\mathbf{e}_j)_{j\in J}\cup(C^k)_{k\in K}$ 进行线性排序。所得矩阵是剩余三角形的，对角线上具有可逆系数，因此它是剩余可逆的，从而也是可逆的。这表明 M 和 P 是直和项，并且具有所需的基。读者可以完成证明。

□

饱和算法

背景 1.4。设 $\mathbf{V}$ 是一个赋值整环，即对所有 a,b，$a\mid b$ 或 $b\mid a$ 中至少有一个成立的整环；更准确地说，我们有一个算法，可以判定（对于 a,b，给定于 $\mathbf{V}$ 中）以下析取式

$$\exists x\in\mathbf{V},\ a=xb \quad\vee\quad \exists x\in\mathbf{V},\ b=xa$$

并给出元素 x。我们知道，$\mathbf{V}$ 是一个局部环（假设 $a+b$ 可逆；如果 a整除 b，那么它也整除 $a+b$，因此当 b 整除 a 时，它也整除 $a+b$ 并且可逆）。我们将其分式域记为 $\mathbf{K}$，将其剩余域记为 $\mathbf{k}$。由于$\mathbf{V}$ 被明确假设为整环，域 $\mathbf{K}$ 是离散域。此外，我们假设$\mathbf{V}$ 是剩余离散的，也就是说，我们有一个算法可以判定 $\mathbf{V}$ 中的元素是否为单位。特别地，引理 1.1和 1.3 对于环 $\mathbf{V}$成立。

备注。 在余离散赋值整环中，我们有一个可以回答“$a \mid b$? ”这一问题的判定方法。事实上，对于 a, b 非零，如果 $a = bx$，那么 $a \mid b$ 当且仅当 x 是单位。

我们考虑 **V**-子模 $M = \mathbf{V}\ a^1 + \cdots + \mathbf{V}\ a^m$，它属于 $\mathbf{V}^{(I)}$。本节的目标是给出一种算法，用于计算 M 在 $\mathbf{V}^{(I)}$ 中的 **V**-饱和的基；简而言之，该模记为 Sat(M)。实际上，由于涉及的指标只有有限多个，我们可以假设 I 是有限集，并且 M 由矩阵 F 的列生成。为了直观地展示这一点，我们可以按照指标非递增的顺序排列矩阵的各行。

计算 Sat(M) 的一种粗略方法，是通过初等变换将 F 化为史密斯标准形。由此可见，经过适当的基变换后，模 M 由向量 $v_i f_i$ 生成（其中 f_i 是基的一部分，而 v_i 非零）。在这种情况下，模 Sat(M) 就是由这些 f_i 生成的模。这说明 Sat(M) 是一个自由 **V**-模，其直和项为另一个自由 **V**-模。

事实上，我们更倾向于采用一种较为温和的方法：通过非常简单的运算，从 F 计算出一个**k**-阶梯形矩阵 G，并将其列向量作为 Sat(M) 的一组基。

第一个运算称为向量约化，记作 RedPrim：将一个假定为非零的向量 a 替换为 a/u，其中 u 是其系数的一个最大公因子；例如， u 是在所有能整除其他系数的系数中指标最小的一个。在这种情况下，约化向量的主元系数为 1。

我们对矩阵 F 所进行的运算如下，以将其化为严格的**k**-阶梯形 G，使得 Sat(Im(F)) = Im(G)。我们依次处理初始矩阵的各列。注意，在开始时，空矩阵 vide 是严格的**k**-阶梯形。

假设我们已经处理了矩阵的若干初始列，并得到一个严格的**k**-阶梯形矩阵，其列为 $C^1, \ldots, C^r$。

我们要处理一个新的列，将其记为 $C = \sum_i c_i \mathbf{e}_i$。步骤如下。

1. 高斯消元：我们对列执行经典的初等变换

$$C \leftarrow C - \frac{c_s}{c_{j,s}} C^j,$$

其中 $s = \text{piv}(C^j)$ 和 $c_{j,\ s} = \text{cpiv}(C^j)$。此操作依次对列$C^1$、.....、 C^r进行。随后我们得到一个列 C'。

2. 如果 $C' = 0$，我们不将其加入。矩阵仍保持严格的 **k** 阶梯形。由列 C^1、.....、 C^r、 C 生成的 **K**-向量空间以 (C^1、.....、 C^r) 为基。

3. 如果 $C' \neq 0$，我们将 C' 替换为其约化本原形式 $C'' = \text{RedPrim}(C')$。随后将C'' 作为矩阵的最后一列 C^{r+1} 加入。此时新矩阵为严格的**k**阶梯形。由列 C^1、.....、 C^r、 C生成的 **K**-向量空间以 (C^1、.....、 C^r、 C'') 为基。

根据构造，Im(G)包含于Sat(Im(F))中，并且**V**-模Im(G)是饱和的，因为 G 处于严格的 **k**-阶梯形。事实上，在情况 2. 和情况 3. 中，我们通过归纳法可以看出，已经构造出了由前几列（直到第 C列）生成的**V**-饱和的一个基。此过程结束时，我们有Sat(Im(G)) = Sat(Im(F))。因此，我们的算法达到了目标。

定理 1.5。
上述饱和算法根据一个系数取自**V**的矩阵 F，计算出一个处于严格**k**-阶梯形的矩阵 G，使得$\text{Im}(G) = \text{Sat}(\text{Im}(F))$。
该算法具有如下“增量式”特征：处理矩阵 $[F_1 \mid F_2]$时，我们得到矩阵 $[G_1 \mid G_2]$，其中 G_1 是通过处理矩阵 F_1得到的矩阵。

下面的引理将在下一节中派上用场。

引理 1.6。 在上文所述的“高斯消元”过程中，若 C 是本原的，且指标 $\mathrm{piv}(C)$ 与 $j = 1, \ldots, r$ 对应的 $\mathrm{piv}(C^j)$ 不同，则得到的向量 C' 是本原的，且 $\mathrm{piv}(C) = \mathrm{piv}(C')$。

证明。 我们考虑赋值 $C \leftarrow C - \frac{c_s}{c_{j,s}} C^j$ 其中 $s = \mathrm{piv}(C^j)$，且 c_s 是第 s 行上 C 的系数。设 $\ell = \mathrm{piv}(C)$。将 C 的第 ℓ 行上的系数 c_ℓ 替换为 $c_\ell - \frac{c_s}{c_{j,s}} \cdot c_{j,\ell}$，其中 $c_{j,\ell}$ 是 C^j 的第 ℓ 行上的系数。若 $\ell > s$，c_s 在剩余意义下为零；若 $\ell < s$，则 $c_{j,\ell}$ 在剩余意义下为零。在这两种情况下，系数 c_ℓ 保持剩余不变。 □

2 有限生成 $\mathbf{V}[X]$-模的 V-饱和

本节所做的工作稍微复杂一些，而且奇怪的是，它似乎完全是全新的。它在计算机代数领域实现了一个简单的理论结果；该结果显然是新的，因此更缺乏构造性证明。

定理2.1。我们处于语境1.4中。若 M 是$\mathbf{V}[X]$的一个有限生成子$\mathbf{V}[X]^n$ -模，则 M 在$\mathbf{V}[X]^n$ 中的$\mathbf{V}[X]$-饱和是一个有限生成的$\mathbf{V}[X]$-模。

注。请注意，在经典数学中，通过使用排中律，每个赋值整环都满足语境1.4 的假设。因此，我们对定理2.1 的构造性证明也给出了经典数学中的一个证明，其唯一假设是$\mathbf{V}$ 为赋值整环。本文的所有结果也同样适用这一注记。

$\mathbf{V}$-饱和的一个有限生成集的计算算法之正确性蕴含该定理的证明。

视为一个$\mathbf{V}[X]$-模时，$\mathbf{V}[X]^n$ 具有自然基，记为 $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$。然后我们关注$\mathbf{V}[X]^n$ 作为$\mathbf{V}$-模的一个自然基，它由 $\mathbf{e}_{i,k} = X^k \mathbf{f}_i$ 组成，其指标集为 $I = [\![1..n]\!] \times \mathbb{N}$。我们在 I 上赋予字典序，使得

$$X^h \mathbf{f}_i < X^k \mathbf{f}_j \text{ if } i < j \text{ or } i = j \text{ and } h < k.$$

当模 $\mathbf{V}[X]^n$ 被视为以 $X^k\mathbf{f}_i$给出的自然基的 $\mathbf{V}$-模时，我们讨论的是该基上的“坐标”。当它被视为以 $\mathbf{f}_i$给出的自然基的 $\mathbf{V}[X]$-模时，我们讨论的是该基上的“系数”。

我们从$\mathbf{V}[X]^n$ 中的向量列表 $S = [s^1, \ldots, s^m]$ 开始，该列表构成 M 的生成集。我们不妨设 $m \geq 1$，且 s^k 非零。记作

$$E = \mathbf{V}\, s^1 + \cdots + \mathbf{V}\, s^m, \quad E_j = X^j E, \quad F'_k = \sum_{j=0}^{k} E_j \quad \text{and} \quad G'_k = \mathrm{Sat}_{\mathbf{V},\mathbf{V}[X]^n}(F'_k).$$

我们可以将 F'_k 和 G'_k 描述为分别由两个矩阵 F_k 和 G_k 的像构成的模。矩阵 F_k 已给定；对其应用上一节中的饱和算法，得到矩阵 G_k。

于是便产生了这样的问题：如何证明从某个 k 开始无需继续，因为加入 G'_k 的基中的元素不会改变所生成的$\mathbf{V}[X]$-模（注意，$\mathbf{V}$-模 $G'_k = \mathrm{Im}(G_k)$ 在每个步骤中都按 $E \neq 0$ 增长）。

我们需要说明一些记号。我们把 d 称为“ E的次数”，它表示某个 s^k 中某个坐标的最高次数。同样， $d+k$ 表示 E_k 或 F_k 的次数。因此，矩阵 F_k 可以看作一个有 $n(1+d+k)$ 行、 $m(1+k)$ 列的矩阵。

若 a 是 $\mathbf{V}$-本原向量，属于 $\mathbf{V}[X]^n$，且 $\mathrm{piv}(a) = (j, r) \in I$，我们记作

$$\mathrm{index}(a) := j \text{ and } \mathrm{PrimMon}(a) := r.$$

整数 $\mathrm{index}(a)$ 称为 a的指标，整数 $\mathrm{PrimMon}(a)$ 称为它的首个剩余指数，而 $\mathrm{piv}(a)$ 这一对称为 a的主元指标。每一对 $(j, r) \in I$ 都作为向量 $X^r\mathbf{f}_j$ 的指标，该向量属于 $\mathbf{V}$-自然基，而自然基是 $\mathbf{V}[X]^n$的自然基。

我们用 H_k 表示为获得矩阵 G_k 而添加到 G_{k-1} 中的列所组成的矩阵。

事实 2.2。 为了根据矩阵 G_k 计算矩阵 G_{k+1} ， 我们不必处理 E_{k+1} 的生成元（即列表 $X^{k+1}S$），而只需处理 XH_k 的列向量。

证明。 考虑上述简化过程。
我们将通过该简化过程得到的连续矩阵记为 G_k 。
通过对 k 进行归纳法，我们很容易验证，G_k 的列所生成的 $\mathbf{K}$-向量空间是 $\mathbf{K}[X]^m$的子空间 $\mathbf{K}F'_k$。事实上，每个被化为 0 的列都属于前面各列所生成的 $\mathbf{K}$-向量空间。而每个未被化为 0 的列，在模去前面各列后，经过化简所生成的 $\mathbf{K}$-向量空间与最初形成该列的列所生成的空间相同。G_k 的列构成$\mathbf{V}[X]^m$的一个饱和子-$\mathbf{V}$-模的基，因此该子模等于$\mathbf{K}F'_k \cap \mathbf{V}[X]^m$。这表明 $G_k = G_k$ □

下文中，我们将继续称其为简化过程，但用 H_k 和 G_k 分别代替 H_k和 G_k。

我们为矩阵 H_k 和 G_k 关联若干个整数：

- 整数 r_k 是 G_k的列数，也就是自由$\mathbf{V}$-模 Im(G_k) 的秩。

- 整数 n_k，即 H_k中指标主元的个数，是满足以下条件的$i \in [\![1..n]\!]$ 的基数：存在一列 C 属于 H_k ， 且 指标(C) $= i$。根据引理 1.3， H_{k-1} 中所有的指标主元都出现在 H_k中，因此，由归纳法可知， n_k 也是 G_k中指标主元的个数。因此，序列 n_k 是单调不减的。

- 整数 u_k，即对于 G_k ， 从 n_k的角度来看可用的坐标数，等于$n_k(1 + d + k)$。如果 $n_{k+1} = n_k$ ，则有 $u_{k+1} = u_k + n_k$。

- 整数 δ_k，即的亏格，是满足以下条件的 H_k 的列数：存在另一列 C' 属于 H_k ， 且 index(C) = index(C')，并且 PrimMon(C) $<$ PrimMon(C')。这样的列 C 称为多余列。因此，我们有 $r_k \leq u_k$ 和 $r_k = r_{k-1} + n_k + \delta_k$。

- 整数 $\Delta_k = u_{k+1} - r_k$ 是在步骤 中占据的可用位置（或位置）$n_k = n_{k+1}$当。若 $n_k = n_{k+1}$, 则有 $\Delta_k = u_{k+1} - r_k = (u_k + n_k) - (r_{k-1} + n_k + \delta_k) = u_k - r_{k-1} - \delta_k = \Delta_{k-1} - \delta_k$。

为了直观展示 H_k 的亏格 δ_k 及其随 k 增大而变化的方式，我们将在证明之后使用一些图来说明可能发生的情况。配合这些图给出的注释将有助于理解证明。

要点如下。
根据引理 1.6，我们可以确定：当我们利用 G_k处理 $H_{k+1} = XH_k$ 的连续列时， H_k 中某一列的每个主元（j, r）都会向后移动一个位置，即移至位置（$j, r + 1$），成为 H_{k+1}中某一列的主元；但若指标（$j, r + 1$）已出现在 G_0中，则情况例外。在后一种情况下，碰撞要么使 XH_k 中的列归零（从而使亏格降低），要么由化简后的列占据一个新的主元（并将其化为本原）。这个新主元可能产生不同影响：它可能落在一个已被占据的指标上，因此不会使亏格降低；也可能落在一个未被占据的指标上，此时亏格减小 1，而数量 n_k 增加，介于 n_k 和 n_{k+1} 之间。因此，以下引理的第一项断言得以证明。

引理 2.3. 序列 δ_k 是非递增的。当 k 充分大时，它必然达到0 。

证明。 我们已经指出，如果 $n_{k+1} = n_k$ 和 $\delta_k > 0$ ，那么 $\Delta_{k+1} < \Delta_k$。因此，对于充分大的 k ，我们得到 $\delta_k = 0$ 或 $n_{k+1} > n_k$。在第二种情况下，我们重复之前的情形。由于序列 n_k 有界于 n，这种情况只能发生有限次。 □

引理 2.4. 若 $\delta_k = 0$ ， 则由 G_k 生成的 $\mathbf{V}[X]$-模是由开头给出的那些 s^j 生成的$\mathbf{V}$-饱和$\mathbf{V}[X]$-模。于是我们可以停止该算法。

证明。 由于序列 δ_k 现在为零，只需证明 H_{k+1} 的各列属于由 $\mathbf{V}[X]$-模中 G_k的各列生成的模。根据引理 1.6， H_{k+1} 的各列属于 $\mathbf{V}$-模 $\mathrm{Im}(G_k) + X\mathrm{Im}(H_k)$。

□

带图示的例子。

图 1 表示 $G_0 = H_0$ 的指标主元。六个白色圆圈是 piv(H_0) 的元素。

黑色（实心）圆圈或方块对应$\mathbf{V}$-基中的元素，其中不存在 G_0 的指标主元。黑色方块表示尚未占用的主元指标：当整行都是黑色时，我们会用方块进一步强调。在当前情形中，我们得到 $n = 5$、 $d = 4$、 $n_0 = 4$、 $r_0 = 6$、 $u_0 = 20$、 $\Delta_0 = 14$、 $\delta_0 = 2$。

我们用双白色圆圈表示多余列中对应于 $\delta_0 = 2$ 的元素 piv(H_0)。

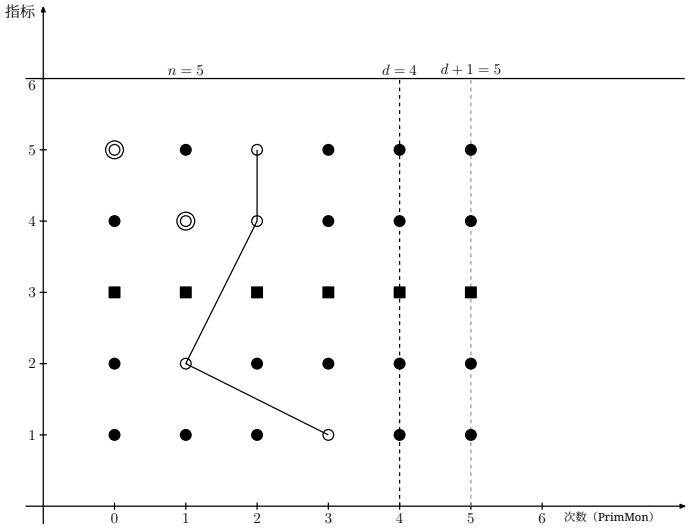


图 1:

黑色虚线连接 H_0 的非多余列中的 piv(C)。
根据引理 1.6，我们可以确定，当我们用 G_0处理 $H_1 = XH_0$ （j， r）的连续列时， H_0 中的每个主元都将向后移动一位，即在位置（j， $r + 1$）处成为 H_1中列的主元，但j， $r + 1$）这一指标已存在于 G_0中的情况除外。

在图 1 的情形中，除主元（4，1）外， H_0 的所有主元在 H_1 中都向后移动了一位。特别是，主元（5，1）将出现在 H_1 中，我们看到这对应于一个多余列（因此 $\delta_1 \geq 1$）。

当我们处理列 XC ，使得 piv(C) = (4，1) 时，会发生碰撞： 我们将进行高斯消元，以将 XC 中位置 (4，2) 的系数化为 0；饱和过程将产生零向量（此时 $\delta_1 = 1$ 和 H_1 将只有 5 列， $r_1 = 11$），或者产生向量 C'' ，使得 piv(C'') 位于先验可用空间（次数为 ≤ 5的向量）中的一个未占用位置，并且 piv(C'') $\notin$ piv(G_0)。在这种情况下，我们将有 $r_1 = 12$。

我们来考察 piv(C'') 的三种可能情况，并给出对应的 H_1的三幅图。 H_0 的主元用灰色（空心）圆圈表示， H_1 的主元用黑色（空心）圆圈表示。黑色（实心）圆圈或方块同样表示空位置，这些位置在先验情况下可能会在后续步骤中被填充。

在图 2的情况下，我们有 $n_1 = 4$、 $\delta_1 = 2$、 $u_1 = 24$、 $\Delta_1 = 12$。当我们通过 G_1处理 XH_1时， H_2 中将在位置 (1，5)、(2，4)、(4，4) 和 (5，4) 生成主元。此外，分别发生在 (2，1) 和 (5，2) 处的两次碰撞，将导致更难预测的结果。我们可以得到 $r_2 = 16$ 与 $\delta_2 = 0$，或得到 $r_2 = 17$ （如果 $n_2 = 4$，则为 $\delta_2 = 1$；如果 $n_2 = 5$，则为 $\delta_2 = 0$），也可以得到 $r_2 = 18$。

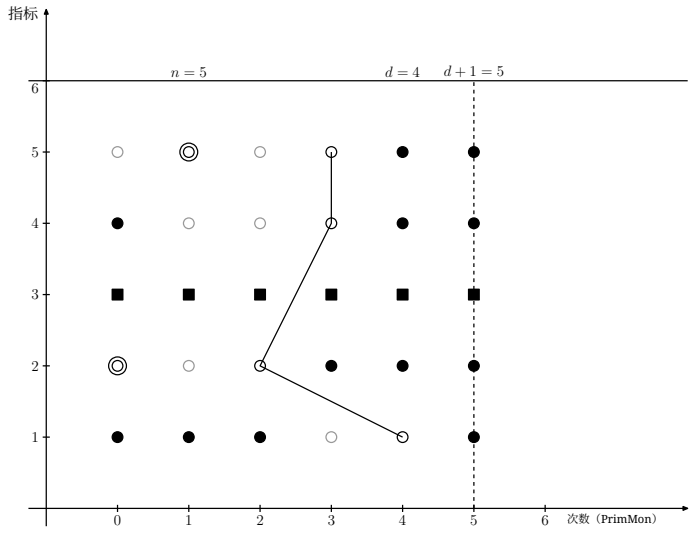


图 2：如果在 (4，2) 处的碰撞在位置 (2，0) 产生一个主元

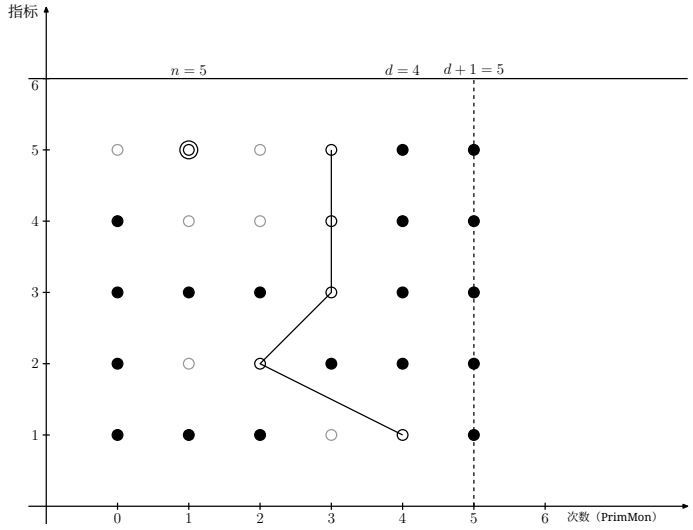


图3：如果 (4, 2) 处的碰撞在 (3,3) 处产生一个主元

在图3的情况下，我们有 $n_1 = 5$、 $\delta_1 = 1$、 $u_1 = 30$、 $\Delta_1 = 18$。当我们通过 G_1处理 XH_1时， H_2中将在位置 (1，5)、(2，3)、(3，4)、(4，4) 和 (5，4) 生成主元。此外，发生在 (5，2) 处的一次碰撞，将导致更难预测的结果。这可能会将向量化为 0，在这种情况下为 $\delta_2 = 0$；也可能生成一个新向量，在这种情况下为 $\delta_2 = 1$，因为现在所有索引都已被主元占据。新向量原则上可以将图中标示的任意黑色方块作为主元，也可以将次数为 6 的主元作为主元。

在图4的情形下，我们有 $n_1 = 4$ 和 $\delta_1 = 2$。当我们通过G_1处理 XH_1 时，将在 H_2 中产生位于 (1, 5)、(2,4)、(4, 4) 和 (5,4) 处的主元。而 (5, 2) 处的一次碰撞将产生一个更难预测的结果。带有位于 (2,2) 处主元的多余列原则上不会产生任何碰撞，除非先处理前面提到的特定碰撞，并得到一个带有位于 (2,3) 处主元的约化向量。

3 有限生成 $\mathbf{V}[X]$-模的关系模

定理 *3.1*。我们沿用背景 *1.4*。设 $u_1, \ldots, u_n \in V[X]^k$ 和 $s^1, \ldots, s^m \in K[X]^n$ 是 $(u_1, \ldots, u_n)$ 在 $K[X]$ 上的关系模的生成元。我们可以假设 s^j 都属于 $V[X]^n$。那么 $(u_1, \ldots, u_n)$ 在 $V[X]$ 上的关系模等于

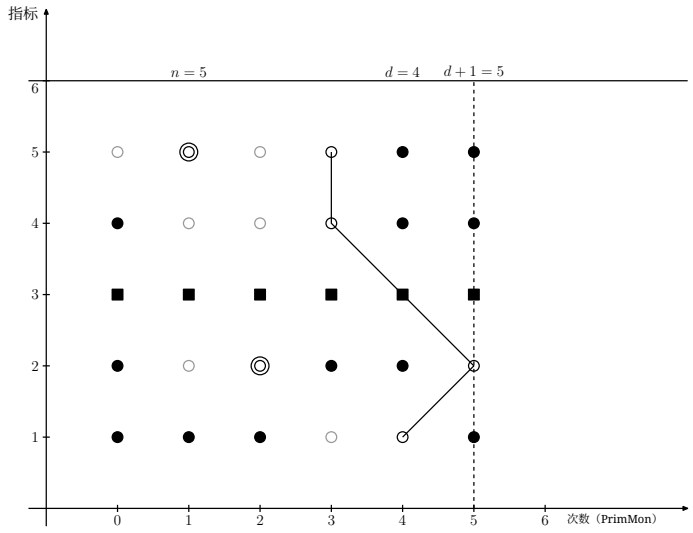


图4：如果 (4，2) 处的碰撞在 (2，5) 处产生一个主元

$\mathbf{V}[X]^n$ 的 $\mathbf{V}[X]$-模由 $s^1,\dots,s^m$生成。由此，根据定理 2.1，该模是有限生成的。特别地， $\mathbf{V}[X]$ 是一个相干环。

证明。 一个向量 $f=(f_1,\ \dots\dots,\ f_n)\in\mathbf{V}[X]^n$，使得 $\sum_j f_j u_j=0$ 可以写成以下形式

$$f=a_1 s^1+\cdots+a_m s^m$$

含有某个 $a_j\in\mathbf{K}[X]$。将这个关系乘以适当的 $\alpha\neq 0$ $\mathbf{V}$ 中的元素，我们得到 $\alpha\,a_i\in\mathbf{V}[X]$。这表明 $\alpha\,f$ 属于由 s^j 生成的 $\mathbf{V}[X]$-模。因此， f 属于由 s^j 生成的 $\mathbf{V}[X]$-模的$\mathbf{V}$饱和。反之则显然成立。 □

由此得到以下算法，用于计算 $u_1,\dots,u_n\in\mathbf{V}[X]^k$ 在 $\mathbf{V}[X]$ 上的关系模的有限生成集：

1. 计算向量 $v^1,\dots,v^m\in\mathbf{K}[X]^n$，它们构成 $(u_1,\dots,u_n)$ 在 $\mathbf{K}[X]$ 上的关系模的有限生成集。

2. 将每个 v^j 乘以适当的 $\alpha_j\in\mathbf{K}$，并将其替换为一个 $s^j\in\mathbf{V}[X]^n$ 本原元。

3. 利用第 2 节给出的算法，计算$\mathbf{V}$-饱和集$\mathbf{V}[X]$-模 $\langle s^1,\dots,s^m\rangle$ 在 $\mathbf{V}[X]^n$ 上的有限生成集。

4 附录：Magma 代码

本附录给出一些 Magma 代码，用于按照本文所述的方法计算有限生成的$\mathbf{V}[X]$-子模$\mathbf{V}[X]^n$ 的 $\mathbf{V}$-饱和（若$\mathbf{V}$ 是余离散赋值整环）。

注释可以写在单行中，以 // 开头；也可以写在多行中，位于 /* 和 */ 之间。

```
%!TEX encoding = UTF-8 Unicode

EchelonStrict:=function(L, v0)
/* L 是由 V[X]~n 中的（本原）向量构成的严格阶梯序列，v0 是 V[X]~n 中的非零向量。记
V.L 为由 L 生成的 V[X]~n 的 V-子模。由于序列 L 是严格阶梯序列，因此它在 V[X]~n 中是饱和
的。该函数返回一个向量 v 和一个布尔值。如果 v 属于 V.L + V.v0，则布尔值为假，否则为真。
如果 v0 属于 V.L，则 v = 0否则，v 是本原的，序列 L' = (L, v) 是严格阶梯序列，并且有
Sat(V.L + V.v0) = V.L' */



v: = v0；for w in L do index，M，a: =
PivotAndCoefficient(w)；// 消去 v 在位置（index，M）处的系
数 v: = v -a~(-1)*MonomialCoefficient(v[index]，M)*w；//
如果 v 为零，则说明 v0 属于 L.V if v eq 0then return v，f
alse；end if；end for；


    // 这里，v 非零。将其化为本原形式 c: = 内容
(v)；v: =精确商(v, c)；return v, not 是单位元(c)；

结束函数；

/* S = s~1, ... , s~m 是 V[X]~n 中的一个序列。考虑由 S、X*S、...、X~k*S 生成的 V[X]~n 中
的 V-子模，并将其饱和化（作为 V-模）后记为 G'_k（其中 G'_k = {0} 对于 k < 0）。接下来，
我们计算 G'_k 的一个 V-基 G，以及 V[X]~n 中的一个列表 B。这个从 G 中提取的列表 B，足以
生成由 S 生成的 V[X]-模的 V-饱和化。 */ /* 使用 G'_0进行初始化。我们计算 G'_0 的一个严格
阶梯形 V-基，以及与 G'_0 对应的列表 B 的开头。我们还初始化 N，它表示经过这次初始约化后
仍保留的 S 中向量的数量。 */



G := [Universe(S)| ]; B:= G ; // G 是一个由 S 类型
对象构成的空列表 for v in S do w , new :=
EchelonStrict(G,v) ; if w ne 0then Append(~G,w) ;
end if ; end for ; B := G ; N := #G ;


/* G 的连续值：V-模 G'_k 的严格阶梯化 V-基；B 的连续值：从 V[X]-模中剔除相对于由 G'_
k 生成的向量而言无用的向量后的 G；N 的连续值：dim_V (G'_k/G'_{k-1}) = H_k 的列数 =
计算 G 后仍然存活的 X~k*S 向量数量


*/
```

```
当条件为真时执行

  // H  <-- G 的最后 N 个向量（G'_{k-1}/G'_{k-2} 的 = V-基） H := G[#G-N+1.. #G] ;

  // 计算缺陷，若为零则退出 defaut := Defaut(H);

  若 defaut 等于 0，则中断；结束判断；H := [X*v: v 属于
  H] ; N := 0 ; 对 H 中的每个 v，执行 w, new :=
  EchelonStrict(G,v)；若 w 不等于 0，则追加(~G, w)；N :=
  N+1 ; 结束判断；若 new，则追加(~B, w)；结束循环;


结束 while 循环;
```

参考文献

William W. Adams 和 Philippe Loustaunau。格罗布纳基导论。美国数学会，普罗维登斯，1994年。ISBN 0-8218-3804-0/精装。E1

Sarah Glaz。交换相干环，第1371卷，丛书为《数学讲义》。施普林格出版社，柏林，1989年。ISBN 3-540-51115-6。doi: 10.1007/BFb0084570。网址：https://doi.org/10.1007/BFb0084570。E1

Amina Hadj Kacem 和 Ihsen Yengui。戴德金环上的动力格罗布纳基。《代数杂志》，324 (1):12–24，2010年。ISSN 0021-8693。doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.04.014。E1

Henri Lombardi、Peter Schuster 和 Ihsen Yengui。单变量格罗布纳环猜想。《数学杂志》，270(3-4):1181–1185，2012年。ISSN 0025-5874；1432-1823/电子版。doi: 10.1007/s00209-011-0847-1。E1

Ray Mines、Fred Richman 和 Wim Ruitenburg。《构造代数教程》。Universitext。Springer- Verlag，纽约，1988年。ISBN 0-387-96640-4。doi：10.1007/978-1-4419-8640-5。E1，E2

Michel Raynaud 和 Laurent Gruson。《平坦性与射影性判据》。模的“平坦化”技术。*Invent. Math.*，13：1–89，1971。ISSN 0020-9910。doi：10.1007/BF01390094。E1

Fred Richman。诺特环的构造性方面。*Proc. Amer. Math. Soc.*，44：436–441，1974。E1

Ihsen Yengui。动力格罗布纳基。《代数杂志》，301(2)：447–458，2006年。ISSN 0021-8693。doi：10.1016/j.jalgebra.2006.01.051。E1

在 $\mathbf{V}[X]$ 为 $\mathbf{V}$ 赋值整环的情形下计算关系的算法

Henri Lombardi、Claude Quitté、Ihsen Yengui

2014

本文以法语发表于：*Communications in Algebra*，**42**：3768–3781，（2014年）。DOI：10.1080/00927872.2013.794360

摘要

设 $\mathbf{V}$ 是赋值整环。我们给出一种算法，用于计算自由 $\mathbf{V}$-模（其基可以是无限的）中有限生成子模的 $\mathbf{V}$-饱和基。我们应用该算法计算 $\mathbf{V}$-模的有限生成子 $\mathbf{V}[X]$-模的 $\mathbf{V}[X]^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)-饱和子模。这最终使我们能够为 $\mathbf{V}[X]$ 上的 $\mathbf{V}[X]^k$ 中有限向量族的关系计算有限生成系统。

关键词 ：饱和，相容性，关系，赋值环，形式化计算，构造性代数 e.

摘要

我们给出一种算法，用于计算任意有限生成子模在$\mathbf{V}[X]^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)中的$\mathbf{V}$-饱和，其中 $\mathbf{V}$ 是赋值整环。借此，我们可以计算$\mathbf{V}[X]^k$中任意有限生成子模的关系模的一组有限生成元。

关键词：饱和，相容性，关系，赋值整环，计算机代数，构造性代数。

引言 F1

1 在一个V-自由模V-模中的有限生成F2

2 V-饱和$\mathbf{V}[X]$-有限生成模 F5

3 Syzygy 模：对于一个 $\mathbf{V}[X]$-有限生成模 F9

4 附录：Magma 代码 F10

参考文献 F11

引言

这属于民间知识（例如参见（Glaz 1989年，定理 7.3.3））：对于赋值整环 $\mathbf{V}$，环 $\mathbf{V}[X]$ 是相干的（即，$\mathrm{V}[X]$ 的有限生成理想的关系模是有限生成的）。然而，所引文献中的证明源自一篇篇幅很长的论文中一个深奥而困难的结果，该论文由 Raynaud 和 Gruson (1971) 撰写。此外，现有文献中似乎还没有针对这一重要结果的算法。

对于诺特相干环（不一定是赋值$\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 域），我们知道多项式环同样是诺特相干的。构造性证明见 Richman (1974)，并在Mines、Richman,

和 Ruitenburg（1988年）。在这种情况下，也可以使用 Gröbner 基。Buchberger 最初为域上的多项式环引入了 Gröbner 基（例如参见 Adams 和 Loustaunau(1994年）、Hadj Kacem 和 Yengui (2010年）、Yengui (2006年））。

然而，诺特性并非问题的全部，因为关于域的相容性结果很容易推广到约化零维环（也称为冯·诺伊曼正则环或绝对平坦环）。

在 Lombardi、Schuster 和 Yengui 2012年中，给出了一种算法，用于计算 $\mathbf{V}[X]$ 的一维赋值整环情形（不一定是诺特环）下有限生成理想的 Gröbner 基。由此可以推导出一种算法，用于计算 $\mathbf{V}[X]$的有限生成理想的关系的有限生成系统。

提醒一下（例如参见Mines、Richman 和 Ruitenburg 1988年），在相干环上，每个有限表示模 M 都是相干模（即， M 的有限生成子模的关系模是有限生成的）。

本文给出一种算法，用于计算向量族 $\mathbf{V}[X]^k$ 的关系的有限生成系统；该算法不需要任何诺特假设，也不需要任何关于克鲁尔维数的假设。我们认为，这也使我们首次为该结果提供了构造性证明（因为我们的算法是以构造性方式证明的）。

首先回顾一下：设$\mathbf{R}$是一个整环， M 是模 N 的一个子$\mathbf{R}$-模，则 M 在 N 中的$\mathbf{R}$-饱和模是

$$\mathrm{Sat}_{\mathbf{R},N}(M) = \{\, x \in N \mid \exists a \in \mathbf{R}^*,\, ax \in M \,\}.$$

若涉及多个环，为明确起见，我们将称之为“ M 在 N中的 R-饱和模”。若 N 是自由模（形如 $\mathbf{R}^n$、 $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathbf{R}^{(I)}$、 I 无穷），则通过标量扩张可得到 K-向量空间 $\mathbf{K}\otimes N \simeq \mathbf{K}^n$ 或 $\mathbf{K}^{(I)}$，其中 K 是 R 的分式域。此时还有 $\mathrm{Sat}_{\mathbf{R},N}(M) = \mathbf{K}.M \cap N$，其中 $\mathbf{K}.M$是由 M生成的 $\mathbf{K}\otimes N$的子 K-向量空间。若模 M 等于其 R-饱和模，则称其为 R-饱和的。一般而言，有限生成 $\mathbf{R}[X]$-模在 $N = \mathbf{R}[X]^n$ 中的 R-饱和模并不一定是有限生成 $\mathbf{R}[X]$-模；但若环 R 是赋值整环 V，则确实如此。

我们在第 1 节给出一种增量算法，用于计算一个具有有限生成子的 $\mathbf{V}$-饱和有限生成子模在一个$\mathbf{V}$-自由模（其基可能是无限的）中的饱和闭包。该算法并非新发现，但我们将其整理成一种形式，以便在第2节中使用它，计算通过对一个有限生成 $\mathbf{V}[X]$-模进行$\mathbf{V}$-饱和所得到的 $\mathbf{V}[X]$-模的有限生成系$\mathbf{V}[X]^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$。

这证明了，在 $\mathbf{V}$-模$\mathbf{V}[X]$ 中，一个有限生成的$\mathbf{V}[X]^n$ -子模的$\mathbf{V}[X]$-饱和闭包确实是有限生成的 $\mathbf{V}[X]$-模。

最后，作为直接推论，我们在第 3 节中计算 $\mathbf{V}[X]$ 上一个有限向量族的关系的有限生成系统，其中这些向量属于 $\mathbf{V}[X]^k$。

本文中所有环均为交换环且含单位元。

1 Sat有限生成V-模嵌入自由V-模 e

术语： 本文采用构造性代数中的常用术语，如 Mines、Richman 和 Ruitenburg（1988）所用术语，该术语非常适用于形式化计算。

对于任意环 $\mathbf{R}$ ，记 $\mathbf{R}^\times$ 为$\mathbf{R}$的单位元的乘法群。若存在一种算法，能够判定$\mathbf{R}$中的任意元素是否满足 $x = 0$ 或 $x \neq 0$ ，则称$\mathbf{R}$为可判定的。若能明确给出蕴含关系，则称环$\mathbf{R}$ 为局部环：

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x + y \in \mathbf{R}^\times \implies (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ y \in \mathbf{R}^\times)$$

要求.....等价于

$$\forall x \in \mathbf{R}, (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ 1 + x \in \mathbf{R}^\times)$$

非零局部环 $\mathbf{R}$ 唯一的极大理想是其雅各布森根

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{R}) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid 1 + x\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^\times \,\}$$

（对于任意环$\mathbf{R}$，在经典数学中，这个理想等于所有极大理想的交。）

商环 $\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathrm{Rad}(\mathbf{R})$ 是一个域，称为 R 的剩余域。当可以明确判定以下析取时，局部环$\mathbf{R}$ 称为剩余域离散：

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x \in \mathbf{R}^\times \ \vee\ x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{R})).$$

在这种情况下，剩余域是一个离散域。于是，我们有一个算法，可以对任意 $x \in \mathbf{k}$ 判定析取命题“$x = 0$ 或 x 可逆”。

设 I 为一个有限或无限集合，并赋有一个“离散的”全序关系，即我们有一个算法可以判定以下析取命题：

$$i < j \quad \vee \quad i = j \quad \vee \quad i > j$$

对于 $i,\ j \in I$。于是，对于任意环$\mathbf{R}$，都可以考虑自由模$\mathbf{R}^{(I)}$，其中将 $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$ 记作自然基。如果$\mathbf{R}$ 是一个离散环，则可以判定$\mathbf{R}^{(I)}$ 中的任意向量 $a = \sum_{i\in J} a_i \mathbf{e}_i$（$J$ 是 I 的有限子集）是否为零；当它非零时，还可以确定满足 $a_i \neq 0$ 的最小指标 i。

为确定自由模中的饱和$\mathbf{R}$-子模$\mathbf{R}^{(I)}$，我们将用到以下引理1.1 和1.3。

引理 1.1。设$\mathbf{R}$ 是一个整环，N 是一个$\mathbf{R}$-无挠模。若 $N = M \oplus P$，则 M在 N中是饱和的。

在本节余下部分中，假设$\mathbf{R}$ 是一个离散剩余局部整环，其中$\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathrm{Rad}(\mathbf{R})$。

定义与记号 1.2。

1. 向量 $C = \sum_i c_i \mathbf{e}_i$ 属于$\mathbf{R}^{(I)}$（我们将其视为列向量）称为本原的，如果它模剩余域非零，即它的某个系数是一个单位。在这种情况下，我们将满足 c_i 模剩余域非零的最小指标记为 $\mathrm{piv}(C)$。这就是 C的主元指标。我们将对应的标量 c_i记为 $\mathrm{cpiv}(C)$（C的主元系数）。

2. 有限族 $(C^k)_{k\in K}$ 本原向量称为$\mathbf{k}$-阶梯 的，若其主指标 $\mathrm{piv}(C^k)$ 两两不同。$\mathbf{k}$-阶梯族也简称为阶梯族。此时记作

$$\mathrm{piv}(C) = \left\{\, \mathrm{piv}(C^k) \mid k \in K \,\right\}.$$

系数属于$\mathbf{R}$ 的矩阵，若其列向量均为本原向量且构成一个阶梯族，则称为阶梯矩阵。

3. 当 K 是一个全序集时，族 $(C^k)_{k\in K}$ 称为严格 $\mathbf{k}$-阶梯形式，如果它是阶梯族，且此外，对于 $j < k$ 中的 K，C^k 的主指标 $\mathrm{piv}(C^j)$ 对应的系数为零。

引理 1.3. 若有限族 $C = (C^k)_{k\in K}$ 的向量属于$\mathbf{R}^{(I)}$，且该族是$\mathbf{k}$-阶梯族，则它构成其所生成的 $\mathbf{R}$-模 M 的一组基，并且其补模为自由$\mathbf{R}$-模

$$P = \bigoplus\nolimits_{j\in J} \mathbf{R}\,\mathrm{e}_j \quad \textit{avec } J = \{\, j \in I \mid j \notin \mathrm{piv}(C) \,\}.$$

此外，集合 主指标(C) 仅取决于模 M。事实上，指标 j 属于 主指标(C)，当且仅当存在一个本原向量 U 属于 M，使得主指标$(U) = j$。

注意：所涉及的两个自由 $\mathbf{R}$-模根据引理 $\mathbf{R}$-饱和的 1.1。

证明。 我们给出 I 为有限集时的论证，但它很容易推广到一般情形。若将由j（对应于 $j \in J$）和 C^k（对应于 $k \in K$）组成的族按主元指标递增的顺序排列，那么由这些列组成的矩阵在剩余意义下是三角矩阵，且对角线上的系数均可逆，因此它在剩余意义下可逆，进而可逆。这说明 M 和 P 互为补模，并且具有所需的基。其余留给读者。

□

饱和算法

背景 1.4。 设$\mathbf{V}$ 是一个赋值整环，即一个整环，其中对于任意a， b，都有 $a \mid b$或 $b \mid a$；更准确地说，我们有一种算法，可以判定以下二者之一成立（其中 a， b是$\mathbf{V}$中的给定元素）：

$$\exists x \in \mathbf{V},\, a = xb \quad \vee \quad \exists x \in \mathbf{V},\, b = xa$$

并给出元素 x。已知 $\mathbf{V}$ 是一个局部环（假设 $a+b$可逆；若 a整除b，则它整除 $a+b$；若 b整除 a，则它整除 $a+b$，且它可逆）。记 $\mathbf{K}$ 为其分式域，记$\mathbf{k}$ 为其剩余域。由于明确假设 $\mathbf{V}$ 是整环，因此域 $\mathbf{K}$ 是一个离散域。此外，假设 $\mathbf{V}$ 是剩余域离散的，这意味着我们有一个算法，可以判定 $\mathbf{V}$ 中的元素是否为单位。因此，引理 1.1 和 1.3 在环 $\mathbf{V}$上成立。

注。 在剩余域离散的赋值整环中，我们可以检验问题 《$a \mid b$? 》。事实上，对于非零的 a， b，如果 $a = bx$，那么 $a \mid b$当且仅当 x是一个单位。

考虑一个子$\mathbf{V}$-模 $M = \mathbf{V}\, a^1 + \cdots + \mathbf{V}\, a^m$，它属于$\mathbf{V}^{(I)}$。本节的目标是给出一种算法，用于计算$\mathbf{V}$-饱和的 M 在$\mathbf{V}^{(I)}$中的基；这是一个$\mathbf{V}$-模，简记为 Sat(M)。事实上，由于只涉及有限个指标，不妨假设 I 是有限的，且 M 由矩阵 F的列生成。为了直观地表示这一点，我们可以将矩阵的各行按指标递减的顺序排列。

计算 Sat(M) 的一种直接方法是通过初等变换将 F 化为史密斯标准形。于是可以看出，经过适当的基变换后，模M 由向量 $v_i f_i$ 生成（其中 f_i 构成某个基的一部分，而 v_i 非零）。在这种情况下，饱和的 Sat(M) 就是由这些 f_i生成的模。这表明 Sat(M) 是一个$\mathbf{V}$-自由模，其补模是另一个$\mathbf{V}$-自由模。

实际上，我们更倾向于采用一种不那么粗暴的方法，并将 Sat(M) 的一组基作为一个$\mathbf{k}$阶梯矩阵的列向量 G 来获得；该矩阵是我们通过对 F 进行非常简单的运算计算得到的。

第一个运算是向量约化，我们将其记为 RedPrim：将一个假定为非零的向量 a 替换为 a/u，其中 u 是其系数的一个最大公约数。例如， u 是在所有能整除其他系数的系数中指标最小的系数；在这种情况下，约化向量的主元系数等于 1。

我们对矩阵 F 所进行的处理，是将其化为严格的$\mathbf{k}$阶梯形式 G，使得 Sat(Im(F)) = Im(G)。具体过程如下：依次处理初始矩阵的各列。请注意，起初空矩阵就是严格的$\mathbf{k}$阶梯形式。

假设我们已经处理了矩阵的若干初始列，并得到了一个严格的$\mathbf{k}$阶梯形矩阵，其列为 $C^1, \ldots, C^r$。

我们想要 需要处理一个新列，称为 $C = \sum_i c_i \mathbf{e}_i$。操作如下 it.

1. 高斯主元法：进行经典的初等列变换

$$C \leftarrow C - \frac{c_s}{c_{j,s}} C^j,$$

这里 $s = \text{piv}(C^j)$ 和 $c_{j,\ s} = \text{cpiv}(C^j)$。依次对列$C^1$、.....、 C^r进行此操作。于是得到一列 C'。

2. 如果 $C' = 0$，则不将其添加进去。矩阵仍处于严格k阶梯形。由列 C^1、.....、 C^r、 C生成的 $\mathbf{K}$ 向量空间以 (C^1、.....、 C^r) 为基。

3. 如果 $C' \neq 0$，则将 C' 替换为其本原简化形 $C'' = \text{RedPrim}(C')$。然后我们将 C'' 作为矩阵的最后一列 C^{r+1} 添加进去。新矩阵处于严格k阶梯形。由列 C^1、.....、 C^r、 C生成的 $\mathbf{K}$ 向量空间以 (C^1、.....、 C^r、 C'') 为基。

根据构造，Im(G)包含于Sat(Im(F))中，而$\mathbf{V}$-模Im(G)是饱和的，因为 G 是严格的k-阶梯形。事实上，无论在情形2还是情形3中，我们都可以通过归纳看出，已经构造出由前几列（直到第 C列）生成的$\mathbf{V}$-饱和模的一组基。因此，过程结束时有Sat(Im(G)) = Sat(Im(F))。我们的算法确实达到了预定目标。

定理 1.5。
上述饱和算法从一个系数取自$\mathbf{V}$ 的矩阵 F 出发，计算得到一个严格k-阶梯形矩阵 G，使得 $\text{Im}(G) = \text{Sat}(\text{Im}(F))$。该算法是《增量式》的，含义如下：若处理一个矩阵 $[F_1 \mid F_2]$，则得到一个矩阵 $[G_1 \mid G_2]$，其中 G_1 是处理矩阵 F_1后得到的矩阵。

下一个小节会用到下面这个引理。

引理 1.6. 在上述描述的“高斯主元法”过程中，若 C 是本原的，且指标 主指标(C) 与主指标(C^j) 对 $j = 1, \ldots, r$而言互不相同，则得到的向量 C' 是本原的，且 主指标(C) = 主指标(C')。

证明. 考虑赋值 $C \leftarrow C - \frac{c_s}{c_{j\ ,s}} C^j$，其中 $s =$ 主指标(C)，且 c_s 是 C 在第 s 行上的系数。令 $\ell =$ 主指标(C)。 C 在第 ℓ 行上的系数 c_ℓ 被替换为$c_\ell - \frac{c_s}{c_{j\ ,s}} \cdot c_{j,\ell}$，其中 $c_{j,\ell}$是 C^j在第 ℓ 行上的系数。若 $\ell > s$，则 c_s 在余数意义下为零；若$\ell < s$，则$c_{j,\ell}$ 在余数意义下为零；两种情况下，系数 c_ℓ 在余数意义下均保持不变。 □

2 有限生成 $\mathbf{V}[X]$-模的 V-饱和

本节的工作稍微复杂一些，而且奇怪的是，似乎完全是新的。它在形式化计算中实现了一个表面上简单且看似全新的理论结果，而迄今为止显然还没有任何构造性证明。

定理 2.1。 我们始终处于 *1.4* 的背景下。如果 M 是$\mathbf{V}[X]$-模 $\mathbf{V}[X]^n$ 的有限生成子模，那么 $\mathbf{V}$-饱和的 M 在 $\mathbf{V}[X]^n$ 中同样是一个 $\mathbf{V}[X]$-有限生成模。

备注。 请注意，在经典数学中，任意赋值整环都满足背景 1.4 的假设，这是由排中律推出的。因此，我们对定理 2.1 给出的构造性证明，也是在仅假设$\mathbf{V}$ 是赋值整环的条件下，对经典数学中的一个证明。同样的备注适用于本文的所有结果。

该定理的证明源于用于计算 $\mathbf{V}$-饱和的有限生成系的算法的正确性。

将其视为 $\mathbf{V}[X]$-模时，我们有 $\mathbf{V}[X]^n$ 的自然基，记为 $(\mathbf{f}_1, \ldots\ldots, \mathbf{f}_n)$。于是，我们关注作为 $\mathbf{V}$-模的 $\mathbf{V}[X]^n$ 的自然基，该基由 $\mathbf{e}_{i,\,k} = X^k\mathbf{f}_i$构成，指标集为 $I = [\![1..n]\!] \times \mathbb{N}$。我们在 I上赋予字典序，使得

$$X^h\,\mathrm{f}_i < X^k\,\mathrm{f}_j \ \text{ si } \ i<j \ \text{ ou } \ i=j \ \text{et} \ h<k.$$

当将模$\mathbf{V}[X]^n$ 视为以 $X^k\mathbf{f}_j$为自然基的$\mathbf{V}$-模时，我们称之为关于该基的《坐标》。当将其视为以$\mathbf{f}_j$为自然基的$\mathbf{V}[X]$-模时，我们称之为关于该基的《系数》。

起初有一个$\mathbf{V}[X]^n$中向量的列表 $S = [s^1, \ldots, s^m]$，它们构成 M的生成系。我们不失一般性地假设 $m \geq 1$，且 s^k 均非零。记

$$E = \mathbf{V}\,s^1 + \cdots + \mathbf{V}\,s^m, \quad E_j = X^j\,E, \quad F'_k = \sum\nolimits_{j=0}^{k} E_j \quad \text{et} \quad G'_k = \mathrm{Sat}_{\mathbf{V},\mathbf{V}[X]^n}(F'_k).$$

可以将 F'_k 和 G'_k 描述为两个矩阵 F_k 和 G_k的像模。矩阵F_k 已知，我们用上一节的饱和算法处理它，从而得到矩阵 G_k。

问题在于确认：从某个 k 开始，继续下去已无必要，因为加入 G'_k 的基中的元素不会改变所生成的 $\mathbf{V}[X]$-模（注意，$\mathbf{V}$-模 G'_k =Im(G_k) 会在每一步增长，因为 $E \neq 0$）。

我们需要明确一些记号。我们称 E》的 《为度，并将 d 记作某个 s^k 的某个坐标的最高次数。同样， $d+k$ 表示 E_k 或 F_k 的次数。因此，矩阵 F_k 可以看作一个有 $n(1+d+k)$ 行、$m(1+k)$ 列的矩阵。

若 a 是 $\mathbf{V}$ 的 $\mathbf{V}[X]^n$ 中的本原向量，且 piv(a) $= (j, r) \in I$，我们记作

$$\mathrm{index}(a) := j \ \text{et} \ \mathrm{PrimMon}(a) := r.$$

整数 index(a) 称为 a的指标，整数 PrimMon(a) 称为其首个剩余指数，而对 piv(a) 来说，它是 a的主元指标。任意一对 $(j, r) \in I$ 都可作为$\mathbf{V}$-模$[X]^n$的$\mathbf{V}$自然基中向量 $X^r\,\mathbf{f}_j$ 的指标。

记 H_k 为添加到 G_{k-1} 中以得到矩阵G_k的那些列所组成的矩阵。

事实 2.2. 要从矩阵 G_k计算出矩阵 G_{k+1}，我们可以不处理 E_{k+1} 的生成元（即列表 $X^{k+1}S$），而只需处理XH_k的列向量。

证明。 考虑上文所述的简化过程。
记G_k 为通过该简化过程依次得到的矩阵。
不难通过对 k 进行归纳验证：由 G_k 的各列生成的 $\mathbf{K}$ -向量空间，就是 $\mathbf{K}[X]^m$ 的子空间 $\mathbf{K}\overline{F'_k}$。事实上，任何约化为 0 的列都属于由前面的列生成的 $\mathbf{K}$ -向量空间。而任何未约化为 0 的列，在模去前面的列后，经过约化所生成的 $\mathbf{K}$ -向量空间，与生成该列的那一列所生成的向量空间相同。
G_k 的各列构成$\overline{\mathbf{V}}[X]^m$ 的一个饱和的 $\mathbf{V}$ -子模的基，因此该子模等于 $\mathbf{K}F'_k \cap \mathbf{V}[X]^m$。这说明 $G_k = G_k$ □

下文中，我们将提及简化过程，但用 H_k 和 G_k 分别代替 H_k 和 G_k。

对于矩阵 H_k 和 G_k，我们关联若干个整数：

- 整数 r_k 是 G_k 的列数，换言之，是 $\mathbf{V}$-自由模 Im(G_k) 的秩。

- 整数 n_k，中存在的主指标数量 H_k，是集合$i \in [\![1..n]\!]$ 的基数，其中存在一列 C 的 H_k 满足 指标(C) $= i$。根据引理 1.3， H_{k-1} 中存在的所有主指标都存在于 H_k中，因此通过归纳可得， n_k 也是 G_k中存在的主指标数量。因此，数列 n_k 是递增数列。

- 整数 u_k，对于 G_k，根据 n_k可用的坐标数等于 $n_k(1+d+k)$。如果 $n_{k+1} = n_k$ 则有 $u_{k+1} = u_k + n_k$。
- 整数 δ_k，的缺陷，是 H_k 中列 C 的数量，满足存在 H_k 的另一列 C'，使得 index(C) $=$ index(C') 且 PrimMon(C) <PrimMon(C')。这样一列 C 称为冗余。因此有 $r_k \leq u_k$ 且 $r_k = r_{k-1} + n_k + \delta_k$。
- 整数 $\Delta_k = u_{k+1} - r_k$ 是步骤 $k+1$ 时可占用的空位，若 $n_k = n_{k+1}$。如果 $n_k = n_{k+1}$，则有 $\Delta_k = u_{k+1} - r_k = (u_k + n_k) - (r_{k-1} + n_k + \delta_k) = u_k - r_{k-1} - \delta_k = \Delta_{k-1} - \delta_k$。

为了直观地展示 H_k 的缺陷 δ_k，以及它随 k 增大时的变化方式，我们将在证明之后借助一些图来说明可能出现的情况。不过，先读一读这些图附带的说明，或许会让证明更容易理解。

关键点如下。

根据引理 1.6，我们可以确定：当我们使用 G_k 处理 $H_{k+1} = XH_k$ 的连续各列时， H_k 的某一列中的每个主元 (j, r)，都会错开一格，即在位置 $(j, r+1)$ 处，成为 H_{k+1} 的某一列的主元；但若它对应的指标 $(j, r+1)$ 已存在于 G_0 中，则情况例外。在这种情况下，碰撞要么使 XH_k 的列变为 0 （从而使缺陷减小），要么使约化列（并使其成为本原列）占据一个新的主元。这个新主元可能产生两种不同的影响：它可能出现在一个已被占据的指标上，此时缺陷不会减小；也可能出现在一个空缺的指标上，此时缺陷减小 1，且 n_k 的数量在 n_k 与 n_{k+1} 之间增加。因此，我们已经证明了下面引理的第一条断言。

引理 2.3. </style}数列 是单调不增的。当足够大时，它必定达到0 。

证明。 我们已经注意到，如果 $n_{k+1} = n_k$ 且 $\delta_k > 0$，那么 $\Delta_{k+1} < \Delta_k$。因此，对于足够大的 k，可得 $\delta_k = 0$ 或 $n_{k+1} > n_k$。在第二种情况下，我们重复上述情形。由于数列 n_k 被 n 所界，这种情况只能发生有限次。

□

引理 2.4. </style}如果，由 生成的$\mathbf{V}[X]$-模是由起初给定的 s^j 生成的$\mathbf{V}[X]$-模的$\mathbf{V}$-饱和模。因此，可以终止算法。

证明。 由于数列 δ_k 此后恒为零，只需证明 H_{k+1} 的列属于由 $\mathbf{V}[X]$-模生成的列所张成的 G_k。然而，由引理 1.6可知， H_{k+1} 的列属于 $\mathbf{V}$-模 $\mathrm{Im}(G_k) + X\mathrm{Im}(H_k)$。

□

一个图示例。

图 1 表示 $G_0 = H_0$ 的主元指标。6 个白色圆圈是 piv(H_0) 的元素。

实心黑色圆圈或方块表示 $\mathbf{V}$-基中不存在 G_0 的主元指标的元素。黑色方块代表不存在的主元指标：如果整行都是黑色，就用方块加以强调。D

因此，在当前情况下有 $n = 5$, $d = 4$, $n_0 = 4$, $r_0 = 6$, $u_0 = 20$, $\Delta_0 = 14$, $\delta_0 = 2$。

我们用一个大圆圈圈出了超额列中 piv(H_0) 的两个元素，它们对应于 $\delta_0 = 2$。

黑色折线连接了 主指标(C) 对应于 H_0中非冗余列的 引理1.6据此可以确定，当我们依次处理各列时 的 $H_1 =$

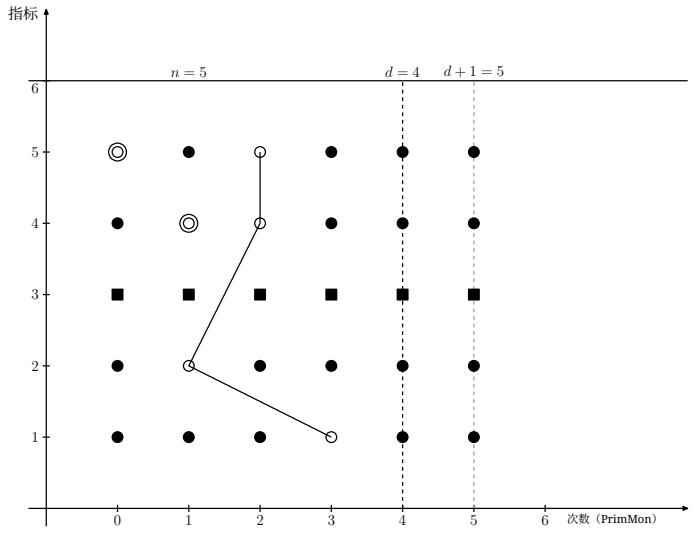


图 5:

XH_0 通过 G_0， H_0 中某一列的每个主元（j， r）都会在 H_1的某一列中找到，只是位置偏移一格，即位于（j， $r+1$）处，作为主元；但如果该索引（j， $r+1$）已存在于 G_0中，则例外。

在图 1 的情形中， H_0 中的所有主元，除了主元 (4,1) 之外，在 H_1 中都会向后移一位。特别是，主元 (5,1) 会出现在 H_1 中，可以看出它对应的是一个多余列（因此 $\delta_1 \geq 1$）。

处理满足 piv(C) $=$ (4,1) 的列 XC 时，会发生碰撞：将执行一次高斯主元操作，把 XC 中位置 (4,2) 的系数化为 0，而饱和过程会产生零向量（此时 $\delta_1 = 1$ 和 H_1 将只有 5 列，$r_1 = 11$），或者产生一个向量 C''，使 piv(C'') 填入先前可用空间中的一个空位（次数为 ≤ 5 的向量），且必有 piv(C'') $\notin$piv(G_0)。在这种情况下，我们有 $r_1 = 12$。

现在我们将考察这种主指标(C'')的三种可能性，并给出对应于 H_1的 3 张图。 H_0 的主元将以灰色空心圆表示， H_1的主元将以黑色空心圆表示。黑色实心方块或圆形则再次表示空格，这些空格原则上将来可能会被填入。

在图 2 的情况下，我们有 $n_1 = 4$, $\delta_1 = 2$, $u_1 = 24$, $\Delta_1 = 12$。处理 XH_1时，如果使用 G_1，将在 H_2中生成位于 (1, 5)、(2, 4)、(4, 4) 和 (5,4) 的主元。另外，两次碰撞分别发生在 (2,1) 和 (5, 2)，其结果较难预测。可能会得到 $r_2 = 16$ 和 $\delta_2 = 0$，或者 $r_2 = 17$ （如果 $n_2 = 4$，则为 $\delta_2 = 1$；如果 $n_2 = 5$，则为 $\delta_2 = 0$），也可能得到 $r_2 = 18$。

在图3的情况下，我们有 $n_1 = 5$, $\delta_1 = 1$, $u_1 = 30$, $\Delta_1 = 18$。当我们通过 G_1处理 XH_1时，H_2中会产生位于 (1, 5)、(2,3)、(3,4)、(4, 4) 和 (5,4) 的主元。而在 (5,2) 处发生的碰撞，则会产生更难预测的结果。这可能会使向量变为 0，此时 $\delta_2 = 0$；也可能产生一个新向量，此时 $\delta_2 = 1$，因为现在所有指标都已被主元占据。新向量的主元原则上可以是图中标出的任意一个黑色方块，也可以是一个度为 6 的主元。

在图4的情形下，有 $n_1 = 4$ 和 $\delta_1 = 2$。用G_1处理 XH_1 时，会在 H_2中产生位置为 (1，5)、(2， 4)、(4， 4)和(5， 4)的主元。而在(5，2)处发生的碰撞，则会产生更难以预料的结果。多余主元列(2， 2)原则上不会导致碰撞，除非先处理前面提到的必然碰撞，并得到主元为(2，3)的约化向量。

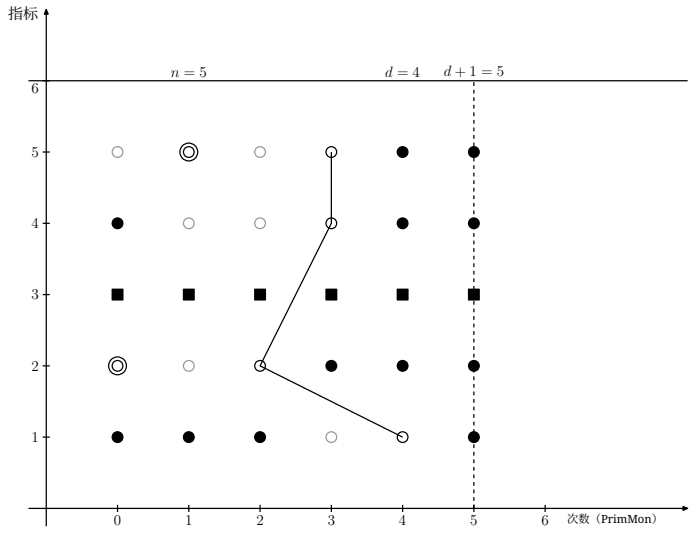


图 6：如果 (4，2) 处的碰撞在位置 (2，0) 产生一个主元

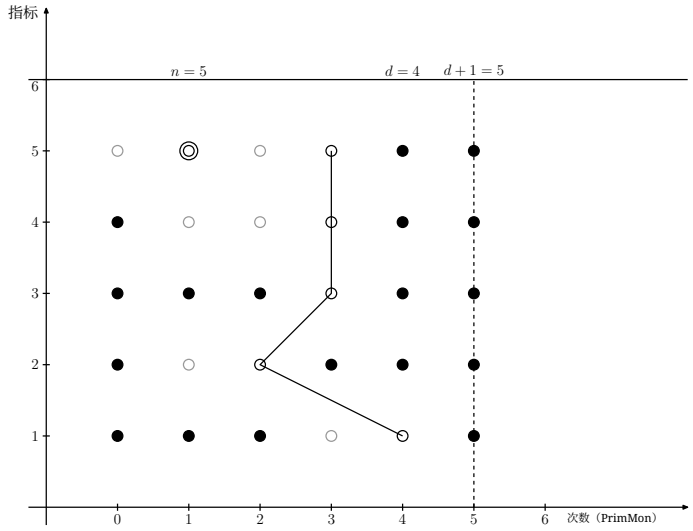


图 7：如果 (4,2) 处的碰撞在 (3, 3) 处产生一个主元

3 有限生成 $\mathbf{V}[X]$-模的 Syzygy 模

定理 *3.1*。我们仍处于背景 *1.4* 中。设 u_1、…、u_n $\in$是$V[X]^k$上的s^1，s^m $\in$、…、$[X]^n$是$K[X]^n$上的关系模的生成元，其中关系对应于$(u_1$、…、$u_n)$。可以假设这些 s^j属于$V[X]^n$。那么，$V[X]$上的$(u_1$、…、$u_n)$的关系模，等于$V[X]^n$中由 s^1、…、s^m生成的$V[X]$-模的V-饱和。因此，根据定理 *2.1*，该模是有限生成的。

特别地，$\mathbf{V}[X]$ 是一个相干环。

证明 。一个向量 $f=(f_1,\dots,f_n)\in\mathbf{V}[X]^n$ 使得 $\sum_j f_j u_j=0$ 可写成如下形式 e

$$f=a_1 s^1+\cdots+a_m s^m$$

含有一些 $a_j\in\mathbf{K}[X]$。将这个关系乘以 $\mathbf{V}$ 中一个合适的 $\alpha\neq 0$，即可得到 $\alpha\, a_i\in\mathbf{V}[X]$。这表明 αf 属于由 s^j 生成的 $\mathbf{V}[X]$-模。因此，f 属于由 s^j 生成的 $\mathbf{V}[X]$-模的 $\mathbf{V}$-饱和部分。反向结论显然成立。

□

由此得到以下算法，用于计算 $u_1,\dots,u_n\in\mathbf{V}[X]^k$ 上的 Syzygy 模的有限生成系：

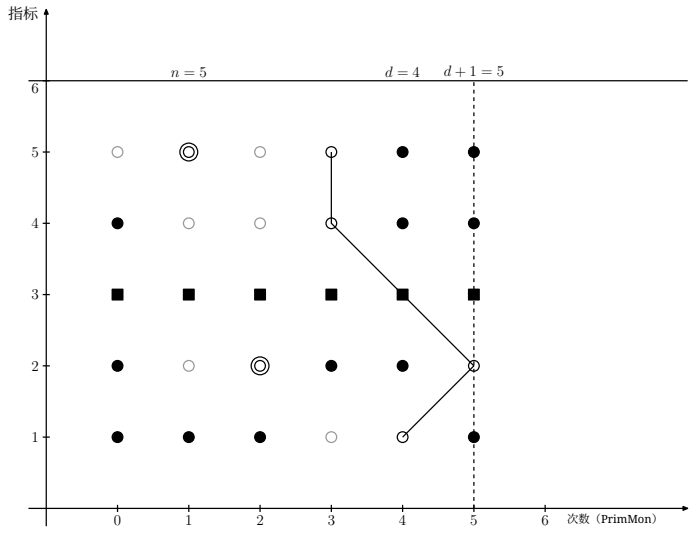


图 8：如果 (4,2) 处的碰撞在 $(2,5)$ 处产生一个主元

1. 计算向量 $v^1,\ldots,v^m \in \mathbf{K}[X]^n$，它们构成 $(u_1,\ldots,u_n)$ 在 $\mathbf{K}[X]$ 上的 Syzygy 模的有限生成系。2. 将每个 v^j 乘以适当的 $\alpha_j \in \mathbf{K}$，并将其替换为一个 $s^j \in \mathbf{V}[X]^n$本原向量。3. 利用第 2 节的算法，计算 $\mathbf{V}$-饱和的 $\mathbf{V}[X]$-模 $\langle s^1,\ldots,s^m\rangle$ 在 $\mathbf{V}[X]^n$ 中的有限生成系。

4 附录：Magma 代码

本附录展示了用于计算有限生成$\mathbf{V}$-模子模的$\mathbf{V}[X]$-饱和模的 Magma 代码（若$\mathbf{V}[X]^n$ 是一个剩余域离散的赋值整环），所采用的方法遵循文章中的描述。

注释可以写在单行中，以 // 开头；也可以写在多行中，置于 /* 和 */ 之间。

```
%!TEX encoding = UTF-8 Unicode

EchelonStrict:=function(L, v0)
/* L 是由 V[X]^n 中的（本原）向量构成的严格阶梯序列，v0 是 V[X]^n 中的非零向量。记
V.L 为由 L 生成的 V[X]^n 的 V-子模。由于序列 L 严格阶梯化，它在 V[X]^n 中是饱和的。该函
数返回一个向量 v 和一个布尔值。如果 v 属于 V.L + V.v0，则布尔值为假；否则为真。如果
v0 属于 V.L，则 v = 0否则，v 是本原的，序列 L' = (L, v) 严格阶梯化，并且 Sat(V.L +
V.v0) = V.L' */
```

```
v := v0 ; 对 L 中的 w 执行循环：指标, M, a:=
PivotAndCoefficient(w) ; // 消去 v 在位置 (指标, M) 处的系数
v := v -a^(-1)*MonomialCoefficient(v[指标] , M)*w ; // 如果
v 为零，则 v0 属于 L.V if v eq 0then return v, false; end if ;
end for ;
```

// 此处，v 非零。将其化为本原形式 c := 内容(v) ;
v := 精确商 (v, c) ; return v, not 是单位 (c) ;

结束函数;

/*
S = s~1、...、s~m 是其中的一个序列 V[X]~n
在 V[X]~n 中，考虑由 S、X*S、...、X^k*S 生成的 V-子模
并将其饱和的 V-模记为 G'_k（其中 G'_k ={0}，当 k < 0 时）
接下来计算一个 V-基 G de G'_k et 一个列表 B dans V[X]~n
这个列表 B， 从.....提取的 G， 足以生成，如同 V[X]-模,
le 由.....生成的 V[X]-模的 V-饱和 S.
*/
/*
使用.....进行初始化 G'_0
我们计算出 G' 的严格阶梯式 V-基 _0
以及列表的开头 B 它对应于 G'_0
同时初始化 N， 这是以下向量的数量 S
在这次首次约化后仍然保留的向量
*/

G := [Universe(S)|] ; B:= G ; // G 是一个空列表,
其中的对象类型与 S 相同 for v in S do w , new :=
EchelonStrict(G,v) ; if w ne 0then Append(~G,w) ;
end if ; end for ; B := G ; N := #G ;

/* G 的连续取值：V-模 G'_k 的严格阶梯 V-基 B 的连续取值：从由 G'_k 生成的 V[X]-模的角度看，去除了无用向量的 G N 的连续取值：dim_V (G'_k/G'_{k-1}) =H_k 的列数 =计算 G 后仍保留的 X^k*S 向量数量 */

while true do

// H <——G 的最后 N 个向量（G'_{k-1}/G'_{k-2} 的 V-基） = G[#G-N+1.. #G] ; // 计算缺陷，若为零则退出 defaut := Defaut(H) ; if defaut eq0 then break ; end if ; H := [X*v: v in H] ; N := 0 ; for v in H do w, new := EchelonStrict(G,v) ; if w ne 0then Append(~G, w) ; N := N+1 ; end if ; if new thenAppend(~B, w) ; end if ; end for ;

结束 while;

参考文献

William W. Adams 与 Philippe Loustaunau：《格罗布纳基导论》。美国数学会，普罗维登斯，1994年。ISBN 0-8218-3804-0/hbk。F2 Sarah Glaz：《交换相干环》，《数学讲义》第1371卷。施普林格出版社，柏林，1989年。ISBN 3-540-51115-6。URL https://doi.org/10.1007/BFb0084570。F1 Amina Hadj Kacem 与 Ihsen Yengui：《戴德金环上的动力格罗布纳基》。《代数杂志》，324（1）：12–24，2010年。ISSN 0021-8693。F2 Henri Lombardi、Peter Schuster 与 Ihsen Yengui：《一元格罗布纳环猜想》。《数学杂志》，270（3-4）：1181–1185，2012年。ISSN 0025-5874; 1432-1823/e。F2 Ray Mines、Fred Richman 与 Wim Ruitenburg：《构造代数教程》。Universitext。施普林格出版社，纽约，1988年。ISBN 0-387-96640-4。Henri Lombardi 翻译，Stefan Neuwirth 修订。《构造代数教程》。弗朗什-孔泰大学出版社。2020年。F1，F2 Michel Raynaud 与 Laurent Gruson：《平坦性与射影性判据》。模的“平坦化”技术。《Invent. Math.》，13：1–89，1971年。ISSN 0020-9910。F1 Fred Richman：《诺特环的构造性方面》。《Proc. Amer. Math. Soc.》，44：436–441，1974年。F1 Ihsen Yengui：《动力格罗布纳基》。《代数杂志》，301（2）：447–458，2006年。ISSN 0021-8693。F2