arXiv:2304.00327v2 [math.AP] 8 Feb 2025

动量射线变换的唯一延拓

Joonas Ilmavirta、Pu-Zhao Kow 和 Suman Kumar Sahoo

Abstract. 本文聚焦于某些加权射线变换的唯一延拓结果，并利用分数阶拉普拉斯算子的唯一延拓性质（UCP）。具体而言，我们证明了作用于张量的动量射线变换具有保守性，并证明了作用于函数的加权射线变换和锥变换均具有反局部性。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 5
3. 旋度-旋度恒等式的推广 10
4. 无散分解定理 14
5. 主要结果 15
5.1. 张量上动量射线变换的唯一延拓性质 15
5.2. 动量射线变换的可测唯一延拓性质 16
5.3. 动量射线变换的推广：分数阶动量射线变换 17
5.4. 加权射线变换的反局部性 20
5.5. 锥变换的反局部性 21
附录A. 椭圆算子的负幂 22
参考文献 24

1. Introduction

张量场在多大程度上由其直线积分所确定？根据直线积分中的权重及其他选择，可能存在规范自由度或其他非唯一性，也可能不存在。我们将重点研究所谓的动量射线变换，并借助唯一延拓原理或性质（UCP）研究一个带有部分数据的逆问题。

m中 $\mathbb{R}^n$ -张量场的空间记为 $T^m \equiv T^m(\mathbb{R}^n)$，而其在 $\mathbb{R}^n$ 上的协变对称 m-张量场子空间记为 $S^m \equiv S^m(\mathbb{R}^n)$。在笛卡尔坐标中，元素 f 可写为

$$f(x) = f_{i_1 \dots i_m}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \cdots \mathrm{d}x^{i_m},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46F12、45Q05、35R11。*Key words and phrases.* 射线变换、张量层析成像、反局部性、唯一延拓性质（UCP）、分数阶拉普拉斯算子、分数阶椭圆算子、Saint Venant 算子。

其中，$f_{i_1\dots i_m}(x)$关于所有指标 $i_1, \dots, i_m \in \{1,\dots,n\}$对称。对于重复指标，本文始终采用爱因斯坦求和约定。

设 $\mathcal{S}(S^m) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m(\mathbb{R}^n))$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中对称 m 张量场的施瓦茨函数空间。我们记 $\mathcal{S}(S^0) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。本研究重点关注的积分变换可以在这些空间上定义如下：

(1) 函数 $f \in \mathcal{S}(S^m)$ 的射线变换 If 定义为

$$If(x,\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{i_1\cdots i_m}(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}\mathrm{d}t.$$

(2) $f \in \mathcal{S}(S^m)$ 的 k^{th} 动量射线变换（MRT） $I^k f$ 定义为

$$I^k f(x,\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, f_{i_1\cdots i_m}(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}\mathrm{d}t \quad \text{for all integers } k \geq 0.$$

(3) 对于 $s \in (0, \frac{n}{2})$， $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的分数阶动量射线变换 $I^{2s-1}f$ 定义为

$$\big(\mathcal{X}_s f\big)(x,\xi) := \big(I^{2s-1}f\big)(x,\xi) \equiv \int_0^{\infty} t^{2s-1} f(x+t\xi)\,\mathrm{d}t.$$

容易看出，当 $2s-1=k$ 为非负整数时，分数阶动量射线变换 I^{2s-1} 退化为经典动量射线变换。在 $k=0$ 的情形下，动量射线变换退化为经典射线变换： $I^0 = I$。由于其在各种科学领域中具有广泛的潜在应用，这一变换已得到深入研究；参见 [PSU23]。MRT 最早由 Sharafutdinov [Sha94] 引入，并在文献 [KMSS19, KMSS20, MS21] 中得到进一步研究。对于函数， $I^k f$ 似乎给出了锥变换和圆锥 Radon 变换的反演公式。圆锥 Radon 变换在康普顿相机中具有很有前景的应用；参见 [KT17, Par00, Smi05, TH02]。对于张量，MRT 似乎能够解决多调和算子的 Calder´on 型逆问题；参见 [BKS21, SS23]。研究 MRT 的另一个动机是其与指数射线变换的联系，该变换定义为 $(I^{\alpha}_{\exp}f)(x,\xi)$: $= \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha t} f_{i_1\cdots i_m}(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}\mathrm{d}t$，其中 α 为某个实数。形式上（并且当级数以适当意义收敛时确实如此），指数射线变换与动量射线变换之间的关系为

$$I^{\alpha}_{\exp} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} I^k f.$$

现在陈述本文的主要结果（并非全部结果）。关于广义圣维南算子 R^k （见（2.9））和正规算子的定义，请参阅第 N^p （见（2.2））节。在以下定理中，应将其理解为测量仅在集合 U中进行。关于部分数据结果及其与唯一延拓性质的联系，将在定理之后作更详细的讨论。

定理 I。设 $m \in \mathbb{N}$ 和一个整数 $0 \leq k \leq m$。假设

$$\begin{cases} f \in L^1(\mathbb{R}^n; S^m) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; S^m) & when\ 0 \leq k \leq n-1, \\ f \in L^2(\mathbb{R}^n; S^m)\ with\ compact\ support & when\ n \leq k \leq m, \end{cases} \tag{1.1}$$

并假设存在一个非空开集 U in $\mathbb{R}^n$，使得

$$R^k f|_U = 0 \quad for\ some\ 0 \leq k \leq m.$$

若存在 $x_0 \in U$，使得对每个 $0 \leq p \leq k$，以下假设成立：

$$N^p f\ vanishes\ at\ x_0\ of\ infinite\ derivative\ order, \tag{1.2}$$

则 $R^k f \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。如果进一步假设 f 具有紧支撑，则 f 是一个广义势场，也就是说，$f = \mathrm{d}^{k+1} v$ 对于某个 $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\ S^{m-k-1})$。关于 (2.9)和 (2.2) 的定义，请参见 R^k 和 N^k，分别。

定理 II。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为任意非空开集，且 $n \geq 2$。设$N^0 f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$。若 $f|_U = 0$，并且存在一个正测度集 Ein U，使得$\left(N^0 f\right)|_E = 0$，则 $f \equiv 0$属于 $\mathbb{R}^n$。

关于平均算子的定义，请参见第 5.3 节；例如，参见方程 $\mathcal{A}_s$（5.5）。

定理 III. 设 $n \geq 2$ 为整数，$0 < s \leq \frac{n}{4}$ 满足 $s \neq \mathbb{Z}$，并令 $f \in L^{\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n)$。如果存在一个非空开集 U，属于 $\mathbb{R}^n$，且 $f = \mathcal{A}_s f = 0$ 属于 U，那么 $f = 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$，其中 $(\mathcal{A}_s f)(x) = c(n, -s) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathcal{X}_s f)(x, \xi)\, \mathrm{d}S(\xi)$，且 $c(n, s) := \frac{2^{2s}\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}{\pi^{n/2}|\Gamma(-s)|}$。

下表列出了该方向上的一些已有结果：

唯一性结果			
变换	完整数据	UCP	支撑定理
射线变换	[Hel99, Sha94]	[IM20, IM21, AKS22]	[Kri07]
d 平面变换	[Hel99]	[CMR21]	[Hel99]
MRT	[KMSS19]	[AKS22], 当前文章[AM19]	
锥变换	[KT17]	当前文章	未知

具有完整数据的射线变换是一个经典概念，我们这里只给出了教科书参考文献，而未引用原始论文。

射线变换的唯一延拓结果可以视为部分数据唯一性结果，其中考虑以下问题：如果一个函数或对称张量场 f 满足 $If = 0$，并且 $f = 0$ 在某个开集 U中成立，那么能否得出结论：在整个空间中，$f = 0$（对于函数）或 f 是一个势场（对于对称张量场）？

这个问题与内部层析成像问题或感兴趣区域（ROI）层析成像问题有关。ROI层析成像的目标是根据穿过某个开集（感兴趣区域）的所有直线上的线积分，重建该区域内的函数。众所周知，仅凭这些信息无法恢复感兴趣区域内的整个函数；参见 [KQR15，例 2。1] 然而，由于射线变换 If 是一个

椭圆傅里叶积分算子（FIO），其正规算子 I^*If 是一个椭圆伪微分算子。因此，根据伪局部性质，我们有 WF(f) $=$WF(I^*If)，参见[Qui06]。这一事实为 Lambda层析成像 [FRS 92], 提供了动机；这是一种利用 ROI数据重建奇异性的局部重建方法。

然而，我们提出的问题有所不同：我们只使用与集合 U 相交的射线，但我们的目标是重建 U 外部的标量场或张量场，而不是其内部的场。我们假设在 U 中已知关于该场的某些信息。最简单的选择是 $f|_U = 0$，但也可以放宽为规范不变假设 $Rf|_U = 0$，其中 R 是 Saint Venant 算子。所有直线上的积分均为零这一假设，可以放宽为（I^k）$^*I^kf$ 在 U 的一个正测度子集上为零，或在U 的某一点处无穷阶消失。我们需要确保（I^k）$^*I^kf$ 光滑，从而“无穷阶消失”这一假设才有意义：事实上，这可由正规算子（I^k）$^*I^k$ 作为伪微分算子的椭圆性推出。

对于 $f \in \mathcal{S}$（S^m）和 $0 \le k \le m$，以下条件等价：
(1) $I^kf = 0$ 对于所有直线 (2) $R^kf = 0$ （Saint-Venant 算子的 k^{th} 次幂）(3) f 是某个 $v \in \mathcal{S}$ 的（$k+1$）$^{\text{st}}$ 阶对称协变导数（约定阶数为 -1 的张量场恒等于零）

为了在部分数据情形下证明类似的结论，我们希望从关于 I^kf 的部分数据推出全局结论 $R^kf = 0$，从而得到所需结论。采用 R^kf 的优势在于，它是一个具有局部性质的微分算子——不同于积分算子 I^k。

通过将射线变换的正规算子与分数阶拉普拉斯算子联系起来，我们发现，射线变换的唯一延拓性质是分数阶拉普拉斯算子具有唯一延拓性质（更确切地说，是反局部性）的结果。唯一延拓性质（Unique Continuation Property，UCP）是研究逆问题的一种有用工具，其目标是根据测量数据恢复未知函数。唯一延拓性质保证，如果偏微分方程的解在适当意义下为零，那么该解必定恒等于零。局部算子（例如拉普拉斯算子和波算子）的唯一延拓性质已得到广泛研究 [Isa07]，近年来，非局部算子（例如分数阶拉普拉斯方程以及近场动力学型分数阶波动方程）的唯一延拓性质也受到研究 [GSU20、Gho22]。有趣的是，证明某些非局部椭圆算子的唯一延拓性质时，需要用到局部椭圆方程的唯一延拓性质，参见 [GFR19]。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们回顾一些预备结果，包括后续章节将用到的定义和记号。第3节研究广义圣维南算子的更多性质，并在第4节给出对称张量场的新分解定理。最后，我们在第5节回顾主要结果并予以证明。在附录A中，我们给出一般椭圆算子的负分数次幂的定义域（见定义A.3），与分数阶拉普拉斯算子类似。

Acknowledgements

J. I. 获芬兰科学院资助（项目编号 332890 和 351665）。P.-Z. K 获 NCCU研究发展处和台湾国家科学及技术委员会资助（项目编号 NSTC 112-2115-M-004-004-MY3）。P.-Z. K 和

S. K. S 获芬兰科学院（逆建模与成像卓越中心，项目编号 312121）以及欧洲研究委员会地平线2020 项目资助（欧洲研究委员会协同资助项目 770924）。我们感谢匿名审稿人的意见。

2. Preliminaries

为使本文内容自成体系，本节将介绍一些算子——特别是动量射线变换和圣维南算子——以及它们的一些已知性质。此处不打算详述所有细节，更多信息请参见例如[AKS22、KMSS19、Sha94] 及其中的参考文献。已经熟悉这一主题的读者可以继续阅读下一节。

2.1. 施瓦茨空间上的动量射线变换。对于任意向量 $\xi^{(1)}$、$\cdots$、$\xi^{(m)} \in \mathbb{R}^n$，它们的张量积（或并置） $\xi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \xi^{(m)}$ 定义为

$$(\xi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \xi^{(m)})_{i_1 \cdots i_m} := \xi^{(1)}_{i_1} \cdots \xi^{(m)}_{i_m}.$$

若 $\xi^{(1)} = \cdots = \xi^{(m)} = \xi$，我们简记为

$$\xi^{\otimes m} := \xi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \xi^{(m)} \in S^m \quad \text{and} \quad \xi^{\otimes m}_{i_1 \cdots i_m} := (\xi^{\otimes m})_{i_1 \cdots i_m}.$$

我们还将 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ S^m \times S^m \to \mathbb{R}$ 记为

$$\langle f, g \rangle := f_{i_1 \cdots i_m} g_{i_1 \cdots i_m}.$$

令 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中对称 m 阶张量场的施瓦茨函数空间。给定任意非负整数 k，定义映射 $J^k \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ 为

$$(J^k f)(x, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, \langle f(x + t\xi), \xi^{\otimes m} \rangle \, \mathrm{d}t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, f_{i_1 \ldots i_m}(x + t\xi) \, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m} \, \mathrm{d}t$$

对所有 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 成立。将单位球面的切丛记为

$$T\mathbb{S}^{n-1} := \left\{ \ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \ \middle| \ \langle x, \xi \rangle = 0 \ \right\}.$$

由于每个点（x，ξ）$\in T\mathbb{S}^{n-1}$ 唯一确定一条直线 $x + t\xi$，其中 $t \in \mathbb{R}$，因此将 $I^k \equiv J^k|_{T\mathbb{S}^{n-1}}$ 记为 J^k 在 $T\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制是合理的。令 $\mathcal{S}$（$T\mathbb{S}^{n-1}$）表示光滑函数空间 φ（x，ξ），其定义在 $T\mathbb{S}^{n-1}$ 上，并且这些函数关于第一个变量的所有导数都快速衰减[Sha94，第 2 节。1]容易看出

$$I^k \equiv J^k|_{T\mathbb{S}^{n-1}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathcal{S}(T\mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{is bounded.} \tag{2.1}$$

定义 2.1。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和整数 $0 \leq k \leq m$，我们称（2.1）为对称 k^{th} 张量场的动量射线变换阶。

注记 2.2 （一个等价关系）。 根据 [KMSS19，(2.6)] 我们有

$$(J^q f)(x, \xi) = |\xi|^{m-2q-1} \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} \binom{q}{\ell} |\xi|^\ell \langle \xi, x \rangle^{q-\ell} (I^\ell f) \underbrace{\left(x - \frac{\langle x, \xi \rangle}{|\xi|^2} \xi, \frac{\xi}{|\xi|} \right)}_{\in T\mathbb{S}^{n-1}}$$

对所有 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$，这意味着对于每个整数 $0 \leq k \leq m$，有

$(I^0 f, I^1 f, \cdots, I^k f) = (0, 0, \cdots, 0)$ 当且仅当 $(J^0 f, J^1 f, \cdots, J^k f) = (0, 0, \cdots, 0)$。

2.2.紧支集张量场分布上的动量射线变换。众所周知，（经典）射线变换 I^0 在紧支集张量场分布上 [Sha94]。为了研究多调和算子逆问题， [BKS21] 中讨论了动量射线变换的类似扩展。类似的思路也适用于动量射线变换[AKS22，第 2 节。3], 这里将介绍这些内容，以使本文自成一体。令 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^m)$ 表示 m 中的紧支集对称张量分布场 $\mathbb{R}^n$，并定义有界线性算子 $I^k\colon \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\, S^m) \to \mathcal{E}'(T\mathbb{S}^{n-1})$ 如下：

$$(I^k f, g)_{T\mathbb{S}^{n-1}} = \Big(f, (I^k)^* g\Big)_{\mathbb{R}^n; S^m} \quad \text{for all } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^m) \text{ and } g \in C^\infty(T\mathbb{S}^{n-1}),$$

其中，分布伴随算子 $(I^k)^*\colon C^\infty(T\mathbb{S}^{n-1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\, S^m)$ 定义为

$$\Big((I^k)^* g\Big)_{i_1\cdots i_m}(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle x, \xi\rangle^k \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}\, g(x - \langle x, \xi\rangle \xi, \xi)\, \mathrm{d}S_\xi \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

类似地，我们定义 $J^k\colon \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\, S^m) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1})$ 为

$$(J^k f, g)_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}} = \Big(f, (J^k)^* g\Big)_{\mathbb{R}^n; S^m} \quad \text{for all } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^m) \text{ and } g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}),$$

其中，分布伴随算子 $(J^k)^*\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\, S^m)$ 定义为

$$\Big((J^k)^* g\Big)_{i_1\cdots i_m}(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} t^k g(x - t\xi, \xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}S_\xi \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

2.3. 动量射线变换的正规算子。 利用（2.1），对每个整数$0 \le k \le m$，记 $N^k = (I^k)^* I^k\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\, S^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\, S^m)$ 为正规算子，它对应于定义 k^{th} 2.1 中的动量射线变换2.1。对于每个 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m)$, 有

$$\begin{aligned}&(N^k f)_{i_1\cdots i_m}(x)\\ &\quad = 2\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^\ell x^{\otimes(2k-\ell)}_{p_1\cdots p_{2k-\ell}} \left(f_{j_1\dots j_m} * \Xi_{p_1\cdots p_{2k-\ell} i_1\cdots i_m j_1\dots j_m}\right)(x),\end{aligned} \tag{2.2}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，其中

$$\Xi_{p_1\cdots p_{2k-\ell} i_1\cdots i_m j_1\dots j_m}(z) := \frac{z^{\otimes(2m+2k-\ell)}_{p_1\cdots p_{2k-\ell} i_1\cdots i_m j_1\dots j_m}}{|z|^{2m+2k-2\ell+n-1}} \quad \text{for all } z \in \mathbb{R}^n,$$

见 [AKS22，（2.13）], 因此，正规算子可延拓为映射

$$(N^0, \cdots, N^m) : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^m) \to (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; S^m))^{m+1} \tag{2.3}$$

作为紧支集分布与温和分布的卷积。由于

$$|\Xi_{p_1\cdots p_{2k-\ell} i_1\cdots i_m j_1\dots j_m}(z)| \le \frac{1}{|z|^{n-1-\ell}} \quad \text{for all } \ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0},$$

然后，与 $\Xi_{p_1\cdots p_{2k-\ell} i_1\cdots i_m j_1\dots j_m}(z)$ 的卷积是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的映射，条件是 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1+\ell}{n}$ 当 $0 \le \ell \le n-2$ 时，参见（5.7）。当 $\ell = n-1$ 时，可以看出

与 $\Xi_{p_1\cdots p_{2k-\ell}i_1\cdots i_m j_1\ldots j_m}(z)$ 的卷积是从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的映射。因此，正规算子也扩展为该映射

$$N^k : L^1(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; S^m) \quad \text{for all integer } 0 \le k \le n-1. \tag{2.4}$$

当 $m = k = 0$, （2.2）变为

$$\left(N^0|_{S^0} f\right) = 2f * \frac{1}{|\cdot|^{n-1}} \quad \text{for all } f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

并且对于每个整数 $\ell \ge 0$ ，我们知道

$$N^0|_{S^0} : W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n) \to W^{\ell,q}(\mathbb{R}^n) \text{ is bounded provided } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

见（5.8）。

2.4. 一些微分算子。现在我们回顾[Sha94第 2 节中的某些微分算子。1]。关于部分指标的对称化在形式上定义为

$$\sigma(i_1, \cdots, i_p) u_{i_1,\cdots,i_m} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in \Pi_p} u_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(p)} i_{p+1}\cdots i_m},$$

其中 Π_p 是 p-置换的集合。设 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的对称 m 张量分布场。内导数或对称导数记为 $\mathrm{d} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^{m+1})$，定义为

$$(\mathrm{d}f)_{i_1\cdots i_{m+1}} = \sigma(i_1 \cdots i_{m+1}) \frac{\partial f_{i_1\cdots i_m}}{\partial x_{i_{m+1}}} \equiv \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\pi \in \Pi_{m+1}} \frac{\partial f_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(m)}}}{\partial x_{i_{\pi(m+1)}}} \tag{2.6}$$

散度 δ： $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^{m-1})$ 定义为

$$(\delta f)_{i_1\ldots i_{m-1}} = \frac{\partial f_{i_1\ldots i_m}}{\partial x^{i_m}}.$$

算子 d 和 $-\delta$ 关于 L^2 内积意义下形式对偶，即

$$(\mathrm{d}u, v)_{\mathbb{R}^n; S^{m+1}} = -(u, \delta v)_{\mathbb{R}^n; S^m}$$

对所有 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\ S^m)$ 和 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\ S^{m+1})$，参见 [Sha94，(2.1.8)]。还值得一提的是 $\delta^{k+1} N^k f = 0$ 并且对于每个整数 $0 \le r \le k$ 满足

$$\begin{aligned} \left(\delta^r N^k f\right)(x) &= \frac{k!}{(k-r)!} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle x, \xi\rangle^{k-r} \xi^{\otimes(m-r)} \left(I^k f\right)(x - \langle x, \xi\rangle \xi, \xi)\, \mathrm{d}S_\xi \\ &= \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle x, \xi\rangle^{2k-r-\ell} \xi^{\otimes(m-r)} \left(J^\ell f\right)(x, \xi)\, \mathrm{d}S_\xi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于所有 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\ S^m) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\ S^m)$，参见 [AKS22，（2.14）]。给定任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和一个整数$0 \le k \le m$，众所周知，动量射线变换（定义 2.1）满足以下性质：

$$I^k|_{S^m}(\mathrm{d}v) = -kI^{k-1}|_{S^{m-1}}(v) \quad \text{for all } v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^{m-1}) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^{m-1}), \tag{2.8}$$

其中 d 由（2.6）给出，例如参见 [KMSS19，第 2] 节。利用（2.8），我们可以很容易地证明，相应的正规算子也具有类似的缩放性质。

引理 2.3. 给定任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和整数 $0 \leq k \leq m$，有

$$\delta N^k|_{S^m}(\mathrm{d}v) = -k^2 N^{k-1}|_{S^{m-1}}(v) \quad \textit{for all } v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^{m-1}) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^{m-1}).$$

证明。取 $f = \mathrm{d}v$ 和 $r = 1$ 于（2.7）中，利用（2.8）可得

$$\begin{aligned}\left(\delta N^k|_{S^m}\mathrm{d}v\right)(x) &= k \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle x,\xi\rangle^{k-1}\xi^{\otimes(m-1)}\left(I^k|_{S^m}(\mathrm{d}v)\right)(x - \langle x,\xi\rangle\xi,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi \\ &= -k^2 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle x,\xi\rangle^{k-1}\xi^{\otimes(m-1)}\left(I^{k-1}|_{S^{m-1}}(v)\right)(x - \langle x,\xi\rangle\xi,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi \\ &= -k^2\left(N^{k-1}|_{S^{m-1}}(v)\right)(x),\end{aligned}$$

这立即推出我们的引理。 □

2.5. 广义圣维南算子。现在记 $S^{m_1} \otimes S^{m_2}$ 为关于前 m_1 个指标和后 m_2 个指标对称的（$m_1 + m_2$）阶张量的集合。相应地，我们按照 [AKS22，（2.8）]，引入广义圣维南算子，它是 $\mathbb{R}^n$上的旋度的推广，见备注 2.6。

定义 2.4. 对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和整数 $0 \leq k \leq m$，广义圣维南算子 k^{th} $W^k\colon \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^{m-k} \otimes S^m)$ 定义为

$$\begin{aligned}&(W^k f)^{i_1\cdots i_k}_{p_1\cdots p_{m-k}q_1\cdots q_{m-k}} \\ &\quad\coloneqq \sigma(p_1,\cdots,p_{m-k})\sigma(q_1,\cdots,q_{m-k},i_1\ldots i_k)\times \\ &\qquad\times \sum_{\ell=0}^{m-k}(-1)^\ell\binom{m-k}{\ell}\frac{\partial^{m-k} f^{i_1\cdots i_k}_{p_1\ldots p_{m-k-\ell}q_1\cdots q_\ell}}{\partial x^{p_{m-k-\ell+1}}\cdots\partial x^{p_{m-k}}\partial x^{q_{\ell+1}}\cdots\partial x^{q_{m-k}}}.\end{aligned}$$

由于我们使用欧几里得度量，因此不区分协变张量与逆变张量，即上指标和下指标没有区别。为了在下一节证明命题 3.1 时方便起见，我们采用这些记号。当 $k = 0$时，0^{th} 广义圣维南算子 W^0 退化为 S^m [Sha94 中的（经典）圣维南算子]。当 $k = m$时，我们有 $W^m = \mathbb{I}$，其中 $\mathbb{I}$ 是恒等算子。

注 2.5（一个等价定义）。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和整数 $0 \leq k \leq m$，我们考虑算子 $R^k \equiv R^k|_{S^m}\colon \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; T^{2m-k})$，其定义为

$$(R^k f)^{i_1\ldots i_k}_{p_1q_1\ldots p_{m-k}q_{m-k}} \coloneqq \alpha(p_1q_1)\ldots\alpha(p_{m-k}q_{m-k})\frac{\partial^{m-k} f^{i_1\ldots i_k}_{p_1\ldots p_{m-k}}}{\partial x^{q_1}\ldots\partial x^{q_{m-k}}} \tag{2.9}$$

其中，两个指标的交替定义为：

$$\alpha(i_1i_2)u_{i_1i_2j_1\cdots j_p} \coloneqq \frac{1}{2}(u_{i_1i_2j_1\cdots j_p} - u_{i_2i_1j_1\cdots j_p}).$$

特别地，有

$$\left(R^k|_{S^m} f\right)^{i_1\dots i_k}_{p_1q_1\dots p_{m-k}q_{m-k}} = \left(R^0|_{S^{m-k}} f^{i_1\cdots i_k}\right)_{p_1q_1\cdots p_{m-k}q_{m-k}}, \tag{2.10}$$

参见 [AKS22, (2.6)]。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和整数 $0 \leq k \leq m$，可以证明[1]

$$\begin{aligned}&(W^k f)^{i_1\cdots i_k}_{p_1\cdots p_{m-k}q_1\cdots q_{m-k}}\\ &\quad = 2^{m-k}\sigma(q_1\cdots q_{m-k}i_1\cdots i_k)\sigma(p_1\cdots p_{m-k})(R^k f)^{i_1\cdots i_k}_{p_1q_1\cdots p_{m-k}q_{m-k}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(R^k f)^{i_1\cdots i_k}_{p_1q_1\cdots p_{m-k}q_{m-k}}\\ &\quad = \frac{1}{m-k+1}\binom{m}{k}\alpha(p_1q_1)\cdots\alpha(p_{m-k}q_{m-k})(W^k f)^{i_1\cdots i_k}_{p_1\cdots p_{m-k}q_1\cdots q_{m-k}},\end{aligned}$$

参见 [AKS22, 引理 4。1]因此，对于每个开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^m)$ 有

$$W^k f = 0 \text{ in } U \iff R^k f = 0 \text{ in } U. \tag{2.11}$$

基于上述观察，我们可以稍微放宽术语的用法，将（2.9）中的 k^{th} 也称为广义圣维南算子。鉴于约化公式（2.10），使用 R^k 比使用 W^k更为方便。

注 2.6。通过将 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^1) \cong((\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)))^n$ 视为恒等式，当 $m = 1$且 $k = 0$时，我们得到

$$\left(R^0|_{S^1} f\right)_{p,q} = \alpha(p,q)\frac{\partial f_p}{\partial x^q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_p}{\partial x^q} - \frac{\partial f_q}{\partial x^p}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{curl}(f)\right)_{p,q} \tag{2.12}$$

fo对所有 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^1) \cong (\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n))^n$，关于（3.2）的更多细节，另请参见注2.12 .

对于 $u \in S^k$，我们将 $\mathfrak{i}_u : S^m \to S^{m+k}$ 记作关于u 的对称乘法算子，并将 $\mathfrak{j}_u : S^{m+k} \to S^m$ 记作相应的对偶算子，定义为

$$\begin{aligned}(\mathfrak{i}_u v)_{i_1\cdots i_{m+k}} &:= \sigma(i_1\cdots i_{m+k})u_{i_1\cdots i_k}v_{i_{k+1}\cdots i_{k+m}} \quad \text{for all } v \in S^m,\\ (\mathfrak{j}_u w)_{i_1\cdots i_m} &:= w_{i_1\cdots i_{m+k}}u^{i_{m+1}\cdots i_{m+k}} \quad \text{for all } w \in S^{m+k},\end{aligned}$$

参见[Sha94，(2.1.5)]。令 $\mathfrak{e}^k \in S^k$ 为欧几里得度量张量，其定义为

$$\mathfrak{e}^k_{i_1\cdots i_k} = \begin{cases}1 & \text{if } i_1 = \cdots = i_k,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

并记作 $\mathfrak{i}_{(k)} := \mathfrak{i}_{\mathfrak{e}^k}$， $\mathfrak{j}_{(k)} := \mathfrak{j}_{\mathfrak{e}^k}$。我们以回顾 [AKS22，命题 44], 来结束本节。该命题给出了动量射线变换的正规算子与广义圣维南算子之间的联系。

[1]我们再次提醒读者， [Sha94中的(2.4.6)(2.4.7)], 存在排版错误，参见 [AKS22中的(2.6)(2.7)] 以查看修正后的表述。

命题 2.7 ([AKS22，命题 44])。给定 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及整数 $0 \leq k \leq m$，考虑 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\ S^m) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\ S^m)$。若 $N^0|_{S^0}$ 为 (2.5) 中给出的算子，则有

$$\begin{aligned} & m! N^0|_{S^0}\left((R^0|_{S^{m-k}} f^{i_1\cdots i_k})_{p_1q_1\cdots p_{m-k}q_{m-k}}\right) \\ & \quad = \sigma(i_1\ldots i_k)\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_r}}(R^k|_{S^{m-r}}(G_{m-r}))^{i_{r+1}\cdots i_k}_{p_1q_1\cdots p_{m-k}q_{m-k}}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，G_{m-r} 是一个对称的（$m-r$）阶张量，定义为

$$G_{m-r} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{m-r}{2}\rfloor} c_{\ell,m-r}\mathrm{i}^{\ell}_{(2)}\mathrm{j}^{\ell}_{(2)}\sum_{p=0}^{r}(-1)^{r-p}\frac{1}{p!}\binom{r}{p}\mathrm{j}_{x^{\otimes(r-p)}}\delta^p N^p f,$$

其系数为

$$c_{\ell,s} = \left(\prod_{p=0}^{s-\ell-1}(n-1+2p)\right)\frac{(-1)^\ell s!}{2^\ell \ell!(s-2\ell)!},$$

其中 N^p 是 p^{th} 动量射线变换的正规算子，定义见 (2.2)，且对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$ “下取整函数” $\lfloor\alpha\rfloor$ 表示满足 $\leq \alpha$ 的最大整数。

注 2.8。特别地，当 $m=1$ 且 $k=0$时，(2.13) 表示为

$$N^0|_{S^0}\left(\left(R^0|_{S^1} f\right)_{ij}\right) = (n-1)\left(R^0|_{S^1}\left(N^0|_{S^1} f\right)\right)_{ij} \quad \forall\ f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;S^1) \cup \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;S^1)。 \tag{2.14a}$$

将 (2.12) 代入 (2.14a)，可得

$$N^0|_{S^0}\left((\operatorname{curl}(f))_{ij}\right) = (n-1)\left(\operatorname{curl}\left(N^0|_{S^1} f\right)\right)_{ij} \quad \forall\ f \in \left(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\right)^n \cup \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\right)^n. \tag{2.14b}$$

3. A generalization of the curl-curl identity

我们将证明广义圣维南算子（定义 2.4）具有以下有用性质；据我们所知，这是一个新结果。作为应用，我们还将在引理 3.3 中证明广义圣维南算子的平滑性。

命题 3.1。给定任意整数 $m \geq 0$，恒等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\ell}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_\ell}}\left(R^0|_{S^m} f\right)_{i_1j_1\cdots i_\ell j_\ell i_{\ell+1}j_{\ell+1}\cdots i_m j_m} \\ & \quad = \frac{1}{2^\ell}\sigma(i_1\cdots i_\ell)\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{\ell-p}\left(R^0|_{S^{m-\ell}}\left((\delta^p f)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}\right)\right)_{i_{\ell+1}j_{\ell+1}\cdots i_m j_m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

对所有 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^m)$ 和整数 $0 \leq \ell \leq m$ 均成立。

注 3.2。当 $m=\ell=1$, (3.1) 化简为以下著名的旋度-旋度恒等式

$$\Delta f^i - \frac{\partial}{\partial x^i}(\delta f) = 2\frac{\partial}{\partial x^j}(R^0|_{S^1} f)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\right) = -\left(\operatorname{curl}^{\intercal}\operatorname{curl}(f)\right)_i, \tag{3.2}$$

其中 $(\text{旋度}^{\intercal}(g))_i := \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^j}(g_{i,\ j}-g_{j,\ i})$ 是 旋度的形式转置。在三维情形下，甚至可以将 (3.2) 化简为

$$\Delta f-\nabla(\nabla\cdot f)=-\nabla\times(\nabla\times f)\quad \text{for all } f\in\left(\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)\right)^3,$$

其中 $\nabla\times\cdot:\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上通常的旋度。

命题的证明 3.1。 当 $\ell=0$ 时，恒等式（3.1）是显然的；我们只需证明（3.1）对于 $\ell\geq 1$。

步骤 1：基本情形。 我们首先证明（3.1）在 $\ell=1$ 时成立。给定任意整数 $m\geq 1$，将散度算子 δ 作用于经典的圣维南算子 $R^0:\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^m)\to\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ T^{2m})$，我们得到

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\left(R^0|_{S^m}f\right)_{i_1j_1i_2j_2\cdots i_mj_m}\\
&\quad=2\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\left(\alpha(i_1j_1)\cdots\alpha(i_mj_m)\frac{\partial^m}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_m}}f_{i_1i_2\cdots i_m}\right)\\
&\quad=\Delta\alpha(i_2j_2)\cdots\alpha(i_mj_m)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{j_2}\cdots\partial x^{j_m}}f^{i_1}_{i_2\cdots i_m}\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\alpha(i_2j_2)\cdots\alpha(i_mj_m)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{j_2}\cdots\partial x^{j_m}}(\delta f)_{i_2\cdots i_m}\\
&\quad=\left(\Delta R^0|_{S^{m-1}}f^{i_1}-\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}R^0|_{S^{m-1}}(\delta f)\right)_{i_2j_2\cdots i_mj_m}
\end{aligned}\tag{3.3}$$

对所有 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n;\ S^m)$ 均成立。

步骤 2：对 ℓ 进行归纳。 假设存在一个整数 $\ell\geq 1$，使得（3.1）对所有 $m\geq\ell$均成立。对归纳假设取导数 $\frac{\partial}{\partial x^{j_{\ell+1}}}$可得

$$\begin{aligned}
&2^\ell\frac{\partial^{\ell+1}}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_{\ell+1}}}\left(R^0|_{S^m}f\right)_{i_1j_1\cdots i_{\ell+1}j_{\ell+1}i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_mj_m}\\
&=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})2^\ell\frac{\partial^{\ell+1}}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_{\ell+1}}}\left(R^0|_{S^m}f\right)_{i_1j_1\cdots i_{\ell+1}j_{\ell+1}i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_mj_m}\\
&=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{\ell-p}\frac{\partial}{\partial x^{j_{\ell+1}}}\left(R^0|_{S^{m-\ell}}\left((\delta^pf)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}\right)\right)_{i_{\ell+1}j_{\ell+1}\cdots i_mj_m},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

这里我们利用了这一事实：$\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sigma(i_1\cdots i_\ell)=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})$. 与重新编号后的（3.3）类似，我们有

$$\begin{aligned}
&(\delta^{p+1}f)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}_{i_{\ell+2}\cdots i_m}=(\delta^{p+1}f)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}_{i_{\ell+2}\cdots i_m}\quad(\text{because }\delta^{p+1}f\in C^\infty(\mathbb{R}^n;S^{m-(p+1)})),\\
&\frac{\partial}{\partial x^{i_{\ell+1}}}R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^{p+1}f\right)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}=\frac{\partial}{\partial x^{i_{p+1}}}R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^{p+1}f\right)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&2\frac{\partial}{\partial x^{j_{\ell+1}}}\left(R^0|_{S^{m-\ell}}\left((\delta^p f)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}\right)\right)_{i_{\ell+1}j_{\ell+1}\cdots i_m j_m}\\
&\quad=2\frac{\partial}{\partial x^{j_{\ell+1}}}\alpha(i_{\ell+1}j_{\ell+1})\cdots\alpha(i_m j_m)\frac{\partial^{m-\ell}}{\partial x^{j_{\ell+1}}\cdots\partial x^{j_m}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}_{i_{\ell+1}\cdots i_m}\\
&\quad=\Delta\alpha(i_{\ell+2}j_{\ell+2})\cdots\alpha(i_m j_m)\frac{\partial^{m-(\ell+1)}}{\partial x^{j_{\ell+2}}\cdots\partial x^{j_m}}(\delta^p f)^{i_{p+1}\cdots i_\ell i_{\ell+1}}_{i_{\ell+2}\cdots i_m}\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial x^{i_{\ell+1}}}\alpha(i_{\ell+2}j_{\ell+2})\cdots\alpha(i_m j_m)\frac{\partial^{m-(\ell+1)}}{\partial x^{j_{\ell+2}}\cdots\partial x^{j_m}}(\delta^{p+1} f)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}_{i_{\ell+2}\cdots i_m}\\
&\quad=\left(\Delta R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_{\ell+1}}-\frac{\partial}{\partial x^{i_{p+1}}}R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^{p+1}f\right)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

仅根据对称张量场的定义，就可以推出 3.4 与 3.5 之间所显示的关系。由于 $\delta^{p+1}f$是一个对称张量场，我们只需计算指标的个数。注意，$(\delta^{p+1}f)^{i_{p+1}\cdots i_\ell}_{i_{\ell+2}\cdots i_m}$, i_{p+1}起到 $i_{\ell+1}$的作用。现在将 (3.4) 和 (3.5) 结合起来，得到

$$
\begin{aligned}
&2^{\ell+1}\frac{\partial^{\ell+1}}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_{\ell+1}}}\left(R^0|_{S^m}f\right)_{i_1 j_1\cdots i_{\ell+1}j_{\ell+1}i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}\\
&=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{(\ell+1)-p}\left(R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}\\
&\quad-\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(-1)^p\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{p+1}}}\Delta^{\ell-p}\left(R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^{p+1}f\right)^{i_{p+2}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}\\
&=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{(\ell+1)-p}\left(R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}\\
&\quad+\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=1}^{\ell+1}\binom{\ell}{p-1}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{(\ell+1)-p}\left(R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}\\
&=\sigma(i_1\cdots i_{\ell+1})\sum_{p=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{(\ell+1)-p}\left(R^0|_{S^{m-(\ell+1)}}\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_{\ell+1}}\right)_{i_{\ell+2}j_{\ell+2}\cdots i_m j_m}.
\end{aligned}
$$

这就完成了归纳步骤，并结束了证明。 □

当 $\ell=m$，(3.1) 在命题 3.1 给出

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^m}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_m}}\left(R^0|_{S^m}f\right)_{i_1 j_1\cdots i_m j_m}\\
&\quad=\frac{1}{2^m}\sigma(i_1\cdots i_m)\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{m-p}\left(\left(\delta^p f\right)^{i_{p+1}\cdots i_m}\right).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

作为 (3.6) 的应用，我们现在能够证明广义圣维南算子（定义 2.4）的以下平滑性，该性质对 W^k 也成立；根据 (R^k 替换为 W^k ，这是由 2.11) 得出的。

引理 3.3。给定 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m)$。若存在一个整数 $0 \leq \mathsf{k} \leq m$，使得

$$R^{\mathsf{k}} g = 0 \text{ and } \delta^{\mathsf{k}+1} g = 0 \text{ in } U, \tag{3.7}$$

则 $g \in C^\infty(U; S^m)$。此外，当 $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n; S^m)$ 且 (3.7) 对 $U = \mathbb{R}^n$成立时，我们得出 $g \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

证明。由（2.9），可得

$$\begin{aligned}
&(R^{k-1}|_{S^m} f)^{i_1 \dots i_{k-1}}_{p_1 q_1 \dots p_{m-k+1} q_{m-k+1}} \\
&\quad = \alpha(p_{m-k+1} q_{m-k+1}) \frac{\partial}{\partial x^{q_{m-k+1}}} \left(\alpha(p_1 q_1) \dots \alpha(p_{m-k} q_{m-k}) \frac{\partial^{m-k} f^{i_1 \dots i_{k-1}}_{p_1 \dots p_{m-k+1}}}{\partial x^{q_1} \dots \partial x^{q_{m-k}}} \right) \\
&\quad = \alpha(p_{m-k+1} q_{m-k+1}) \frac{\partial}{\partial x^{q_{m-k+1}}} \left(\alpha(p_1 q_1) \dots \alpha(p_{m-k} q_{m-k}) \frac{\partial^{m-k} f^{i_1 \dots i_{k-1} p_{m-k+1}}_{p_1 \dots p_{m-k}}}{\partial x^{q_1} \dots \partial x^{q_{m-k}}} \right) \\
&\quad = \alpha(p_{m-k+1} q_{m-k+1}) \frac{\partial}{\partial x^{q_{m-k+1}}} (R^k|_{S^m} f)^{i_1 \cdots i_k p_{m-k+1}}_{p_1 q_1 \cdots p_{m-k} q_{m-k}}
\end{aligned}$$

对所有 $1 \leq k \leq m$和 $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n; S^m)$ 均成立。因此，（3.7）中的第一个假设与（2.10）推出

$$\left(R^0|_{S^{m-k}} g^{i_1 \cdots i_k}\right)_{p_1 q_1 \cdots p_{m-k} q_{m-k}} = 0 \quad \text{in } U \quad \text{for all } 0 \leq k \leq \mathsf{k},$$

因此我们有

$$\left(R^0|_{S^{m-k}} (\delta^k g)\right)_{p_1 q_1 \cdots p_{m-k} q_{m-k}} = 0 \quad \text{in } U \quad \text{for all } 0 \leq k \leq \mathsf{k}. \tag{3.8}$$

在 $f = \delta^k g$ 中选取（3.6），根据（3.8）和（3.7）中的第二个假设，我们可以看出

$$\begin{aligned}
0 &= 2^m \frac{\partial^m}{\partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_m}} \left(R^0|_{S^{m-k}} (\delta^k g)\right)_{i_1 j_1 \cdots i_m j_m} \\
&= \sigma(i_1 \cdots i_m) \sum_{p=0}^{\mathsf{k}-k} \binom{m}{p} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_p}} \Delta^{m-p} \left((\delta^{p+k} g)^{i_{p+1} \cdots i_m} \right) \quad \text{in } U.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

通过在（3.9）中选取 $k = \mathsf{k}$，可以看出 $\Delta^m \left((\delta^{\mathsf{k}} g)^{i_1 \cdots i_m} \right) = 0$属于 U。因此，根据局部椭圆正则性，我们知道

$$\delta^{\mathsf{k}} g \in C^\infty(U; S^{m-\mathsf{k}}). \tag{3.10a}$$

此外，当 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; S^m)$ 且 $U = \mathbb{R}^n$ 时，我们知道

$$\delta^{\mathsf{k}} g \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{3.10b}$$

另一方面，对于每个 $0 \le k <$k，我们可以将（3.9）写作

$$\begin{aligned}\Delta^m\left((\delta^k g)\right)^{i_1\cdots i_m} &= \sigma(i_1\cdots i_m)\Delta^m\left((\delta^k g)\right)^{i_1\cdots i_m}\\ &= -\sigma(i_1\cdots i_m)\sum_{p=1}^{\mathsf{k}-k}\binom{m}{p}(-1)^p\frac{\partial^p}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_p}}\Delta^{m-p}\left((\delta^{p+k}g)^{i_{p+1}\cdots i_m}\right)\\ &= \sigma(i_1\cdots i_m)\sum_{p=0}^{\mathsf{k}-k-1}\binom{m}{p+1}(-1)^p\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{p+1}}}\Delta^{m-p-1}\left((\delta^{p+k+1}g)^{i_{p+2}\cdots i_m}\right)\end{aligned}$$

在 U 中。因此，对每个 $0 \le k <$ k，我们都有如下推论

$$\delta^{k+1}g \in C^\infty(U;S^{m-k-1}) \quad \text{implies} \quad \delta^k g \in C^\infty(U;S^{m-k}). \tag{3.11a}$$

此外，当 $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;S^m)$ 且 $U=\mathbb{R}^n$ 时，对每个 $0 \le k <$ k，我们都有如下推论

$$\delta^{k+1}g \equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \quad \text{implies} \quad \delta^k g \equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{3.11b}$$

对于一般情形，结合（3.10a）和（3.11a），再结合当 $g \in \mathcal{E}'$（$\mathbb{R}^n$；S^m）且 $U=\mathbb{R}^n$ 时的（3.10b）和（3.11b），我们得出结论。□

4. A solenoidal decomposition theorem

本节的核心内容是证明一个广义的无散势函数分解定理；据我们所知，这也是一项新的结果。

命题 4.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域。对于每个带有$\alpha \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$的 $f \in H^\alpha(\Omega;S^m)$，都存在唯一的分解

$$f = \tilde{f} + \mathrm{d}^k v \quad \text{in } \Omega \tag{4.1}$$

其中 $\tilde{f} \in H^\alpha(\Omega;S^m)$ 满足 $\delta^k\tilde{f}=0$，且 $v \in H^{\alpha+k}(\Omega;S^{m-k}) \cap H_0^k(\Omega;S^{m-k})$.

我们将借鉴 [SS23，引理 7。1]（另见 [DS11，定理 1。5] 以及[Sha94，定理 3.3。2]）中的一些思路来证明命题4.1。形式上对 (4.1）作用 δ^k，得到方程 $\delta^k f = \delta^k\mathrm{d}^k v$。这提示我们证明下面的引理。

引理 4.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 中的有界光滑区域，并给定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{N}$。对于任意满足整数 $\ell \ge -k$的 $h \in H^\ell(\Omega;S^m)$，存在唯一的 $w \in H^{2k+\ell}(\Omega;S^m) \cap H_0^k(\Omega;S^m)$，使得

$$(-1)^k\delta^k\mathrm{d}^k w = h \quad \text{in } \Omega. \tag{4.2}$$

证明。由于 δ^k（分别为 d^k）的主符号是 $\mathbf{i}^k\mathsf{j}_{\xi^{\otimes k}}$（分别为 $\mathbf{i}^k\mathsf{i}_{\xi^{\otimes k}}$），因此 $(-1)^k\delta^k\mathrm{d}^k$ 的主符号为 $\mathsf{j}_{\xi^{\otimes k}}\mathsf{i}_{\xi^{\otimes k}}$。利用 [Sha94，引理 3.3。3], 可得

$$\mathsf{j}_\xi\mathsf{i}_\xi = \frac{1}{m+1}|\xi|^2\mathbb{I} + \frac{m}{m+1}\mathsf{i}_\xi\mathsf{j}_\xi > 0 \quad \text{in } S^m,$$

其中 $\mathbb{I}$ 是恒等算子。由于 $\mathsf{j}_{\xi^{\otimes(\ell+1)}}\mathsf{i}_{\xi^{\otimes(\ell+1)}} = \mathsf{j}_\xi(\mathsf{j}_{\xi^{\otimes\ell}}\mathsf{i}_{\xi^{\otimes\ell}})\mathsf{i}_\xi$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$均成立，因此我们知道 $\mathsf{j}_{\xi^{\otimes k}}\mathsf{i}_{\xi^{\otimes k}} > 0$ 在 S^m中。因此根据 [Tay11、习题 5.11.3 和 5.11，4], 我们知道映射

$$(-1)^k\delta^k\mathrm{d}^k : H^{2k+\ell}(\Omega)\cap H_0^k(\Omega) \to H^\ell(\Omega) \text{ is Fredholm of index zero.}$$

根据弗雷德霍姆理论，还需证明（4.2）的解是唯一的。特别地，如果 $w \in H_0^k(\Omega;\ S^m)$ 满足 $\delta^k \mathrm{d}^k w = 0$，则通过分部积分可得

$$\langle \delta^k \mathrm{d}^k w, w\rangle = \langle \mathrm{d}^k w, \mathrm{d}^k w\rangle = 0,$$

这意味着 $\mathrm{d}^k w = 0$。最后，利用 [DS11 的定理 13]，按照 [SS23 引理 7 的证明1],，我们得出引理的结论。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

命题 4.1 的证明。取 $h = (-1)^k \delta^k f \in H^{\alpha-k}(\Omega; S^{m-k})$ 作为引理 4.2中的条件，则存在唯一的 $v \in H^{\alpha+k}(\Omega;\ S^{m-k}) \cap H_0^k(\Omega;\ S^{m-k})$，使得

$$\delta^k \mathrm{d}^k v = \delta^k f.$$

显然，若定义 $\tilde{f} := f - \mathrm{d}^k v$，则有 $\delta^k \tilde{f} = 0$。分解的唯一性也可直接由引理 4.2 中解的唯一性推出。□

5. Main results

5.1. 张量的动量射线变换的唯一延拓性质。若张量 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n; S^m)$ 在 x_0 处无限阶导数为零，我们称其

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} g_{i_1 \cdots i_m}\Big|_{x=x_0} = 0 \quad \text{for all multi-index } \alpha.$$

在本节中，我们将 [AKS22，定理 24] 推广为以下定理。

定理 I。设 $m \in \mathbb{N}$，且 $0 \le k \le m$为整数。假设

$$\begin{cases} f \in L^1(\mathbb{R}^n; S^m) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; S^m) & \textit{when } 0 \le k \le n-1, \\ f \in L^2(\mathbb{R}^n; S^m) \textit{ with compact support} & \textit{when } n \le k \le m, \end{cases} \tag{1.1}$$

并假设存在非空开集 U，满足 $\mathbb{R}^n$

$$R^k f|_U = 0 \quad \textit{for some } 0 \le k \le m.$$

若存在 $x_0 \in U$，使得对于每个 $0 \le p \le k$，以下假设均成立：

$$N^p f \textit{ vanishes at } x_0 \textit{ of infinite derivative order}, \tag{1.2}$$

则 $R^k f \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^n$中。若进一步假设 f 具有紧支撑，则 f 是一个广义势场，即 $f = \mathrm{d}^{k+1} v$ 对于某个 $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\ S^{m-k-1})$。定义参见 (2.9)和 (2.2)，分别对应 R^k 和 N^k。

特别地，假设（1.2）由下面的引理可知是有意义的。

引理 5.1。设 $m \in \mathbb{N}$ 和一个整数 $0 \le k \le m$。假设 f 满足 (1.1)。如果存在一个开集 U包含于 $\mathbb{R}^n$，使得 $R^k f = 0$在 U中，则 $N^p f$在 U上对所有$0 \le p \le k$都是光滑的。

证明。 固定 $x_0 \in U$，令 B 为 U 中包含 x_0的一个球。利用命题 4.1 （其中$\alpha = 0$），可以将 $f \in L^2(B)$ 在 B 中分解为

$$f = \tilde{f} + \mathrm{d}^{k+1} v \quad \text{in } B$$

其中 $\tilde{f} \in L^2(B; S^m)$ 满足 $\delta^{k+1}\tilde{f} = 0 \,\text{in}\, B \,\text{and}\, v \in H_0^{k+1}(B;\, S^{m-k-1})$。注意， v 的零延拓 $v\chi_B$ 属于 $H^{k+1}(\mathbb{R}^n; S^{m-k-1})$，并且满足

$$f = \tilde{f} + \mathrm{d}^{k+1}(v\chi_B) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

通过在 $\tilde{f} = f$ 之外延拓 B。利用 [Sha94，定理 2.17。2] （其中 $F = \mathrm{d}^{k+1}$（$v\chi_B$） $\in \mathcal{E}'$（$\mathbb{R}^n$； S^m））以及注 2.5中的等价性，可得 R^k（d^{k+1}（$v\chi_B$）） $= 0$。因此，将 R^k 应用于（5.1）可知

$$R^k f = R^k \tilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

因此我们得出 $R^k \tilde{f}|_B = 0$。由于 $\delta^{k+1}\tilde{f} = 0$ 属于 B，引理 3.3 保证 $\tilde{f}$在 B上光滑。由（1.1），我们知道，根据（2.4）（当 $0 \le k \le n-1$）和（2.3）（当 $n \le k \le m$），定义良好。利用（2.8），对于每个 $0 \le p \le k$，作用于 N^p （5.1）可知

$$N^p f = N^p \tilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

这意味着 $N^p f$ 在 B中光滑，因此在 x_0附近光滑。由于$x_0 \in U$的任意性，我们得出引理。□

利用命题 2.7 以及文献 [IM20中的标量函数射线变换唯一延拓原理，定理 1。1] 现已具备证明定理 I的条件。

定理 I 的证明。由于 $N^p f$在 x_0处无限阶导数均为零，利用命题 2.7 可知， $N^0|_{S^0}$ (($R^0|_{S^{m-k}} f^{i_1\cdots i_k}$)$_{p_1 q_1 \cdots p_{m-k} q_{m-k}}$) 在 x_0处的无限阶导数也均为零。由于 $R^0|_{S^{m-k}}(f^{i_1\cdots i_k})$ $= R^k|_{S^m} f = 0$在 U中，利用文献 [IM20，定理 1.1] 以及等价关系 (2.11)，我们得到 $R^k f = W^k f = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$中。于是，根据文献 [Sha94，定理 2.17.2]，即可得到结论。□

注 5.2. 沿用 [IM22], 的思路，可以通过将假设 $R^k f = 0$在 U中替换为 $P(D)R^k f = 0$在 U中，从而改进定理 I ，其中 $P(D)$ 是一个常系数微分算子。

5.2. 动量射线变换的可测唯一延拓性质。 我们首先回顾如下由 [GRSU20] （或 [GFR19]）给出的分数阶拉普拉斯算子正测度集上的唯一延拓性质（MUCP）。

引理 5.3 ([GRSU20，命题 5.1])。 设 $n \ge 1$ 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$中的一个开集。设$q \in L^\infty(\Omega)$ 并假设 $u \in H^s(\mathbb{R}^n))$ 其中 $s \in [\frac{1}{4}, 1)$ 满足

$$((-\Delta)^s + q)u = 0 \quad in \quad \Omega.$$

若存在一个可测集 $E \subset \Omega$，且其测度为正，使得 $u = 0$ 属于 E，则$u \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

注 5.4。 另请参见 [GFR19，定理 4] ，其中给出了更一般的结果。关于分数阶椭圆算子的反局部性（它蕴含从非空开集出发的唯一延拓性质），我们还参见下一节的引理 5.10 。

利用上述引理，我们可以证明射线变换的一些 MUCP 结果。

定理 II. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为任意非空开集，且 $n \geq 2$。设$N^0 f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$。若 $f|_U = 0$，且存在正测度集 E包含于 U，使得$\left(N^0 f\right)|_E = 0$，则 $f \equiv 0$属于 $\mathbb{R}^n$。

定理的证明 II. 众所周知（例如参见 [Ilm21，练习 12。10]），存在一个常数 $c_n \neq 0$ 使得

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} N^0 f = c_n f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

现在 $f|_U = 0$推出 $\left((-\Delta)^{1/2}\left(N^0 f\right)\right)|_U = 0$。由于$\left(N^0 f\right)|_E = 0$，应用引理 5.3(其中 $s = \frac{1}{2}$， $u = N^0 f$以及 $q = 0$)，可得 $N^0 f = 0$属于 $\mathbb{R}^n$，我们的结论由（5.2）得证。□

通过使用（2.14b），我们也可以得到一个关于向量场的类似结果。

定理 5.5。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为任意非空开集，且 $n \geq 2$。设旋度（$N^0|_{S^1} f$） $\in H^{\frac{1}{2}}$（$\mathbb{R}^n$）（见第 2.2节）。若（旋度（f））$|_U = 0$，并且存在一个正测度集 E位于 U中，使得 旋度（$N^0|_{S^1} f$）$|_E = 0$，则 旋度（f） $\equiv 0$位于 $\mathbb{R}^n$中。

注 5.6。现在考虑 $n = 2$、3 的情形。设 U是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，并且相对于某个 $x_0 \in U$是星形的。若 $f \in$（C^1（U））^{n}且旋度（f） $= 0$位于 U中，则众所周知，存在一个势函数 $p \in C^2$（U），使得 $f = \nabla p$ 位于 U中；这是关于德拉姆上同调群的庞加莱引理的一个推论。对于任意维数 $n \geq 2$，可以使用 [Sha94，定理 2.17。2] 来得出相同的结论。

定理 5.5的证明。结合（2.14b）和（5.2），可知存在一个常数$c_n' \neq 0$ 使得

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{curl}\left(N^0|_{S^1} f\right)\right) = c_n' \operatorname{curl}(f) \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

现在，旋度（f）$|_U = 0$意味着（$-\Delta$）$^{\frac{1}{2}}$（旋度（$N^0|_{S^1} f$））$\Big|_U = 0$。由于旋度（$N^0|_{S^1} f$）$\big|_E = 0$，应用引理 5.3（其中 $s = \frac{1}{2}$， $u =$旋度（$N^0|_{S^1} f$）以及 $q = 0$），可推出旋度（$N^0|_{S^1} f$） $= 0$属于 $\mathbb{R}^n$。结合（5.3），即可证明定理。□

5.3. 动量射线变换的推广：分数阶动量射线变换。本节的主题是将动量射线变换推广为一种更一般的加权射线变换，并解释其与分数阶椭圆算子之间的联系。

令 $n \geq 2$ 为整数。对于每个实数 $0 < s < \frac{n}{2}$，我们考虑分数阶动量射线变换 $\mathcal{X}_s$： $\mathcal{S}$($\mathbb{R}^n$) $\to C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1})$，其定义为

$$\left(\mathcal{X}_s f\right)(x,\xi) := \left(I^{2s-1} f\right)(x,\xi) \equiv \int_0^\infty \tau^{2s-1} f(x+\tau\xi)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{5.4}$$

且对所有的 $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$。这里我们不考虑正规算子 N^{2s-1}，而是转而考虑平均 $\mathcal{A}_s$： $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$，它在球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的定义为

$$\left(\mathcal{A}_s f\right)(x) := c(n,-s) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathcal{X}_s f\right)(x,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi, \tag{5.5}$$

其中 $c(n,s) := \frac{2^{2s}\Gamma(\frac{n+2s}{2})}{\pi^{n/2}|\Gamma(-s)|}$。我们计算得

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_s f)(x) &= c(n,-s)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \tau^{2s-1} f(x+\tau\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}S_\xi \\ &= c(n,-s)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \tau^{2s-n} f(x+\tau\xi)\left(\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}S_\xi\right) \\ &= c(n,-s)\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2s-n} f(x+y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

换言之，我们注意到 $\mathcal{A}_s:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 就是黎斯势；特别地，根据 [Sti19，定理 5]，对于每个 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$(-\Delta)^{-s} f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{t\Delta} f(x)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} = (\mathcal{A}_s f)(x) \quad \text{for all } x\in\mathbb{R}^n, \tag{5.6}$$

其中 $(-\Delta)^{-s}$ 是拉普拉斯算子的负幂，而 $\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ 是经典热扩散半群，另见 [Kwa17，定义 2。3]. 这对应于数值恒等式

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \quad \text{for all } \lambda>0,$$

例如，参见 [Kwa17，第 2 节。7]. 对于每个 $p\in[1,\frac{n}{2s})$，利用弱杨不等式，可以证明

$$\mathcal{A}_s : L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n) \text{ is bounded provided } \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{2s}{n}, \tag{5.7}$$

另请参见例如 [Kwa17，第 2 节。7]. 利用卷积定理，我们注意到 $\partial^\alpha(\mathcal{A}_s f) = \mathcal{A}_s(\partial^\alpha f)$，因此特别有

$$\mathcal{A}_s : W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\to W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \text{ is bounded provided } \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{2s}{n}, \tag{5.8}$$

对于所有非负整数 m。我们关注以下特殊情形：

引理 5.7。设 $n\geq 2$ 是一个整数，且 $0<s\leq\frac{n}{4}$，那么对于每个非负整数m，我们知道

$$\mathcal{A}_s : W^{m,\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n)\to W^{m,2}(\mathbb{R}^n)\equiv H^m(\mathbb{R}^n) \text{ is bounded,}$$

且 $(-\Delta)^s\mathcal{A}_s f = f$ 对所有 $f\in W^{m,\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n)$。这里，$(-\Delta)^s$ 是通常的傅里叶分数阶拉普拉斯算子[2]。

[2]另请参见，例如 [Sti19，定义 1] 关于在某种适当的分布意义下定义分数阶拉普拉斯算子

备注 5.8（临界情形）。当 $s = \frac{n}{2}$ 时，我们将加权射线变换 $\mathcal{X}_{\frac{n}{2}}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1})$ 定义为

$$\big(\mathcal{X}_{\frac{n}{2}} f\big)(x,\xi) := \int_0^\infty (-2\log\tau - \gamma_{\mathrm{EM}}) f(x+\tau\xi)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{for all } (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1},$$

其中，欧拉-马歇罗尼常数 γ_{EM} 由 $\gamma_{\mathrm{EM}} := -\int_0^\infty e^{-t} \log\, t\mathrm{d}t \approx 0.577215$ 给出。平均算子 $\mathcal{A}_{\frac{n}{2}}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 则定义为

$$\big(\mathcal{A}_{\frac{n}{2}} f\big)(x) := \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \big(\mathcal{X}_{\frac{n}{2}} f\big)(x,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi.$$

我们计算得

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{\frac{n}{2}} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty (-2\log\tau - \gamma_{\mathrm{EM}}) f(x+\tau\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}S_\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty (-2\log\tau - \gamma_{\mathrm{EM}}) f(x+\tau\xi)\,\big(\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}S_\xi\big) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-2\log|y| - \gamma_{\mathrm{EM}}) f(x+y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由于 $|\xi|^{-n}$ 不是温和分布，因此值得一提的是，[Sti19，定理 5] 证明了

$$((-\Delta)^{-\frac{n}{2}} f)(x) = (\mathcal{A}_{\frac{n}{2}} f)(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n$$

对于所有满足 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。

对于 $0 < s < \frac{n}{2}$，现在我们将加权射线变换（5.4）表示为（高斯-魏尔斯特拉斯）热核的形式

$$k_t(x,y) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

已知

$$(e^{t\Delta} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n$$

以及 $(e^{t\Delta} f)^\wedge(x) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$，对于所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。此外，根据 [Kwa17，第 2 节，7] 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty k_t(x,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} = c(n,-s)|x-y|^{2s-n}.$$

因此，我们观察到

$$|x-y|^{2s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)c(n,-s)} |x-y|^{n-1} \int_0^\infty k_t(x,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \quad \text{for all } x \neq y \in \mathbb{R}^n.$$

因此，X射线变换（5.4）及相应的平均算子可改写为

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{X}_s f)(x,\xi) &= \frac{1}{\Gamma(s)c(n,-s)} \int_0^\infty \tau^{n-1} \left(\int_0^\infty k_t(x, x+\tau\xi) \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \right) f(x+\tau\xi)\, \mathrm{d}\tau \\
\left((-\Delta)^{-s} f\right)(x) \equiv (\mathcal{A}_s f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty k_t(x,y) \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \right) f(y)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。根据上述观察，可以在适当的定义域上定义椭圆算子的负幂，更多细节请见附录A 。

注 5.9。 我们在 (5.4) 中通过在半直线上积分定义了分数阶动量射线变换。不过，也可以通过在整条直线上积分来定义分数阶动量射线变换，具体如下:

$$
J^s f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}} |t|^s f(x+t\xi)\, \mathrm{d}t \quad \text{for } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ and } -1 < s < 1.
$$

请注意，这里考虑的权函数在原点处并不光滑。但对 $\mathbb{S}^{n-1}$ 取平均后，我们看到 $A_s = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} J^s(x,\xi)\, \mathrm{d}S(\xi)$ 与 $\mathcal{A}_{\frac{s+1}{2}}$ 相差一个常数。利用这一点，我们也可以研究 A_s 以及 J^s 的唯一延拓性质。

5.4. 加权射线变换的反局部性。 利用 [GFR19，命题 1。9] (该结论对某类一般椭圆算子成立)，以及证明[GSU20，定理 1。2], 中的平滑化论证，我们得到以下引理。

引理 5.10。设 $n \geq 1$ 为整数， $s > 0$ 满足 $s \notin \mathbb{Z}$。令 $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$，其中 $r \in \mathbb{R}$。若

$$
u = (-\Delta)^s u = 0 \quad \textit{in some open set in } \mathbb{R}^n,
$$

则 $u \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

根据引理5.7，利用分数阶拉普拉斯算子的反局部性，可以得到加权射线变换 $\mathcal{A}_s$ 的反局部性。

定理 III。设 $n \geq 2$ 为整数， $0 < s \leq \frac{n}{4}$ 满足 $s \neq \mathbb{Z}$ ，且令 $f \in L^{\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n)$。若存在一个非空开集 U ，满足 $\mathbb{R}^n$ ，且 $f = \mathcal{A}_s f = 0$ 属于 U，则 $f = 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$，其中 $(\mathcal{A}_s f)(x) = c(n,-s) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathcal{X}_s f)(x,\xi)\, \mathrm{d}S(\xi)$，且 $c(n,s) := \frac{2^{2s}\Gamma\left(\frac{n+2s}{2}\right)}{\pi^{n/2}|\Gamma(-s)|}$。

注记 5.11. 如果对所有 $x \in U$ 和 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$， $(\mathcal{X}_s f)(x,\xi) = 0$，那么 $\mathcal{A}_s f = 0$ 属于 U。

定理 III 的证明。 根据引理 5.7，我们知道

$$
g := \mathcal{A}_s f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad g = (-\Delta)^s g = 0 \text{ in } U.
$$

根据引理 5.10 我们知道 $g \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。因此，再次根据引理 5.7 我们得出 $f \equiv (-\Delta)^s g \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。 □

我们还有以下有趣的观察。

引理 5.12（关于 $\mathcal{A}_s$ 的支撑定理）。设 $n \geq 2$ 为一个整数， $0 < s < 1$ 且令 $f \in W^{1,\,p}$（$\mathbb{R}^n$）对于某个 $\max\{1, \frac{2n}{n+4s}\} \leq p < \frac{n}{2s}$。如果存在一个非空有界 Lipschitz 域 Ω，使得

$$\mathcal{A}_s f = 0 \ in \ \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \quad f = 0 \ in \ \Omega,$$

则 $f \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

证明。 根据（5.8），我们知道 $g := \mathcal{A}_s f \in W^{1,\,p}$（$\mathbb{R}^n$）其中 $p \geq 2$。由于 g 具有紧支撑，且 $0 < s < 1$，因此 $g \in H^1$（$\mathbb{R}^n$） $\subset H^s$（$\mathbb{R}^n$）。由（5.6）可得

$$(-\Delta)^s g = 0 \text{ in } \Omega, \quad g = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

由于 0 不是（$-\Delta$）的特征值[s]（这是 [LL19，命题 3，3] 或 [RO16，推论 5 的结果2]），因此我们知道 $g \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。于是，再次利用引理 5.7，我们得到 $f \equiv (-\Delta)^s g \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。□

5.5. 锥变换的反局部性。 该加权射线变换与锥变换有关。锥变换出现在不同的成像方法中，尤其是在所谓的康普顿相机所提供数据的建模中。康普顿相机在医学成像、工业成像、国土安全和伽马射线天文学等领域具有独特的应用，见 [KT17]。设 $\mathfrak{C}$（u， β， ψ）为顶点为 $u \in \mathbb{R}^n$、中心轴为 $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且开口角为 $\psi \in$ （0， π）的锥体，即

$$\mathfrak{C}(u, \beta, \psi) := \left\{ \ x \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ (x-u) \cdot \beta = |x-u| \cos\psi \ \right\}.$$

接下来，参照 [KT17]，我们引入加权锥变换。

定义 5.13. 对于每个 $-1 < k < n-1$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，第 k 个加权锥变换定义为：

$$(\mathcal{C}^k f)(u, \beta, \psi) = \int\limits_{\mathfrak{C}(u,\beta,\psi)} f(x) \, |x-u|^{k-n+2} \, \mathrm{d}S_x,$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是锥 $\mathfrak{C}(u, \beta, \psi)$ 上的表面测度。

值得一提的是，锥变换与动量射线变换$I^k \equiv \mathcal{X}_{\underline{k+1}}$有关，具体而言，[2]

$$\int\limits_0^\pi (\mathcal{C}^k f)(u, \beta, \psi) h(\cos(\psi)) \, \mathrm{d}\psi = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} (I^k f)(u, \sigma) h(\sigma \cdot \beta) \, \mathrm{d}\sigma \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{5.10}$$

对于 $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 这类在 $t = \pm 1$ 附近正则的所有分布，参见 [KT17，（19）]。令 $s = \frac{k+1}{2} \in (0, \frac{n}{2})$，并在（ $h \equiv c(n,-s)$ 中取5.10，可得

$$c(n,-s) \int\limits_0^\pi (\mathcal{C}^{2s-1} f)(u, \beta, \psi) \, \mathrm{d}\psi = c(n,-s) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} (\mathcal{X}_s f)(u, \sigma) \, \mathrm{d}\sigma = (\mathcal{A}_s f)(u) \quad \text{for all } u \in \mathbb{R}^n$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。因此，作为定理 III的推论，我们立即得到锥变换的反局部性。

推论 5.14。设 $n \geq 2$ 为整数，$0 < s \leq \frac{n}{4}$ 满足 $s \neq \mathbb{Z}$，并设 $f \in L^{\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n)$。假设存在 $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 U，使得 $f = 0$ 属于 U，且

$$(\mathcal{C}^{2s-1} f)(u, \beta, \psi) = 0 \quad \textit{for all } (u, \psi) \in U \times (0, \pi),$$

则 $f \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

Appendix A. Negative power of elliptic operator

本附录的主题是阐明某种加权X射线变换与某类椭圆算子的负幂在某个自然定义域上的联系。令 $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,\ j=1}^{n} \in (C^\infty(\mathbb{R}^n))^{n\times n}$ 使得对所有 i、$j = 1$、$\cdots$、n，均有 $a_{ij} = a_{ji}$。假设 A 满足以下椭圆性条件：存在一个常数 $0 < c < 1$，使得

$$c|\xi|^2 \leq \xi \cdot A(x)\xi \leq c^{-1}|\xi|^2 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n. \tag{A.1}$$

众所周知，算子 $-\nabla \cdot A\nabla$ 定义域为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 的自伴扩张最大[3]，且在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密定义，参见 [Gri09，定理 4。6]根据实希尔伯特空间中自伴算子的谱定理（参见 [Gri09，附录 A.5）4], ，存在唯一的谱分解(亦称单位分解)$\{E_\lambda\}$，位于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中，对应于 $-\nabla \cdot A\nabla$，使得

$$(-\nabla \cdot A\nabla f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty \lambda \, \mathrm{d}(E_\lambda f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ 以及 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$。关于谱分解的详细性质可参见 [Gri09，附录A.5。3], 此处我们仅陈述其中一些性质。设 $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ 是 $\mathbb{R}$上的博雷尔函数。利用里斯表示定理（另见 [Gri09，（A.38）]），可以定义自伴算子 $\varphi(-\nabla \cdot A\nabla)$，其定义为

$$(\varphi(-\nabla \cdot A\nabla) f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}(E_\lambda f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \equiv \left(\int_0^\infty \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda f, g \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

对所有 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 以及

$$f \in \operatorname{dom}\left(\varphi(-\nabla \cdot A\nabla)\right) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \int_0^\infty |\varphi(\lambda)|^2 \, \mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}. \tag{A.2}$$

可以利用映射 $\varphi(\lambda) = \lambda^{-s}$ 定义 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$。然而，一般而言$\nabla \cdot A\nabla$： $H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 不是单射，因此定义域 $\operatorname{dom}((-\nabla \cdot A\nabla)^{-s})$ 在某种程度上是人为的。本附录的主题是要在适当的定义域上定义 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$。

根据 [Gri09，（A.32）], 我们知道 $\operatorname{dom}(e^{t\nabla \cdot A\nabla}) = L^2(\mathbb{R}^n)$ 对所有 $t > 0$成立。基于此，我们可以定义热半群的作用以及（阶为

[3]算子 $-\nabla \cdot A\nabla$ 在定义域 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$上不是自伴的。

$s>0$）作用于 $-\nabla\cdot A\nabla$ 的形式为

$$e^{t\nabla\cdot A\nabla}f := \int_0^\infty e^{-t\lambda}\,\mathrm{d}E_\lambda f \quad \text{for all } f\in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ and } t>0,$$

$$(-\nabla\cdot A\nabla)^s f := \int_0^\infty \lambda^s\,\mathrm{d}E_\lambda f \quad \text{for all } f\in \operatorname{dom}\left((-\nabla\cdot A\nabla)^s\right).$$

利用 [Gri09的定理 7.6、7.7 和 7.13]，，我们知道有界算子 $e^{t\nabla\cdot A\nabla}$具有一个唯一的对称（热）核 $k_t^A(x,y)$：对每个 $0<t<\infty$ 和 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left(e^{t\nabla\cdot A\nabla}f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t^A(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{for all} \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

另见 [QX21，定理 2]。此外，存在正常数 b_1、b_2、c_1、c_2，使得

$$c_1 t^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-b_1\frac{|x-y|^2}{t}\right)\le k_t^A(x,y)=k_t^A(y,x)\le c_2 t^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-b_2\frac{|x-y|^2}{t}\right), \tag{A.3}$$

对所有 $t>0$ 和 x、$y\in\mathbb{R}^n$均成立，见[Dav89第 3]章。关于抽象度量测度空间上热核 [GT12] 的双侧估计的证明，参见 k_t^M；这推广了黎曼流形以及各种类型分形上已有的结果。此外，热核还是守恒的（或随机完备的）[4]，，即

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_t^A(x,y)\,\mathrm{d}y = 1 \quad \text{for all } t>0 \text{ and } x\in\mathbb{R}^n.$$

鉴于（5.9），现在自然可以考虑以下定义。

定义 A.1（加权X射线变换）。设 $n\ge 2$ 为整数，并设 $0<s<\frac{n}{2}$。对于每个 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们定义

$$\left(\mathcal{X}_s^A f\right)(x,\xi) := \int_0^\infty w(x,x+\tau\xi)f(x+\tau\xi)\,\mathrm{d}\tau,$$

其中权函数定义为

$$w(x,y) := \frac{1}{\Gamma(s)c(n,-s)}|y-x|^{n-1}\int_0^\infty k_t^A(x,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \quad \text{for all } x\ne y\in\mathbb{R}^n,$$

球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的平均值定义为

$$\left(\mathcal{A}_s^A f\right)(x) := c(n,-s)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\mathcal{X}_s^A f\right)(x,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi \equiv \frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty k_t^A(x,y)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}}\right)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{A.4}$$

[4]这些术语见 [GHL14、GT12]。另请参阅 [Dav89，定理 1.4。4] 其中给出了一个抽象结果。

由（5.7）和（A.3），我们可以轻松得出以下引理。

引理 A.2. 设 $n \geq 2$ 为整数，且 $1 \leq p < \frac{n}{2s}$ 满足 $0 < s < \frac{n}{2}$。令 $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n} \in (C^\infty(\mathbb{R}^n))^{n\times n}$，使得对所有 i、$j = 1$、$\cdots$、n 均有 $a_{ij} = a_{ji}$，并满足椭圆性条件 (A.1)。则

$$\mathcal{A}_s^A : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) \text{ is bounded,}$$

其中 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2s}{n}$。特别地，当 $0 < s < \frac{n}{4}$ 时，算子

$$\mathcal{A}_s^A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^{\frac{2n}{n-4s}}(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{A}_s^A : L^{\frac{2n}{n+4s}}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

是有界的。

利用上述引理，我们知道

$$(\mathcal{A}_s^A|f|)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left| k_t^A(x,y) \frac{1}{t^{1-s}} f(y) \right| \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y < \infty \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

只要 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 对某个 $p \in [1, \frac{n}{2s})$。因此，我们可以在 (A.4) 上应用富比尼定理，得到

$$\left(\mathcal{A}_s^A f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} k_t^A(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right) \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}} \equiv \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (e^{t\nabla\cdot A\nabla} f)(x) \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-s}}$$

对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 对某个 $p \in [1, \frac{n}{2s})$。鉴于（5.6），于是我们可以定义 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$，并为其指定一个合适的定义域，而不采用 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$中给出的、人为设定的定义域 $\mathrm{dom}\,((-\nabla \cdot A\nabla)^{-s})$，该定义见（A.2）。

定义 A.3。设 $n \geq 2$ 为整数，且 $1 \leq p < \frac{n}{2s}$ 满足 $0 < s < \frac{n}{2}$。令$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n} \in (C^\infty(\mathbb{R}^n))^{n\times n}$，使得 $a_{ij} = a_{ji}$对所有 i、$j = 1$、$\cdots$、n均成立，并满足椭圆性条件（A.1）。则有界线性算子 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$: $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$，其中 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2s}{n}$，定义为

$$(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s} f := \mathcal{A}_s^A f$$

对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$。

注 A.4。 算子 $(-\nabla \cdot A\nabla)^{-s}$对于 $s \in \mathbb{C}$满足 $\Re(s) > 0$也可以使用定义域范围为（A^m）的 Balakrishnan 算子来定义，其中 m 是满足以下条件的最小整数$m > \Re(s)$，参见[MCSA01，定义 7.2。1]。

References

[AM19] A. Abhishek 和 R. K. Mishra。对称 m-张量场积分矩的支撑定理及一项单射性结果。*J. Fourier Anal. Appl.*，25(4):1487–1512，2019。MR3977125，Zbl:07077712，doi:10.1007/s00041-018-09649-7，arXiv:1704.02010。[AKS22] D. Agrawal、V. P. Krishnan 和 S. K. Sahoo。对称张量场的某些广义射线变换的唯一延拓结果。*J. Geom. Anal.*，32(10)，2022。论文编号 245，共 27 页。MR4456212，Zbl:1502.46028，doi:10.1007/s12220-022-00981-5。

[BKS21] S. Bhattacharyya、V. P. Krishnan 和 S. K. Sahoo。利用部分边界数据唯一确定多调和算子的各向异性扰动。 *arXiv preprint*，2021。arXiv:2111.07610。[CMR21] G. Covi、K. M¨onkk¨onen 和 J. Railo。高阶分数阶拉普拉斯算子的唯一延拓性质与 Poincar´e 不等式及其在逆问题中的应用。 *Inverse Probl. Imaging*，15 4 641 681，2021 4259671，1471 35327，10 3934 2021009，2001 06210 ( ): – 。MR Zbl: 。doi: 。/ipi。arXiv:。 。[DS11] N. S. Dairbekov 和 V. A. Sharafutdinov。黎曼流形上的共形 Killing 对称张量场。 *Siberian Adv. Math.*，21(1):1–41，2011。MR2682769，Zbl:1249.53050，doi:10.3103/s1055134411010019。[Dav89] E. B. Davies。 *Heat kernels and spectral theory* 92 *Cambridge Tracts in* ，第 卷。剑桥大 *Mathematics* 1989 0990239， 0699 35006 学出版社，剑桥，。MR Zbl:。doi:10.1017/CBO9780511566158。[FRS92] A. Faridani、E. L. Ritman 和 K. T. Smith。局部断层成像。 *SIAM J. Appl. Math.*，52(2):459–484，1992。MR1154783，Zbl:0758.65081，doi:10.1137/0152026。[GFR19] M.- ´A Garc´ıa-Ferrero 和 A. R¨uland。高阶分数阶拉普拉斯算子的强唯一延拓。 *Mathematics in Engineering*，1(4):715–774，2019。MR4138565，Zbl:1436.35318 doi:10.3934/mine.2019.4.715，arXiv:1902.09851。[Gho22] T. Ghosh。具有边界响应的非局部反问题。 *Rev. Mat. Iberoam.*，38(6):2011–2032，2022。MR4516180，Zbl:07628552，doi:10.4171/RMI/1323，arXiv:2011.07060。[GRSU20] T. Ghosh、A. R¨uland、M. Salo 和 G. Uhlmann。单次测量下分数阶 Calder ´ *Journal of Functional Analysis* 279 1 108505, on 问题的唯一性 2020 4083776， 1452 35255， 10 1016 2020 108505， 1801 04449 与重建。， ( ):。MR Zbl:。doi:。/j.jfa.。arXiv:。。[GSU20] T. Ghosh、M. Salo 和 G. Uhlmann。分数阶 Schr¨ odinger 方程的 Calder´on 问题。 *Anal. PDE*，13(2):455–475，2020。MR4078233，Zbl:1439.35530，doi:10.2140/apde.2020.13.455，arXiv:1609.09248。[Gri09] A. Grigor'yan。 *Heat kernel and analysis on manifolds* 47 *AMS/IP Studies in Advanced* ，第 卷。美国数 *Mathematics* 学会/国际出版社，普罗维登斯，罗得岛州/波士顿，马萨诸塞州，2009。MR2569498，Zbl:1206.58008，doi:10.1090/amsip/047。[GHL14] A. Grigor'yan、J. Hu 和 K.-S. Lau。度量测度空间上的热核。载于 *Geometry and analysis of fractals* 88 *Springer Proc. Math. Stat.* 147 207 ，第 卷，第 – 页。 施普林格，海德堡，2014。MR3276002，Zbl:1323.58018，doi:10.1007/978-3-662-43920-3 6。[GT12] A. Grigor'yan 和 A. Telcs。度量测度空间上热核的双侧估计。*Ann. Probab.*，40(3):1212–1284，2012。MR2962091，Zbl:1252.35148，doi:10.1214/11-AOP645，arXiv:1205.5627。[Hel99] S. Helgason。 *The Radon transform*，第 5 卷，收入 *Progress in Mathematics*。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，第二版，1999。MR1723736，Zbl:0932.43011，doi:10.1007/978-1-4757-1463-0。[Ilm21] J. Ilmavirta。分析与 X 射线断层成像。 *Lecture note*，2021。arXiv:1711.06557。[IM20] J. Ilmavirta 和 K. M¨onkk¨onen。X 射线变换正规算子的唯一延拓及其在地球物理学中的应用。 *Inverse Problems*，36(4)，2020。045014，共 23 页。MR4103726，Zbl:1477.44002，doi:10.1088/1361-6420/ab6e75，arXiv:1909.05585。[IM21] J. Ilmavirta 和 K. M ¨ ¨ *SIAM* onkkonen。部分 *J. Math. Anal.* 53 3 3002 3015, 2021 4261111， 1477 46047， 10 1137 20 1344779， 数据下 1-形式的 X 射线断层成像。， ( ): –。MR Zbl:。doi:。/ M arXiv:2006.05790。[IM22] J. Ilmavirta 和 K. M¨ onkk¨onen。标量场与向量场断层成像中的部分数据问题与唯一延拓。 *J. Fourier Anal. Appl.*，28(2)，2022。论文编号 34，共 17 页。MR4402144，Zbl:1495.44003，doi:10.1007/s00041-022-09907-9。[Isa07] V. Isakov。局部数据下逆电导率问题的唯一性。 *Inverse Probl.* ， ( ): –。MR *Imaging* 1 1 95 105, 2007 2262748， 1125 35113， 10 3934 2007 1 95 Zbl:。doi:。/ipi。。。。[KQR15] E. Klann、E. T. Quinto 和 R. Ramlau。用于感兴趣区域断层成像加权稀疏惩罚项的小波方法。 *Inverse Problems*，31(2)，2015。025001，共 22 页。MR3303166，Zbl:1312.65213，doi:10.1088/0266-5611/31/2/025001。

[Kri07] V. P. Krishnan。 *A support theorem and an inversion formula for the geodesic ray transform*。博士论文，华盛顿大学，2007 年。57 页。MR2710601，ProQuest:304807823。[KMSS19] V. P. Krishnan、R. Manna、S. K. Sahoo 和 V. A. Sharafutdinov。动量射线变换。 *Inverse Probl. Imaging* 13 3 679 701, 2019 3959332, 1426 44002, 10 3934 2019031, , （）：–。MR Zbl：。doi：。/ipi。arXiv:1808.00768。[KMSS20] V. P. Krishnan、R. Manna、S. K. Sahoo 和 V. A. Sharafutdinov。动量射线变换 II：施瓦茨空间中的值域刻画。 *Inverse Problems*，36(4)，2020 年。045009，33 页。MR4075194，Zbl:1476.44002，10.1088/1361-6420/ab6a65，arXiv:1909.07682。[KT17] P. Kuchment 和 F. Terzioglu。加权发散束 *Inverse* 变换和锥变换的反演。*Probl. Imaging* 11 6 1071 1090, 2017 3708176, 1372 44004, 10 3934 2017049, , （）：–。MR Zbl：。doi：。/ipi。arXiv:1612.06772。[Kwa17] M. Kwa´snicki。分数阶拉普拉斯算子的十种等价定义。 *Fractional Calculus and Applied Analysis* 20 1 7 51, 2017 3613319, 1375 47038, 10 1515 2017 0002, , （）：–。MR Zbl：。doi：。/fca- - arXiv:1507.07356。[LL19] R.-Y. Lai 和 Y.-H. Lin。分数阶半线性薛定谔方程的整体唯一性。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，147(3):1189–1199，2019 年。MR3896066，Zbl:1406.35468，doi:10.1090/proc/14319，arXiv:1710.07404。[MCSA01] C. Mart´ınez Carracedo 和 M. Sanz Alix。 *The theory of fractional powers of operators*， *North-Holland Mathematics Studies*的第 187 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，2001 年。MR1850825，Zbl:0971.47011。[MS21] R. K. Mishra 和 S. K. Sahoo。 m-张量场上的积分动量变换的单射性及值域描述。 *SIAM J. Math. Anal.*，53(1):253–278，2021 年。MR4198570，Zbl:1464.44002，doi:10.1137/20M1347589，arXiv:2006.13102。[Par00] L. C. Parra。由康普顿散射数据重建锥束投影。 *IEEE Trans.*, （）：–。doi：。/。*Nucl. Sci.* 47 4 1543 1550, 2000 10 1109 23 873014

[PSU23] G. Paternain、M. Salo 和 G. Uhlmann。 *Geometric inverse problems with emphasis on two dimensions* 204 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* ，卷。剑桥大学出版社，剑桥，2023 年。MR4520155，Zbl:07625517，doi:10.1017/9781009039901。[QX21] Z. Qian 和 G. Xi。具有无散漂移的椭圆算子生成的马尔可夫半群。 *J. Math. Anal. Appl.*，499(1)，2021 年。论文编号 125021，共 12 页。MR4212073，Zbl:1461.35116，doi:10.1016/j.jmaa.2021.125021，arXiv:1706.06317。[Qui06] E. T. Quinto。X 射线断层成像与拉东变换导论。在 *Radon transform inverse problems and tomography* 63 *Inv.* ，*Proc. Sympos. Appl. Math.* 1 23 的第 卷，第–页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州。2006 2208234, 1118 44002, MR Zbl：。doi:10.1090/psapm/063/2208234。[RO16] X. Ros-Oton。有界区域中的非局部椭圆方程：综述。 *Publ. Mat.*，60 16，2016 1 3 3447732，1504 04099（）：–。MR https://projecteuclid.org, arXiv：。。[SS23] S. K. Sahoo 和 M. Salo。多调和算子的线性化 Calder´on 问题。，：–。MR *J. Differ- ential Equations* 360 407 451, 2023 4562046, 1512 35678, 10 1016 2023 03 Zbl：。doi：。/j.jde。。017，2207 05803。。[Sha94] V. A. Sharafutdinov。 *Integral geometry of tensor fields*。逆问题与不适定问题丛书。德格鲁伊特出版社，柏林-纽约，1994 年。MR1374572，Zbl:0883.53004，doi:10.1515/9783110900095。[Smi05] B. D. Smith。两种康普顿数据模型的重建方法与完备性条件。*J. Opt. Soc. Am. A*，22(3):445–459，2005 年。PMID:15770982，doi:10.1364/josaa.22.000445。[Sti19] P. R. Stinga。分数阶拉普拉斯算子与半群方法使用指南。在 *of fractional calculus with applications* 2, 235 265 *Handbook* 2019 ，卷 页–。德格鲁伊特出版社，柏林。MR3965397，doi:10.1515/9783110571660-012，arXiv:1808.05159。[Tay11] M. E. Taylor。 *Partial differential equations I. Basic theory*， *Applied Math- ematical Sciences* 115 2011 2744150, 1206 35002, 的第 卷。施普林格，纽约，第二版。MR Zbl：。doi:10.1007/978-1-4419-7055-8。[TH02] T. Tomitani 和 M. Hirasawa。由有限角度康普顿相机数据进行图像重建。*Phys. Med. Biol.*，47(12):2129–2145，2002 年。PMID:12118605，doi:10.1088/0031-9155/47/12/309。

Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, Finland.E-mail: joonas.ilmavirta@jyu.fiORCID: 0000-0002-2399-0911

Department of Mathematical Sciences, National Chengchi University, Taiwan.E-mail: pzkow@g.nccu.edu.twORCID: 0000-0002-2990-3591

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Bombay.E-mail: suman@math.iitb.ac.inORCID: 0000-0002-6459-1597