arXiv:2304.00315v1 [math.AP] 1 Apr 2023

两个特征值系统及其变体的极限问题

H. BUENO 和 ALDO H. S. MEDEIROS

Abstract. 设 Ω 为有界光滑区域。假设 $\alpha(p)+\beta(p)=p$, $\forall p\in\left(\frac{N}{s},\infty\right)$ 且 $\lim_{p\to\infty}\alpha(p)/p=\theta\in(0,1)$，我们考虑关于分数阶 p- 拉普拉斯算子的两个方程组，以及第一个方程组的一个变体。第一个方程组如下。

$$\begin{cases}(-\Delta_p)^s u(x)=\lambda\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u|v(x_0)|^{\beta(p)} & \text{in } \Omega,\\ (-\Delta_p)^t v(x)=\lambda\beta(p)\left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^{\beta(p)-2}v(x_0)\delta_{x_0} & \text{in } \Omega,\\ u=v=0 & \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

其中，x_0 是 Ω 中的一点，λ 是一个参数，$0<s\le t<1$ δ_x 表示以 x 和 $p>N/s$ 为中心的狄拉克 δ 分布。

通过令 x_0 为函数 v 取得最大值的一点，可以得到该方程组的一个变体。在这种情况下，我们记为 $x_0=x_v$。

第二个方程组为

$$\begin{cases}(-\Delta_p)^s u(x)=\lambda\alpha(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)-2}u(x_1)|v(x_2)|^{\beta(p)}\delta_{x_1} & \text{in } \Omega,\\ (-\Delta_p)^t v(x)=\lambda\beta(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)-2}v(x_2)\delta_{x_2} & \text{in } \Omega,\\ u=v=0 & \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

其中 x_1、$x_2\in\Omega$ 是任意的，$x_1\neq x_2$。尽管我们在此不予讨论，但与第一个方程组类似的变体可以采用几乎相同的方法求解。

我们得到这些方程组（包括第一个方程组的变体）的解，并研究当 $p\to\infty$ 时这些解的渐近行为。我们证明，它们在粘性意义下收敛于 u and v 上问题的解。

1. Introduction

本文讨论分数阶 p-拉普拉斯算子的不同方程组，并研究其解（u_p、v_p）在 p 趋于无穷时的行为：我们证明，这些解在粘性意义下收敛于相关方程组的解（u_∞、v_∞）。

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为一个有界光滑区域，并且对每个 $x\in\Omega$，令 δ_x 为集中于 x的狄拉克质量。另考虑函数 $\alpha,\beta\colon\left(\frac{N}{s},\infty\right)\to(1,\infty)$，满足

(h_1) $\alpha(p)+\beta(p)=p$, $\forall p\in\left(\frac{N}{s},\infty\right)$;

(h_2) $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{\alpha(p)}{p}=\theta\in(0,1)$.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35R11, 35A15, 35D40。

Key words and phrases. 分数阶方程组，变分方法，黏性解。

对每个 $p > \frac{N}{s}$，我们考虑方程组

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u|v(x_0)|^{\beta(p)} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^t v(x) = \lambda\beta(p)\left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^{\beta(p)-2}v(x_0)\delta_{x_0} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_p^1}$$

其中，x_0 是 Ω 中的一点，λ 是一个参数，而 $(-\Delta_p)^r$ 表示r-分数阶 p-拉普拉斯算子。对于任意 $p > 1$，其定义为

$$(-\Delta_p)^r \phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^{p-2}(\phi(x) - \phi(y))}{|x-y|^{N+rp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

对于任意 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，它是 $W^{r,p}_0(\Omega)$ 的稠密子空间。我们还回顾一下，

$$\left\langle (-\Delta_p)^r u, \varphi \right\rangle := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+rp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这是将 $(-\Delta_p)^r$ 视为从 $W^{r,p}_0(\Omega)$ 到其对偶空间的算子时的表达式。（空间 $W^{r,p}_0(\Omega)$ 的定义将在下文给出。）

我们首先证明，对于每个 $p > N/s$，该方程组都有唯一解。然后，我们考察当 $p \to \infty$ 时这些解的序列的行为，并证明它们一致收敛于 (u_∞, v_∞)，而 (u_∞, v_∞) 是相关方程组的黏性解。（具体表述将在下文给出。）

作为方程组（P_p^1）的一种变体，我们考虑方程组

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u|v(x_v)|^{\beta(p)} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^t v(x) = \lambda\beta(p)\left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_v)|^{\beta(p)-2}v(x_v)\delta_{x_v} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_∞^1}$$

其中，x_v 是 Ω 中 v 的最大值点。注意，方程组（P_∞^1）中的第一个方程可以替换为 $(-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u\|v\|_\infty^{\beta(p)}$ 在 Ω 中。为求解上述方程组，我们采用处理问题（P_p^1）时使用的相同方法，见注 8。

我们还处理方程组

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)-2}u(x_1)|v(x_2)|^{\beta(p)}\delta_{x_1} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^t v(x) = \lambda\beta(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)-2}v(x_2)\delta_{x_2} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_p^2}$$

其中 x_1、$x_2 \in \Omega$ 是任意点，$x_1 \neq x_2$。

当然，我们也可以考虑 x_u 和 x_v 分别为 u 和 v 的极大值点的情形，因为我们的论证同样适用于这种情形。

在第 2–5 节中，我们处理方程组（P_p^1），而方程组（P_∞^1）在注 8 中讨论。最后，在第 6 节中，我们处理问题（P_p^2）。

2. Background、 setting and description of results

由于适当的索博列夫嵌入，问题（P_p^1）和（P_p^2）的解（u、v）必须是连续的。

由于方程组中的两个方程具有相同的齐次性，(P_p^1) 和 (P_p^2) 实际上都是特征值问题。 s-分数阶 p-拉普拉斯算子的特征值问题由 Lindgren 和 Lindqvist 在开创性论文中进行了研究

[9]。具体而言，他们研究了以下问题

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = \lambda_1(s,p)|u|^{p-2}u(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

作者证明，与（2）相关的瑞利商的最小值，即

$$\lambda_1(s,p) = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{[u]_{s,p}^p}{\|u\|_p^p} = \frac{[\phi_p]_{s,p}^p}{\|\phi_p\|_p^p}.$$

由一个在 Ω 中不变号的函数取得。

在同一篇论文的 $p=\infty$ 情形中，Lindgren 和 Lindqvist 将

$$\lambda_1(s,\infty) = \inf\left\{ \frac{\left\| \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^s} \right\|_\infty}{\|u\|_\infty} \,:\, u \in W_0^{s,\infty}(\Omega)\setminus\{0\} \right\}$$

并证明了

$$\lambda_1(s,\infty) = \frac{1}{R^s} \qquad \text{and} \qquad \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\lambda_1(s,p)} = \lambda_1(s,\infty),$$

其中 $R = \max_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \|\operatorname{dist}(\cdot, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\|_\infty$。

Del Pezzo 和 Rossi 将关于方程 (2) 得到的结果推广到 [3] 中这类方程组的情形:

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^r u(x) = \lambda\alpha(p)|u(x)|^{\alpha(p)-2}u(x)|v(x)|^{\beta(p)} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^s v(x) = \lambda\beta(p)|u(x)|^{\alpha(p)}|v(x)|^{\beta(p)-2}v(x) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

当假设 (h_1) 和 (h_2) 成立时。若对每个 $p \in (\frac{N}{s}, \infty)$，记

$$\lambda_{1,p} = \inf\left\{ \frac{\frac{1}{p}[u]_{r,p}^p + \frac{1}{p}[v]_{s,p}^p}{\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha(p)}|v|^{\beta(p)}\,\mathrm{d}x} \,:\, (u,v) \in W^{s,p}(\Omega),\ \ uv \neq 0 \right\}$$

作者证明了 $\lambda_{1,\,p}$ 是主特征值（即与一个不变号的特征函数相关联的特征值），并且

$$\lambda_{s,p}^{\frac{1}{p}} \to \Lambda_{1,\infty} = \left[\frac{1}{R}\right]^{\theta r+(1-\theta)s} \quad \text{as } \ p \to \infty. \tag{4}$$

最近，Mih˘ailescu、Rossi 和 Stancu-Dumitru [11] 研究了方程组

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = \lambda\alpha(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)-2}u(x_1)|v(x_2)|^{\beta(p)}\delta_{x_1} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_p v(x) = \lambda\beta(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)-2}v(x_2)\delta_{x_2} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

其中 x_1、$x_2 \in \Omega$ 是任意点，$x_1 \neq x_2$。若 x_1 和 x_2 分别是 u 和 v的极大值点，利用与 [1, 5, 7], 中类似的论证，可以证明 (P_p^2) 是当 $r \to \infty$时以下问题的极限

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda\alpha(p)\|u\|_r^{\alpha(p)-r}|u|^r\|v\|_r^{\beta(p)} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_p v = \lambda\beta(p)\|u\|_r^{\alpha(p)}\|v\|_r^{\beta(p)-r}|v|^r & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

可通过经典极小化方法求解。

与 [3], 类似，他们证明了方程组 (5) 存在一个主特征值，并研究了当 u_p 和 v_p 趋于 p 无穷大时，主特征值及相应正特征函数的渐近行为。 Mih˘ailescu、Rossi 和 Stancu-Dumitru 证明它们收敛到 u_∞ 和 v_∞，二者都是方程的黏性解 $-\Delta_\infty w = 0$，定义于实数集上。

本文的主要目标是研究方程组（P_p^1）。注意，该方程组与方程组（3）和（5）均有关。在本文的最后一节中，我们明确说明，用于求解方程组（P_p^1）的方法同样适用于方程组（P_p^2），从而将方程组（5）从 [11] 推广到分数阶 p-拉普拉斯算子。

由于存在狄拉克质量 δ_x，将本文工作与 [11]进行比较更为自然。我们注意到，分数阶 p-拉普拉斯算子的积分形式比 p-拉普拉斯算子的积分形式更难处理。此外，在 [11], 中，收敛性成立

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to \||\nabla u|\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{for all} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

在 p-拉普拉斯情形下，而当我们处理 Gagliardo 半范数时则不会出现这种情况。此外，对距离函数 dist$(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ 进行直接计算可得 $|\nabla \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)| = 1$，但这在我们的情形下并不成立，因而使得估计方程组（P_p^2）的解更加困难。 此外，（P_p^1）中的积分项改变了黏性解 u_∞ 和 v_∞ 所满足的方程，见定理 4。

接下来，我们将证明，当 $p \to \infty$ 趋于同一数值 $\Lambda_{1,\infty}$ （由式 (4) 给出）时，(P_p^1) 的特征值收敛；这一结果见 [3]。

我们介绍处理问题 (P_p^1) 时所用的记号。本文最后一节将讨论问题 (P_p^2) 并作必要的调整。

对于每个 $0 < r < 1$ 和 $p \in [1, \infty]$，我们考虑 Sobolev 空间 $W^{r,\,p}(\Omega)$

$$W^{r,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,:\, \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+rp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\},$$

以及空间

$$W_0^{r,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) \,:\, u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \text{ and } [u]_{r,p} < \infty \right\},$$

其中

$$[u]_{r,p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+rp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们回顾一下，对于 $0 < s \le t < 1$ 和 $1 < p < \infty$，存在一个常数 q $C > 0$，它仅依赖于 s、N 和 p，使得

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \le C \|f\|_{W^{t,p}(\Omega)}, \quad \text{for all} \quad f \in W^{t,p}(\Omega).$$

特别地，$W^{t,\,_0\,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,\,_0\,p}(\Omega)$，详情请参见 [4]。因此，我们只需考虑空间 $W^{s,\,_0\,p}(\Omega)$。

对于固定的 $0 < s \le t < 1$、$x_0 \in \Omega$ 和 $p \in [1, \infty]$，记 $X_{s,\,t,\,p}(\Omega) = W^{s,\,_0\,p}(\Omega) \times W^{t,\,_0\,p}(\Omega)$，并且

$$X_{s,t,p}^*(\Omega) = \left\{ (u, v) \in X_{s,t,p}(\Omega) \,:\, \left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x \right) v(x_0) \neq 0 \right\}.$$

如果 $\overline{C}_0(\Omega)$ 表示空间 $\{u \in C(\Omega) : \ u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$，众所周知，对于任意 $p \in (\frac{N}{s}, \infty)$，浸入 $W^{s,\,_0\,p}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C_0(\Omega)$ 是紧的。该浸入的紧性是以下 Morrey 型不等式的结果

（见 [4]）

$$\sup_{y\neq x}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s-\frac{N}{p}}}\leq C[u]_{s,p},\quad \forall u\in W_0^{s,p}(\Omega), \tag{7}$$

该结论在 $p>\frac{N}{s}$ 时成立。若 p 足够大，则式 (7) 中的正数常量 C 可以对 p 一致选取（见 [8], 注 2.2）。

因此，记

$$X_0(\Omega)=C_0(\overline{\Omega})\times C_0(\overline{\Omega}),$$

我们有紧嵌入

$$X_{s,t,p}(\Omega)\hookrightarrow X_0(\Omega)$$

对任意 $p\in(\frac{N}{s}、\ \infty)$, 均成立。

对于 $p\in(\frac{N}{s}、\ \infty)$ 以及 $u、\ v\in X^*_{s,\ t,\ p}$，我们定义

$$Q_{s,t,p}(u,v)=\frac{\frac{1}{p}[u]^p_{s,p}+\frac{1}{p}[v]^p_{t,p}}{\left(\int_\Omega|u|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^{\beta(p)}}$$

and

$$\Lambda_1(p)=\inf_{(u,v)\in X^*_{s,t,p}(\Omega)}Q_{,s,t,p}(u,v).$$

直接计算可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(\frac{1}{p}[u+t\varphi]^p_{r,p}\right)=\left\langle(-\Delta_p)^ru,\varphi\right\rangle,\quad\forall\varphi\in W_0^{r,p}(\Omega). \tag{8}$$

若 $0<m<\infty$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}|(u+t\varphi)(x)|^m=m|u(x)|^{m-2}u(x)\varphi(x),\quad\forall\,\varphi\in L^m(\Omega). \tag{9}$$

此外，对于所有 $1<\alpha<\infty$ 和 $\varphi\in L^\alpha(\Omega)$，都有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left(\int_\Omega|(u+t\varphi)(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^\beta=\alpha\left(\int_\Omega|u(x)|^{\alpha-2}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^\beta. \tag{10}$$

定义 1. 若一对 $(u,v)\in X_{s,t,p}(\Omega)$ 是 (P_p^1) 的弱解，则

$$\begin{aligned}\langle(-\Delta_p)^su,\varphi\rangle+\left\langle(-\Delta_p)^tv,\psi\right\rangle=&\lambda\Big[\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u(x)|v(x_0)|^{\beta(p)}\varphi(x)\\&+\beta(p)\left(\int_\Omega|u(x)|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^{\beta(p)-2}v(x_0)\psi(x_0)\Big]\end{aligned} \tag{11}$$

对于所有 $(\varphi,\psi)\in X_{s,t,p}(\Omega)$。

式 (11) 左端的泛函是 Fr´echet 可微泛函 $(u,v)\ \mapsto\frac{1}{p}[u]^p_{s,p}+\frac{1}{p}[v]^p_{t\ ,p}$ 的 Gˆateaux 导数。然而，式 (11) 右端的泛函仅与泛函 $(u,v)\ \mapsto\lambda\left(\int_\Omega|u(x)|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_0)|^{\beta(p)}$ 的右侧 Gˆateaux 导数有关，这促成了 Q_p 和 $\Lambda_1(p)$ 的定义。值得注意的是，最小化该积分项便足以最小化整个方程组。

通过应用极小化方法，我们的第一个结果表明，对于每个 $p\in(\frac{N}{s}、\ \infty)$，问题 (P_p^1) 都有一个主特征值——因此也有一个弱解。

其证明只需对 [11] 中的定理 1 稍作改动。为方便读者，我们在第3节概述该证明。

定理 1. 对于每个 $p \in \left(\frac{N}{s}, \infty\right)$，我们有

(*i*) $\Lambda_1(p) > 0$;
(*ii*) *there exists* $(u_p, v_p) \in X^*_{s,t,p}(\Omega)$ *such that*

$$\Lambda_1(p) = Q_{s,t,p}(u_p, v_p),$$

with $u_p, v_p > 0$ *and* $\left(\int_\Omega |u_p|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right) |v_p(x_0)|^{\beta(p)} = 1.$

下一步是寻找一个算子，以此推动对问题 (P^1_p) 作为 $p \to \infty$ 的研究。因此，对于每个 $0 < s \le t < 1$ 和 $p \in \left(\frac{N}{s}, \right.$，我们记

$$S_p = \left\{ (u,v) \in X_{s,t,p}(\Omega) \,:\, \left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right) |v(x_0)|^{\beta(p)} = 1 \right\}$$
$$S_\infty = \left\{ (u,v) \in X_{s,t,\infty}(\Omega) \,:\, \|u\|^\theta_\infty |v(x_0)|^{1-\theta} = 1 \right\},$$

其中，θ 已在 (h_2) 中定义。

此外，对于每个 $0 < s \le t < 1$ 和 $p \in \left(\frac{N}{s}, \infty\right]$，我们通过下式定义函数 $\chi_{S_p} : X_0(\Omega) \to [0, \infty]$ 以及 $F_p\colon\ X_0(\Omega) \to [0, \infty]$

$$\chi_{S_p}(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad (u,v) \in S_p; \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{12}$$

and

$$F_p(u,v) = \begin{cases} G_p(u,v) + \chi_{S_p}(u,v), & \text{if} \quad (u,v) \in X^*_{s,t,p}(\Omega); \\ \infty, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{13}$$

其中 G_p 定义为

$$G_p(u,v) = \begin{cases} Q_{s,t,p}(u,v)^{\frac{1}{p}}, & \text{if} \quad p \in (\frac{N}{s}, \infty), \\ \dfrac{\max\left\{|u|_s, |v|_t\right\}}{\|u\|^\theta_\infty |v(x_0)|^{1-\theta}}, & \text{if} \quad p = \infty, \end{cases} \tag{14}$$

其中，对于 $0 < \sigma < 1$,

$$|u|_\sigma = \sup_{y \neq x} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\sigma}.$$

我们采用的方法称为 Γ-收敛，但我们所使用的全部内容都是定理 2 中列出的性质。再次强调，下一个结果可由对 [11, 定理 2] 证明的直接改编得到。

定理 2。函数 F_∞ 满足以下性质。

(*i*) 如果 $\{(u_p, v_p)\}$ 是一个序列，使得 $(u_p, v_p) \to (u, v)$ 在 $X_0(\Omega)$ 中，那么

$$F_\infty(u,v) \le \lim_{p\to\infty} \inf F_p(u_p, v_p).$$

(*ii*) 对于每个 $(u, v) \in X_0(\Omega)$，都存在一个序列 $\{(U_p, V_p)\} \subset X_0(\Omega)$，使得 $(U_p, V_p) \to (u, v)$ 在 $X_0(\Omega)$ 中，并且

$$F_\infty(u,v) \ge \lim_{p\to\infty} \sup F_p(U_p, V_p).$$

因此，作为定理 2-(i) 的推论，我们有

$$F_\infty(u,v) \le \liminf_{p\to\infty} F_p(u_p,v_p).$$

将此不等式应用于定理 1 给出的解 (u_p,v_p)，可得估计式

$$F_\infty(u,v) \le \liminf_{p\to\infty} \Lambda_1(p)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \max\{|u_\infty|_s, |v_\infty|_t\}, \tag{15}$$

其中，最后一个等式将在定理 3 的证明中得到说明。因此，根据定理 2-(ii) 和 (15)，我们可以将问题 (P_p^1) 分析为 $p\to\infty$。

因此，结合定理 1 和定理 2，我们研究问题 (P_p^1) 的特征值和特征函数在 $p\to\infty$ 时的行为。

定理 3. 设 $\{p_n\}$ 是一个收敛于 ∞ 的序列，且 (u_{p_n},v_{p_n}) 是定理 1 给出的 (P_p^1) 的解。如有必要，取其子序列，则 $\{(u_{p_n},v_{p_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 $(u_\infty,v_\infty) \in C^{0,\ 0}{}^{s}(\Omega) \times C^{0,\ 0}{}^{t}(\Omega)$。此外

(i) $u_\infty \ge 0,\ v_\infty \ge 0$ *and* $\|u_\infty\|_\infty^\theta |v_\infty(x_0)|^{1-\theta} = 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)} = \Lambda_{1,\infty} = \dfrac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}$;

(iii) $\max\{|u_\infty|_s, |v_\infty|_t\} = \dfrac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}$.

正如我们在序列中将看到的，函数 u_∞ 和 v_∞ 是正则边值问题在粘性意义下的解。为了区分不同情形（同时避免出现两个负号），我们更改记号：对于每个 $1<p<\infty$，将 σ-分数阶 p-拉普拉斯算子记为 $(-\Delta_p)^\sigma = -\mathcal{L}_{\sigma,\ p}$，其中，若 $1<p<\infty$ 且 $0<\sigma<1$,

$$(\mathcal{L}_{\sigma,p}u)(x) := 2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}y.$$

如 [9], 中所述，这个表达式形式上如下所示

$$\begin{aligned}
\langle(-\Delta_p)^\sigma u,\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(\mathcal{L}_{\sigma,p}u)(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi\in W_0^{\sigma,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

若 $p=\infty$，我们定义

$$\mathcal{L}_{\sigma,\infty} = \mathcal{L}^+_{\sigma,\infty} + \mathcal{L}^-_{\sigma,\infty},$$

其中

$$(\mathcal{L}^+_{\sigma,\infty}u)(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N\setminus\{x\}} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\sigma} \quad \text{and} \quad (\mathcal{L}^-_{\sigma,\infty}u)(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^N\setminus\{x\}} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\sigma},$$

参见 Chambolle、Lindgren 和 Monneau [2], （该概念的提出文献），另见 [9]。注意，由于 $\mathcal{L}_{\sigma,\ \infty}$ 不够光滑，其解必须在粘性意义下解释。

我们通过考察问题来回顾粘性意义下解的定义

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\sigma,p}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

对于所有 $p \in (1, \infty]$。

定义 2. 设 $u \in C(\mathbb{R}^N)$ 满足 $u = 0$ 属于 $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$。如果函数 u 是方程 (16) 的黏性上解，则

$$(\mathcal{L}_{\sigma,p}\varphi)(x_0) \leq 0$$

对于每一对 $(x_0, \varphi) \in \Omega \times C_0^1(\mathbb{R}^N)$，使得

$$\varphi(x_0) = u(x_0) \qquad and \qquad \varphi(x) \leq u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

反过来，u 是方程 (16) 的黏性下解，当且仅当

$$(\mathcal{L}_{\sigma,p}\varphi)(x_0) \geq 0$$

对于所有满足以下条件的对 $(x_0, \varphi) \in \Omega \times C_0^1(\mathbb{R}^N)$

$$\varphi(x_0) = u(x_0) \quad e \quad \varphi(x) \geq u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

函数 u 是问题 (16) 的黏性解，当且仅当 u 既是问题 (16) 的黏性上解又是黏性下解。

最后，在第 5 节中，我们证明了由定理 3 给出的解 u_∞ 和 v_∞ 是黏性解。

定理 4. 设 $1 < s \leq t < 1$。则，由定理 3 给出的函数 u_∞ 和 v_∞是方程组的黏性解

$$\begin{cases} \max\left\{\mathcal{L}_{s,\infty}u, \mathcal{L}^-_{s,\infty}u - \Lambda_{1,\infty}|u(x)|^\theta |v_\infty(x_0)|^{1-\theta}\right\} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{L}_{t,\infty}v = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_0\}, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ v(x_0) = v_\infty(x_0). \end{cases} \tag{17}$$

3. Some remarks on the proofs of Theorems 1 and 2

由于定理 1 和定理 2 的证明只是对 [11], 中给出的证明的简单改编，为方便读者起见，我们仅作概述。详情请参见 [11,定理 1 和定理 2]。

定理 1 的证明概要。估计定义中的分母$Q_{s,\ t,\ p}$，杨氏不等式和 Sobolev 不等式意味着 $\Lambda_1 > 0$。定义

$$U_n(x) = \frac{u_n(x)}{\left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} |v_n(x_0)|^{\frac{\beta(p)}{p}}}$$

and

$$V_n(x) = \frac{v_n(x)}{\left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} |v_n(x_0)|^{\frac{\beta(p)}{p}}},$$

我们有 $(U_n, V_n) \in X_{s,\ p}(\Omega)$ 满足 $\left(\int_\Omega |U_n(x)|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|V_n(x_0)|^{\beta(p)} = 1$。此外,

$$\lim_{n\to\infty} Q_{s,t,p}(U_n, V_n) = \lim_{n\to\infty} Q_{s,t,p}(u_n, v_n) = \Lambda_1(s,p),$$

从而保证存在 $u_p, v_p \in W^{s,\ p}(\Omega)$, 使得

$$\left(\int_\Omega |u_p|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v_p(x_0)|^{\beta(p)} = 1.$$

and

$$Q_{s,t,p}(u_p, u_p) = \Lambda_1(p).$$

对于任意 $(\phi, \psi) \in X_{s,\ t,\ p}(\Omega)$, 考虑

$$g(t) = Q_{s,t,p}(u_p + t\phi, v_p + t\psi),$$

由此可知存在 $t_0 > 0$ 使得 $g(t) > g(0) = \Lambda_1(p)$。由于 $g \in C^1((-t_0, t_0)\ \mathbb{R})\mathrm{m}$, 我们有 $g'(0) = 0$, 从而可知 (u_p, v_p) 是方程组 (P_p^1) 的弱解。类似于引理 [9, 的论证可证明, $u_p > 0$和 $v_p > 0$ 在 Ω 中, 这表明 $\Lambda_1(s,p)$ 是方程组 (P_p^1) 的主特征值。 □

定理 2 的证明概要。为证明 (i), 设 $(u_p, v_p) \to (u, v) \in X_0(\Omega)$。取一个子序列后, 不妨设 $\lim_{p\to\infty} F_p(u_p, v_p) = \liminf_{p\to\infty} F_p(u_p, v_p)$。不难排除 $(u, v) \notin X^*_{s,t,\infty}(\Omega) \cap S_\infty$ 的情形。因此, 我们考虑 $(u, v) \in X^*_{s,t,\infty}(\Omega) \cap S_\infty$ 的情形, 这意味着 $\|u\|_\infty^\theta |v(x_0)|^{1-\theta} = 1$。不妨设 $F_p(u_p, v_p) \le C < \infty$, 否则 (i) 成立。因此, 当 p足够大时, 我们有 $(u_p, v_p) \in S_p$, 并且如果 $k > \frac{N}{s}$, 那么

$$\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_p(x) - u_p(y)|^k}{|x-y|^{(\frac{N}{p}+s)k}} + \frac{|v_p(x) - v_p(y)|^k}{|x-y|^{(\frac{N}{p}+t)k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}}$$
$$\le 2^{\frac{1}{k}}|\Omega|^{2(\frac{1}{k}-\frac{1}{p})}p^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{p}[u_p]_{s,p}^p + \frac{1}{p}[v_p]_{t,p}^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Thus,

$$F_p(u_p, v_p) = Q_{s,t,p}(u_p, v_p) = \left[\frac{1}{p}[u_p]_{s,p}^p + \frac{1}{p}[v_p]_{t,p}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\ge 2^{-\frac{1}{k}}|\Omega|^{2(\frac{1}{p}-\frac{1}{k})}p^{-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_p(x) - u_p(y)|^k}{|x-y|^{(\frac{N}{p}+s)k}} + \frac{|v_p(x) - v_p(y)|^k}{|x-y|^{(\frac{N}{p}+t)k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}}.$$

由 $p \to \infty$, 根据一致收敛和 Fatou 引理可得

$$\liminf_{p\to\infty} F_p(u_p, v_p) \ge 2^{-\frac{1}{k}}|\Omega|^{-\frac{2}{k}}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^k}{|x-y|^{sk}} + \frac{|v(x) - v(y)|^k}{|x-y|^{tk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}}.$$

令 $k \to \infty$, 得到

$$\liminf_{p\to\infty} F_p(u_p, v_p) \ge \max\{|u|_s, |v|_t\} = F_\infty(u, v), \tag{18}$$

从而完成了 (i) 的证明。

现在我们处理第二个断言。任取 $(u, v) \in X_0(\Omega)$, 并首先假设 $(u, v) \notin X^*_{s,\ t,\ \infty}(\Omega) \cap S_\infty$。那么 $F_{s,\ \infty}(u, v) = \infty$。接下来考虑一个值序列 $p \to \infty$, 并对序列中的任意 $p \in (\frac{N}{s}, \infty)$, 定义 $u_p := u$

以及 $v_p := v$。显然，由于 $p \to \infty$ 属于 $X_0(\Omega)$，我们有 $(u_p, v_p) \to (u, v)$。不难排除 $\left(\int_\Omega |u_p|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right) |v_p(x_0)|^{\beta(p)} \neq 1$ 的情形。然而，如果 $(u, v) \in X^*_{s,\ t,\ \infty}(\Omega) \cap S_\infty$，则考虑一个值序列 $p \to \infty$，并对序列中的任意$p \in \left(\frac{N}{s}, \infty\right)$，定义

$$U_p(x) = \frac{u(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} |v(x_0)|^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{and} \qquad V_p(x) = \frac{v(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha(p)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} |v(x_0)|^{\frac{\beta(p)}{p}}}.$$

那么 $(U_p, V_p) \in S_p$ 和

$$\limsup_{p\to\infty} F_p(U_p, V_p) = \max\left\{|u|_s, |v|_t\right\} = F_\infty(u, v),$$

从而完成了 (ii) 的证明。 □

4. Proof of Theorem 3

记

$$R = \max_{x\in\overline{\Omega}} \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \|\operatorname{dist}(., \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

对于固定的 $x_1 \in \Omega$，我们考虑函数 $\phi_R\colon B_R(x_1) \to \overline{[0, R]}$ 和 $\psi_R\colon B_R(x_0) \to \overline{[0, R]}$，定义为

$$\phi_R(x) = R^{(\theta-1)t-s\theta} \left(R - |x - x_1|\right)^s_+ \quad \text{and} \quad \psi_R(x) = R^{(\theta-1)t-s\theta} \left(R - |x - x_0|\right)^t_+.$$

显然，我们有 $\phi_R \in C^{0,\ s}_{0}(\overline{B_R(x_1)})$ 和 $\psi_R \in C^{0,\ s}_{0}(\overline{B_R(x_0)})$。此外，

$$\|\phi_R\|_\infty = R^{(\theta-1)(t-s)}, \quad |\psi_R(x_0)| = R^{\theta(t-s)} \quad \text{and} \quad |\phi_R|_s = |\psi_R|_s = R^{(\theta-1)t-s\theta}.$$

我们可以通过令 $\phi_R = 0$ 属于 $\overline{\mathbb{R}^N \setminus B_R(x_1)}$、$\psi_R = 0$ 属于 $\overline{\mathbb{R}^N \setminus B_R(x_0)}$，将 ϕ_R 和 ψ_R 延拓到 Ω，使得 ϕ_R、$\psi_R \in C^{0,\ s}_{0}(\overline{\Omega})$，同时保持其 s-Hölder 范数。此外，对于所有 $s \in (0, 1)$ 和 $m \geq 1$，我们仍有 ϕ_R、$\psi_R \in W^{1,\ m}_{0}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,\ m}_{0}(\Omega)$。详情见 [7, 9]。

引理 5. 对任意固定的 $0 < s \leq t < 1$，有

$$\Lambda_{1,\infty} = \inf_{(u,v)\in X^*_{s,t,\infty}(\Omega)} \frac{\max\left\{|u|_s, |v|_t\right\}}{\|u\|^\theta_\infty |v(x_0)|^{1-\theta}_\infty} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}.$$

证明。注意，我们有

$$\|\phi_R\|^\theta_\infty |\psi_R(x_0)|^{1-\theta} = R^{\theta(\theta-1)(t-s)+\theta(1-\theta)(t-s)} = 1$$

因此

$$\Lambda_{1,\infty} = \inf_{(u,v)\in X^*_{s,t,\infty}(\Omega)} \frac{\max\left\{|u|_s, |v|_t\right\}}{\|u\|^\theta_\infty |v(x_0)|^{1-\theta}_\infty} \leq \frac{\max\left\{|\phi_R|_s, |\psi_R|_t\right\}}{\|\phi_R\|^\theta_\infty |\psi_R(x_0)|^{1-\theta}_\infty} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}.$$

另请注意，给定 $(u, v) \in \overline{X^*_{s,\ t,\ p}(\Omega)}$，则 $u = 0 = v$ 属于 $\overline{\Omega}$。由于 u 连续，存在 $x_1 \in \Omega$，使得

$$\|u\|_\infty = |u(x_1)|.$$

由于 Ω 的紧性，可保证存在 $y_{x_0}, y_{x_1} \in \partial\Omega$，使得

$$|x_0 - y_{x_0}| = \operatorname{dist}(x_0, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \quad \text{and} \quad |x_1 - y_{x_1}| = \operatorname{dist}(x_1, \mathbb{R}^N \setminus \Omega).$$

因此，由于 $u(y_{x_1})=v(y_{x_0})=0$，可得

$$\|u\|_\infty^\theta=|u(x_1)-u(y_{x_1})|^\theta\le|u|_s^\theta|x_1-y_{x_1}|^{s\theta}\le|u|_s^\theta R^{s\theta}.$$

另一方面，

$$|v(x_0)|^{1-\theta}=|v(x_0)-v(y_{x_0})|^{1-\theta}\le|v|_t^{1-\theta}|x_0-y_{x_0}|^{t(1-\theta)}\le|v|_t^{1-\theta}R^{t(1-\theta)}.$$

因此，对于任意 $(u,v)\in X_{s,t,p}^*(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^{s\theta+t(1-\theta)}}=\frac{1}{R^{s\theta}R^{(1-\theta)t}}&\le\frac{|u|_s^\theta|v|_t^{1-\theta}}{\|u\|_\infty^\theta|v(x_0)|^{1-\theta}}\le\frac{\left(\max\left\{|u|_s,|v|_t\right\}\right)^\theta\left(\max\left\{|u|_s,|v|_t\right\}\right)^{1-\theta}}{\|u\|_\infty^\theta|v(x_0)|^{1-\theta}}\\&=\frac{\max\left\{|u|_s,|v|_t\right\}}{\|u\|_\infty^\theta|v(x_0)|^{1-\theta}}.\end{aligned}$$

因此，

$$\Lambda_{1,\infty}=\inf_{(u,v)\in X_{s,t,\infty}^*(\Omega)}\frac{\max\left\{|u|_s,|v|_t\right\}}{\|u\|_\infty^\theta|v(x_0)|_\infty^{1-\theta}}\ge\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}},$$

证明至此完成。 □

下一个结果对于我们分析由分数阶 p-拉普拉斯算子驱动的问题中解的渐近行为至关重要。

引理 6. 设 $u\in C^0{}_{,0}{}^\sigma(\Omega)$ 在 Ω 外延拓为零。若对某个 $q>1$ 有 $u\in W^{\sigma,q}(\Omega)$，则对所有 $p\ge q$ and，有 $u\in W^\sigma{}_{,0}{}^p(\Omega)$。

$$\lim_{p\to\infty}[u]_{\sigma,p}=|u|_\sigma.$$

引理 6 的证明见 [6, 引理 7]。

定理 3 的证明。显然，我们有

$$\Lambda_1(p_n)\le\frac{\frac{1}{p_n}[\phi_R]_{s,p_n}^{p_n}+\frac{1}{p_n}[\psi_R]_{t,p_n}^{p_n}}{\displaystyle\int_\Omega\left(|\phi_R|^{\alpha(p_n)}\mathrm{d}x\right)|\psi_R(x_0)|^{\beta(p_n)}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}&\le\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p_n}\frac{[\phi_R]_{s,p_n}^{p_n}+[\psi_R]_{t,p_n}^{p_n}}{\displaystyle\int_\Omega\left(|\phi_R|^{\alpha(p_n)}\mathrm{d}x\right)|\psi_R(x_0)|^{\beta(p_n)}}\right)^{\frac{1}{p_n}}\\&\le\limsup_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}}\frac{\max\left\{[\phi_R]_{s,p_n},[\psi_R]_{t,p_n}\right\}}{\displaystyle\int_\Omega\left(|\phi_R|^{\alpha(p_n)}\mathrm{d}x\right)|\psi_R(x_0)|^{\beta(p_n)}}\right)\\&=\frac{\max\left\{|\phi_R|_s,|\psi_R|_t\right\}}{\|\phi_R\|_\infty^\theta|\psi_R(x_0)|^{1-\theta}}\le\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}},\end{aligned}$$

证明序列 $\left\{\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界，即存在$M_0>0$ 使得

$$\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\le M_0\quad\text{for all }\ n\in\mathbb{N}.\tag{19}$$

定理 1 保证我们可以取 (u_{p_n}, v_{p_n})，使得

$$u_{p_n} > 0,\ v_{p_n} > 0 \quad \text{and} \quad \left(\int_\Omega |u_{p_n}|^{\alpha(p_n)}\mathrm{d}x\right)|v_{p_n}(x_0)|^{\beta(p_n)} = 1.$$

因此

$$\Lambda_1(p_n) = \frac{1}{p_n}[u_{p_n}]^{p_n}_{s,p_n} + \frac{1}{p_n}[v_{p_n}]^{p_n}_{t,p_n} \geq \frac{1}{p_n}\max\left\{[u_{p_n}]^{p_n}_{s,p_n}, [v_{p_n}]^{p_n}_{s,p_n}\right\},$$

这表明

$$[u_{p_n}]_{s,p_n} \leq p_n^{\frac{1}{p_n}}\ \sqrt[p_n]{\Lambda_1(s,p_n)}. \tag{20}$$

对于固定的 $m_0 > \frac{N}{s}$，记 Ω 的直径为 $\mathrm{diam}(\Omega)$，由 (19) 和 (20) 可得

$$\begin{aligned}
|u_{p_n}|_{s-\frac{N}{m_0}} &= \sup_{x\neq y}\frac{|u_{p_n}(x)-u_{p_n}(y)|}{|x-y|^{s-\frac{N}{m_0}}} = \sup_{x\neq y}\frac{|u_{p_n}(x)-u_{p_n}(y)|}{|x-y|^{s-\frac{N}{p_n}}}\,|x-y|^{\frac{N}{m_0}-\frac{N}{p_n}} \\
&\leq (\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{N}{m_0}-\frac{N}{p_n}}\sup_{x\neq y}\frac{|u_{p_n}(x)-u_{p_n}(y)|}{|x-y|^{s-\frac{N}{p_n}}} \\
&\leq C\,(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{N}{m_0}-\frac{N}{p_n}}\ [u_{p_n}]_{s,p_n} \\
&\leq C\,(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{N}{m_0}-\frac{N}{p_n}}\ p_n^{\frac{1}{p_n}}\ \sqrt[p_n]{\Lambda_1(s,p_n)}
\end{aligned}$$

常数 C 不依赖于 p_n。我们得出，序列 $\{u_{p_n}\}$ 在 $C^{0,s-\frac{N}{m_0}}_0(\Omega)$ 中一致有界；同样的推理也适用于 $\{v_{p_n}\}$，这表明 $\{v_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $C^{0,t-\frac{N}{m_0}}_0(\Omega)$ 中一致有界。

如有必要，取子列后，存在 $u_\infty \in C^{0,s-\frac{N}{m_0}}_0(\Omega)$ 和 $v_\infty \in C^{0,t-\frac{N}{m_0}}_0(\Omega)$，使得

$$u_{p_n} \to u_\infty \quad \text{and} \quad v_{p_n} \to v_\infty \ \text{ uniformly in } \ \Omega.$$

我们还观察到

$$\|u_\infty\|^\theta_\infty |v_\infty(x_0)|^{1-\theta} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\int_\Omega |u_{p_n}|^{\alpha(p_n)}\mathrm{d}x\right)|v_{p_n}(x_0)|^{\beta(p_n)}\right)^{\frac{1}{p_n}} = 1.$$

固定 $k > \frac{N}{s}$。应用 Fatou 引理、H¨older 不等式和 (20)，可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\infty(x)-u_\infty(y)|^k}{|x-y|^{sk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_{p_n}(x)-u_{p_n}(y)|^k}{|x-y|^{\left(\frac{N}{p_n}+s\right)k}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}|\Omega|^{2\left(\frac{p_n-k}{p_n}\right)}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_{p_n}(x)-u_{p_n}(y)|^{p_n}}{|x-y|^{N+sp_n}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{k}{p_n}} \\
&\leq |\Omega|^2\liminf_{n\to\infty}[u_{p_n}]^k_{s,p_n} \qquad (21) \\
&\leq |\Omega|^2\liminf_{n\to\infty}\left(p_n^{\frac{1}{p_n}}\ \sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right)^k \\
&\leq |\Omega|^2\left(\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}\right)^k.
\end{aligned}$$

因此,

$$|u_\infty|_s = \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\infty(x)-u_\infty(y)|^k}{|x-y|^{sk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}} \le \lim_{n\to\infty}|\Omega|^{\frac{2}{k}}\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}.$$

Analagously,

$$|v_\infty|_t = \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_\infty(x)-v_\infty(y)|^k}{|x-y|^{tk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}} \le \lim_{n\to\infty}|\Omega|^{\frac{2}{k}}\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}$$

因此

$$\max\left\{|u_\infty|_s,|v_\infty|_t\right\} \le \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}.$$

由引理 5 可得

$$\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \inf_{(u,v)\in X^*_{s,t,\infty}(\Omega)}\frac{\max\left\{|u|_s,|v|_t\right\}}{\|u\|^\theta_\infty|v(x_0)|^{1-\theta}} \le \max\left\{|u_\infty|_s,|v_\infty|_t\right\} \le \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}},$$

从而得到

$$\max\left\{|u_\infty|_s,|v_\infty|_t\right\} = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}.$$

另一方面，不等式 (21) 给出

$$\max\left\{\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u_\infty(x)-u_\infty(y)|^k}{|x-y|^{sk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}},\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v_\infty(x)-v_\infty(y)|^k}{|x-y|^{tk}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

$$\le |\Omega|^{\frac{2}{k}}\liminf_{n\to\infty}\left(p_n^{\frac{1}{p_n}}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right).$$

因此， $k\to\infty$ 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \max\left\{|u_\infty|_s,|v_\infty|_s\right\} &\le \liminf_{n\to\infty}\left(p_n^{\frac{1}{p_n}}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\left(p_n^{\frac{1}{p_n}}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right) \le \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}},\end{aligned}$$

下文中

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)} = \lim_{n\to\infty}\left(p_n^{\frac{1}{p_n}}\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\right) = \frac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}} = \Lambda_{1,\infty}. \qquad \square$$

5. Proof of Theorem 4

下一个结果仅说明，按弱意义理解的解是黏性解。其证明可以通过调整 Lindgren 和 Lindqvist 在 [9, 命题 1] 中给出的论证来完成。

命题 7. 定理 1 给出的函数 u_p e v_p 是以下问题的黏性解

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{s,p}u = \Lambda_1(p)\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-1}v(x_0) & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{t,p}v = 0 & \text{in } \Omega\setminus\{x_0\},\\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega,\\ v(x_0) = v_p(x_0),\end{cases}$$

分别。

定理 4 的证明。我们首先证明 v_∞ 是该问题的黏性解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{t,\infty} v = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_0\}, \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ v(x_0) = v_\infty(x_0). \end{cases} \tag{22}$$

根据定理 3，我们有 $v_\infty = 0$ 属于 $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$，且 $v_\infty(x_0) = v_\infty(x_0)$。因此，我们只需证明 v_∞ 是一个黏性解。固定满足以下条件的 $(z_0, \varphi) \in (\Omega \setminus \{x_0\}) \times C_0^1(\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\})$

$$\varphi(z_0) = v_\infty(z_0) \qquad \text{and} \qquad \varphi(x) \le v_\infty(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0, z_0\}.$$

定理 3 还保证存在一个序列 $\{(u_{p_n}, v_{p_n})\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_{0,0}^{0,s}(\Omega) \times C_{0,0}^{0,t}(\Omega)$，使得 $u_{p_n} \to u_\infty^-$ 和 $v_{p_n}^- \to v_\infty$ 在 Ω 上一致收敛。因此，存在一个序列 $\{x_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_{p_n} \to z_0$ 且 $v_{p_n}(x_{p_n}) = \varphi(x_{p_n})$。由于 $x_0 \neq z_0$，我们可以假设存在 $n_0 \ge 0$ 和一个球 $B_\rho(z_0)$，使得

$$x_{p_n} \notin B_\rho(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_0\}, \quad \forall n \ge n_0.$$

由于 v_{p_n} 弱满足

$$(-\Delta_{p_n})^t v_{p_n}(x) = \Lambda_1(p_n)\alpha(p_n) \left(\int_\Omega |u_{p_n}|^{\alpha(p_n)} \mathrm{d}x \right) |v_{p_n}(x_0)|^{\beta(p_n)} v_{p_n}(x_0) \delta_{x_0}$$

在 Ω 中，因此在 $\Omega \setminus \{x_0\}$ 中也成立。由命题 7 可知，v_{p_n} 是问题的一个黏性解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{t,p_n} v = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_0\}, \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ v(x_0) = v_{p_n}(x_0). \end{cases} \tag{23}$$

通过标准论证，我们得到一个序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_\rho(x_0)$，使得 $z_n \to z_0$ 并且

$$\sigma_n := \min_{B_\rho(x_0)} (v_{p_n} - \varphi) = v_{p_n}(z_n) - \varphi(z_n) < v_{p_n}(x) - \varphi(x), \quad \forall x \neq x_{p_n}.$$

现在，定义 $\Psi_n := \varphi + \sigma_n$。我们有

$$\Psi_n(z_n) = \varphi(z_n) + \sigma_n = v_{p_n}(z_n) \qquad \text{and} \qquad \Psi_n(x) = \varphi(x) + \sigma_n < v_{p_n}(x), \ \forall x \in B_\rho(x_0).$$

Since v_{p_n} satisfies (23) in $\Omega \setminus \{x_0\}$,

$$(\mathcal{L}_{t,\infty} \Psi_n)(z_n) \le 0, \qquad \forall n \ge n_0.$$

因此，定义

$$(A_{p_n,t}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} := 2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(z_n) - \varphi(y)|^{p_n-2} (\varphi(z_n) - \varphi(y))^+}{|z_n - y|^{N+tp_n}} \mathrm{d}y$$

and

$$(B_{p_n,t}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} := 2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(z_n) - \varphi(y)|^{p_n-2} (\varphi(z_n) - \varphi(y))^-}{|z_n - y|^{N+tp_n}} \mathrm{d}y,$$

我们有

$$\begin{aligned} (A_{p_n,t}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} - (B_{p_n,t}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(z_n) - \varphi(y)|^{p_n-2} (\varphi(z_n) - \varphi(y))}{|z_n - y|^{N+sp_n}} \mathrm{d}y \\ &\le 0, \quad \forall n \ge n_0. \end{aligned} \tag{24}$$

应用 [7, 引理 3.9]（另见 [8, 引理 6.1]），我们得到

$$\lim_{n\to\infty} A_{p_n,t}(\varphi(z_n)) = \left(\mathcal{L}_{t,\infty}^+ \varphi\right)(z_0) \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} B_{p_n,t}(\varphi(z_n)) = \left(-\mathcal{L}_{t,\infty}^- \varphi\right)(z_0).$$

如 $n \to \infty$ 在式 (24) 中所示，我们得到

$$(\mathcal{L}_{t,\infty}\varphi)(x_0) = \left(\mathcal{L}^+_{t,\infty}\varphi\right)(x_0) + \left(\mathcal{L}^-_{t,\infty}\varphi\right)(x_0) \le 0,$$

这表明 v_∞ 是方程 (22) 的黏性上解。类似地，我们得到v_∞ 是同一方程的黏性下解，因此是方程 (22) 的黏性解。

现在我们证明 u_∞ 是以下问题的黏性解

$$\begin{cases} \max\left\{\mathcal{L}_{s,\infty}u, \mathcal{L}^-_{s,\infty}u + \Lambda_{1,\infty}|u(x)|^\theta |v_\infty(x_0)|^{1-\theta}\right\} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{25}$$

用之前相同的推理可知，对于给定的 $(z_0,\varphi) \in \Omega \times C_0^1(\mathbb{R}^N)$，我们可以找到一个序列 $\{u_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $C^{0,\ 0}{}^{s}(\Omega)$，使得 $\overline{u}_{p_n} \to u_\infty$ 在 Ω 中一致收敛，并且存在一个满足 $x_{p_n} \to z_0$和 $u_{p_n}(x_{p_n}) = \varphi(x_{p_n})$ 的序列 $\{x_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$。因此，存在$n_0 \ge 0$ 和一个球 $B_\rho(z_0)$，使得

$$x_{p_n} \notin B_\rho(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_0\}, \quad \forall n \ge n_0.$$

和之前一样，我们得到 u_{p_n} 是以下问题的黏性解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{s,p_n}u_{p_n} = \Lambda_1(p_n)\alpha(p_n)|u_{p_n}|^{\alpha(p_n)-1}v_{p_n}(x_0) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

像之前一样，考虑一个满足 $z_n \to z_0$ 的序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_\rho(z_0)$，并按照前一个证明中的方法定义 Ψ_n，我们得到

$$(\mathcal{L}_{s,p_n}\Psi_n)(z_n) \le \Lambda_1(p_n)\alpha(p_n)|\Psi_n(z_n)|^{\alpha(p_n)-1}v_{p_n}(x_0) \quad \forall n \ge n_0,$$

这等价于不等式

$$(A_{p_n,s}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} - (B_{p_n,s}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} \le (C_{p_n}(\varphi(z_n)))^{p_n-1} \quad \forall n \ge n_0,$$

其中

$$\left(C_{p_n}(\varphi(z_n))\right)^{p_n-1} := \Lambda_1(p_n)\alpha(p_n)|\varphi + \sigma_n|^{\alpha(p_n)-1}v_{p_n}(x_0)$$

其他各项与前一种情形类似，只需将 t 换成s。

注意，直接计算可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} C_{p_n}(\varphi(z_n)) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)}\sqrt[p_n]{\alpha(p_n)}|\varphi(z_n)+\sigma_n|^{\frac{\alpha(p_n)}{p_n-1}}v_{p_n}(x_0)^{\frac{\beta(p_n)}{p_n-1}}\right) \\ &= \Lambda_{1,\infty}|\varphi(z_0)|^\theta v_\infty(x_0)^{1-\theta} \end{aligned}$$

因此，由 (24) 中的 $n \to \infty$ em 可得

$$(\mathcal{L}_{s,\infty}\varphi)(x_0) = \left(\mathcal{L}^+_{s,\infty}\varphi\right)(z_0) + \left(\mathcal{L}^-_{s,\infty}\varphi\right)(z_0) \le \Lambda_{1,\infty}|\varphi(z_0)|^\theta v_\infty(x_0)^{1-\theta}$$

因此

$$\max\left\{\mathcal{L}_{s,\infty}u, \mathcal{L}^-_{s,\infty}u - \Lambda_{1,\infty}|u(x)|^\theta |v_\infty(x_0)|^{1-\theta}\right\} \le 0 \ \text{ in } \Omega,$$

也就是说， u_∞ 是问题 (22) 的黏性上解。类似地， u_∞ 是同一问题的黏性下解。证毕。□

注 8. 我们注意到，方程组

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u|^{\alpha(p)-2}u|v(x_v)|^{\beta(p)} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^t v(x) = \lambda\beta(p)\left(\int_\Omega |u|^{\alpha(p)}\mathrm{d}x\right)|v(x_v)|^{\beta(p)-2}v(x_v)\delta_{x_v} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_∞^1}$$

，其中 x_v 是 v 在 Ω 中的最大值点，可在第 2 节给出的相同框架下处理，并采用求解方程组（P_p^1）时使用的相同步骤。

6. On the system(P_p^2)

本节考虑泛函系统（P_p^2）。

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda\alpha(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)-2}u(x_1)|v(x_2)|^{\beta(p)}\delta_{x_1} & \text{in } \Omega, \\ (-\Delta_p)^t v(x) = \lambda\beta(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)-2}v(x_2)\delta_{x_2} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中 x_1、$x_2 \in \Omega$ 是任意点，$x_1 \neq x_2$。注意，两个方程都是泛函方程，因此其处理方式可参照方程组（P_p^1）中第二个方程的处理方法。

定义 3. 若一对 $(u, v) \in X_{s,t,p}(\Omega)$ 满足以下条件，则称其为（P_p^2）的弱解：

$$\begin{aligned} \langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle + \langle(-\Delta_p)^s v, \psi\rangle = \lambda\Big[&\alpha(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)-2}u(x_1)|v(x_2)|^{\beta(p)}\varphi(x_1) \\ &+\beta(p)|u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)-2}v(x_2)\psi(x_2)\Big] \end{aligned} \tag{26}$$

对所有 $(\varphi, \psi) \in X_{s,t,p}(\Omega)$ 均成立。

在 $Q_{s,t,p}$ 的定义中，分母应改为 $|u(x_1)|^{\alpha(p)}\,|v(x_2)|^{\beta(p)}$，同时保持 $\Lambda_1(p)$ 的定义不变。第一个结果与定理 1 类似，如下所示。

定理9。对于每个 $p \in \left(\frac{N}{s}, \infty\right)$，我们有

(*i*) $\Lambda_1(p) > 0$; (*ii*) 存在 $(u_p, v_p) \in X^*_{s,t,p}(\Omega)$，使得 $u_p > 0$，$v_p > 0$，并且

$$|u_p(x_1)|^{\alpha(p)}|v_p(x_2)|^{\beta(p)} = 1 \qquad \textit{and} \qquad \Lambda_1(s,p) = Q_{s,t,p}(u_p, v_p).$$

其证明也与定理 1 的证明类似。详细内容请参见第3节中概述的证明或 [11, 定理 1]。

下一步是证明一个与定理 2 类似的结果。将 S_p 和 $S\infty$ 的定义改为

$$S_p = \Big\{(u,v) \in X_{s,t,p}(\Omega) \,:\, |u(x_1)|^{\alpha(p)}|v(x_2)|^{\beta(p)} = 1\Big\}$$

and

$$S_\infty = \big\{(u,v) \in X_{s,t,p} \,:\, |u(x_1)|^{\theta}|v(x_2)|^{1-\theta} = 1\big\}$$

并将 G_p 中的分母也改为 $|u(x_1)|^{\theta}|v(x_2)|^{1-\theta}$，即可得到定理2的版本，其表述相同。

到目前为止，点 x_1、$x_2 \in \Omega$ 均为任意选取。现在，我们考虑由定理 1 给出的数列 $u_n := u_{p_n}$ 和 $v_n := u_{p_n}$。由于 u_n、$v_n > 0$，我们可以

取 x_1 为 u_n 的最大值 x_n，取 x_2 为 v_n 的最大值 y_n。注意，我们并未假设最大值 x_n 和 y_n 是唯一的。然而，我们将证明，序列（x_n、y_n）存在一个子序列收敛到（x_∞、y_∞），且等式 $|u_\infty（x_\infty）|^\theta |v_\infty（y_\infty）|^{1-\theta} = 1$ 仍然成立。

定理10. 设 $\{p_n\}$ 是一个收敛到 ∞ 的序列，且 (u_{p_n}, v_{p_n}) 是定理9中给出的 (P_p^1) 的解。记 $x_n := x_{u_{p_n}}$ 和 $y_n := x_{v_{p_n}}$ 分别为 u_{p_n} 和 v_{p_n} 的一列极大值点。必要时取子列，可得 $\{(u_{p_n}, v_{p_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 $(u_\infty, v_\infty) \in \mathcal{C}^{0,\ s}_{0}(\Omega)\times C^{0,\ s}_{0}(\Omega)$，而序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别收敛到 $x_\infty \in \Omega$ 和 $y_\infty \in \Omega$，它们分别是 u_∞ 和 v_∞ 的极大值点。此外

(i) $u_\infty \geq 0$, $v_\infty \geq 0$ *and* $|u_\infty(x_\infty)|^\theta |v_\infty(y_\infty)|^{1-\theta} = 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{\Lambda_1(p_n)} = \dfrac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}$

(iii) $\max\left\{|u_\infty|_s, |v_\infty|_t\right\} = \dfrac{1}{R^{s\theta+(1-\theta)t}}$;

(iv) *If* $s = t$, *then*

$$0 \leq u_\infty(x) \leq \frac{\left(\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\right)^s}{R^s} \quad \textit{and} \quad 0 \leq v_\infty(x) \leq \frac{\left(\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\right)^s}{R^s}.$$

其证明可通过仿照定理 3 的证明方法得到。将这一结果与 [11]，中的结果进行比较，我们首先注意到，我们的结果提供了关于 u_{p_n} 和 v_{p_n} 的极大值点序列的信息，而该文中没有涉及这一点。

最后，定理 4 的对应结果如下。与之前一样，其证明可通过对定理 4 的证明进行调整得到。

定理11。由定理10给出的函数 u_∞ 和 v_∞分别是以下问题的黏性解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{s,\infty} u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_1\}, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ u(x_1) = u_\infty(x_1) \end{cases} \quad \textit{and} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{t,\infty} v = 0 & \text{in } \Omega \setminus \{x_2\}, \\ v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \\ v(x_2) = v_\infty(x_2), \end{cases}$$

分别。

References

[1] C. Alves、G. Ercole 和 G. Pereira：当 $p \to \infty$ 时，$(p, q(p))$-Laplacian 问题的基态解的渐近行为，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*，149 (2019年)，第 6 期，1493–1522。[2] A. Chambolle、E. Lindgren 和 R. Monneau：H

¨ *ESAIM Control* older 无

Optim. Calc. Var. **18** 2012 3, 799 835
穷 Laplacian，（），第 – 期。[3] L. Del Pezzo 和 J. Rossi：分数阶

p *Rocky Mountain*-

J. Math. **48** 2018 4, 1077 1104

Laplacian 算子的方程组的特征值，（），第 – 期。[4] R. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci：分数阶 Sobolev 空间指南，*Bull. Sci. Math.* **136** (2012年)，第 5 期，521–573。[5] G. Ercole 和 G. Pereira：最佳Sobolev常数及其极值函数的渐近性，*Math. Nachr.* **289** (2016年)，第 11–12 期，1433–1449。[6] G. Ercole、G. Pereira 和 R. Sanchis：与奇异问题相关的分数阶 Sobolev 不等式的极值函数的渐近行为，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，198 6，2059 2019 2079（），第 – 期。[7] G. Ercole、A. H. S. Medeiros 和 G. A. Pereira：当 p 趋于无穷时，分数阶 $(p, q(p))$-Laplacian 问题的最小能量解的行为，*Asymptot. Anal.* **123** (2021年)，第 3–4 期，237–262。

[8] R. Ferreira 和 M. P´erez-Llanos：当 $p \to \infty$时，分数阶 p-Laplacian 的极限问题，
NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **23** 2016 2, 14, 28 （），第 Art. 页 [9] E. Lindgren 和
P. Lindqvist：分数阶特征值。 *Calc. Var. Partial Differential Equa-* （），
tions **49** 2014 1 2, 795 826
第 – – 期。[10] P. Juutinen 和 P Lindqvist：关于
∞ *Calc.* -特征值问题的高阶特征值， （），第 –
Var. Partial Differential Equations **23** 2005 2, 169 192
期。[11] M. Mih˘ailescu 、 J. Rossi 和 D. Stancu-Dumitru：涉及 p-Laplacian 算子的特征值问题族的一个极限问题，
Rev. Mat. Complut. **32** (2019年)，第 3 期，631–653。

Departmento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais,
31270-901 - BeloHorizonte - MG, Brazil*Email address*: hamilton@mat.ufmg.br

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa,
36570-900 - Viçosa -MG, Brazil.*Email address*: aldo.medeiros@ufv.br