arXiv:2304.00321v2 [math.NT] 6 Apr 2023

SmallGroup(16,13) 的整数群行列式。

HUMBERTO BAUTISTA SERRANO、BISHNU PAUDEL 和 CHRIS PINNER

Abstract. 我们完整描述了 SmallGroup(16,13) 的整数群行列式。该群是八阶二面体群与四阶循环群的中心积。

这些值与 SmallGroup(16,11) 的整数群行列式相同。SmallGroup(16,11) 是八阶二面体群与二阶循环群的直积。此前尚不知道整数群行列式并不能确定群。

1. Introduction

在 1977年4月于加利福尼亚州海沃德举行的美国数学会会议上，Olga Taussky-Todd [13] 询问，当所有元素均为整数时，是否可以刻画群行列式的取值。我们将把整数群行列式视为定义在群环 $\mathbb{Z}[G]$的元素上的函数，

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) := \det\left(a_{gh^{-1}}\right).$$

对于素数 p，在 [7] 和 [11], 中， $\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{Z}_{2p}$（即 p 阶和 $2p$阶的循环群）以及在 [1] 中， D_{2p} 和 D_{4p} （即 $2p$ 阶和 $4p$ 阶的二面体群）都已获得完整描述。不过一般而言，这很快就会变成一个困难的问题，即使对于循环群也是如此。

在 [8]中， [12] 和 $\mathbb{Z}_{15}$ 研究了所有阶小于 15 的其余群。最近，研究重点转向了 16 阶群： [14, 15, 16, 17, 18]中的全部五个 16 阶阿贝尔群（$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_8$、 $\mathbb{Z}_{16}$、 $\mathbb{Z}_2^4$、$\mathbb{Z}_4^2$、 $\mathbb{Z}_2^2\times\mathbb{Z}_4$ ）以及 [1, 9, 10, 19, 20], 中的六个非阿贝尔群（D_{16}、$\mathbb{Z}_2\times D_8$、 $\mathbb{Z}_2\times Q_8$、 Q_{16}、 $\mathbb{Z}_2^2\rtimes\mathbb{Z}_4$、 $\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}_4$ ）的整数群行列式均已确定，其中 Q_{4n} 是 $4n$阶的二环群或广义四元数群。

本文确定了 SmallGroup(16,13) 的整数群行列式：

$$G=\langle X,Y,Z \mid Z^4=Y^4=X^2=1,\ XZ=Z^{-1}X,\ Z^2=Y^2,\ XY=YX,\ ZY=YZ\rangle.$$

这里我们采用了 GAP 小群库中的群标识。这个群是阶为八的二面体群 $D_8=\langle X\,Z\rangle$ 与阶为四的循环群 $\mathbb{Z}_4=\langle Y\rangle$ 沿着一个共同的二阶循环中心子群作出的中心积。等价地， G 是四元数群 $Q_8=\langle XY\,Z\rangle$ 的中心积，

Date: 2023年4月7日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11C20，15B36；次要分类号：11C08，43A40。*Key words and phrases.* 整数群行列式、小群、二面体群、四元数群、中心积。

以及阶为四的循环群。这就只剩下两个尚未解决的 16 阶非阿贝尔群：SmallGroup(16,6) 和 SmallGroup(16,8)。

定理 1.1。SmallGroup(16,13) 的偶数整数群行列式恰好是 2^{16} 的倍数。

奇数整数群行列式包括所有模 16 同余于 $n \equiv 1$ 的整数，以及那些模 16 同余于 $n \equiv 9$ 且至少含有一个素数 $p \equiv \pm 3$ 或 ± 5 的整数。

注意，所得到的模 16 同余于 $n \equiv 9$ 的数，恰好是对于某些整数 k、m，可以写成 $(3+16k)(3+16m)$ 或 $(5+16k)(5+16m)$ 的数。

众所周知，[3] 群行列式多项式决定了群（参见 [6]，其中给出了一个更具构造性的证明）。此前尚不清楚整数群行列式是否也具有这一性质。在 [9] 中，我们得到了与 $\mathbb{Z}_2 \times D_8$ 相同的整数群行列式集合，从而否定地解决了这一问题。

推论 1.2。SmallGroup(16,13) 和 $\mathbb{Z}_2 \times D_8$ 具有相同的整数群行列式。特别是，整数群行列式不能确定该群。

2. A formula for the group determinant

Frobenius [4] 观察到，群行列式可以分解为

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \prod_{\rho\in\hat{G}} \det\left(\sum_{g\in G} a_g \rho(g)\right)^{\deg\rho},$$

ˆ其中 G 表示该群的一组完备的、两两不同构的不可约群表示（例如参见 [2] 或 [5]）。

根据群表示，我们可以将 $\mathbb{Z}[G]$ 中的元素写成如下形式

$$F(X,Y,Z) = f(Z) + g(Z)X + h(Z)Y + t(Z)XY$$

$\mathbb{Z}[x]$中的三个三次多项式，

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i,\ h(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i,\ t(z) = \sum_{i=0}^{3} d_i x^i.$$

根据群表示，该群的特征标必须满足

$$\chi(X), \chi(Y), \chi(Z) = \pm 1,$$

由此得到八个特征标，并对行列式作出贡献

$$M := \prod_{x,y,z=\pm 1} F(x,y,z) \tag{1}$$

。请注意，这是 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $F(X,Y,Z)$ 的行列式。

剩下两个二阶表示，我们取

$$\rho_1(X) = \rho_2(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho_1(Z) = \rho_2(Z) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$D_8 = \langle X、\ Z\rangle$ 的二阶表示，来自 [1],，并具有

$$\rho_1(Y) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\quad \rho_2(Y) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

以 $\lambda = i$ 或 $-i$ 作为 $\rho = \rho_1$ 或 ρ_2，我们得到

$$\det\left(\sum_{g\in G} a_g \rho(g)\right) = \det\begin{pmatrix} f(i)+\lambda h(i) & g(i)+\lambda t(i) \\ g(-i)+\lambda t(-i) & f(-i)+\lambda h(-i)\end{pmatrix} = U + \lambda V,$$

带整数

$$\begin{aligned} U :=& f(i)f(-i) - g(i)g(-i) - h(i)h(-i) + t(i)t(-i), \\ V :=& f(i)h(-i) + f(-i)h(i) - g(i)t(-i) - g(-i)t(i). \end{aligned} \tag{2}$$

因此，取 (1) 和 (2) 中的 M、U、V，可得

$$\mathcal{D}_G(F) = MA^2, \quad A = U^2 + V^2.$$

3. Achieving the stated values

偶数值

我们证明，可以实现任何形式为 $2^{16}m$ 的数。写作

$$W := (z+1)(z^2+1)(1+x)(1+y)$$

我们通过以下方式实现 $2^{18}m$

$$F(x,y,z) = (1+z+z^2) + (1-z^2-z^3)x - z^3 y - (z+z^2-z^3)xy - mW,$$

来自以下内容的 $2^{17}(1+2m)$

$$F(x,y,z) = (1+z)(1+z^2) + (1+z^2-z^3)x + (1+z)y + xy + mW,$$

来自以下内容的 $2^{16}(1+4m)$

$$F(x,y,z) = (1+z)(1+z^2) + (1+z)(1-z^2)x + (1-z^3)y + (1-z)(1-z^2)xy + mW,$$

以及来自以下内容的 $2^{16}(-1+4m)$

$$F(x,y,z) = (1+z+z^2) + (1-z^3)x + (1-z^3)y + (1-z^2+z^3)xy - mW.$$

奇数值

注意，对于任意群，取 $a_e = m+1$ 和 $a_g = m$ 作为 $g \neq e$，得到整数群行列式 $1 + m|G|$。因此，我们使用以下方法得到所有 $1+16m$

$$F(x,y,z) = 1 + m(z+1)(z^2+1)(1+x)(1+y).$$

我们使用以下方法得到形式为 $(5+16k)(5+16m)$ 的模 16 同余于 9 的值

$$F(x,y,z) = (1+z+z^2) + (1+z)x + (z-z^3)y + (1-z^2)xy + mW_1 + kW_2,$$

其中

$$W_1 := (z+1)(z^2+1)(1+x)(1+y), \quad W_2 := (z+1)(z^2+1)(1+x)(1-y).$$

我们使用以下方法得到（$3+16k$）（$3+16m$）

$$F(x,y,z) = (1+z) + (1+z-z^3)x + (1-z^2)y - (1-z)(1-z^2)xy + mW_1 + kW_2.$$

4. Excluding other even values

我们需要证明不存在偶数值 $2^k m$、 m 为奇数且满足 $1 \le k \le 15$ 的情况。注意，对于 X 、 Y 、 $Z \equiv \pm 1$ ，我们有

$$F(X,Y,Z) \equiv F(1,1,1) \bmod 2$$

with

$V = 2((c_0 - c_2)(a_0 - a_2) + (c_1 - c_3)(a_1 - a_3) - (b_0 - b_2)(d_0 - d_2) - (b_1 - b_3)(d_1 - d_3))$

偶数。由于

$$U = (a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2-(b_0-b_2)^2-(b_1-b_3)^2-(c_0-c_2)^2-(c_1-c_3)^2+(d_0-d_2)^2+(d_1-d_3)^2,$$

我们有 $U \equiv F(1,1,1)^2$ 模 2。因此， $\mathcal{D}_G(F)$ 为偶数要求 $F(1,1,1)$ 为偶数，并且$2 \mid U$、 V和 $2^4 \mid A^2$。此外， [12] 中已证明，像 M 这样的偶数行列式 $\mathbb{Z}_2^3$ 必须具有 $2^8 \parallel M$或 $2^{12} \mid M$。因此，任何满足 $k < 16$ 的 $2^k \parallel \mathcal{D}_G(F)$ 都必须具有$k = 12$ 或 14，并且

$$2 \parallel F(X,Y,Z), \quad \text{for all } X,Y,Z = \pm 1.$$

我们记

$$\alpha_1 = a_0 + a_2, \quad \alpha_2 = a_1 + a_3, \quad \beta_1 = b_0 + b_2, \quad \beta_2 = b_1 + b_3,$$
$$\gamma_1 = c_0 + c_2, \quad \gamma_2 = c_1 + c_3, \quad \delta_1 = d_0 + d_2, \quad \delta_2 = d_1 + d_3.$$

现在，显然 $U \equiv U_1$ 模 4，且

$$U_1 := \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2.$$

由于

$$\frac{1}{2}\left(F(1,1,1) - F(-1,-1,1)\right) = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2$$

是偶数，显然 $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2$是偶数，且 $U \equiv U_2$ 模 4，且

$$U_2 := \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2.$$

我们构造这四个整数

$\ell_1 = F(1,1,1)^2 + F(-1,1,1)^2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2)^2 + 2(\beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2)^2$,$\ell_2 = F(1,-1,1)^2 + F(-1,-1,1)^2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 - \gamma_2)^2 + 2(\beta_1 + \beta_2 - \delta_1 - \delta_2)^2$,$\ell_3 = F(1,1,-1)^2 + F(-1,1,-1)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 - \gamma_2)^2 + 2(\beta_1 - \beta_2 + \delta_1 - \delta_2)^2$,$\ell_4 = F(1,-1,-1)^2 + F(-1,-1,-1)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma_1 + \gamma_2)^2 + 2(\beta_1 - \beta_2 - \delta_1 + \delta_2)^2$,，并注意到

$$\ell_1 + \ell_3 = 4\left((\alpha_1+\gamma_1)^2 + (\alpha_2+\gamma_2)^2 + (\beta_1+\delta_1)^2 + (\beta_2+\delta_2)^2\right),$$
$$\ell_2 + \ell_4 = 4\left((\alpha_1-\gamma_1)^2 + (\alpha_2-\gamma_2)^2 + (\beta_1-\delta_1)^2 + (\beta_2-\delta_2)^2\right).$$

由于 $F(\pm 1, \pm 1, \pm 1)/2$ 是奇数，因此它们的形式为 $\ell_i = 8(1 + 4k_i)$，并且

$$8U_2 = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \sum_{i=1}^{4} 8(1 + 4k_i) \equiv 0 \bmod 32,$$

得到 $4 \mid U$。同理， $V/2 \equiv V_1$ 模 2，且

$$V_1 := \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2.$$

由于

$$16V_1 = \ell_1 + \ell_3 - \ell_2 - \ell_4 = 32(k_1 + k_3 - k_2 - k_4),$$

我们得到 $4 \mid V$、 $2^4 \mid A$ 和 $2^{16} \mid \mathcal{D}_G(F)$。 □

5. 排除其他奇数值

显然，奇数 A 模 8 同余于 $A^2 \equiv 1$ ，并且根据 [12], ，奇数 $\mathbb{Z}_2^3$ 行列式模 8 同余于 $M \equiv 1$。因此，奇行列式必须满足 $\mathcal{D}_G$（F）模 8 同余于 $= MA^2 \equiv 1$。我们得到模 16 同余于 1 和 9 的值，其中包含一个素数 ± 3， ± 5模 16 同余于。假设我们有一个奇数 $\mathcal{D}_G$（F）模 16 同余于 $\equiv 9$ ，且只包含模 ± 1、 ± 9 同余于的素数。特别是

$$F(X,Y,Z) \equiv \pm 1 \bmod 8 \;\;\Rightarrow\;\; F(X,Y,Z)^2 \equiv 1 \bmod 16$$

对于所有 X、 Y、 $Z = \pm 1$。由于 $F(1,1,1)$是奇数，我们不妨假设 $\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2$是奇数而 $\beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2$ 是偶数（否则，我们可以交换 f、 t 和 g、 h ，而不改变 A 或 M的值）。这一次，模 16 同余于 $\ell_i \equiv 2$ ，并且根据 ℓ_1 （其他 ℓ_i也同理），我们得到

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2)^2 \equiv 1 \bmod 8, \tag{3}$$

由（$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2$）$^2 \equiv 1$ 模 8 可得

$$4 \mid \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2, \beta_1 + \beta_2 - \delta_1 - \delta_2, \beta_1 - \beta_2 + \delta_1 - \delta_2, \beta_1 - \beta_2 - \delta_1 + \delta_2. \tag{4}$$

注意，前两个条件迫使 $2 \mid$ （$\beta_1 + \beta_2$）和（$\delta_1 + \delta_2$）。因此 $\beta_1\delta_1$ 和 $\beta_2\delta_2$ 具有相同的奇偶性，并且

$$\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 \equiv 0 \bmod 2. \tag{5}$$

这次我们取这四个整数

$$\begin{aligned}
m_1 &= F(1,1,1)F(-1,1,1) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2)^2 \bmod 16,\\
m_2 &= F(1,-1,1)F(-1,-1,1) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_1 - \gamma_2)^2 \bmod 16,\\
m_3 &= F(1,1,-1)F(-1,1,-1) \equiv (\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 - \gamma_2)^2 \bmod 16,\\
m_4 &= F(1,-1,-1)F(-1,-1,-1) \equiv (\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma_1 + \gamma_2)^2 \bmod 16.
\end{aligned}$$

由于 F（± 1、 ± 1、 ± 1） $\equiv \pm 1$ 或 ± 9 模 16，因此它们必为 ± 1 或 ± 9 模 16。由于这些是奇数平方，它们必为模 8 余 1，因此为 $m_i \equiv 1$ 或模 16 余 9。注意，

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \equiv 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) \bmod 16.$$

我们考虑两种情形。

情形 1：其中一个或三个为 $m_i \equiv 9$ 模 16。

于是 $M = m_1m_2m_3m_4 \equiv 9$ 模 16，并且由 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \equiv 12$ 模 16 可得 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \equiv 3$ 模 4。因此， α_1、 α_2、 γ_1、 γ_2 中有三个是奇数，另一个是偶数。所以 $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$ 是奇数，由（5）可得 $2 \parallel V$、 $2 \nmid U$。但是，随后 $A = U^2 + V^2 \equiv 5$ 模 8， $A^2 \equiv 9$ 模 16，并且 $\mathcal{D}_G$（F） $\equiv 1$ 模 16。

情况 2： $m_i \equiv 9$ 模 16 中有一个偶数。

在这种情况下， $M \equiv 1$ 模 16。由 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \equiv 4$ 模 16 可得 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \equiv 1$ 模 4。因此， α_1、 α_2、 γ_1、 γ_2 中只有一个可以是奇数，而 $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$ 是偶数。因此， $4 \mid V$、 $2 \nmid U$，并且 $A \equiv 1$ 模 8， $A^2 \equiv 1$ 模 16，以及 $\mathcal{D}_G$（F） $\equiv 1$ 模 16。

因此，不存在满足 $\mathcal{D}_G(F) \equiv 9 \bmod 16$ 的此类情形。 □

Acknowledgement

我们感谢 Naoya Yamaguchi 和 Yuka Yamaguchi 指出了推论 1.2。

References

[1] T. Boerkoel 和 C. Pinner, *Minimal group determinants and the Lind-Lehmer problem for dihedral groups* **186** 2018 4, 377 395 1802 07336 [ ] , 《算术学报》（），第 - 期。arXiv: . math.NT . [2] K. Conrad, *The origin of representation theory*, 《数学教学》（第2辑）44（1998），第3-4期，361-392。[3] E. Formanek 和 D. Sibley, *The group determinant determines the group*, 《美国数学会会刊》 **112** 1991 3, 649 656 1062831 （），第 – 期。MR F. G. Frobenius, [4] *Über die Primefactoren der Gruppendeterminante*, 《论文集》，第III卷，施普林格，纽约，1968年，第38–77页。MR0235974[5] K. Johnson, 《群矩阵、群行列式与表示论》，《数学讲义》2233，施普林格，2019年。[6] R. Mansfield, *A group determinant determines its group*, 《美国数学会会刊》116（1992），第4期，939–941。[7] M. Newman, *On a problem suggested by Olga Taussky-Todd*, 《伊利诺伊数学杂志》24（1980），156-158。（1980），第3期，187–191。MR0601702。[8] B. Paudel 和 C. Pinner, *Integer circulant determinants of order 15*, 《整数》22（2022），论文编号A4。[9] B. Paudel 和 C. Pinner, *The group determinants for $\mathbb{Z}_n \times H$*, arXiv:2211.09930 [math.NT]。[10] B. Paudel 和 C. Pinner, *The integer group determinants for Q_{16}* 2302 11688 , arXiv: . [ ] math.NT . [11] H. T. Laquer, *Values of circulants with integer entries*, 载于《斐波那契数列相关手稿集》，斐波那契协会，圣克拉拉，1980年，第212–217页。MR0624127。[12] C. Pinner 和 C. Smyth, *Integer group determinants for small groups*, 《拉马努金杂志》51（2020），第2期，421-453。[13] O. Taussky Todd, *Integral group matrices*, 《美国数学会通报》24（1977），第3期，A-345。摘要编号746-A15，第746次会议，海沃德，加利福尼亚州，1977年4月22日至23日。[14] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Generalized Dedekind's theorem and its application to integer group determinants* 2022 2203 14420 2 [ ] , . arXiv: . v math.RT . [15] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer circulant determinants of order 16*, 《拉马努金杂志》，arXiv:2204.05014 [math.NT]。[16] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for C_2^4*, 2022年。arXiv: 2203 14420 2 [ ] 。v math.RT [17] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for C_4^2* 2211 01597 , arXiv: . [ ] math.NT . [18] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for abelian groups of order 16*, arXiv:2211.14761 [math.NT]。[19] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_2^2 \rtimes C_4$* 2303 08489 , arXiv: . [ ] math.NT . [20] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_4 \rtimes C_4$* 2303 13189 , arXiv: . [ ] math.NT .

Department of Mathematics、 Kansas State University、 Manhattan、 KS 66506、 USA
Email address: humbertb@ksu.edu、 bpaudel@ksu.edu、 pinner@math.ksu.edu