arXiv:2304.00309v2 [math.OA] 4 Apr 2023

可降解强纠缠破坏映射

REPANA DEVENDRA、GUNJAN SAPRA 和 K. SUMESH

摘要。本文给出了可分希尔伯特空间上可降解强纠缠破坏映射的一个结构定理及其多种刻画。在有限维情形下，我们证明，幺正可降解纠缠破坏映射恰好是矩阵代数上幺正纠缠破坏映射凸集的 C^*-极值点。因此，我们得到了幺正可降解正部分转置（PPT-）映射的一个结构。

1. 引言

在 [DeSh05], Devtak 和 Shor 通过互补信道引入了可降解信道的概念。Holevo（[Hol07]）利用互补信道构造了一类信道，对于这类信道，乘法性／可加性问题（参见 [NiCh11]）具有正解。Cubitt 等人（[CRS08]）刻画了所有可降解量子比特信道。在 [WoPe07], M.M Wolf 等人引入了扭曲对角信道的概念，并给出了检验其可降解性的简单判据。在 [SRZ16]中研究了一类称为自互补信道的可降解信道。已知纠缠破坏映射（在矩阵代数上）是反可降解映射，但反之一般不成立（参见 [DeSh05], [CRS08]）。本文研究可降解（强）纠缠破坏映射的数学结构，以及它们与矩阵代数上幺正纠缠破坏映射（[BDMS]）的 C^*-极值点概念之间的联系。

本文的组织结构如下。第2节包含有助于理解主要结果的基本定义和定理。由于我们未能从文献中找到有关互补映射和可退化映射的一些数学细节，因此我们对此给出了详尽说明。在第3节中，我们给出了希尔伯特空间（有限维或无限维）上可退化强纠缠破坏（SEB）映射的各种刻画（定理 3.2），其中包括一个结构定理。定理 3.2 还回答了何时与某个 SEB映射互补的映射也是 SEB 映射这一问题。定理 3.2 与 [MuSi22, 推论 7] 共同刻画了矩阵代数上的所有可退化 PPT映射（见注 3.4）。在定理3.7中，我们给出了一类正映射，对于这类映射，反可退化和强纠缠破坏这两个概念是一致的。在第4节中，我们专注于有限维情形，并证明（定理 4.1）：由 Bhat 等人引入的所有幺正纠缠破坏映射中，幺正可退化纠缠破坏映射类恰好对应于 C^*-极端点。 [BDMS], 而它们又分别是极端 QC 信道的伴随映射（[HSR03]）。在定理4.6中，我们刻画了其相应 Choi 矩阵为投影且具有可退化性质的 PPT 信道。最后，我们也考虑可退化完全正映射。尽管幺正完全正映射的 C^*-极端点是可退化的，但我们在例 4.13中看到，反之一般并不成立。

日期：2023年4月5日。2020年数学学科分类。47L05、15B48、47L90、81P40、81P47。关键词和短语：完全正映射、Stinespring 表示、Kraus 算子、迹类算子、量子操作、可分性、纠缠、互补映射、可退化映射、 C^*-极点。

2. 预备知识

以下各处，H 和 K（以及可能带下标的相应符号）表示具有内积的可分复希尔伯特空间（有限维或无限维），其中内积关于第二个变量线性、关于第一个变量共轭线性。我们令 $\mathcal{B}$(H, K) 表示从 H 到 K 的所有有界线性算子构成的空间，并令 $\mathcal{B}$(H)$^+$ 表示 $\mathcal{B}$(H) 中所有正算子构成的锥：$= \mathcal{B}$(H, H)。回忆一下，$A \in \mathcal{B}$(H)$^+$ 当且仅当 $A = B^*B$ 对某个 $B \in \mathcal{B}$(H) 成立，当且仅当对于所有 $x \in$ H，均有 hx, Axi ≥ 0。我们令 $\mathcal{T}$(H) 表示 H 上所有迹类算子构成的空间；关于由 kTk$_1$:= tr(|T|) 给出的迹范数，它是一个巴拿赫空间，其中 tr(|T|) 是 $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ 对所有 $T \in \mathcal{T}$(H) 的迹。空间 ($\mathcal{B}$(H), k.k) 通过映射 $A \mapsto \phi_A$ 与空间 ($\mathcal{T}$(H), k.k$_1$) 的对偶空间等距同构，其中对于所有 $T \in \mathcal{T}$(H) 和 $A \in \mathcal{B}$(H)，$\phi_A(T) :=$ tr(AT)。这些元素

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) : \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+, \|\rho\|_1 = 1\}$$

称为$\mathcal{H}$上的态。若一个态 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 满足以下条件，则称其为

(i) 可分（[Wer89]），如果 ρ 属于该集合凸包的闭包（相对于$\|\cdot\|_1$）

$$\{\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} : \rho^{(j)} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_j), j = 1, 2\};$$

(ii) 可数可分解可分（[KSW05]），如果存在态 $\rho_n^{(j)} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}j)$ j =1,2 使得[1]

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} p_n \rho_n^{(1)} \otimes \rho_n^{(2)}, \tag{2.1}$$

其中 $p_n \in [0, 1]$ 满足 $\sum_n p_n = 1$，且 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

注意，利用紧正算子的谱定理，在可分性和可数可分解可分性的定义中，我们可以用秩一态替代态。每个可数可分解可分态都是可分态，但反之通常不成立（[KSW05]）。如果$\mathcal{H}_1$ 和$\mathcal{H}_2$ 都是有限维空间，那么可分性与可数可分解可分性等价；在这种情况下，$N < \infty$ 见 2.1（参见 [ChDo13]）。若正算子 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 满足[1] tr(T) $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 可分（分别为可数可分解可分），则称其为可分（分别为可数可分解可分）。

若线性映射 Φ : $\mathcal{B}$(H$_1$) $\to \mathcal{B}$(H$_2$)满足 $\Phi(\mathcal{B}(\text{H}_1)^+) \subseteq \mathcal{B}(\text{H}_2)^+$，则称其为正；若对于所有 $k \in \mathbb{N}$，映射 id$_k \otimes \Phi$: $\mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}$(H$_1$) $\to \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}$(H$_2$)均为正，则称其为完全正（CP），其中 id$_k$ 表示 $\mathbb{M}_k = \mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$上的恒等映射；若对于所有 $k \in \mathbb{N}$，映射 T $\otimes \Phi$:$\mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}$(H$_1$) $\to \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}$(H$_2$)均为正，则称其为余完全正（co-CP），其中 T 表示$\mathbb{M}_k$上的转置映射。若 Φ 既是完全正映射又是余完全正映射，则称其为正部分转置（PPT）映射。注意，给定 $V \in \mathcal{B}$(H$_2$,H$_1$)，由 Ad$_V$: $\mathcal{B}$(H$_1$) $\to \mathcal{B}$(H$_2$) 定义的映射 Ad$_V(X) := V^*XV$是正规（即超弱连续）的完全正映射。众所周知（[Sti55],[Kra71]），给定正线性映射 Φ : $\mathcal{B}$(H$_1$) $\to \mathcal{B}$(H$_2$), 以下断言等价:

（i） Φ 是一个正规完全正映射。

[1]通篇我们用 $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ 表示一个指标集。给定希尔伯特空间 $\sum_{j\in\Lambda} A_j$ 上的一族有界线性算子$\{A_j\}_{j\in\Lambda}$，并令 $\sum_{j\in\Lambda} A_j$ 分别表示该级数在强算子拓扑（SOT）和迹范数拓扑中的极限。

（ii）（Kraus 分解：）存在一个可数族 $\{A_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$，称为 Kraus 算子，使得 $\overline{\sum}_{j\in\Lambda} A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 并且

$$\Phi(X) = \overline{\sum_{j\in\Lambda}} A_j^* X A_j, \qquad \forall\, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1). \tag{2.2}$$

(iii) (Stinespring 表示：) 存在一对$(\mathcal{K}\ A)$，由一个可分希尔伯特空间$\mathcal{K}$ 和一个有界线性算子 $A:\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}$ 组成，使得

$$\Phi(X) = A^*(X \otimes I_{\mathcal{K}})A, \qquad \forall\, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), \tag{2.3}$$

其中， $I_{\mathcal{K}}$ 是$\mathcal{K}$上的恒等算子。

Stinespring 表示中的这一对 (K A) 可以选为极小的，即 span{$(X \otimes I_{\mathcal{K}})Ah:\ h \in$ H2, $X \in \mathcal{B}$(H$_1$)} $=$ H$_1 \otimes$ ~~K;~~ 这样的配对在酉等价意义下唯一。若 Φ 有 Kraus 分解 (2.2)，则取 K 为具有标准正交基 $\{e_j: j \in \Lambda\}$ 的希尔伯特空间，并将 $A:$ H$_2 \to$ H$_1 \otimes$ K 定义为 $Ax := \sum_{j\in\Lambda} A_j x \otimes e_j$，即可得到 Stinespring 表示 (2.3)。反之，若 Φ 有 Stinespring 表示 (2.3)，固定 K 的一组标准正交基 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$，定义算子 $A_j:$ H$_2 \to$ H$_1$ 为 $A_j^* x :=$*$(x \otimes e_j) j \in \Lambda$，即可得到 Φ的 Kraus 分解 (2.2)。

设 $\Phi:$ $\mathcal{T}$(H$_1$) $\to$ $\mathcal{T}$(H$_2$) 是一个有界（相对于迹范数）线性映射。则存在一个有界（相对于算子范数）线性映射 $\Phi^*:$ $\mathcal{B}$(H$_2$) $\to$ $\mathcal{B}$(H$_1$)，称为 Φ 的对偶，由恒等式 tr(Φ*$(X)T$) $=$tr($X\,\Phi(T)$) 唯一确定，其中 $T \in \mathcal{T}$(H) $X \in \mathcal{B}$(H$_2$)。有界线性映射 $\Phi:$ $\mathcal{T}$(H$_1$) $\to$ $\mathcal{T}$(H$_2$) 称为量子操作，若 Φ^* 是正规完全正映射。（在量子信息论中，通常假设对所有 $T \in \mathcal{T}$(H$_1$)，均有 tr($\Phi(T)$) $=$ tr(T)（等价地， Φ*$(I) = I$）；此时，Φ 称为量子信道。）给定有界线性映射 $\Phi:$ $\mathcal{T}$(H$_1$) $\to$ $\mathcal{T}$(H$_2$)，根据映射 Φ 和 Φ^* 之间的对偶关系，可知以下断言等价:

(i) Φ 是一个量子操作。(ii)（Kraus 分解：）存在一族可数的有界线性算子$\{A_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，满足 $\overline{\sum}_{j\in\Lambda} A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，使得 [2]

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} A_j T A_j^*, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1). \tag{2.4}$$

(iii)（Stinespring 表示：）存在一对$(\mathcal{K}\ A)$，由一个可分希尔伯特空间$\mathcal{K}$ 和一个有界算子 $A:\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$ 组成，使得

$$\Phi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(ATA^*), \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1), \tag{2.5}$$

其中 tr$_{\mathcal{K}}$ 是相对于希尔伯特空间$\mathcal{K}$的偏迹。

若 Φ 是一个量子信道，则在(ii) 中得到$\sum_j A_j^* A_j = I$；并且在(iii) 中， A 是一个等距映射。注意，$(\mathcal{K}\ A)$ 是量子操作 Φ 的 Stinespring 表示，当且仅当$(\mathcal{K}\ A)$ 是 Φ*的 Stinespring 表示。

注意，有界正规线性映射 $\Phi:$ $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 是 CP，当且仅当对所有可分希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，i d$_{\mathcal{K}} \otimes \Phi:$ $\mathcal{B}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_2)$ 是正的。

定义 2.1。若量子操作 $\Phi:$ $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 满足以下条件，则称其为：(i) 纠缠破坏（EB）映射：对于所有可分希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，$(\mathrm{id}_{\mathcal{K}} \otimes \Phi)(\rho) \in \mathcal{T}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_2)$ 对所有可分希尔伯特空间均为可分的，并且 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_1)$。

[2] ~~每当级数~~ ~~$\sum_j A_j^* A_j$~~ 在弱算子拓扑下收敛时，对于每个 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，级数 $\sum_j A_j T A_j^*$都在迹范数下收敛。（参见 [Att，命题 6.3]）。

(ii) 强纠缠破坏（SEB）映射：对于所有可分希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，$(\mathrm{id}_{\mathcal{K}} \otimes \Phi)(\rho) \in \mathcal{T}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_2)$ 均为可数分解的可分映射，并且 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_1)$。(iii) 正部分转置（PPT）：若其对偶 $\Phi^*: \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ 是一个正部分转置映射。

每个强纠缠破坏映射都是纠缠破坏映射；当 H_1,H_2 为有限维时，反之也成立，但一般情况下并非如此。更多详情请参见 [Kho08、HSR03、KSW05、He13、LiDu15] 。我们用 SEB(H_1,H_2) 表示从 $\mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$ 到 $\mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 的所有强纠缠破坏映射构成的集合。注意，如果 $\Phi \in$SEB(H_1,H_2)，那么对于任意量子操作 $\Gamma: \mathcal{T}(\mathrm{H}_2) \to \mathcal{T}(\mathrm{K})$，$\Gamma \circ \Phi$ 均为强纠缠破坏映射。由下述定理可知，$\Phi \circ \Gamma$ 也为强纠缠破坏映射。

定理2.2。给定量子操作 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$，以下命题等价：

(i) Φ 是强纠缠破坏映射。(ii)（Kraus 分解：）存在秩一Kraus算子 $\{A_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$，其中 $\overline{\sum_{j\in\Lambda} A_j^* A_j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，使得

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} A_j T A_j^*, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1). \tag{2.6}$$

（iii）（Holevo形式：）存在 $\{R_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ 和 $\{F_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)^+$，其中 $\overline{\sum_{j\in\Lambda} F_j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，使得

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} \mathrm{tr}(TF_j)R_j, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1). \tag{2.7}$$

对于上述定理的有限维情形，我们参考 [HSR03]。关于上述针对无限维希尔伯特空间上的量子信道的定理的证明，请参见 [KSW05、He13、LiDu15]；该定理甚至对量子操作也成立。详情请参见附录（定理 A.3 ）。

定义 2.3。设 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 和 $\Psi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_3)$ 是两个量子操作。若存在有界算子 $A: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$，使得则称 Ψ 与 Φ 互补

$$\Phi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_3}(ATA^*) \qquad \text{and} \qquad \Psi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*) \tag{2.8}$$

对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$。我们令 $\mathcal{CM}(\Phi)$ 表示所有与Φ互补的量子操作的集合。若 Φ 与自身互补（即 $\Phi \in \mathcal{CM}(\Phi)$），则称 Φ 是自互补的。

设 $\Phi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 和 $\Psi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_3)$ 是两个量子操作。假设 $\Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$ 且 $A: \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{H}_3$ 满足 (2.8)。那么，取 $\check{A} = FA: \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_3 \otimes \mathrm{H}_2$，，其中 $F: \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{H}_3 \to \mathrm{H}_3 \otimes \mathrm{H}_2$ 是由 $F(x \otimes y) = y \otimes x$ 给出的酉算子，对所有 $x \in$H2、$y \in \mathrm{H}_3$，均成立，我们得到 $\Psi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(\check{A}T\check{A}^*)$，以及 $\Phi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_3}(\check{A}T\check{A}^*)$，对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$ 均成立。因此，Φ 与 Ψ 互补。因此，$\Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$ 当且仅当 $\Phi \in \mathcal{CM}(\Psi)$。

如果量子操作 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 具有 Stinespring 表示 $(\mathcal{K}\ A)$，则由下式定义的映射 $\Phi^c: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{K})$

$$\Phi^c(T) := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*), \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \tag{2.9}$$

是一个量子操作，并且与 Φ 互补。注意，映射 Φ^c 的定义取决于表示（K A），因此我们可以用记号 $\Phi^c_{(\mathcal{K},A)}$ 代替 Φ^c。令 $\check{A} = FA$，其中 F: $\mathrm{H}_2 \otimes$K $\to$K $\otimes \mathrm{H}_2$ 是上述翻转映射，则（$\mathrm{H}_2, \check{A}$）是 Ψ: $= \Phi^c \in \mathcal{CM}$（$\Phi$）的 Stinespring 表示。因此，$\Psi^c$（$\mathrm{H}_2$,$\check{A}$）：$\mathcal{T}$（$\mathrm{H}_1$）$\to \mathcal{T}$（$\mathrm{H}_2$）由下式给出

$$\Psi^c_{(\mathcal{H}_2,\check{A})}(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(\check{A}T\check{A}^*) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(ATA^*) = \Phi(T), \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

给定量子操作 $\Phi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 的一个 Stinespring 表示（K A），我们总是令 $(\Phi^c)^c := (\Phi^c_{(\mathcal{K},A)})^c$（$\mathrm{H}_2$,Ă）。由上式可得 $(\Phi^c)^c = \Phi$。现在，假设 $\Phi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 具有如（2.4）所示的 Kraus 分解。令 K 为具有标准正交基 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的可分复希尔伯特空间。注意，$A: \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{K}$ 定义为 $A(x) = \sum_{j\in\Lambda} A_j x \otimes e_j$ 是一个有界算子，满足 $\Phi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(ATA^*)$，因此（K A）是 Φ 的 Stinespring 表示。此外，（2.9）中定义的 Φ^c 由下式给出

$$\Phi^c(T) := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*) = \sum_{i,j\in\Lambda} \mathrm{tr}(A_i T A_j^*)|e_i\rangle\langle e_j|. \tag{2.10}$$

（详见命题 A.2。）

注意，若 $\Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$，则对于任意适当希尔伯特空间之间的余等距算子 W，均有 $\mathrm{Ad}_W \circ \Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$。这一事实可由以下恒等式得出：

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_3}\Big((I_{\mathcal{H}_2}\otimes Y)ATA^*(I_{\mathcal{H}_2}\otimes Y^*)\Big) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}((I_{\mathcal{H}_2}\otimes Y^*Y)ATA^*)$$
$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}\Big((I_{\mathcal{H}_2}\otimes Y)ATA^*(I_{\mathcal{H}_2}\otimes Y^*)\Big) = Y\,\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*)Y^*$$

对于每个 $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2\otimes\mathrm{K})$ $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$ 和 $Y \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{H}_3)$。现在可得，对于所有 $Z \in \mathcal{B}(\mathrm{H},\mathrm{H}_1)$，$(\Phi\circ \mathrm{Ad}_Z)^c_{(\mathcal{K},AZ^*)} = \Phi^c_{(\mathcal{K},A)} \circ \mathrm{Ad}_Z$；并且对于所有余等距算子 $V \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_3,\mathrm{H}_2)$，$(Ad_V \circ \Phi)^c_{(\mathcal{K},(V^*\otimes I_{\mathcal{K}})A)} = \Phi^c_{(\mathcal{K},A)}$。

注 2.4。设 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 是一个量子操作，具有一个最小 Stinespring 表示 $(\mathcal{K}\ A)$。

(i) 假设 $(\mathcal{K}\ A)$ 是 Φ 的另一个最小 Stinespring 表示。根据定理 A.1，存在酉算子 $U: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$，使得 $A = (I_{\mathcal{H}_2}\otimes U)A$。于是

$$\Phi^c_{(\widetilde{\mathcal{K}},\widetilde{A})}(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(\widetilde{A}T\widetilde{A}^*) = \mathrm{Ad}_U \circ \Phi^c_{(\widehat{\mathcal{K}},\widehat{A})}(T), \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

因此，由最小 Stinespring 表示按 (2.9) 定义的 Φ 的互补映射在酉共轭意义下唯一，我们将这样的互补映射记为 $\Phi^c_{\min}$。

(ii) 设 $\Psi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{K})$ 是与 Φ 互补的量子操作。因此，存在 $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2\otimes\mathrm{K})$，使得 $\Phi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}(ATA^*)$，且 $\Psi(T) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*)$，对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$ 均成立。由于 (K A) 是 Φ 的一个 Stinespring 表示，根据定理 A.1，存在等距映射 $V \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{K})$，使得 $A = (I_{\mathcal{H}_2}\otimes V)A$ 且 $A = (I_{\mathcal{H}_2}\otimes V^*)A$。因此，对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$，有

$$\Psi(T) = V\Phi^c_{\min}(T)V^* \quad \text{and} \quad \Phi^c_{\min}(T) = V^*\Psi(T)V.$$

因此，我们有

$$\mathcal{CM}(\Phi) = \{\mathrm{Ad}_{V^*} \circ \Phi^c_{\min} : V \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{K}},\mathcal{K}) \text{ is an isometry and } \mathcal{K} \text{ Hilbert space}\}$$

特别地，当且仅当存在等距映射 $V \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{H}_2)$ 使得 Φ 为自互补的，即 $\Phi = \mathrm{Ad}_{V^*} \circ \Phi^c_{\min}$。现在假设 $\Psi_1: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_3)$ 和 $\Psi_2: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_4)$ 是与 Φ 互补的两个量子操作。那么，存在等距算子 $V_1 \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{H}_3)$ 和 $V_2 \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{H}_4)$，使得对于 $j=1$，有 $\Phi^c_{\min} = \mathrm{Ad}^{V_j} \circ \Psi_j$ 和 $\Psi_j = \mathrm{Ad}^{V_j^*} \circ \Phi^c_{\min}$。注意，$W := V_2V_1^* \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_3,\mathrm{H}_4)$ 是一个部分等距算子，满足

$$\Psi_2(T) = W\Psi_1(T)W^* \quad \text{and} \quad \Psi_1(T) = W^*\Psi_2(T)W, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1). \tag{2.11}$$

因此，与某个量子操作互补的映射在（2.11）所述意义下唯一到相差一个部分等距算子。在有限维情形下，唯一性仅差一个等距映射。参见第4节。

定义 2.5。([DeSh05]) 若存在某个希尔伯特空间 $\mathcal{K}$，以及量子操作 $\Gamma: \mathcal{T}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{T}(\mathcal{K})$，使得 $\Gamma\circ\Phi \in \mathcal{CM}(\Phi)$，则称量子操作 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 是 (i) 可降解的。(ii) 若存在一个 $\Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$，使得 Ψ 可降解，则称其为反可降解。

设量子操作 $\Phi: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 的 Stinespring 表示为 (K A)，并考虑如 (2.9) 中的 $\Phi^c: \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{K})$。由上述注记可知，$\Phi$ 可降解当且仅当存在量子操作 $\Gamma: \mathcal{T}(\mathrm{H}_2) \to \mathcal{T}(\mathrm{K})$，使得$\Gamma\circ\ \Phi = \Phi^c$。类似地，$\Phi$ 反可降解当且仅当 Φ^c 可降解，也即存在量子操作 $\Gamma: \mathcal{T}(\mathrm{K}) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$，使得 $\Gamma\circ\ \Phi^c = \Phi$。

例2.6. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$，并考虑 $\Phi = \mathrm{Ad}_A: \mathcal{T}(\mathrm{H}) \to \mathcal{T}(\mathrm{H})$。注意，对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H})$，都有 $\Phi^c(T)$ $=\mathrm{tr}(A^*TA) = \Gamma\circ\ \Phi(T)$，其中 $\Gamma(\cdot)$ $=\mathrm{tr}(\cdot)$。因此，Φ 是可降解的。但当且仅当 Φ 是 SEB 时，Φ才是反可降解的。事实上，如果 Φ 是反可降解的，则存在一个量子操作 $\Gamma': \mathbb{C} \to \mathcal{T}(\mathrm{H})$，使得 $\Phi = \Gamma'\circ\ \Phi^c$。因此，存在一个正算子 $R \in \mathcal{T}(H)$，使得对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H})$，$\Phi(T)$ $=\mathrm{tr}(A^*TA)R = \mathrm{tr}(AA^*T)R$。于是，$\Phi$ 是 SEB（因此 A 是秩一算子）。逆向结论由以下注记推出。

注2.7. 设 $\Phi \in \mathrm{SEB}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$。假设 Φ 具有如 2.6 中的 Kraus 分解，其中 $A_j = |v_j\mathrm{ih}u_j|$，且 $u_j \in \mathrm{H}_1$ 和 $v_j \in \mathrm{H}_2$。设 K 是一个具有标准正交基 $\{e_j: j \in \Lambda\}$ 的可分复希尔伯特空间，并令 $B_j := |\overline{v_j}\mathrm{k}v_j\mathrm{k}\ \mathrm{ih}e_j|$ 对所有 $j \in \Lambda$成立。定义 $\Gamma: \mathcal{T}(\mathrm{K}) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$，其中对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$，$\Gamma(T) := \sum_{j\in\Lambda} B_jTB_j^*$。由于 $\overline{\sum_j} B_j^*B_j = I$，映射 Γ 是一个量子信道。此外，

$$\Gamma\circ\Phi^c(T) = \sum_{i,j\in\Lambda} \langle u_i, Tu_j\rangle\langle v_j, v_i\rangle\Gamma(|e_i\rangle\langle e_j|) = \sum_{i\in\Lambda}\langle u_i, Tu_i\rangle|v_i\rangle\langle v_i| = \Phi(T)$$

对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$均成立，其中 Φ^c 由式（2.10）给出。这说明每个SEB映射都是反可降解的。在有限维情形下，[CRS08]观察到了这一事实。

3. 可降解SEB映射

本节旨在确定所有可降解SEB映射。我们从一个例子开始。

例3.1. 考虑由下式定义的映射 $\Phi: \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$

$$\Phi(T) = \langle u, Tu\rangle R, \qquad \forall\ T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1),$$

其中，$u \in \mathrm{H}_1$ 是一个非零向量，且 $R \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$是正的。根据紧正算子的谱定理，存在正交向量$\{v_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathrm{H}_2$，使得 $R = \sum_{j\in\Lambda} |v_j\mathrm{ih}v_j|$。于是，对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$都有 $\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} A_jTA_j^*$，其中 $A_j = |v_j\mathrm{ih}u|$。令K为一个具有可分标准正交基$\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的希尔伯特空间，并考虑式（2.10）中的 Φ^c。由于 $R := \sum_{j\in\Lambda}\mathrm{h}v_j, v_j\ \mathrm{i}|e_j\mathrm{ih}e_j| \in\mathcal{T}(\mathrm{K})$是正的，互补映射

$$\Phi^c(T) = \sum_{i,j\in\Lambda} \langle u, Tu\rangle\langle v_j, v_i\rangle|e_i\rangle\langle e_j| = \langle u, Tu\rangle\widetilde{R}, \qquad \forall\ T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$$

是强纠缠破坏。因此 Φ^c 反可降解，从而 Φ 可降解。

定理 3.2. 给定 $\Phi \in$强纠缠破坏$(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，以下条件等价:

(i) Φ 可降解。(ii) $\mathcal{CM}$（Φ）中的任意一个（因此也是全部）元素都是强纠缠破坏的。(iii) $\mathcal{CM}$（Φ）中的任意一个（因此也是全部）元素都是正部分转置的。(iv) 存在非零向量$\{u_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{H}_1$ 和单位向量$\{v_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{H}_2$，使得$\overline{\sum}_{j\in\Lambda} |u_j\rangle\langle u_j| \in \mathcal{B}$（$\mathcal{H}_1$）以及$\langle v_i,\ v_j\rangle = 0$，只要$\{u_i,\ u_j\}$是线性无关的

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} \langle u_j, Tu_j\rangle |v_j\rangle\langle v_j|, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1). \tag{3.1}$$

(v) 存在秩一正算子$\{F_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，满足 $\overline{\sum}_{j\in\Lambda} F_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，以及态 $\{R_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$，满足 $R_iR_j = 0$ 对所有 $i \neq j$，使得

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} tr(TF_j)R_j, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

(vi) Φ 是自互补的。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 假设 Φ 是可降解的，因此对于某个量子操作 Γ，有 $\Phi^c_{\min} = \Gamma \circ \Phi$。由于 Φ 是强纠缠破坏的，我们有 $\Phi^c_{\min}$ 也是强纠缠破坏的。现在给定任意 $\Psi \in \mathcal{CM}(\Phi)$，根据注 2.4，存在一个等距映射 V，使得 $\Psi = \mathrm{Ad}_{V^*} \circ \Phi^c_{\min}$，因此 Ψ 也是强纠缠破坏的。

$(ii) \Rightarrow (iii)$ 显然成立。

$(iii) \Rightarrow (iv)$ 设 $A_j \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ 为秩一算子，且 $\overline{\sum}_j A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1)$ 满足$\Phi(\cdot) = \sum_{j\in\Lambda} A_j(\cdot)A_j^*$。假设 $A_j = |v_j\rangle\langle u_j|$，其中某个 $u_j \in \mathrm{H}_1$ 和单位向量 $v_j \in \mathrm{H}_2$ 对所有$j \in \Lambda$均成立。则 $\overline{\sum}_j |u_j\rangle\langle u_j| \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1)$，且 $\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda}\langle u_j, Tu_j\rangle|v_j\rangle\langle v_j|$ 对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$ 均成立。设 K 为一个带有标准正交基 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的希尔伯特空间，并考虑如式（2.10）中的互补映射$\Phi^c : \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{K})$，即,

$$\Phi^c(T) = \sum_{i,j\in\Lambda} \langle v_j, v_i\rangle\langle u_i, Tu_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

固定 $i \neq j \in \Lambda$，并假设 $\{u_i, u_j\}$ 线性无关。考虑 $\mathbb{C}^2$ 的标准正交基 $\{e_1^{(2)}, e_2^{(2)}\}$。设

$$A_{ij} := |e_i\rangle\langle e_1^{(2)}| + |e_j\rangle\langle e_2^{(2)}| \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2, \mathcal{K})$$

且 $B_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\ \mathbb{C}^2)$ 满足 $B_{ij}u_i = e_1^{(2)}$，$B_{ij}u_j = e_2^{(2)}$ 以及 $B_{ij} = 0$ 在张成空间$\{u_i,\ u_j\}$的正交补上。则对所有 $T \in \mathbb{M}_2$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{A_{ij}} \circ \Phi^c \circ \mathrm{Ad}_{B_{ij}}(T) &= \sum_{k,l\in\Lambda} \langle v_l, v_k\rangle\langle B_{ij}u_k, TB_{ij}u_l\rangle |A_{ij}^* e_k\rangle\langle A_{ij}^* e_l| \\
&= \sum_{k,l\in\{i,j\}} \langle v_l, v_k\rangle\langle B_{ij}u_k, TB_{ij}u_l\rangle |A_{ij}^* e_k\rangle\langle A_{ij}^* e_l| \\
&= \begin{bmatrix} \|v_i\|^2 \langle e_1^{(2)}, Te_1^{(2)}\rangle & \langle v_j, v_i\rangle\langle e_1^{(2)}, Te_2^{(2)}\rangle \\ \langle v_i, v_j\rangle\langle e_2^{(2)}, Te_1^{(2)}\rangle & \|v_j\|^2 \langle e_1^{(2)}, Te_2^{(2)}\rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \|v_i\|^2 & \langle v_j, v_i\rangle \\ \langle v_i, v_j\rangle & \|v_j\|^2 \end{bmatrix} \odot T,
\end{aligned}$$

其中 $\odot$ 表示舒尔乘积。由于 Φ^c 是正部分转置，复合 $\mathrm{Ad}^{A_{ij}} \circ \Phi^c \circ \mathrm{Ad}^{B_{ij}} : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ 是正部分转置的。当且仅当 $\begin{bmatrix} \|v_i\|^2 \langle v_j,\ v_i\rangle \langle v_i,\ v_j\rangle \|v_j\|^2 \end{bmatrix}$ 是对角矩阵时，这种情况才成立（参见 [KMP18，命题 4.1]）。因此 $\langle v_i,\ v_j\rangle = 0$。

$(iv) \Rightarrow (v)$ 假设存在$\{u_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{H}_1$ 和$\{v_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{H}_2$，如$(iv)$所示。对于每个 $k \in \Lambda$,

let

$$D_k := \{j|\ \{u_j, u_k\} \text{ is linearly dependent}\}$$

显然，对于所有 $k \in \Lambda$，都有 $k \in D_k$。此外，给定 $i,j \in \Lambda$，我们有 $D_i \cap D_j = \emptyset$ 或 $D_i = D_j$。令 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 满足：对于每个 $i \neq j \in \Lambda_0$ 和 $\sqcup_{k\in\Lambda_0} D_k = \cup_{k\in\Lambda} D_k = \Lambda$，$D_i, D_j$ 是互不相交的集合。因此

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} \langle u_j, Tu_j\rangle |v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{k\in\Lambda_0} \Big(\sum_{j\in D_k} \langle u_j, Tu_j\rangle |v_j\rangle\langle v_j|\Big), \qquad \forall\ T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

但是，如果 $j \in D_k$，那么对于某个标量 $u_j = \lambda_{j,\ k} u_k\ \lambda_{j,\ k} \in \mathbb{C}$ 有 $u_j = \lambda_j$

$$\Phi(T) = \sum_{k\in\Lambda_0} \langle u_k, Tu_k\rangle \Big(\sum_{j\in D_k} |\lambda_{j,k}|^2 |v_j\rangle\langle v_j|\Big) = \sum_{k\in\Lambda_0} \mathsf{tr}(T\widetilde{F}_k)\widetilde{R}_k, \tag{3.2}$$

~其中 $F_k :=$ $|u_k\rangle\langle u_k|$ 以及

$$\widetilde{R}_k := \sum_{j\in D_k} |\lambda_{j,k}|^2 |v_j\rangle\langle v_j| = \frac{1}{\|u_k\|^4} \sum_{j\in D_k} \big\langle u_j, (|u_k\rangle\langle u_k|)u_j\big\rangle |v_j\rangle\langle v_j|$$

~是非零正算子。令 $R_k :=$ $\frac{}{R_k\, \mathsf{tr}(\widetilde{R}_k) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)}$，以及 $F_k := \mathsf{tr}(\widetilde{R}_k)\, \widetilde{F}_k \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，对所有 $k \in \Lambda_0$ 成立。于是

$$\sum_{k\in\Lambda_0} F_k = \sum_{k\in\Lambda_0} \Big(\sum_{j\in D_k} |\lambda_{j,k}|^2 \|v_j\|^2\Big) |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{k\in\Lambda_0} \sum_{j\in D_k} |u_j\rangle\langle u_j| = \sum_{j\in\Lambda} |u_j\rangle\langle u_j| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$$

~ ~并且对所有 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，$\Phi(T) = \sum_{k\in\Lambda_0} \mathsf{tr}(TF_k)R_k$ 成立。由于 $R_kR_l = 0$，我们有 $R_kR_l = 0$ 对所有 $k \neq l \in \Lambda_0$ 成立。

$(v) \Rightarrow (vi)$ 假设 Φ 具有如 (v) 所示的表示。根据谱定理，写成 $F_j =$ $|u_j\rangle\langle u_j|$ 以及 $R_j = \sum_{i\in\Lambda_j} |v_{i,\ j}\rangle\langle v_{i,\ j}|$ 其中 $u_j \in$ 为某个非零向量 $\mathcal{H}_1$，且 $v_{i,\ j}$ 构成正交集 $\{v_{i,\ j}\}_{i\in\Lambda_j} \subseteq \mathcal{H}_2$，对每个 $j \in \Lambda$ 均成立。于是，

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} \mathsf{tr}(TF_j)R_j = \sum_{j\in\Lambda} \langle u_j, Tu_j\rangle \Big(\sum_{i\in\Lambda_j} |v_{i,j}\rangle\langle v_{i,j}|\Big) = \sum_{j\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda_j} A_{i,j}TA_{i,j}^*$$

对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathsf{H}_1)$，其中 $A_{i,j} := |v_{i,j}\mathsf{i}\mathsf{h}u_j|$ 对于所有 $j \in \Lambda, i \in \Lambda_j$。由于 $R_kR_l = 0$ 对于 $k \neq l \in \Lambda$，集合 $\{v_{i,j} :\ i \in \Lambda_j, j \in \Lambda\} \subseteq \mathsf{H}_2$ 是正交的。令 $\mathsf{K} = \mathsf{span}\{e_{i,j} :\ \cancel{j \in \Lambda}, i \in \Lambda_j\} \subseteq \mathsf{H}_2$，，其中 $e_{i,j} = \frac{}{v_{i,j}}\mathsf{k}v_{i,j}\mathsf{k}$，且 $W \in \mathcal{B}(\mathsf{K}, \mathsf{H}_2)$ 为包含映射。那么对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathsf{H}_1)$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_W \circ \Phi(T) &= \sum_{j\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda_j} \langle u_j, Tu_j\rangle |W^*v_{i,j}\rangle\langle W^*v_{i,j}| \\
&= \sum_{j\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda_j} \|v_{i,j}\|^2 \langle u_j, Tu_j\rangle |e_{i,j}\rangle\langle e_{i,j}| \\
&= \sum_{j,l\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda_j, k\in\Lambda_l} \langle v_{k,l}, v_{i,j}\rangle \langle u_j, Tu_l\rangle |e_{i,j}\rangle\langle e_{k,l}| \\
&= \sum_{j,l\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda_j, k\in\Lambda_l} \mathsf{tr}(A_{i,j}TA_{k,l}^*)|e_{i,j}\rangle\langle e_{k,l}|.
\end{aligned}$$

由 (2.10) 可得 $\mathrm{Ad}_W \circ \Phi \in \mathcal{CM}(\Phi)$。注意，$\mathrm{Ad}_{WW^*}$ 是定义在 $\mathsf{range}(\Phi)$ 上的恒等映射，因此 $\Phi = \mathrm{Ad}_{W^*} \circ (\mathrm{Ad}_W \circ \Phi)$。由于 $W^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{K})$ 是余等距算子，我们得出 $\Phi \in \mathcal{CM}(\Phi)$。

$(vi) \Rightarrow (i)$ 这直接由定义可知。 □

注 3.3. 设 $\Phi :\ \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 是一个 SEB映射。

(i) 假设 Φ 有一个分解 (3.1)，其中包含某些非零向量 $u_j \in \mathcal{H}_1$ 和 $v_j \in \mathcal{H}_2$。不失一般性，假设 v_j是单位向量。如果 Φ 是可降解的，那么通过类似于上述定理证明的思路，我们可以看出，当且仅当 $\langle v_i, v_j\rangle = 0$时，$\{u_i, u_j\}$ 线性无关。

(ii) 假设对于某个秩一 F_j和态 R_j，有 $\Phi(T)=\sum_j \mathrm{tr}(TF_j)R_j$。若 Φ可降解，且$\{F_j : j \in \Lambda\}$ 两两线性无关，则由(i)可得，对于所有 $i \neq j$， $R_iR_j = 0$ 。

注 3.4。 由 [MuSi22，推论 7] 可得

$\{\Phi : \mathbb{M}_{d_1} \to \mathbb{M}_{d_2}$ PPT 映射与可降解映射$\}$ $= \{\Phi : \mathbb{M}_{d_1} \to \mathbb{M}_{d_2}$纠缠破坏映射与可降解映射$\}$。

因此，在有限维情形下，定理 3.2 也刻画了可降解的 PPT 映射。

设 H 是一个具有标准正交基 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的可分希尔伯特空间。定义等距映射V: H $\to$ H $\otimes$ H，使得对所有 $x \in$ H，有 $V(x) = \sum_j$he_j, xi$e_j \otimes e_j$。则 $A, B \in \mathcal{B}$(H) 关于 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的舒尔乘积定义为 $A \odot B$: $= V^*(A \otimes B)V$。注意,

$$\langle x, V^*(A \otimes B)Vy\rangle = \langle Vx, (A \otimes B)Vy\rangle = \sum_{i,j}\Big\langle x, \langle e_i, Ae_j\rangle\langle e_i, Be_j\rangle|e_i\rangle\langle e_j|y\Big\rangle,$$

对所有 $x, y \in \mathcal{H}$，使得

$$A \odot B = \overline{\sum_{i,j}}\langle e_i, Ae_j\rangle\langle e_i, Be_j\rangle|e_i\rangle\langle e_j|.$$

(因此，若 $A, B \in \mathcal{B}$(H) 分别具有无限矩阵表示$[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ 和$[b_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$，则 $A \odot B$ 相对于 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 的矩阵表示为$[a_{ij}b_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$。) 显然， $A \odot B \in \mathcal{B}$(H) 满足 k$A \odot B$k $\leq$ kAk kBk。此外，若 $A, B \in \mathcal{B}$(H)$^+$，则 $A \otimes B \in \mathcal{B}$(H $\otimes$ H)$^+$，使得$A \odot B \in \mathcal{B}(H)^+$，且 tr$(A \odot B) = \sum_jhe_j, Ae_jihe_j, Be_j$i 在 $B \in \mathcal{T}$(H) 时为有限值。

引理 3.5. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$，且 $\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。则映射$S_A : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H})$ 定义为

$$S_A(T) := A \odot T \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

是一个量子操作。

证明。设 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $A^{\mathsf{T}} = B^*B$，对于 $k \in \Lambda$，令 $A_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为由 $A_k(e_j) = \langle e_k, Be_j\rangle$ e_j 给出的对角算子，其中 $j \in \Lambda$。那么对于 $n \geq 1$ 和 $x \in \mathcal{H}$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} A_k^*A_kx\Big\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x\rangle|^2 \Big(\sum_k |\langle e_k, Be_j\rangle|^2\Big)^2 \leq \sum_j |\langle e_j, x\rangle|^2 \|Be_j\|^4 \leq \|B\|^4 \|x\|^2$$

因此 $\overline{\sum_k} A_k^*A_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。由此，对每个 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$，都有 $\sum_k A_kTA_k^* \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ 。进一步地（因为迹范数收敛意味着强算子拓扑收敛）

$$\begin{aligned}
\sum_k A_kTA_k^* = \overline{\sum_k} A_kTA_k^* &= \overline{\sum_k}(\overline{\sum_i}\langle e_k, Be_i\rangle|e_i\rangle\langle e_i|)T(\overline{\sum_j}\langle Be_j, e_k\rangle|e_j\rangle\langle e_j|) \\
&= \overline{\sum_{i,j}}\sum_k\langle e_k, Be_i\rangle\langle Be_j, e_k\rangle\langle e_i, Te_j\rangle|e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \overline{\sum_{i,j}}\Big\langle\sum_k\langle e_k, Be_j\rangle e_k, Be_i\Big\rangle\langle e_i, Te_j\rangle|e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \overline{\sum_{i,j}}\langle e_j, A^{\mathsf{T}}e_i\rangle\langle e_i, Te_j\rangle|e_i\rangle\langle e_j|
\end{aligned}$$

$$= \overline{\sum_{i,j} \langle e_i, Ae_j\rangle \langle e_i, Te_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|} = S_A(T). \tag{3.3}$$

因此 S_A 是一个量子操作。 □

注3.6。令 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$，并令 S_A 为引理（3.5）中给出的舒尔映射。那么任意 $\Psi \in \mathcal{CM}(S_A)$ 都是强纠缠破坏的。事实上，设 $S_A(.) = \sum_k A_k(.)A_k^*$，其中 $A_k's$ 与上述证明中的相同。现在考虑由方程（2.10）给出的互补映射 S_A^c，即，

$$\begin{aligned} S_A^c(T) &= \sum_{i,j} \mathsf{tr}(A_i T A_j^*)|e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j} \Big(\sum_k \langle A_i^* e_k, T A_j^* e_k\rangle \Big) |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j} \Big(\sum_k \Big\langle \langle Be_k, e_i\rangle e_k, T\langle Be_k, e_j\rangle e_k \Big\rangle \Big) |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j} \sum_k \langle e_i, Be_k\rangle \langle Be_k, e_j\rangle \langle e_k, Te_k\rangle |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_k \langle e_k, Te_k\rangle |z_k\rangle\langle z_k| \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $z_k = \sum_j \langle Be_k, e_j\rangle e_j$。因此 S_A^c 是强纠缠破坏的。现在，根据方程 2.11，给定任意 $\Psi \in \mathcal{CM}(S_A)$，存在一个部分等距算子 V，使得 $\Psi = \mathrm{Ad}_V \circ S_A^c$，因此 Ψ 也具有强纠缠破坏性。

定理3.7。令 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$，并令 S_A 为引理（3.5）中给出的舒尔映射。则下列命题等价

(i) $\mathcal{CM}(S_A)$ 中的任意一个元素（因此也包括全部元素）都是可降解的。(ii) A 是对角算子（即，$\langle e_i, Ae_j\rangle = 0, \forall i \neq j$）。(iii) S_A 是强纠缠破坏的。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 不失一般性，假设 S_A^c 是可降解的，其中 S_A^c 由方程（3.4）给出。（如果 $\Psi \in \mathcal{CM}(S_A)$ 是可降解的，即存在一个量子操作 Γ 作用于 $\mathcal{T}(\mathsf{H})$，使得$\Gamma \circ S_A = \Psi$。现在由方程 2.11，存在一个部分等距算子 V，使得 $S_A^c = \mathrm{Ad}_V \circ \Psi$，因此 $S_A^c = \mathrm{Ad}_V \circ \Gamma \circ S_A$，从而 S_A^c 是可降解的。）然后由定理（3.2）和注记（3.3），对于所有 $i \neq j$，我们得到 $\mathrm{h}z_i, z_j\mathrm{i} = 0$。但是

$$\begin{aligned} \langle z_i, z_j\rangle &= \Big\langle \sum_k \langle Be_i, e_k\rangle e_k, \sum_l \langle Be_j, e_l\rangle e_l \Big\rangle \\ &= \sum_{k,l} \langle e_k, Be_i\rangle \langle Be_j, e_l\rangle \langle e_k, e_l\rangle \\ &= \sum_k \langle e_k, Be_i\rangle \langle Be_j, e_k\rangle \\ &= \langle Be_j, Be_i\rangle = \langle e_j, A^{\mathsf{T}} e_i\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle \end{aligned}$$

因此， A 是一个对角算子。

$(ii) \Rightarrow (iii)$ 假设 A 是一个对角算子，那么

$$A \odot T = \overline{\sum_{i,j} \langle e_i, Ae_j\rangle \langle e_i, Te_j\rangle |e_i\rangle\langle e_j|} = \overline{\sum_j \langle e_j, Ae_j\rangle \langle e_j, Te_j\rangle |e_j\rangle\langle e_j|}.$$

现在，由于序列 $\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle e_j,Te_j\rangle\langle e_j,Ae_j\rangle|e_j\rangle\langle e_j|\right\|_1$ 收敛到 $\|A\odot T\|_1$，根据 [Gru73，定理 2]，我们得到

$$S_A(T)=\sum_j\langle e_j,Te_j\rangle\langle e_j,Ae_j\rangle|e_j\rangle\langle e_j|=\sum_j\langle u_j,Tu_j\rangle|e_j\rangle\langle e_j|$$

其中 $u_j=\sqrt{\langle e_j,\ \overline{Ae_j\rangle e_j}}$。因此，$S_A$ 是强纠缠破坏映射。

$(iii)\ \Rightarrow\ (i)$ 假设 S_A 是强纠缠破坏映射，因此是反可降解的。于是，任意 $\Psi\in\mathcal{CM}(S_A)$ 都是可降解的。□

4. 有限维情形

在本节中，$d,d_1,\cdots\ d_4\in\mathbb{N}$。我们令 $\{e_j^{(d)}\}_{j=1}^{d}\subseteq\mathbb{C}^d$ 表示标准正交基，并令 CP(d_1,d_2)表示从 $\mathbb{M}_{d_1}$ 到 $\mathbb{M}_{d_2}$的所有完全正映射组成的集合。回顾一下，$\Phi\in$ CP(d_1,d_2)的 Choi秩记为 $CR(\Phi)$，它是表示 Φ 所需的 Kraus 算子最少数目。对于任意 $\Phi\in$ CP(d_1,d_2)，总存在一个互补映射$\Psi\in$ CP(d_1,r)，满足 $r=CR(\Phi)\le d_1d_2$。事实上，若 Φ 有 Kraus 分解 $\Phi=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Ad}_{V_i}$，则由下式定义的映射 $\Phi_{\min}^{c}\in$ CP(d_1,r)

$$\Phi_{\min}^{c}(X):=\sum_{i,j=1}^{r}\mathsf{tr}(V_i^*XV_j)|e_i^{(r)}\rangle\langle e_j^{(r)}|=\sum_{k=1}^{d_2}\widetilde{V_k}^*X\widetilde{V_k},\tag{4.1}$$

是余 补于 Φ (参见 [Hol07])，其中 $\widetilde{V}_k=\sum_{i=1}^{d_1}\sum_{j=1}^{r}\left\langle e_i^{(d_1)},V_je^{(d_2)}{}_k\right\rangle|e_i^{(d_1)}\,\mathbf{ih}e_j^{(r)}|\in\mathbb{M}_{d_1\times}{}_r$.

若 $\Psi\in\mathrm{CP}(d_1,d_3)$ 与 Φ 互补，则对于任意等距映射$V\in\mathbb{M}_{d_4\times d_3}$和 $d_4\ge d_3$，$\mathrm{Ad}_{V^*}\circ\Psi\in\mathrm{CP}(d_1,d_4)$ 也互补。另一方面，若 $\Psi_1\in\mathrm{CP}(d_1,d_3)$ 和 $\Psi_2\in\mathrm{CP}(d_1,d_4)$ 是 Φ 的两个互补映射，并假设 $d_3\le d_4$，则存在一个等距映射 $V\in\mathbb{M}_{d_4\times d_3}$ 使得

$$\Psi_2=\mathrm{Ad}_{V^*}\circ\Psi_1\qquad\text{and}\qquad\Psi_1=\mathrm{Ad}_{V}\circ\Psi_2\tag{4.2}$$

事实上，若 $A_1:\mathbb{C}^{d_1}\to\mathbb{C}^{d_2}\otimes\mathbb{C}^{d_3}$ 和 $A_2:\mathbb{C}^{d_1}\to\mathbb{C}^{d_2}\otimes\mathbb{C}^{d_4}$ 是有界线性映射，且满足

$$\Phi(X)=(\mathsf{id}\otimes\mathsf{tr})(A_jXA_j^*)\qquad\text{and}\qquad\Psi_j(X)=(\mathsf{tr}\otimes\mathsf{id})(A_jXA_j^*),\ \ j=1,2,$$

那么，存在一个等距映射 $V\in\mathbb{M}_{d_4\times d_3}$，使得 $A_2=(I_{d_2}\otimes V)A_1$，且 $A_1=(I_{d_2}\otimes V^*)A_2$。详细内容见 [Wat18, Corollary 2.24]。由 (4.2) 可知，与 Φ 互补的映射具有相同的 Choi秩。事实上，由于 rank($\Phi_{\min}^{c}(I)$) $=r=CR(\Phi)$，由 (4.2) 可知，对于所有 $\Psi\in$ CP(d_1,d_3)，若其与 Φ 互补，则 $CR(\Psi)=rank(\Phi(I))\le d_2$。交换 Φ 和 Ψ 的角色，可得 $r\le d_3$。因此，根据上述讨论，我们有

$$\mathcal{CM}(\Phi)=\{\mathrm{Ad}_{V^*}\circ\Phi_{\min}^{c}:V\in\mathbb{M}_{d_3\times r},V^*V=I_r\},$$

其中 $\Phi_{\min}^{c}$ 如 (4.1) 中所述。

令 UEB(d_1,d_2) 表示从 $\mathbb{M}_{d_1}$ 到 $\mathbb{M}_{d_2}$ 的酉元纠缠破坏映射所构成的集合。若线性映射 $\Phi\in$UEB(d_1,d_2) 满足：只要将其写作 $\Phi=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ad}_{T_i}\circ\Phi_i$，其中 $T_i\in\mathbb{M}_{d_2}$ 可逆，且 $\sum_{i=1}^{n}T_i^*T_i=I_{d_2}$ 和 $\Phi_i\in$ UEB(d_1,d_2)，就存在酉算子 $U_i\in\mathbb{M}_{d_2}$ 使得对于所有 $1\le i\le n$，$\Phi_i=\mathrm{Ad}_{U_i}\circ\Phi$，则称它是 UEB($d_1,d_2$) 的 C^*-极端点。在 [BDMS], 中，Bhat 等人证明，Φ 是 UEB(d_1,d_2) 的 C^*-极端点，当且仅当 $CR(\Phi)=d_2$；而这又当且仅当存在单位向量 $\{u_i\}_{i=1}^{d_2}\subseteq\mathbb{C}^{d_1}$ 和标准正交基 $\{v_i\}_{i=1}^{d_2}\subseteq\mathbb{C}^{d_2}$，使得 $\Phi=\sum_{i=1}^{d_2}\mathrm{Ad}_{|u_i\mathbf{ih}v_i|}$。

定理 4.1。 </style}给定 UEB($d_1,\ d_2$)，以下命题等价：**(i)** Φ 是可降解的。

(ii) Φ 是$\mathrm{UEB}(d_1,\ d_2)$的 C^*-极端点。

证明。$(i)\ \Rightarrow (ii)$ 假设 Φ 是可降解的。那么根据定理 3.2(v)，存在秩一正算子 $\{F_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{M}_{d_1}$ 和态 $\{R_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{M}_{d_2}$，满足 $R_iR_j = 0$，对所有 $i \neq j$ 均成立，使得

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{tr}(XF_j)R_j, \qquad \forall\ X \in \mathbb{M}_{d_1}.$$

令 $F_k = |u_k\rangle\langle u_k|$，并令 $P_k = \mathsf{tr}(F_k)R_k$，对所有 $1 \leq k \leq n$均成立。显然，$P_kP_l = 0$ 对所有 $k \neq l$ 均成立，且$\sum_{k=1}^n P_k = \Phi(I) = I$。现在令 $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ 和 $0 \neq x \in \mathbb{C}^d$ 满足 $P_kx = \lambda x$。那么对所有 $j \neq k$，我们有 $P_j(x) = P_j(\frac{1}{\lambda}P_k(x)) = 0$。因此 $x = \sum_{j=1}^n P_j(x) = P_k(x) = \lambda x$，从而 $\lambda = 1$。于是，P_k的可能特征值只有 0 和 1。由于 $P_k^* = P_k$，我们得出 P_k's 是相互正交的投影。取 $\widetilde{u}_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$，我们有

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{n} \langle \tilde{u}_j, X\tilde{u}_j\rangle P_j, \qquad \forall\ X \in \mathbb{M}_{d_1},$$

因此，根据 [BDMS 定理 5.3(v)], Φ 是$\mathrm{UEB}(d_1, d_2)$的一个 C^*-极端点。

$(ii)\ \Rightarrow (i)$ 由 [BDMS 定理 5.3 (vi)] 和定理 3.2(iv) 得出。 □

推论 4.2。设 $\Phi\colon \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$是一个幺正保迹纠缠破坏映射。当且仅当 Φ^* 可降解时，Φ 可降解。

证明。已知 $\Phi, \Phi^* \in \mathrm{UEB}(d)$。由于 $CR(\Phi) = CR(\Phi^*)$，根据 [BDMS 定理 5.3 (iv)],，Φ 是一个 C^*-极端点，当且仅当 Φ^* 是一个 C^*-极端点。因此，根据定理 4.1，Φ 可降解，当且仅当 Φ^* 可降解。□

例 4.3。考虑由下式定义的纠缠破坏映射 $\Phi : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$

$$\Phi(X) = \langle e_1, Xe_1\rangle I, \qquad \forall\ X \in \mathbb{M}_d,$$

它是幺正的，但不是保迹的。注意，Φ 是可降解的，但 Φ^* 不可降解。（换言之，$\Phi^*(X) = \mathsf{tr}(X)|e_1\rangle\langle e_1|$ 是一个保迹、非幺正且不可降解的纠缠破坏映射，而$(\Phi^*)^* = \Phi$ 是可降解的。）

例 4.4。考虑由下式定义的保单位迹保持纠缠破坏映射 $\Phi\colon\ \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_2$

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{3} \langle e_j, Xe_j\rangle |v_j\rangle\langle v_j|,$$

其中 $v_1 = e_1$,$v_2 = v_3 = \frac{e_2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}^2$。根据定理 3.2，$\Phi$ 不可降解，但 Φ^* 是一个C^*-极端点，因此可降解。

例4.5。令 $A \in \mathbb{M}_d^+$ 和 $S_A\colon\ \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ 为舒尔映射。由于 $A \in \mathbb{M}_d^+$，存在$\{v_j\}_{j=1}^d \subseteq \mathbb{C}^d$使得 $A = [\langle v_i, v_j\rangle]$。记 $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, \cdots\ \ v_{dj})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^d$，并令 $A_k = \sum_{j=1}^d v_{kj}|e_j\rangle\langle e_j|$ 对所有 $1 \leq k \leq d$成立。则 $S_A = \sum_{k=1}^d \mathrm{Ad}_{A_k}$，从而

$$S_A^c(X) = \sum_{k,l=1}^{d} \mathsf{tr}(A_k^*XA_l)|e_k\rangle\langle e_l| = \sum_{j=1}^{d} \langle e_j, Xe_j\rangle |\overline{v_j}\rangle\langle\overline{v_j}|, \qquad \forall\ X \in \mathbb{M}_d.$$

显然，S_A^c 是纠缠破坏映射。注意，Choi 矩阵 $C_{S_A^c} = \sum_j E_{jj} \otimes |\overline{v_j}\rangle\langle\overline{v_j}|$ 是投影，当且仅当 v_j是单位向量；这又当且仅当 A 的对角元为1。此外，

$$(S_A^c)^*(X) = \sum_{j=1}^{d} \langle\overline{v_j}, X\overline{v_j}\rangle |e_j\rangle\langle e_j|, \qquad \forall\ X \in \mathbb{M}_d$$

当且仅当 v_j是单位向量时，它是幺正的。因此，由 [BDMS], 可知，$(S_A^c)^*$ 是 $\mathrm{UEB}(d)$ 的一个 C^*-极端点，当且仅当 A 的对角元为1； 这又当且仅当 $C_{S_A^c}$ 是投影。

给定一个纠缠破坏映射 $\Phi:\mathbb{M}_{d_1}\to\mathbb{M}_{d_2}$，将 Φ 表示为式（2.6）所需的秩一 Kraus 算子的最小数量称为 Φ的纠缠破坏秩，记作 $\mathrm{ER}(\Phi)$。根据 [Hor97, HSR03]，我们有以下结论:

- 若 Φ 是幺正的，则 $d_2\le CR(\Phi)\le ER(\Phi)\le(d_1d_2)^2$。
- 若 Φ 是保迹的，则 $d_1\le CR(\Phi)\le ER(\Phi)\le(d_1d_2)^2$。

下述定理是 [KLPR22, 定理3.6]的一个更强版本。

定理4.6. 设 $\Phi:\mathbb{M}_{d_1}\to\mathbb{M}_{d_2}$是一个秩$(\Phi(I))\le d_1$的正部分转置通道（当$d_2\le d_1$时即为此情形）。则以下命题等价:

(i) C_Φ是一个投影。(ii) Φ是纠缠破坏映射，且其纠缠秩$(\Phi)=d_1$（因此 $CR(\Phi)=d_1$）。(iii) Φ^*是$\mathrm{UEB}(d_2,d_1)$的一个 C^*-极端点。(iv) 存在单位向量$\{v_j\}_{j=1}^{d_1}\subseteq\mathbb{C}^{d_2}$和一个标准正交基$\{u_j\}_{j=1}^{d_1}\subseteq\mathbb{C}^{d_1}$，使得

$$\Phi(X)=\sum_{j=1}^{d_1}\langle u_j,Xu_j\rangle|v_j\rangle\langle v_j|,\qquad\forall\,X\in\mathbb{M}_{d_1}. \tag{4.3}$$

(v) 存在 $A\in\mathbb{M}_{d_1}$，其对角元素均为1，以及一个酉算子 $U\in\mathbb{M}_{d_1}$，使得

$$\Phi=S_A^c\circ\mathrm{Ad}_U \tag{4.4}$$

此外，若 $d_1=d_2$和 Φ是幺正的，则上述条件等价于以下条件：(vi) Φ 是可降解的。

证明。$(i)\Rightarrow(ii)$ 假设 C_Φ 是一个投影，因此秩$(C_\Phi)=\mathsf{tr}(C_\Phi)$。但是

$$\mathsf{tr}(C_\Phi)=\mathsf{tr}((\mathsf{tr}\otimes\mathsf{id})C_\Phi)=\mathsf{tr}\Big(\sum_{i,j=1}^{d}\mathsf{tr}(|e_i\rangle\langle e_j|)\otimes\Phi(|e_i\rangle\langle e_j|)\Big)=\mathsf{tr}(\Phi(I))=d_1.$$

由于

$$\max\{\mathsf{rank}((\mathsf{id}\otimes\mathsf{tr})(C_\Phi)),\mathsf{rank}((\mathsf{tr}\otimes\mathsf{id})(C_\Phi))\}=\max\{\mathsf{rank}(I),\mathsf{rank}(\Phi(I))\}=d_1,$$

根据 [HSR03，引理7和8]，Φ 是纠缠破坏映射，且 $d_1\le\mathrm{CR}(\Phi)\le\mathrm{ER}(\Phi)\le d_1$。

$(ii)\Rightarrow(iii)$ 假设 Φ 是纠缠破坏的，且 $\mathrm{ER}(\Phi)=d_1$。那么 $\Phi^*\in\mathrm{UEB}(d_2,d_1)$，并且 $\mathrm{ER}(\Phi^*)=\mathrm{ER}(\Phi)=d_1$，因此由 [BDMS 定理 5.3] 可知，$\Phi^*$ 是 $\mathrm{UEB}(d_2,d_1)$ 的一个 C^*-极端点。$(iii)\Rightarrow(iv)$ 由 [BDMS 定理 5.3] 可得。

$(iv)\Rightarrow(v)$ 假设 Φ 如 (4.3) 中所述。令 $U\in\mathbb{M}_{d_1}$ 为酉算子，使得对所有$1\le i\le d_1$和 $A=[\mathrm{h}\overline{v_i},\overline{v_j}\mathrm{i}]\in\mathbb{M}_{d_1}$，均有 $U(e_i)=u_i$。那么，由例4.5可知 $\Phi=S_A^c\circ\mathrm{Ad}_U$。$(v)\Rightarrow(i)$ 假设 Φ 如 (4.4) 中所述。由于 A 的对角元均为 1，因此 $C_{S_A^c}$ 是一个投影，进而 $C_\Phi=(U^\mathsf{T}\otimes I)^*C_{S_A^c}(U\mathrm{T}\otimes I)$ 也是一个投影。

$(iii)\Leftrightarrow(vi)$ 设 $\Phi:\mathbb{M}_d\to\mathbb{M}_d$ 是一个幺正的 PPT 通道。假设 $\Phi^*\in\mathrm{UEB}(d)$ 是一个 C^*-极点。那么由定理 (4.1) 和推论 (4.2)，Φ 是可降解的。反过来，假设 Φ 是可降解的。由 [MuSi22 的推论 7] 可知，Φ 是纠缠破坏的，因此由定理 (4.1) 和推论 (4.2) 可得，Φ^* 是$\mathrm{UEB}(d)$的一个 C^*-极点。 □

在上述定理中，可以用 $\Phi=\mathrm{Ad}_{V^*}\circ(S_A)^c_{\min}\circ\mathrm{Ad}_U$ 替换 (4.4)，其中 $U\in\mathbb{M}_{d_1}$是酉算子，$V\in\mathbb{M}_{d_3\times r}$ 是等距映射，且 $r=CR(S_A)$。例 4.4 表明，在定理4.6中，当 $d_1\ne d_2$时，(vi) 与其他任何陈述都不等价。

注意，如果 $\Phi \in \mathrm{CP}(d_1, d_2)$ 是幺正的，那么完全正映射 $\Phi^c_{\min}$ 不一定是幺正的。根据 KLPR22 引理 2.4]， $\Phi^c_{\min}$ 是幺正的当且仅当 C_Φ 是一个投影。因此，我们要问：所有满足 C_Φ 是投影的完全正映射 Φ 是什么？若 $d_2 \leq d_1$，则定理4.6表明

$$\{\Phi\colon\ \mathbb{M}_{d_1} \to \mathbb{M}_{d_2} \text{ 正部分转置，且 } C_\Phi \text{ 是投影}\} = \{\Phi\colon\ \mathbb{M}_{d_1} \to \mathbb{M}_{d_2} \text{ 纠缠破坏，且 } C_\Phi \text{ 是投影}\},$$

并进一步刻画第一组中的元素。

注 4.7. 设 $\Phi\colon\ \mathbb{M}_{d_1} \to \mathbb{M}_{d_2}$ 是秩为$(\Phi(I)) \leq d_1$的正部分转置通道。若 Φ 可降解，则$(\Phi^c)^*$ 是 C^* 的 UEB 极点。事实上，由于 Φ 可降解，根据 [MuSi22，推论7]，我们有 Φ 和 Φ^c 均为纠缠破坏映射。因为

$$d_1 \leq CR((\Phi^c)^*) = CR(\Phi^c) = rank(\Phi(I)) \leq d_1,$$

根据 [BDMS，定理 5.3]，我们得到$(\Phi^c)^*$ 是一个 C^*-极点。

例 4.8. 给定 $\lambda \in [-1, 1/d]$ 和 $d > 1$，考虑映射$\mathcal{W}_\lambda\colon\ \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$，定义如下

$$\mathcal{W}_\lambda(X) = \frac{1}{d-\lambda}(\mathsf{tr}(X)I - \lambda X^{\mathsf{T}}),$$

这是一个保单位迹保持纠缠破坏映射（[WeHo02]）。考虑 Choi 矩阵

$$C_{\mathcal{W}_\lambda} = \frac{1}{d-\lambda}\big((I \otimes I) - \lambda F\big),$$

其中 $F \in \mathcal{B}\ (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ 是交换算子，并且满足 $F^2 = I_d \otimes I_d$。由于 $C_{\mathcal{W}_\lambda}$ 不是投影$\mathcal{W}_\lambda$ 不是可降解的。

例 4.9。 给定 $\lambda \in [-\frac{1}{d+1}, 1]$ 映射 $\Phi_{\lambda,\ d}\colon\ \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ 定义为

$$\Phi_{\lambda,d}(X) := \frac{1}{2\lambda + d}\{\mathsf{tr}(X)I + \lambda(X + X^{\mathsf{T}})\} \tag{4.5}$$

是一个纠缠破坏映射（[DMS23]）。注意

$$C_{\Phi_{\lambda,d}} = (I_d \otimes I_d) + \lambda(P + F),$$

其中 $P = |\sum_j e_j \otimes e_i\rangle\langle\sum_j e_j \otimes e_j| \in \mathcal{B}\ (\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d)$ 。由于 $C_{\Phi_{\lambda,\ d}}$ 不是投影，$\Phi_{\lambda,\ d}$ 不可降解。

本节接下来讨论可降解完全正映射。设 $\Phi \in \mathrm{CP}(d, d)$ 具有如下形式： $\Phi = \mathrm{Ad}_Y \circ S_A \circ \mathrm{Ad}_Z$，其中 $A \in \mathbb{M}_d^+$， Y， $Z \in \mathbb{M}_d$。如果 Y， Z均可逆（特别是酉算子），那么 Φ是可降解的。详情参见 [WoPe07, DeSh05] 。

例 4.10。 设 $W \in \mathbb{M}_{d_3 \times d_2}$ 是余等距算子， $A \in \mathbb{M}_{d_3}^+$ 和 $Z \in \mathbb{M}_{d_1 \times d_3}$。考虑 $\Phi = \mathrm{Ad}_W \circ S_A \circ \mathrm{Ad}_Z \in \mathrm{CP}(d_1, d_2)$。现在，由于 S_A^c 是纠缠破坏的，我们有 $\Phi^c = (\mathrm{Ad}_W \circ S_A \circ \mathrm{Ad}_V)^c = S_A^c \circ \mathrm{Ad}_V$也具有纠缠破坏性，因此是反可降解的。因此， Φ 是可降解的。

命题 4.11。 设$\Phi_j\colon\ \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_{d_j}$， $1 \leq j \leq k$ 为纯完全正映射。那么映射$\Phi\colon\ = \oplus_{i=1}^k \Phi_i$是可降解的。

证明。我们只证明 $k = 2$ 的情形，一般情形可用类似方法证明。因此，假设 $\Phi_j = \mathrm{Ad}^{V_j}$ 对于 $j = 1, 2$。令 $W_1 = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{d \times d_1 + d_2}$ 和 $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & V_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{d \times d_1 + d_2}$，我们有 $\Phi = \sum_{j=1}^2 \mathrm{Ad}^{W_j}$。注意，对于 $i \neq j \in \{1, 2\}$， $W_j W_i^* = 0$ 成立，因此

$$\Phi^c(X) = \sum_{i,j=1}^2 \mathsf{tr}(W_i^* X W_j)|e_i^{(2)}\rangle\langle e_j^{(2)}| = \sum_{j=1}^2 \mathsf{tr}(W_j^* X W_j)|e_j^{(2)}\rangle\langle e_j^{(2)}| = \sum_{j=1}^2 \mathsf{tr}(V_j^* X V_j)|e_j^{(2)}\rangle\langle e_j^{(2)}|$$

对所有 $X \in \mathbb{M}_d$ 均成立。注意， $\Gamma : \mathbb{M}_{d_1+d_2} \to \mathbb{C}$ 由下式给出

$$\Gamma(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}) := \begin{bmatrix} \mathsf{tr}(A_{11}) & 0 \\ 0 & \mathsf{tr}(A_{22}) \end{bmatrix}$$

是一个完全正映射，使得 $\Phi^c = \Gamma \circ \Phi$ ，从而 Φ 是可降解的。 □

推论 4.12. 设 $\Phi \in \mathrm{UCP}(d_1, d_2)$。若 Φ 是 $\mathrm{UCP}(d_1, d_2)$ 的一个 C^*-极端点，则它是可降解的。

证明. 设 $\Phi \in \mathrm{UCP}(d_1, d_2)$ 是一个 C^*-极端点。根据 [FaZh98, 定理 2.1], , 存在一个酉算子 $U \in \mathbb{M}_{d_2}$ 和正整数 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$，满足 $\sum_{i=1}^k n_i = d_2$，并存在等距算子$V_i \in \mathbb{M}_{d_1 \times n_i}$，使得 $\mathrm{Ad_U} \circ \Phi = \oplus_{i=1}^k \mathrm{Ad}_{V_i}$。由上述命题可知，对于某个完全正映射 Γ， $\Phi^c = (\mathrm{Ad_U} \circ \Phi)^c = \Gamma \circ \mathrm{Ad}_U \circ \Phi$，从而 Φ 是可降解的。□

例 4.13. 令 $\Phi : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ 为由 $\Phi = \sum_{i=1}^d \mathrm{Ad}_{A_i}$ 给出的保单位纠缠破坏映射，其中 $A_i = |e_i\rangle\langle e_i|$。由于对所有 $i \neq j$， $A_i^* A_j = 0$，我们有 $\Phi = \Phi^c$。因此，根据定理 3.2， Φ 是可降解的。注意， Φ不是 $\mathrm{UCP}(d)$ 的线性极端点（因此也不是 C^*-极端点）。

5. 致谢

RD 得到了印度人力资源开发部（MHRD）IoE-CoE 项目（编号：SB20210797MAMHRD008573）的资助。GS 感谢印度理工学院马德拉斯分校通过研究所博士后奖学金提供的经费支持。KS 部分获得印度人力资源开发部（MHRD）的 IoE-CoE 项目（编号：SB22231267MAETWO008573）资助，部分获得印度科学与工程研究委员会（SERB）的 MATRIX 资助（文件编号：MTR/2020/000584）。

附录 A。

以下定理是 [Hol07，第 2] 定理关于无限维希尔伯特空间的推广版本，我们采用类似的技术对其进行证明。

定理 A.1。设 Φ： $\mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$ 是一个量子操作，其具有最小 Stinespring$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$表示 $(\mathcal{K}\ A)$。若 $(\mathcal{K}\ A)$ 是 Φ 的一个 Stinespring 表示，则存在一个$\frown$等距映射V： $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$，使得

$$A = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V)\widehat{A} \quad \text{and} \quad \widehat{A} = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V^*)A.$$

（若 $(\mathcal{K}\ A)$ 也是最小的，则 V 可以选为酉算子）。因此，给定 Φ 的另一个 Stinespring 表示 $(\mathcal{K}', A')$，存在一个部分等距映射 W： $\mathcal{K} \to \mathcal{K}${v28>，使得

$$A' = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes W)A \qquad \text{and} \qquad A = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes W^*)A'$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。设 $(\mathcal{K}\ A)$ 是 Φ^* 的最小 Stinespring 表示。于是，

$$\overline{\mathsf{span}}\{(X \otimes I_{\widehat{\mathcal{K}}})\widehat{A}h : h \in \mathcal{H}_1, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)\} = \mathcal{H}_2 \otimes \widehat{\mathcal{K}}$$

$\widehat{\ }$ $\frown$且 $\Phi^*(X) = A^*(X \otimes I_{\widehat{\mathcal{K}}})A$ 对所有 $X \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_2)$ 均成立。现在，由于 (K A) 是 $\frown$的一个 Stinespring 表示$\frown$，我们有 $\Phi^*(X) = A^*(X \otimes I_{\mathcal{K}})A$ 对所有 $X \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_2)$ 均成立。定义 $S : \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{K} \to \mathrm{H}_2 \otimes \mathrm{K}$ 为

$$S(X \otimes I_{\widehat{\mathcal{K}}})\widehat{A}h := (X \otimes I_{\mathcal{K}})Ah, \qquad \forall\ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), h \in \mathcal{H}_1.$$

$\frown$于是， S 是一个等距映射，满足 $SA = A$ 和 $S(X \otimes I_{\widehat{\mathcal{K}}}) = (X \otimes I_{\mathcal{K}})S$ ，对所有 $X \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_2)$均成立。$\widehat{\ }$ $\frown$因此，存在一个等距映射 $V \in \mathcal{B}(\mathrm{K},\mathrm{K})$，使得 $S = I_{\mathcal{H}_2} \otimes V$。现在，$SA = A$ 意味着$A = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V)\ \widehat{}\ A$ ，因此$\widehat{}\ A = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V^*)A$。类似地，可以得到一个等距映射 $V\prime : \widehat{}\ \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$

使得 $A' = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V\prime)\hat{}A$，并且$\hat{}A = (I_{\mathcal{H}_2} \otimes V\prime*)A'$。注意，$W := V\prime V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}')$ 是所需的部分等距算子。□

命题 A.2. 设 $\Phi\colon \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$ 是一个量子操作，其 Kraus 分解为$\Phi(T) = \sum_{j\in\Lambda} A_j T A_j^*$，其中 $\{A_j\}_{j\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$ 是一个满足 $\overline{\sum}_{j\in\Lambda} A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_2)$ 的可数族。若 H_3 是另一个具有标准正交基 $\{e_j : j \in \Lambda\}$ 的可分复希尔伯特空间，则映射$\Psi\colon \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_3)$ 定义为

$$\Psi(T) := \sum_{i,j\in\Lambda} tr(A_i T A_j^*)|e_i\rangle\langle e_j| \tag{A.1}$$

是一个良定义的量子操作，且与 Φ 互补。

证明. 由于 $\overline{\sum}_j A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)^+$，我们有

$$\Big\|\sum_{j\in\Lambda} A_j x \otimes e_j\Big\|^2 = \langle x, \sum_{j\in\Lambda} A_j^* A_j x\rangle \le \Big\|\overline{\sum_{j\in\Lambda}} A_j^* A_j\Big\| \|x\|^2, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}_1.$$

因此，$x \mapsto \sum_{j\in\Lambda} A_j x \otimes e_j$ 定义了一个算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$。现在固定一个标准正交基$\{f_j\}_{j\in\Lambda'}$，它属于 $\mathcal{H}_2$。那么对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_3}(ATA^*) &= \sum_{i,j\in\Lambda'} \sum_{k\in\Lambda} \langle f_i \otimes e_k, ATA^*(f_j \otimes e_k)\rangle |f_i\rangle\langle f_j| \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda'} \langle f_i, \sum_k A_k T A_k^* f_j\rangle |f_i\rangle\langle f_j| \\
&= \sum_k A_k T A_k^* \\
&= \Phi(T)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*) &= \sum_{k\in\Lambda'} \sum_{i,j\in\Lambda} \langle f_k \otimes e_i, ATA^*(f_k \otimes e_j)\rangle |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \sum_{k\in\Lambda'} \langle f_k, A_i T A_j^* f_k\rangle |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \mathrm{tr}(A_i T A_j^*)|e_i\rangle\langle e_j|.
\end{aligned}$$

因此 $\Psi(T) := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(ATA^*) = \sum_{i,\ j\in\Lambda} \mathrm{tr}\,(A_i T A_j^*)\ |e_i\rangle\langle e_j|$，$\forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$ 是一个良定义的量子操作，与 Φ 互补。□

我们采用了与 [He13, LiDu15] 类似的技术来证明以下定理。

定理 A.3。设 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 是两个可分希尔伯特空间，且 $\dim(\mathcal{H}_1) = \infty$。则对于量子操作 $\Phi\colon \mathcal{T}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_2)$，以下各项等价:

(i) Φ 是强纠缠破坏。(ii) 对于每个正标量序列$\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ 满足$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i < \infty$，算子$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_i\lambda_j} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij}) \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2)^+$是可数可分解可分的。(iii) 对于一个正标量序列$\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i < \infty$，算子$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_i\lambda_j} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij}) \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2)^+$是可数可分解可分的。(iv)（Kraus 分解：）存在秩至多为一的 Kraus 算子$\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$，且满足$\overline{\sum}_{j\in\mathbb{N}} A_j^* A_j \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1)$，使得

$$\Phi(T) = \sum_{j\in\mathbb{N}} A_j T A_j^*, \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

(v)（Holevo形式：）存在正算子$\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，满足$\overline{\sum}_{k\in\mathbb{N}}F_k\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，以及态$\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$，使得

$$\Phi(T)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathit{tr}(TF_j)R_j,\qquad\forall\,T\in\mathcal{T}(\mathcal{H}_1).$$

证明。$(i)\Rightarrow(ii)$设$\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是H_1的一个标准正交基，并设$\lambda_j\in\mathbb{R}$为满足$\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j<\infty$的正标量。设$e:=\sum_{j\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_j}e_j\otimes e_j\in\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_1$，且$\rho:=|e\mathrm{ih}e|\in\mathcal{T}(\mathrm{H}_1\otimes\mathrm{H}_1)$。设$w_n:=\sum_{j=1}^n\sqrt{\lambda_j}e_j\otimes e_j$，且$\rho_n:=|w_n\mathrm{ih}w_n|$。显然，$\lim_n\mathrm{tr}(\rho_n)=\mathrm{tr}(\rho)$，且$\rho_n\to\rho$在弱算子拓扑中收敛，因此$\rho_n\to\rho$在迹范数（[Gru73，定理 2]）下收敛。注意到$\sum_{i,j}\left\|\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes E_{ij}\right\|_1$收敛，因此（关于迹范数拓扑）

$$\begin{aligned}\lim_n\rho_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^n\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes E_{ij}\\&=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes E_{ij}\\&=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes E_{ij}\end{aligned}$$

由于$\mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}\otimes\Phi$在迹范数下连续，我们有

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}\otimes\Phi)(\rho)=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes\Phi(E_{ij}).\tag{A.2}$$

由于Φ是强纠缠破坏的，我们有$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}\otimes\Phi)(\rho)$是可数可分解可分的。

$(ii)\Rightarrow(iii)$显然成立。

$(iii)\Rightarrow(iv)$令$\{\lambda_i:\,i\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$满足$\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda_i<\infty$，且使得$\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes\Phi(E_{ij})\in\mathcal{T}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)^+$为可数可分解可分。则存在单位向量$u_k,v_k\in\mathcal{H}_1$和非负标量$r_k$，使得

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\otimes\Phi(E_{ij})=\sum_{k\in\mathbb{N}}r_k|u_k\rangle\langle u_k|\otimes|v_k\rangle\langle v_k|.\tag{A.3}$$

那么对所有$x,y\in\mathrm{H}_2$

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\langle y,\Phi(E_{ij})x\rangle&=\langle e_i\otimes y,(\sum_{s,t}\sqrt{\lambda_s\lambda_t}E_{st}\otimes\Phi(E_{st}))(e_j\otimes x)\rangle\\&=\langle e_i\otimes y,(\sum_k r_k|u_k\rangle\langle u_k|\otimes|v_k\rangle\langle v_k|)(e_j\otimes x)\rangle\\&=\sum_k r_k\langle u_k,e_j\rangle\langle e_i,u_k\rangle\langle v_k,x\rangle\langle y,v_k\rangle\\&=\langle y,\Big(\sum_k r_k\langle u_k,e_j\rangle\langle e_i,u_k\rangle|v_k\rangle\langle v_k|\Big)x\rangle\end{aligned}$$

因此，

$$\Phi(E_{ij})=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\sum_k r_k\langle u_k,e_j\rangle\langle e_i,u_k\rangle|v_k\rangle\langle v_k|,\quad\forall\,i,j.\tag{A.4}$$

令$v=\sum_j\sqrt{\lambda_j}e_j\in\mathcal{H}_1$和$A=|v\rangle\langle v|=\sum_{i,\,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\in\mathcal{T}(\mathcal{H}_1)^+$。对（A.2）和（A.3）应用偏迹，得到

$$\begin{aligned}\sum_k r_k|u_k\rangle\langle u_k|&=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\,\mathrm{tr}\Big(\Phi(E_{ij})\Big)\\&=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}E_{ij}\,\mathrm{tr}\Big(E_{ij}\Phi^*(I)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle e_j, \Phi^*(I) e_i \rangle E_{ij} \\
&= A \odot \Phi^*(I)^{\mathsf{T}} \\
&\leq A \odot \left\| \Phi^*(I)^{\mathsf{T}} \right\| I \\
&= \|\Phi^*(I)\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_{jj}. \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

令 $P_n = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|$ 和 $z_{k,\ n} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{\mu_k}}{\sqrt{\lambda_i}} \langle u_k,\ e_i\rangle e_i$，对于 $k,\ n \geq 1$。由（A.5）可得 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k |P_n u_k\rangle\langle P_n u_k| \leq \|\Phi^*（I）\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$，因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |z_{k,n}\rangle\langle z_{k,n}| &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle u_k, e_i\rangle\langle e_j, u_k\rangle E_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle e_j, |u_k\rangle\langle u_k| e_i\rangle E_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle P_n e_j, |u_k\rangle\langle u_k| P_n e_i\rangle E_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle e_j, \sum_{k=1}^{m} r_k |P_n u_k\rangle\langle P_n u_k| e_i\rangle E_{ij} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle e_j, \sum_{k=1}^{\infty} r_k |P_n u_k\rangle\langle P_n u_k| e_i\rangle E_{ij} \\
&\leq \|\Phi^*(I)\| P_n, \qquad \forall\ m, n \geq 1. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

由于 $|z_{k,\ n}\rangle\langle z_{k,\ n}| \leq \sum_{j=1}^{k+1} |z_{j,\ n}\rangle\langle z_{j,\ n}| \leq \|\Phi^*(I)\| P_n$ 对所有 $k \geq 1$，我们有

$$
\|z_{k,n}\|^2 = \left\| |z_{k,n}\rangle\langle z_{k,n}| \right\| \leq \|\Phi^*(I)\|, \qquad \forall\ n, k \geq 1.
$$

因此 $z_{k,\ n}$ 收敛，例如收敛到 $z_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu_k}}{\sqrt{\lambda_i}} \langle u_k,\ e_i\rangle e_i \in \mathcal{H}_1$。现在对每个 $m,\ n \geq 1$，由 (A.6) 可得

$$
\sum_{k=1}^{m} |z_{k,n}\rangle\langle z_{k,n}| = \sum_{k=1}^{m} P_n |z_k\rangle\langle z_k| P_n \leq \|\Phi^*(I)\| P_n,
$$

也就是说，$P_n(\mathrm{k}\Phi^*(I)\mathrm{k}\, I - \sum_{k=1}^{m} |z_k\mathrm{ih}z_k|)P_n$ 是正的。由 [LiDu15，引理 3.3]，可知，对于每个 $m \geq 1$，$\mathrm{k}\Phi^*(I)\mathrm{k}\ I - \sum_{k=1}^{m} |z_k\mathrm{ih}z_k|$ 是正的。令 $A_k := |v_k\mathrm{ih}v_k| \in \mathcal{B}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)$，得到 $\sum_k A_k^* A_k = \sum_k |z_k\mathrm{ih}\ z_k| \leq \mathrm{k}\Phi^*(I)\mathrm{k}\, I_{\mathcal{H}_1}$。考虑量子操作 $\Psi\colon\ \mathcal{T}(\mathrm{H}_1) \to \mathcal{T}(\mathrm{H}_2)$，其定义为 $\Psi(\cdot) = \sum_k A_k(\cdot)A_k^*$。于是对每个 $i,\ j \geq 1$

$$
\Psi(E_{ij}) = \sum_k \langle z_k, e_i\rangle\langle e_j, z_k\rangle |v_k\rangle\langle v_k| = \sum \frac{r_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle e_i, u_k\rangle\langle u_k, e_j\rangle |v_k\rangle\langle v_k| = \Phi(E_{ij})
$$

现在，若对于某个 $t_{ij} \in \mathbb{C}$，$T = \sum_{i,\ j} t_{ij} E_{ij} \in \mathcal{T}_k(\mathcal{H}_1)$，那么由于 Φ，Ψ 在迹范数下是连续的，我们得到

$$
\Phi(T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} \Phi(E_{ij}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} \Psi(E_{ij}) = \Psi(T).
$$

因此，对于所有 $T \in \mathcal{T}(\mathrm{H}_1)$，都有 $\Phi(T) = \sum_k A_k T A_k^*$。

$(iv) \Rightarrow (v)$ 假设 Φ 具有如（2.6）所示的表示。令 $\Lambda = \{j :\ \ A_j \neq 0\}$，并将 $A_j = |v_j\rangle\langle u_j|$ 写作某个 $u_j \in \mathcal{H}_1$ 与单位向量 $v_j \in \mathcal{H}_2$ 的形式。对于每个 $j \in \Lambda$，令 $F_j := A_j^* A_j$，并且

$R_j := |v_j\rangle\langle v_j|$，则 $\overline{\sum_{j\in\Lambda} F_j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ 以及

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= \sum_{j\in\Lambda} A_j T A_j^* \\ &= \sum_{j\in\Lambda} |v_j\rangle\langle u_j|T|u_j\rangle\langle v_j| \\ &= \sum_{j\in\Lambda} \mathsf{tr}(T|u_j\rangle\langle u_j|)|v_j\rangle\langle v_j| \\ &= \sum_{j\in\Lambda} \mathsf{tr}(TF_j)R_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{tr}(TF_j)R_j,\end{aligned}$$

其中，对于所有 $j \notin \Lambda$， $F_j = 0$ 和 $R_j = |v\rangle\langle v|$，且对于某个固定的单位向量 $v \in \mathcal{H}_2$。

$(v) \Rightarrow (i)$ 假设 Φ 具有如（2.7）所示的 Holevo 形式。现在令$\mathcal{K}$ 为一个可分希尔伯特空间，并令 $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_1)^+$. 。取$\mathcal{K}$ 的一组标准正交基$\{e_j : j \in \Lambda\}$，记 $\rho = \sum_{i,j\in\Lambda} E_{ij} \otimes \mathrm{T}_{ij}$，其中 $T_{ij} \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_1)$，且 $E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$。于是

$$\begin{aligned}\mathsf{id}_{\mathcal{K}} \otimes \Phi(\rho) &= \sum_{ij} E_{ij} \otimes \Phi(T_{ij}) \\ &= \sum_{ij} E_{ij} \otimes \Big(\sum_k \mathsf{tr}(T_{ij}F_k)R_k\Big) \\ &= \sum_{ij} \Big(\sum_k \mathsf{tr}(T_{ij}F_k)E_{ij}\Big) \otimes R_k \\ &= \sum_{k} \Big(\sum_{ij} \mathsf{tr}(T_{ij}F_k)E_{ij}\Big) \otimes R_k \\ &= \sum_k \mathsf{tr}_{\mathcal{H}_2}\Big((I_{\mathcal{K}} \otimes F_k)\rho\Big) \otimes R_k\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{tr}_{\mathcal{H}_2}\Big((I_{\mathcal{K}} \otimes F_k)\rho\Big)$ 为正，$(\mathsf{id}_{\mathcal{K}} \otimes \Phi)\rho$ 是可数可分解可分的。由于$\mathcal{K}$和 ρ 是任意的， Φ 是强纠缠破坏的。□

参考文献

[Att] Stephan Attal。《量子信道》讲义： *http://math.univ-lyon1.fr/~attal/chapters.html*。[BDMS] B. V. Rajarama Bhat、R. Dependra、N. Mallick 和 K. Sumesh。纠缠破坏映射的 c^*-极值点。即将发表于《数学物理评论》[ChDo13] Lin Chen 和 Dragomir Ž. Đoković´c。有限维量子系统中的维数、长度与可分性。《数学物理杂志》，54(2):022201，2013年。[CRS08] T. S. Cubitt、M. B. Ruskai 和 G. Smith。可降解量子信道的结构。《数学物理杂志》，49(10):102104，27，2008年。[DMS23] Repana Devendra、Nirupama Mallick 和 K. Sumesh。 k-纠缠破坏映射的映射锥。《正性》，27(1):第5号论文，32，2023年。[DeSh05] I. Devetak 和 P. W. Shor。量子信道同时传输经典信息和量子信息的容量。《数学物理通讯》，256(2):287–303，2005年。[FaZh98] Douglas R. Farenick 和 Hongding Zhou。 C^*-代数上完全正线性映射空间中 C^*-极值点的结构。《美国数学会会刊》，126(5):1467–1477，1998年。[Gru73] H. R. Grumm。关于 $\mathcal{C}_p$的两个定理。《数学物理报告》，4:211–215，1973年。[He13] Kan He。关于无限维量子系统的纠缠破坏信道。《国际理论物理杂志》，52(6):1886–1892，2013年。[Hol07] A. S. Holevo。互补信道与可加性问题。《概率论及其应用》，51(1):92–100，2007年。

[Hor97] P. Horodecki。可分性判据与具有正部分转置的不可分混合态。《物理快报A》，232(5):333–339，1997年。[HSR03] M. Horodecki、P. W. Shor 和 M. B. Ruskai。纠缠破坏信道。《数学物理评论》，15(6):629–641，2003年。[Kho08] A. S. Kholevo。无限维中的纠缠破坏信道。信息传输问题，44(3):3–18，2008年。[KLPR22] David W. Kribs、J. Levick、R. Pereira 和 M. Rahaman。通过互补信道和乘法域得到纠缠破坏秩。arXiv预印本，2022年。[KMP18] M. Kennedy、N. A. Manor 和 V. I. Paulsen。PPT映射的复合。《量子信息与计算》，18(5-6):472–480，2018年。[Kra71] K. Kraus。量子理论中的一般态变换。《物理年鉴》，64:311–335，1971年。[KSW05] A. S. Kholevo、Maksim E. Shirokov 和 Reinhard F. Werner。关于希尔伯特空间中的纠缠概念。《俄罗斯数学评论》，60:359–360，2005年。[LiDu15] Yuan Li 和 Hong-Ke Du。纠缠破坏信道的插值及完全正映射的等价条件。《泛函分析杂志》，268(11):3566–3599，2015年。[MuSi22] Alexander Müller-Hermes 和 Satvik Singh。双PPT信道是纠缠破坏信道。arXiv预印本，2022年。[NiCh11] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，美国，2011年。[SRZ16] Marek Smaczy´nski、Wojciech Roga 和 Karol ˙Zyczkowski。自互补量子信道。《开放系统与信息动力学》，23(03):1650014，2016年。[Sti55] W. F. Stinespring。C^*-代数上的正函数。《美国数学会会刊》，6:211–216，1955年。[Wat18] J. Watrous。《量子信息理论》。剑桥大学出版社，2018年。[Wer89] R. F. Werner。贝尔不等式在量子态扩展问题中的一个应用。《数学物理通讯》，17(4):359–363，1989年。[WeHo02] R. F. Werner 和 A. S. Holevo。关于量子信道输出纯度可加性猜想的反例。《数学物理杂志》，43(9):4353–4357，2002年。[WoPe07] Michael M. Wolf 和 David Pérez-García。具有小环境的信道的量子容量。《物理评论A辑》，75:012303，2007年1月。

印度马德拉斯理工学院数学系，金奈，泰米尔纳德邦 600036，印度 电子邮箱： r.deva1992@gmail.com, ma16d020@smail.iitm.ac.in印度马德拉斯理工学院数学系，金奈，泰米尔纳德邦 600036，印度 电子邮箱: gunjan.sapra27@gmail.com印度马德拉斯理工学院数学系，金奈，泰米尔纳德邦 600036，印度 电子邮箱: sumeshkpl@gmail.com, sumeshkpl@iitm.ac.in