arXiv:2304.00339v1 [math.NT] 1 Apr 2023

有理数域 Q($\sqrt[12]{a}$) 的判别式与整基

SURENDER KUMAR 和 ANUJ JAKHAR

Abstract. 设 m 是一个十二次幂自由整数。令 K =Q(θ) 为由不可约多项式 $x^{12}-m$ 的一个复根 θ 定义的代数数域，且 O_K 为其整数环。在本文中，对于每个素数 p，我们确定 p 整除子群 Z[θ] 在 O_K 中的指数的最高次幂，并给出 K 的 p-整基。这些 p-整基可用于构造 K 的整基，文中通过实例加以说明。特别地，当 m 是平方自由整数时，我们给出集合 $\{1,\theta,\theta^2,\cdots,\theta^{10},\theta^{11}\}$ 构成 K. 的整基的充要条件。

1. 引言

设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是有理数域 Q 上一个次数为 n 的首一不可约多项式。令 K = Q(θ) 为一个代数数域，其中 θ 是 $f(x)$ 的一个根，且 O_K 为其代数整数环。数域判别式的计算与整基的构造是代数数论中的主要问题。近年来，许多数学家（[1], [3], [4], [5], [10], [11]）对此研究领域表现出兴趣。1897年，Landsberg [2] 给出了纯素数次数数域判别式的一个公式。1900年，Dedekind [1] 给出了纯三次数域的一个显式整基。1984年，Funakura [3] 给出了所有纯四次数域的一个整基及其判别式公式。2015年，Hameed 和 Nakahara [4] 给出了纯八次数域 Q($\sqrt[8]{a}$) 的判别式公式，其中 a 是平方自由整数。2022 年，Jakhar [8] 为由不可约多项式 $x^{p_1p_2}-a \in \mathbb{Z}[x]$ 的一个根定义的数域给出了一个显式 p-整基，其中 p_1 和 p_2 是不同的素数。

设 p 为一个素数，$\mathbb{Z}_{(p)}$ 表示整数环 Z 在素理想 pZ 处的局部化。则代数数域 K（其次数为 n ）中 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 的整闭包 $R_{(p)}$ 是一个以 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为基环、秩为 n的自由模。模 $R_{(p)}$ 的一组 $\mathbb{Z}_{(p)}$-基称为 K的 p-整基。

本文中，设 K =Q(θ) 是一个代数数域， θ 是不可约多项式 $f(x) = x^{12}-m$ 的一个根，其中 m 是十二次幂自由整数。我们的目标是确定任意素数 p 的最高次幂，该素数整除子群 Z[θ] 在

2010年数学主题分类。11R04，11R29。关键词与短语：代数整数环、判别式、单生成性。第一作者感谢大学拨款委员会新德里分部通过编号1129/(CSIR-NET 2019年6月)提供初级研究奖学金形式的经费支持。第二作者感谢 SERB 资助项目 SRG/2021/000393。

O_K 中的指数，并构造 K 的 p-整基。我们将子群 $\mathbb{Z}[\theta]$ 在 O_K 中的指数记为 $\text{ind } \theta$.。容易验证，多项式 $f(x)$ 的判别式 D_f 为

$$D_f = -2^{24}3^{12}m^{11}. \tag{1.1}$$

2. Main results and Examples

下文中，对于素数 p 以及属于 p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的非零元素 t ， $v_p(t)$表示整除 t 的 p 的最高次幂。对于任意非零整数 c 和有理素数 p，令 $c_p = \frac{c}{p^{v_p(c)}}$。对于素数 p 及整数 a、b，我们用 $a \equiv b(p)$表示 $a \equiv b$模 p。

定理 2.1. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 是一个代数数域，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^{12} - m$ 的一个根，且 m 是十二次幂自由整数。设 $p \in \{2, 3\}$ 是同时整除 m 和 $v_p(m)$ 的素数。则当素数分别为 $p = 2$ 和 $p = 3$ 时， $v_p(\text{ind } \theta)$ 和一个 p-整基分别由表 1 和表 2 给出。

Table 1. 2-整基，取值为 $v_2(\text{ind } \theta)$。

情形	$v_2(m)$	条件	v_2(指标 θ)	2-整基
A1	2	$m_2 \equiv 1\ (4)$	12	$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-2}{2^2}, \frac{\theta^7-2\theta}{2^2}, \frac{\theta^8-2\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9-2\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^{10}-2\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^{11}-2\theta^5}{2^2}\}$
A2	2	$m_2 \equiv 3\ (8)$	13	$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-2\theta^3+6}{2^2}, \frac{\theta^7-2\theta^4+6\theta}{2^2}, \frac{\theta^8-2\theta^5+6\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9-2\theta^6+6\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^{10}-2\theta^7+6\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^{11}-2\theta^8+6\theta^5}{2^3}\}$
A3	2	$m_2 \equiv 7\ (8)$	15	$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-2\theta^3+2}{2^2}, \frac{\theta^7-2\theta^4+2\theta}{2^2}, \frac{\theta^8-2\theta^5+2\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9-2\theta^6+2\theta^3}{2^3}, \frac{\theta^{10}-2\theta^7+2\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^{11}-2\theta^8+2\theta^5}{2^3}\}$
A4	4	$m_2 \equiv 3\ (4)$	21	$\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}, \frac{\theta^5}{2}, \frac{\theta^6+4\theta^3+12}{2^2}, \frac{\theta^7+4\theta^4+12\theta}{2^2}, \frac{\theta^8+4\theta^5+12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^9+2\theta^6+4\theta^3+8}{2^3}, \frac{\theta^{10}+2\theta^7+4\theta^4+8\theta}{2^4}, \frac{\theta^{11}+2\theta^8+4\theta^5+8\theta^2}{2^4}\}$
A5	4	$m_2 \equiv 5\ (8)$	26	$\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3+6}{2}, \frac{\theta^4+6\theta}{2}, \frac{\theta^5+6\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^6+4\theta^3+12}{2^3}, \frac{\theta^7+4\theta^4+12\theta}{2^3}, \frac{\theta^8+4\theta^5+12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^9+2\theta^6+4\theta^3+8}{2^4}, \frac{\theta^{10}+2\theta^7+4\theta^4+8\theta}{2^4}, \frac{\theta^{11}+2\theta^8+4\theta^5+8\theta^2}{2^5}\}$
A6	4	$m_2 \equiv 1\ (8)$	28	$\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3+6}{2}, \frac{\theta^4+6\theta}{2}, \frac{\theta^5+6\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^6+4\theta^3+12}{2^3}, \frac{\theta^7+4\theta^4+12\theta}{2^3}, \frac{\theta^8+4\theta^5+12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^9+2\theta^6+4\theta^3+8}{2^5}, \frac{\theta^{10}+2\theta^7+4\theta^4+8\theta}{2^5}, \frac{\theta^{11}+2\theta^8+4\theta^5+8\theta^2}{2^5}\}$
A7	6	$m_2 \equiv 1\ (4)$	36	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{\theta^6+8}{2^4}, \frac{\theta^7+8\theta}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}\}$, $q_1(\theta) = \theta^{10} - 2\theta^9 + 2\theta^8 - 4\theta^6 + 8\theta^5 - 8\theta^4 + 16\theta^2 + 32\theta + 32$ 和 $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^7 + 2\theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 8\theta^3 + 8\theta^2 - 16\theta + 16$
A8	6	$m_2 \equiv 3\ (8)$	36	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{s(\theta)}{2^4}, \frac{r(\theta)}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}\}$, $q_1(\theta) = \theta^{10} + 2\theta^8 + 4\theta^6 + 8\theta^4 + 16\theta^2 + 32$, $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^6 + 8\theta^2 - 16$和$s(\theta) = \theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 + 4\theta^3 - 8$和 $r(\theta) = \theta^7 + \theta^6 - 4\theta^5 + 4\theta^4 + 4\theta^3 + 8\theta - 8$
A9	6	$m_2 \equiv 7\ (8)$	39	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{q_4(\theta)}{2^4}, \frac{q_3(\theta)}{2^5}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}\}$, $q_1(\theta) = \theta^{10} - 2\theta^9 + 2\theta^8 - 4\theta^6 + 8\theta^5 - 8\theta^4 + 16\theta^2 + 32\theta + 32$, $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^7 + 2\theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 8\theta^3 + 8\theta^2 - 16\theta + 16$, $q_3(\theta) = \theta^7 - 2\theta^6 + 4\theta^4 - 8\theta^3 - 24\theta + 16$, 以及 $q_4(\theta) = \theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 12\theta^3 - 16\theta + 8$
A10	8	$m_2 \equiv 1\ (8)$	50	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3-12}{2^2}, \frac{\theta^4-12\theta}{2^3}, \frac{\theta^5-12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^6-8\theta^3+48}{2^5}, \frac{\theta^7-8\theta^4+48\theta}{2^5}, \frac{\theta^8-8\theta^5+48\theta^2}{2^6}, \frac{\theta^9-4\theta^6+16\theta^3+8}{2^8}, \frac{\theta^{10}-4\theta^7+16\theta^4+8\theta}{2^8}, \frac{\theta^{11}-4\theta^8+16\theta^5+8\theta^2}{2^9}\}$

A11	8	$m_2 \equiv {}^{5\ (8)}$	48	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3-12}{2^2}, \frac{\theta^4-12\theta}{2^3}, \frac{\theta^5-12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^6-8\theta^3+48}{2^5}, \frac{\theta^7-8\theta^4+48\theta}{2^5}, \frac{\theta^8-8\theta^5+48\theta^2}{2^6}, \frac{\theta^9-4\theta^6+16\theta^3-64}{2^7}, \frac{\theta^{10}-4\theta^7+16\theta^4-64\theta}{2^8}, \frac{\theta^{11}-4\theta^8+16\theta^5-64\theta^2}{2^8}\}$
A12	8	$m_2 \equiv {}^{3\ (4)}$	43	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_3(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^4}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^8}\}$, $q_1(\theta) = \theta^9 - 4\theta^6 + 16\theta^3 - 64$, $q_2(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 48$, 以及 $q_3(\theta) = \theta^3 - 12$
A13	10	$m_2 \equiv {}^{1\ (4)}$	56	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{\theta^6-32}{2^6}, \frac{\theta^7-32\theta}{2^6}, \frac{\theta^8-32\theta^2}{2^7}, \frac{\theta^9-32\theta^3}{2^8}, \frac{\theta^{10}-32\theta^4}{2^9}, \frac{\theta^{11}-32\theta^5}{2^{10}}\}$
A14	10	$m_2 \equiv {}^{3\ (8)}$	57	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{\theta^6-8\theta^3+96}{2^6}, \frac{\theta^7-8\theta^4+96\theta}{2^7}, \frac{\theta^8-8\theta^5+96\theta^2}{2^7}, \frac{\theta^9-8\theta^6+96\theta^3}{2^8}, \frac{\theta^{10}-8\theta^7+96\theta^4}{2^9}, \frac{\theta^{11}-8\theta^8+96\theta^5}{2^{10}}\}$
A15	10	$m_2 \equiv {}^{7\ (8)}$	59	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{\theta^6-8\theta^3+32}{2^6}, \frac{\theta^7-8\theta^4+32\theta}{2^7}, \frac{\theta^8-8\theta^5+32\theta^2}{2^8}, \frac{\theta^9-8\theta^6+32\theta^3}{2^9}, \frac{\theta^{10}-8\theta^7+32\theta^4}{2^9}, \frac{\theta^{11}-8\theta^8+32\theta^5}{2^{10}}\}$

TABLE 2. 3-整基的值为 $v_3(\mathrm{ind}\,\theta)$。

情形	$v_3(m)$	条件	v_3（指标 θ）	3-整基
B1	3	$m_3 \equiv {}^{\delta\ (9)}$	18	$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \frac{\theta^4+6\delta}{3}, \frac{\theta^5+6\delta\theta}{3}, \frac{\theta^6+6\delta\theta^2}{3^2}, \frac{\theta^7+6\delta\theta^3}{3^2}, \frac{\theta^8+3\delta\theta^4+9}{3^3}, \frac{\theta^9+3\delta\theta^5+9\theta}{3^3}, \frac{\theta^{10}+3\delta\theta^6+9\theta^2}{3^3}, \frac{\theta^{11}+3\delta\theta^7+9\theta^3}{3^3}\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$
B2	3	$m_3 \underset{(9)}{\not\equiv} {}^{\delta}$	15	$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \frac{\theta^4+6\delta}{3}, \frac{\theta^5+6\delta\theta}{3}, \frac{\theta^6+6\delta\theta^2}{3}, \frac{\theta^7+6\delta\theta^3}{3^2}, \frac{\theta^8+3\delta\theta^4+9}{3^2}, \frac{\theta^9+3\delta\theta^5+9\theta}{3^2}, \frac{\theta^{10}+3\delta\theta^6+9\theta^2}{3^3}, \frac{\theta^{11}+3\delta\theta^7+9\theta^3}{3^3}\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$.
B3	6	$m_3 \equiv 1\ (9)$	36	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{\theta^4}{3^2}, \frac{\theta^5-9\theta}{3^3}, \frac{\theta^6-9\theta^2}{3^3}, \frac{z_1(\theta)}{3^4}, \frac{z_2(\theta)}{3^5}, \frac{\theta z_2(\theta)}{3^5}, \frac{q_1(\theta)}{3^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^6}\}$, $q_1(\theta) = \theta^{10}+3\theta^8+9\theta^6+27\theta^4+81\theta^2+243$, $z_1(\theta) = \theta^7-15\theta^5-9\theta^3-27\theta$ 以及 $z_2(\theta) = \theta^8 - 18\theta^4 - 162$
B4	6	$m_3 \equiv 4\ (9)$ $m_3 \equiv 7\ (9)$	32	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{\theta^4}{3^2}, \frac{\theta^5}{3^2}, \frac{\theta^6}{3^3}, \frac{\theta^7}{3^3}, \frac{\theta^8}{3^4}, \frac{\theta^9-18\theta^5-162\theta}{3^5}, \frac{z_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta_{q_1(\theta)}}{3^6}\}$, $q_1(\theta) = \theta^{10} + 3\theta^8 + 9\theta^6 + 27\theta^4 + 81\theta^2 + 243$
B5	6	$m_3 \equiv {}^{8\ (9)}$	36	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{\theta^4-18}{3^2}, \frac{\theta^5-18\theta}{3^3}, \frac{\theta^6-18\theta^2}{3^3}, \frac{\theta^7-18\theta^3}{3^4}, \frac{\theta^8-9\theta^4+81}{3^5}, \frac{\theta^9-9\theta^5+81\theta}{3^5}, \frac{\theta^{10}-9\theta^5+81\theta^2}{3^6}, \frac{\theta^{11}-9\theta^6+81\theta^3}{3^6}\}$
B6	6	$m_3 \equiv {}^{2\ (9)}$ $m_3 \equiv 5\ (9)$	32	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{\theta^4-18}{3^2}, \frac{\theta^5-18\theta}{3^2}, \frac{\theta^6-18\theta^2}{3^3}, \frac{\theta^7-18\theta^3}{3^3}, \frac{\theta^8-9\theta^4+81}{3^4}, \frac{\theta^9-9\theta^5+81\theta}{3^5}, \frac{\theta^{10}-9\theta^5+81\theta^2}{3^5}, \frac{\theta^{11}-9\theta^6+81\theta^3}{3^6}\}$
B7	9	$m_3 \equiv {}^{\delta\ (9)}$	51	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3^2}, \frac{\theta^4-54\delta}{3^3}, \frac{\theta^5-54\delta\theta}{3^4}, \frac{\theta^6-54\delta\theta^2}{3^5}, \frac{\theta^7-54\delta\theta^3}{3^5}, \frac{\theta^8+27\delta\theta^4+729}{3^7}, \frac{\theta^9+27\delta\theta^5+729\theta}{3^7}, \frac{\theta^{10}+27\delta\theta^6+729\theta^2}{3^8}, \frac{\theta^{11}+27\delta\theta^7+729\theta^3}{3^9}\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$
B8	9	$m_3 \underset{(9)}{\not\equiv} {}^{\delta}$	48	$\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3^2}, \frac{\theta^4-54\delta}{3^3}, \frac{\theta^5-54\delta\theta}{3^4}, \frac{\theta^6-54\delta\theta^2}{3^4}, \frac{\theta^7-54\delta\theta^3}{3^5}, \frac{\theta^8+27\delta\theta^4+729}{3^6}, \frac{\theta^9+27\delta\theta^5+729\theta}{3^7}, \frac{\theta^{10}+27\delta\theta^6+729\theta^2}{3^8}, \frac{\theta^{11}+27\delta\theta^7+729\theta^3}{3^8}\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$

定理 2.2. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 是一个代数数域，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^{12} - m$ 的一个根，且 m 是十二次幂自由整数。假设$d = \gcd(v_p(m), 12)$，且 p 是素数。则有以下结论：

（1）如果 $p \mid m$ 且 $p \nmid v_p(m)$，那么

$$v_p(\mathrm{ind}\,\theta) = \frac{1}{2}[11(v_p(m) - 1) + (d - 1)]$$

且 K 的一个 p-整基为

$$S = \left\{ \frac{\theta^i}{p^{\lfloor \frac{iv_p(m)}{12} \rfloor}} | \ 1 \leq i \leq 12 \right\}.$$

(2) 若 $p = 3$ 和 $p \nmid m$，则

$$v_3(\operatorname{ind} \theta) = \begin{cases} 4, & \text{if } m^2 \equiv 1 \ (9), \\ 0, & \text{if } m^2 \not\equiv 1 \ (9) \end{cases}$$

且 K 的一个 3-整基为

$$\begin{cases} 1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^7, \frac{h(\theta)}{3}, \frac{\theta h(\theta)}{3}, \frac{\theta^2 h(\theta)}{3}, \frac{\theta^3 h(\theta)}{3}, & \text{if } m^2 \equiv 1 \ (9), \\ 1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}, & \text{if } m^2 \not\equiv 1 \ (9), \end{cases}$$

其中 $h(\theta) = \theta^8 + m\theta^4 + 1$.

(3) 若 $p = 2$ 和 $p \nmid m$，则

$$v_2(\operatorname{ind} \theta) = \begin{cases} 9, & \text{if } m \equiv 1 \ (8), \\ 6, & \text{if } m \equiv 5 \ (8), \\ 0, & \text{if } m \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

且 K 的一个 2-整基为

$$\begin{cases} 1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-1}{2}, \frac{\theta(\theta^6-1)}{2}, \frac{\theta^2(\theta^6-1)}{2}, \frac{g(\theta)}{2^2}, \frac{\theta g(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 g(\theta)}{2^2}, & \text{if } m \equiv 1 \ (8), \\ 1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-1}{2}, \frac{\theta(\theta^6-1)}{2}, \frac{\theta^2(\theta^6-1)}{2}, \frac{\theta^3(\theta^6-1)}{2}, \frac{\theta^4(\theta^6-1)}{2}, \frac{\theta^5(\theta^6-1)}{2}, & \text{if } m \equiv 5 \ (8), \\ 1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}, & \text{if } m \equiv 3 \ (4), \end{cases}$$

其中 $g(\theta) = \theta^9 + \theta^6 + \theta^3 + 1$.

(4) 若 $p \nmid 12m$，则 $v_p(\operatorname{ind} \theta) = 0$ 和 $\{1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}\}$ 是 K 的 p-整基

以下推论可由上述定理直接得出。

推论 2.3. 设 m 是一个无平方因子整数，且 $K = \mathbb{Q}(\theta)$是由不可约多项式 $x^{12} - m$的一个复根 θ 定义的代数数域。那么，$\{1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}\}$ 是 K 的整基，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $2 \nmid m$, $3 \nmid m$, $m \equiv 3 \ (4)$ 和 $m^2 \not\equiv 1 \ (9)$。 (2) $2 \nmid m$, $3 \mid m$ 和 $m \equiv 3 \ (4)$。 (3) $2 \mid m$, $3 \nmid m$ 和 $m^2 \not\equiv 1 \ (9)$。 (4) $6 \mid m$。

2.1. 由 p-整基构造显式整基。设 ξ 是有理数域上的首一不可约多项式的一个根，且 $L = \mathbb{Q}(\xi)$。众所周知，存在一个整基 $\mathcal{B} := \{\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}\}$，属于 L，使得

$$\beta_0 = 1, \ \beta_i = \frac{a_{i0} + a_{i1}\xi + \cdots + a_{i(i-1)}\xi^{i-1} + \xi^i}{d_i}$$

其中 a_{ij}、 d_i 属于整数环Z，正整数 d_i 整除 d_{i+1}，对 $1 \leq i \leq n-1$成立；此外，$[O_L : \mathbf{Z}[\xi]] = \prod_{i=1}^{n-1} d_i$，且数 d_i 由 ξ 唯一确定（[12, 第2章，定理 13]）。固定一个素数 p，并令 $l_i = v_p(d_i)$，则 $v_p(\operatorname{ind}\xi) = l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1}$.。由于 L 的每个整基都是其 p-整基，因此 $\mathcal{B}_p^* := \{1, \frac{\beta_1 d_1}{p^{l_1}}, \cdots, \frac{\beta_{n-1} d_{n-1}}{p^{l_{n-1}}}\}$也如此。容易看出，若 $\mathcal{C} := \{1, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}\}$ 是 L 的另一个 p-整基，其中 γ_i's 的形式为

$$\gamma_i = \frac{c_{i0} + c_{i1}\xi + \cdots + c_{i(i-1)}\xi^{i-1} + \xi^i}{p^{k_i}}$$

对于 $1 \leq i \leq n-1$，若 c_{ij}、 $k_i \in$整数环 Z，那么将 $\mathcal{B}_p^*$ 的每个元素表示为 $\mathcal{C}$ 中元素的 $\mathbf{Z}_{(p)}$-线性组合，反之亦然，可知 $l_i = k_i \ \forall\ i$，因此

$$v_p(\operatorname{ind}\xi) = l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1} = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}. \tag{2.1}$$

这些 L 的 p-整基，其中 p 遍历所有整除 $\operatorname{ind}\xi$ 的素数，可以迅速导出 L 的一个整基。

下述定理（见 [5, 定理 2.2], ）描述了如何从所有 p-整基构造一个整基。证明从略。

定理 2.4. 设 $L =$ 有理数域 $\mathbf{Q}(\xi)$ 是一个次数为 n 的代数数域，其中 ξ 是代数整数。设 $\{\alpha_{r0}, \alpha_{r1}, \cdots, \alpha_{r(n-1)}\}$ 是 L 的一个 p_r-整基，$1 \leq r \leq s$，其中 $\alpha_{r0} = 1$、$\alpha_{ri} = \frac{c_{i0}^{(r)} + c_{i1}^{(r)}\xi + \cdots + c_{i\ (i-1)}^{(r)}\xi^{i-1} + \xi^i)}{p_r^{k_{i\ r}}}$，$1 \leq i \leq n-1$，其中 $c_{ij}^{(r)}$ 和 $0 \leq k_{i,r} \leq k_{i+1,r}$ 是整数。$_s$若 $c_{ij} \in \in$整数环 Z 满足 $c_{ij} \equiv c_{ij}^{(r)}$ ($p^{k_{i,\ r}}$)，对 $1 \leq r \leq s$ 成立，并且 t_i 表示 $\prod_{r=1} p^{k_{i_r\ r}}$，则$_{r=1}\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ 是 L 的一个整基，其中 $\alpha_0 = 1$、$\alpha_i = \frac{c_{i0} + c_{i1}\xi + \cdots + c_{i(i-1)}\xi^{i-1} + \xi^i}{t_i}$ 对于$1 \leq i \leq n-1$。

下面给出一些例子。

例 2.5. 设 $K = \mathbf{Q}(\theta)$ 是由 $f(x) = x^{12} - 2352$ 的一个根 θ 所定义的代数数域。由于 $f(x)$ 满足关于 3 的 Eisenstein判别法，因此它是一个不可约多项式。根据公式（1.1），$D_f = -2^{68}3^{23}7^{22}$. 应用定理 2.1，集合 $\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}, \frac{\theta^5}{2}, \frac{\theta^6+4\theta^3+12}{2^2}, \frac{\theta^7+4\theta^4+12\theta}{2^2}, \frac{\theta^8+4\theta^5+12\theta^2}{2^3}, \frac{\theta^9+2\theta^6+4\theta^3+8}{2^3}, \frac{\theta^{10}+2\theta^7+4\theta^4+8\theta}{2^4}, \frac{\theta^{11}+2\theta^8+4\theta^5+8\theta^2}{2^4}\}$ 是 K 的 2-整基，因此我们看到，$\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}, \frac{\theta^5}{2}\frac{\theta^6}{2^2}$， $\frac{\theta^7}{2^2}$， $\frac{\theta^8+4\theta^5+4\theta^2}{2^3}$， $\frac{\theta^9+2\theta^6+4\theta^3}{2^3}$， $\frac{\theta^{10}+2\theta^7+4\theta^4+8\theta}{2^4}$， $\frac{\theta^{11}+2\theta^8+4\theta^5+8\theta^2}{2^4}\}$ 是 K. 的 2-整基。利用定理 2.2，可得 $\{1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}\}$ 是 K 的 3-整基，且 $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \theta^6, \frac{\theta^7}{7}, \frac{\theta^8}{7}, \frac{\theta^9}{7}, \frac{\theta^{10}}{7}, \frac{\theta^{11}}{7}\}$ 是 K 的 7-整基。设 $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ 和 $p_3 = 7$. 。根据定理 2.4 的记号，我们看到 $r = 3$，并且可以取 $c_{82} = c_{85} = 28$（因为 $28 \equiv 4$ (8) 和 $28 \equiv 0$ (7)）， $c_{93} = 28$。此外， $42 \equiv 2$ (8)、$56 \equiv 8$ (16)、$-28 \equiv 4$ (16) 和 $-14 \equiv 2$ (16) 意味着我们可以选择 $c_{96} = 42$, $c_{10,\ 1} = c_{11,\ 2} = 56$, $c_{10,\ 4} = c_{11,\ 5} = -28$, $c_{10,\ 7} = c_{11,\ 8} = -14$, 否则取 $c_{ij} = 0$. 。因此，在

根据2.4，我们得出集合 $\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}, \frac{\theta^5}{2}, \frac{\theta^6}{4}, \frac{\theta^7}{28}, \frac{\theta^8+28\theta^5+28\theta^2}{56}, \frac{\theta^9+42\theta^6+28\theta^3}{56}, \frac{\theta^{10}-14\theta^7-28\theta^4+56\theta}{112}, \frac{\theta^{11}-14\theta^8-28\theta^5+56\theta^2}{112}\}$是 $K.$的整基

例2.6. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 是由 $f(x) = x^{12} - 60$ 定义的代数数域。根据关于 3 的 Eisenstein判别法，$f(x)$ 是不可约多项式。利用定理 2.1，$v_2(\text{ind}\,\theta) = 15$，且一个 2-整基由 $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-2\theta^3+2}{2^2}, \frac{\theta^7-2\theta^4+2\theta}{2^2}, \frac{\theta^8-2\theta^5+2\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9-2\theta^6+2\theta^3}{2^3}, \frac{\theta^{10}-2\theta^7+2\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^{11}-2\theta^8+2\theta^5}{2^3}\}$. 给出。根据定理 2.2，我们有 $v_p(\text{ind}\ \theta) = 0$，且对于任意奇素数 $p.$，一个 p-整基为 $\{1, \theta, \theta^2, \cdots\cdots, \theta^{10}, \theta^{11}\}$。因此，利用公式（1.1）以及 $D_f = [O_K : \text{整数环}[\theta]]^2 d_K$ 这一事实，可得 $d_K = -2^{16}3^{23}5^{11}$。利用定理 2.4，我们看到集合 $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-2\theta^3+2}{2^2}, \frac{\theta^7-2\theta^4+2\theta}{2^2}, \frac{\theta^8-2\theta^5+2\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9-2\theta^6+2\theta^3}{2^3}, \frac{\theta^{10}-2\theta^7+2\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^{11}-2\theta^8+2\theta^5}{2^3}\}$ 是 $K.$的一个整基。

例2.7. 设 $K =$ 有理数域(θ) 是由根 θ 定义的代数数域，该根是不可约多项式 $f(x) = x^{12} - 6a,$ 其中 a 是一个不被 6 整除的平方自由整数。 那么，根据推论 2.3， $\{1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{10}, \theta^{11}\}$ 是 $K.$的一个整基

3. Preliminary Results

下文将要用到的命题可由第2.1节直接推出。

命题 3.1. 设 $L =$ 有理数域(η) 是一个次数为 n 的代数数域，其中 η 是一个代数整数，且 p是一个有理素数。设 β_1、β_2、$\cdots$、β_{n-1}是 p-整的 L中形如 $\beta_i = \frac{\eta^i + \sum_{j=0}^{i-1} c_{i,j}\eta^j}{p^{k_i}}$ 的元素，其中 $c_{i,j}, k_i \in \mathbb{Z}$ 且 $0 \le k_i \le k_{i+1}$ 适用于 $1 \le i \le n-1$.$_{n-1}$那么，$\{1, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}\}$ 是 p-整的 L的一个整基，当且仅当 $v_p(\text{ind}\ \eta) = \sum k_i$，其中整数 k_1、$\cdots$、k_{n-1}由素数 p和 L.中的元素 η唯一确定。此外，始终存在一个上述形式的 p- 整基 L。

高斯赋值、一阶牛顿多边形和二阶牛顿多边形。在整篇论文中， $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的有限域， Z_p 表示 p进整数环。此外， $\bar{a}$ 表示 a 在从 $\mathbb{Z}_p$到 $\mathbb{F}_p$.的典范同态下的像

定义 3.1. 有理函数域 $\mathbb{Q}_p(x)$ 上的高斯赋值，其中不定元为 x ； 该赋值扩张了 $\mathbb{Q}_p$ 上的赋值 v_p ，并在 $\mathbb{Q}_p[x]$ 上定义为

$$v_{p,x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_sx^s) = \min_{1 \le i \le s}\{v_p(a_i)\},\ a_i \in \mathbf{Q}_p.$$

定义 3.2. 设 p 是一个素数， $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个系数属于 $a_0 \neq 0$ 的 $_p$ 上的多项式。对每个非零项 a_ix^i，我们关联一个点 $(i, v_p(a_i))$，并

构成集合 $P = \{(i, v_p(a_i)) : 0 \le i \le n, a_i \neq 0\}$。$g(x)$ 的 p-牛顿多边形（一阶，也称为关于 p 的 $g(x)$ 的牛顿多边形）是沿着 P 中各点凸包的下边构成的折线路径。注意，边的斜率从左向右递增。

定义 3.3. 设 $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个定义在整数环 $\mathbb{Z}_p$ 上的多项式，使得 $g(x)$ 的一阶 p-牛顿多边形由一条斜率为负的边组成，设其斜率为 $\lambda \in Q$。设 $\lambda = -\frac{h}{e}$，其中 h 和 e 是互素正整数。则我们为 $g(x)$ 关联一个多项式 $T_g(Y) \in \mathbb{F}_p[Y]$，它不被 Y 整除，次数为 $\frac{n}{e} = d$ （设为），其定义如下：

$$T_g(Y) = Y^d + \sum_{j=0}^{d-1} \overline{\left(\frac{a_{ej}}{p^{v_p(a_0)+ej\lambda}}\right)} Y^j \tag{3.1}$$

多项式 $T_g(Y)$ 称为 $g(x)$ 关于 p 的剩余多项式.

现在我们陈述 Ore 所证明定理的一个较弱版本[10]，该定理是在更一般的框架下证明的。证明从略。

定理 3.4. 设 p 为素数。设 $L = \mathbb{Q}(\gamma)$，其中 γ 是不可约多项式 $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，$a_0 \neq 0$ 满足 $g(x) \equiv x^n$ 模 p。假设 p-牛顿多边形 $g(x)$ 的一阶部分由一条斜率为负的单边 λ组成。若与此边相关联的 $g(x)$ 的剩余多项式 $T_g(Y) \in \mathbb{F}_p[Y]$ 是可分的，则 $v_p(\mathrm{ind}\,\gamma)$ 等于位于 p-牛顿多边形 $g(x)$ 上或下方、坐标为正整数的点的个数。

定义 3.5. 设 p,$L = \mathbb{Q}(\gamma)$,$g(x)$, $T_g(Y)$ 如上述定理所述。若 $g(x)$ 的剩余多项式 $T_g(Y) \in \mathbb{F}_p[Y]$ 没有重根，则称 $g(x)$ 是 p-正则的。

设 $L = \mathbb{Q}(\gamma)$，其中 γ 是首一多项式 $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，$a_0 \neq 0$ 的一个根。设 p 是一个素数，使得 $g(x) \equiv x^n \bmod p$。假设 $g(x)$ 的 p-牛顿多边形的一阶部分由一条斜率为 $\lambda = \frac{-h}{e}$ 的单边组成，其中 h 和 e 是互素正整数，且 $e > 1$。假设 $T_g(Y) = \psi(Y)^s$ 属于 $\mathbb{F}_p[Y]$，其中 $s \ge 2$，且 $\psi(Y)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的首一不可约多项式。在此情形下，我们构造一个与斜率 λ 相对应的关键多项式 $\Phi(x)$，满足以下条件：

(i) $\Phi(x) \equiv x^k \bmod p$，其中 k 是某个自然数。(ii) $\Phi(x)$ 的 p-牛顿多边形的一阶部分是斜率为 λ 的单边。(iii) $\Phi(x)$ 关于 p 的剩余多项式为 $\psi(Y) \in \mathbb{F}_p[Y]$。(iv) $\deg \Phi(x) = e \deg \psi(Y)$。

如 [6, 第 2 节2], 所述，数据（x; λ, $\psi(Y)$）定义了域 $\mathbb{Q}_p(x)$ 上的一个 p-进赋值 V，其中 $V(x) = h$, $V(p) = e$ 且 $V(\Phi(x)) = he\deg(\psi(Y))$。如果 $p(x) = \sum_{0 \le i} b_i x^i \in$ 整数环$_p[x]$ 是任意多项式，则

$$V(p(x)) = e \min_{0\le i}\{v_p(b_i) + i|\lambda|\}. \tag{3.2}$$

$_u$我们称上述赋值 V为二阶赋值。如果 $g(x) = \sum a_i(x)\Phi(x)^i{}_{i=0}$是 $g(x)$ 在 $\mathbf{Z}_p[x]$ 中的一个 Φ-进展开，那么 $g(x)$ 的二阶 V-牛顿多边形（也称为 $g(x)$ 的 V-牛顿多边形）是欧几里得平面中集合$\{(i, V(a_i(x)\Phi(x)^i))\ 0 \le i \le u\}$ 中各点的下凸包。

设 $g(x)$ 的二阶 V-牛顿多边形有 k 条边，记为 E_1、$\cdots$、E_k，其负斜率分别为 λ_1、$\cdots$、λ_k。设 $\lambda_t = \frac{-h_t}{e_t}$，其中 h_t 和 e_t 是互素正整数，且 l_t 表示斜率为 λ_t 的边在水平轴上的投影（针对 $1 \le t \le k.$）。那么，每条边 E_t 都自然对应一个二阶剩余多项式 $\psi_t(Y)$，其次数与该边的度数一致（即 $\frac{l_t}{e_t}$) [6, 第 2 节。只有位于边上的 $g(x)$ 的 V- 牛顿多边形的整点，才决定这个二阶剩余多项式的非零系数。若附属于 $g(x)$ 的二阶 V-牛顿多边形的边 E_t 的二阶剩余多项式 $\psi_t(Y)$ 在 $\frac{\mathbb{F}_p[Y]}{\langle\psi_t\ Y\ \rangle}$( ) 中可分，则称 $g(x)$ 为 ψ_t-正则。若对于每个 t、$1 \le t \le k$, $g(x)$ 都是 ψ_t-正则，则称 $g(x)$ 为 V-正则。

定义 3.6. 设 $\Phi(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 是一个首一多项式，并设 $f(x) = a_n(x)\Phi(x)^n + \cdots + a_1(x)\Phi(x) + a_0(x)$，其中 $a_i(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg a_i(x) < \deg \Phi(x)$，是 Φ-进展开式 $f(x)$。于是，按照定义，我们将与该 Φ-进展开式相关联的商定义为在计算展开式系数的过程中得到的不同商 $q_1(x)$ $\cdots$、$q_n(x)$:

$$f(x) = \Phi(x)q_1(x) + a_0(x),$$

$$q_i(x) = \Phi(x)q_{i+1}(x) + a_i(x),\ \forall 1 \le i \le n.$$

以下定理是 Guardia、Montes 和 Nart 在 2012 [[6], 定理 4.18] 及 2015 [7]中证明的定理的较弱版本。

定理 3.7。设 p 为素数。设 $L = \mathbf{Q}(\gamma)$，其中 γ 是首一多项式 $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$, $a_0 \ne 0$满足 $g(x) \equiv x^n$模 p的一个根。假设 p-牛顿多边形 $g(x)$ 的一阶部分由一条负斜率的边构成，$\lambda = -\frac{h}{e}$ 且最大公约数 $\gcd(h, e) = 1$； $g(x)$ 的剩余多项式为 $T_g(Y) = \psi_1(Y)^{r_1}\psi_2(Y)^{r_2}\cdots\psi_s(Y)^{r_s}$，是不可约多项式 $\psi_i(Y) \in \mathbb{F}_p[Y]$ 的幂的乘积，其中 $\psi_i(Y) \ne Y$, $r_i \ge 2$ 对 $1 \le i \le s$成立。设 $\Phi_i(x)$ 为附属于 λ 的关键多项式，V_i 为由 $(x;\ \lambda, \psi_i(Y))$ 确定的相应二阶赋值，对所有 $i = 1, 2, \cdots, s$ 均成立。对每个 $1 \le i \le s$, 令 $\mu_i = \deg \psi_i(Y)$，且 V_i-牛顿多边形 $g(x)$ 有 z_i 条边 $E_{i1}, \cdots, E_{iz_i}$，其斜率分别为负的 $\lambda_{i1}, \cdots, \lambda_{iz_i}$。若对每个 $i = 1, 2, \cdots, s$, $g(x)$ 都是 V_i-正则的，则有以下结论:

$_s$(1) v_p(ind γ) $= N_1 + \sum \mu_i N_2^i$, 其中 N_1 表示位于 p-牛顿多边形 $g(x)$ 上或下方、且坐标为正整数的点的数目； N_2^i 表示位于 V_i -牛顿多边形 $g(x)$ 上或下方，并且位于经过该多边形最后一个顶点的水平线上方的正整数坐标点的数目。

（2）设 y_j 表示横坐标为 j 的点在 $g(x)$ 的 p-牛顿多边形上的纵坐标，该点对应一阶情形。则集合 $S = \cup_{i=1}^{s} S_i$ 是 L 的 p-整基，其中对每个 $i = 1, 2, \cdots, s$,

$$S_i = \left\{ \frac{\theta^{n-u} q_{ij}(\theta)}{p^{\lfloor y_u + \frac{Y_{ij} - jV(\Phi_i(x))}{e} \rfloor}} \ : \ n - e\mu_i < u \le n, b_{it} - e_{it} f_{it} < j \le b_{it}, 1 \le t \le z_i \right\}, \quad (3.3)$$

其中 $q_{ij}(\theta)$ 是 j-次商，在定义 Φ_i-进展开式中 $g(x)$ 的展开，见定义 3.6, $\lambda_{it} = \frac{-h_{it}}{e_{it}}$其中最大公约数$(h_{it}, e_{it}) = 1$, $[a_{it}, b_{it}]$ 表示边 E_{it}在水平轴上的投影， $f_{it} = \frac{b_{it} - a_{it}}{e_{it}}$对于 $1 \le t \le z_i$ 且 Y_{ij} 表示横坐标为 V_i-牛顿多边形上 $g(x$的二阶点的纵坐标，其横坐标为 j.

T下面陈述的初等引理是众所周知的（参见 [9,问题 435]）。

引理 3.8。设 t、 b 为正整数，且 gcd$(t, b) = c$。令 P 表示平面中坐标为正整数、位于顶点为 (0, 0)、$(t, 0)$、$(0, b)$ 的三角形内部或边界上的点集。那么 # $P = \sum_{i=0}^{t-1} \lfloor \frac{ib}{t} \rfloor = \frac{1}{2}[(t-1)(b-1) + (c-1)]$,, 其中 #$P$ 是集合 P 的基数。

4. Proof of Theorems 2.1

定理的证明 ***2.1***。 下文中， N_1 表示坐标为正整数且位于 p 阶牛顿多边形 $f(x)$ 上或下方的点的个数（一阶），而 N_2 表示坐标为正整数且位于 V 阶牛顿多边形 $f(x)$ 上或下方、且位于经过该多边形最后一个顶点的水平线之上的点的个数（二阶）。

情形 A1： $v_2(m) = 2, m_2 \equiv 1$ (4)。在此情形下， $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。 $f(x)$ 的一阶 2-牛顿多边形只有一条边，记为 S，连接点 (0, 2) 和 (12, 0)，斜率为 $\lambda = -\frac{1}{6}$。与 S 相关联的 $f(x)$ 的剩余多项式为 $Y^2 + \bar{1} = (Y + \bar{1})^2 \in \mathbb{F}_2[Y]$, 它不可分。因此， $f(x)$ 不是 2-正则。根据引理 3.8，我们有 $N_1 = 6$。令 $\psi(Y) = Y + \bar{1}$。

对于二阶牛顿多边形，我们定义一些数值不变量， $h = 1, e = 6$和 $\mu = \deg(\psi(Y)) = 1$, 其中 h 和 e 分别是 λ的分子和分母。取 $\Phi(x) = x^6 + 2$, 则容易验证 $\Phi(x)$是斜率为 λ的关键多项式。根据公式（3.2），我们定义与数据 $(x; \lambda, \psi(Y))$相关联的 $\mathbf{Q}_2$ (x) 上的二阶赋值 V， 使得 $V(x) = h = 1, V(2) = e = 6$

以及 $V(\Phi) = he\mu = 6$. 定理 Φ f的展开式由 $f(x)$ 给出 $= \Phi(x)^2 - 4\Phi(x) + 4 -$

m.多项式 $f(x)$ 的二阶 V-牛顿多边形是点 $(0,\ 6v_2(4-m))$、$(1,\ 18)$ 和 $(2,\ 12)$ 的下凸包。若 $m_2 \equiv 1\ (8)$，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有两条负斜率的边（见图1）。第一条边记作 S_1，是连接点 $(0,\ 6v_2(4-m))$ 与 $(1,\ 18)$ 的线段；第二条边记作 S_2，是连接点 $(1,\ 18)$ 与 $(2,\ 12)$ 的线段。对于每个 $i = 1,\ 2$，与 S_i 相关联的剩余多项式都是线性的。因此，$f(x)$ 是 V-正则的。根据定理 3.7 的记号，我们有 $y_u = -\frac{1}{6}u + 2$，其中 $7 \le u \le 12$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $e_1 = e_2 = 1$,$f_1 = f_2 = 1$, $Y_1 = 18$, $Y_2 = 12$, $q_1(\theta) = \theta^6 - 2$ 且 $q_2(\theta) = 1$。

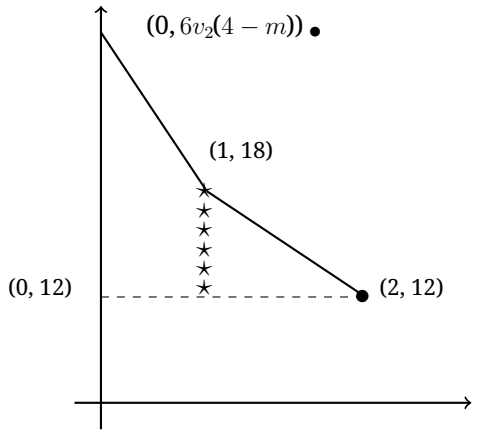

FIGURE 1. $m_2 \equiv 1(8)$; V-$f(x)$的牛顿多边形。

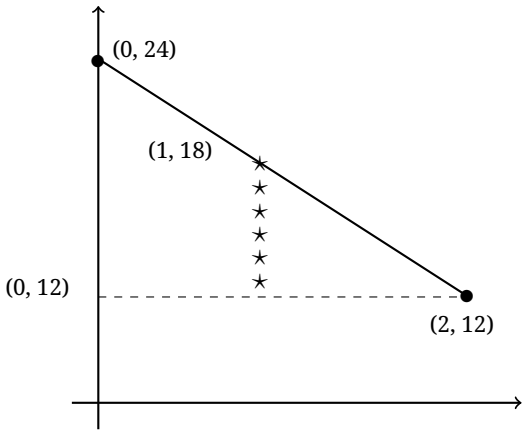

FIGURE 2. $m_2 \equiv 5(8)$; V-$f(x)$ 的牛顿多边形。

若 $m_2 \equiv 5\ (8)$，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形只有一条边，记为 S'，其斜率为负（见图 2）。边 S' 是连接点 $(0,\ 24)$ 和 $(2,\ 12)$ 的线段，格点 $(1,\ 18)$ 位于其上。与 S' 相关的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。因此，$f(x)$ 是 V-正则的。这里我们看到 $y_u = -\frac{1}{6}u + 2$，其中 $7 \le u \le 12$、$[a_1, b_1] = [0, 2]$、$e_1 = 1$、$f_1 = 2$、$Y_1 = 18$、$Y_2 = 12$、$q_1(\theta) = \theta^6 - 2$，且 $q_2(\theta) = 1$。由图 1 和图 2 可得 $N_2 = 6$。根据定理 3.7，可推出 $v_2(\mathrm{ind}\,\theta) = N_1 + \mu N_2 = 6 + 6 = 12$，以及集合

$$A_1 = \left\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6 - 2}{2^2}, \frac{\theta^7 - 2\theta}{2^2}, \frac{\theta^8 - 2\theta^2}{2^2}, \frac{\theta^9 - 2\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^{10} - 2\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^{11} - 2\theta^5}{2^2}\right\},$$

是 K 的 2-整基。

注意，在上述情形中，若 $m_2 \equiv 3 \bmod 8$，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形（二阶）是点 $(0,\ 18)$、$(1,\ 18)$、$(2,\ 12)$ 的下凸包，且只有一条负斜率的边。与这条边相关联的剩余多项式为 $Y^2 + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$，它不可分。因此，在这种情况下，我们采用另一个关键多项式。

情形 A2： $v_2(m) = 2$, $m_2 \equiv 3$ (8)。仿照情形 A1 的论证，我们观察到 $f(x)$ 不是 2-正则的。在此情形中， λ, h, e, μ, N_1 和 $\psi(Y)$ 与情形 A1 中相同。取 $\Phi(x) = x^6 + 2x^3 - 2$。显然， $\Phi(x)$ 是附属于 λ 的关键多项式。数据 $(x; \lambda, \psi(Y))$ 确定了有理数域 $\mathbb{Q}_2(x)$ 上的一个 2-adic赋值 V，如公式（3.2）所示，使得$V(x) = 1$, $V(2) = 6$ 且 $V(\Phi) = 6$。 V-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^2(x) + (8 - 4x^3)\Phi(x) - 16x^3 + 12 - m$$

作为点 (0, 27)、(1, 21) 和 (2, 12) 的下凸包，它只有一条负斜率的边，记为 S'。边 S' 是连接点 (0, 27) 和 (2, 12) 的线段。与 S' 对应的剩余多项式是线性的。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，并且$N_2 = 7$。根据定理 3.7，我们有 $v_2(\mathrm{ind}\,\theta) = N_1 + \mu N_2 = 6 + 7 = 13$。按照定理 3.7 的记号， $y_u = -\frac{1}{6}u + 2$，其中 $7 \leq u \leq 12$、 $Y_j = -\frac{15}{2}j + 27$，对于 $j = 1$, 2， $[a_1, b_1] = [0, 2]$ $e_1 = 2$ $f_1 = 1$ $q_1(\theta) = \theta^6 - 2\theta^3 + 6$ 以及 $q_2(\theta) = 1$。因此，该集合

$$A_2 = \left\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^4 q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^5 q_1(\theta)}{2^3}\right\},$$

是 K 的 2-整基

容易验证，当 $m_2 \equiv 7 \bmod 8$ 时， V-牛顿多边形 $f(x)$ 的二阶下凸包由点 (0, 24)、(1, 21)、(2, 12) 构成，且只有一条负斜率的边。与这条边对应的剩余多项式有一个重根。因此，我们选择另一个关键多项式。

情形 A3： $v_2(m) = 2$, $m_2 \equiv 7$ (8)。在此情形下， λ、 e、 $\psi(Y)$、 μ 和 N_1 将与情形 A1 中相同。按照情形 A1 中的相同步骤，我们发现 $f(x)$ 不是 2-正则的。设 $\Phi(x) = x^6 + 2x^3 + 2$，则 $V(\Phi) = 6$。 V-牛顿多边形 $f(x) = \Phi^2(x) - 4x^3\Phi(x) - 4 - m$ 的下凸包由点 $(0, 6v_2(4 + m))$、(1, 21) 和 (2, 12) 构成。若 $m_2 \equiv 7$ (16)，则它只有一条边，记为 S'，连接点 (0, 30) 和 (2, 12)，且格点 (1, 21) 位于其上。与 S' 对应的剩余多项式是 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。若 $m_2 \equiv 15$ (16)，则 V-牛顿多边形有两条负斜率的边。第一条边记为 S_1，是连接点 $(0, 6v_2(m+4))$ 与 (1, 21) 的线段；第二条边记为 S_2，连接点 (1, 21) 与 (2, 12)。对每个 $i = 1$, 2，与 S_i 对应的二阶剩余多项式都是线性的。因此，由引理 3.8 和定理 3.7 可得 $v_2(\mathrm{ind}\ \theta) = N_1 + \mu N_2 = 6 + 9 = 15$，且以下集合是 $K.$ 的 2-整基

$$A_3 = \left\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^4 q_1(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^5 q_1(\theta)}{2^3}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^6 - 2\theta^3 + 2.$

情形 A4： $v_2(m) = 4$, $m_2 \equiv 3$ (4)。在这种情况下， $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。2-牛顿多边形

$f(x)$ 的一阶多项式有一条连接点 (0, 4) 和 (12, 0) 的单边，斜率为$\lambda = -\frac{1}{3}(= -\frac{h}{e})$。与这条边相关联的剩余多项式为 $Y^4 + \bar{1} = (Y + \bar{1})^4$,，它有一个重根。因此， $f(x)$ 不是 2-正则的。令 $\psi(Y) = Y + \bar{1}$。根据引理 3.8，我们有 $N_1 = 18$。令 $\Phi(x) = x^3 - 2$，并令 $V\big(\sum a_i x^i\big) = 3\min_{i\geq 0}\{v_2(a_i) + i\frac{1}{3}\}$.

于是 $V(x) = 1, V(2) = 3$ 和 $V(\Phi) = 3$。V-牛顿多边形

$$f(x) = (\Phi(x) + 2)^4 = \Phi^4(x) + 8\Phi^3(x) + 24\Phi^2(x) + 32\Phi(x) + 16 - m \qquad (4.1)$$

作为点 (0, 15)、(1, 18)、(2, 15)、(3, 18) 和 (4, 12) 的下凸包，它只有一条边，即 S'，且斜率为负。边 S' 是连接点 (0, 15) 和 (4, 12) 的线段。与 S' 相关联的剩余多项式是线性的。因此， $f(x)$ 是V-正则的。显然， $y_u = -\frac{1}{3}u + 4$，其中 $10 \leq u \leq 12, e = 3, a_1 = 0, b_1 = 4, e_1 = 4, f_1 = 1, Y_j = -\frac{3}{4}j + 15$，对于 $j = 1$， 2、3、4， $q_1(\theta) = \theta^9 + 2\theta^6 + 4\theta^3 + 8, q_2(\theta) = \theta^6 + 4\theta^3 + 12$以及 $q_3(\theta) = \theta^3 + 6$。因此，根据定理 3.7，我们看到 $v_2(\text{ind }\theta) = N_1 + \mu N_2 = 18 + 3 = 21$以及 $1, \theta, \theta^2, {}^{q_3}(\theta)\ 2\ ,\ {}^{\theta q_3}(\theta)\ 2\ ,\ {}^{\theta^2 q_3}(\theta)\ 2\ ,\ {}^{q_2}(\theta)\ 22\ ,\ {}^{\theta q_2}(\theta)\ 22\ ,\ {}^{\theta^2 q_2}(\theta)\ 23\ ,\ {}^{q_1}(\theta)\ 23\ ,\ {}^{\theta q_1}(\theta)\ 24\ ,\ {}^{\theta^2 q_1}(\theta)\ 24$ 是 $K.$ 的 2-整元素。考虑到 ${}^{q_3}(\theta_2 = \frac{\theta^3}{2} + 3)$，我们看到 $\frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}$ 和 $\frac{\theta^5}{2}$ 是代数整数。因此，鉴于命题 3.1，集合

$$A_4 = \left\{1, \theta, \theta^2, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2}, \frac{\theta^5}{2}, \frac{q_2(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^3}, \frac{q_1(\theta)}{2^3}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^4}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^4}\right\}$$

是 $K.$ 的 2-整基

情形 A5： $v_2(m) = 4, m_2 \equiv 5\ (8)$。此处 $f(x) \equiv x^{12}\ (2)$。仿照情形 A4 的论证可知， $f(x)$ 不是 2-正则的，并且 $N_1 = 18$。令 $\Phi(x)$ 和 V 与前一情形中的相同。注意到 (4.1) 中给出的 $f(x)$ 的 Φ-展开，可以验证 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形只有一条负斜率边，记为 S'。边 S' 是连接点 (0, 18) 和 (4, 12) 的线段，格点 (2, 15) 位于该线段上。与 S' 相关联的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$，它没有重根。因此， $f(x)$ 是 V-正则的。在此情形下 $N_2 = 8$。因此，由定理 3.7， $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \mu N_2 = 26$，且集合

$$A_5 = \left\{1, \theta, \theta^2, \frac{q_3(\theta)}{2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2}, \frac{\theta^2 q_3(\theta)}{2}, \frac{q_2(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^3}, \frac{q_1(\theta)}{2^3}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^4}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^5}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^9 + 2\theta^6 + 4\theta^3 + 8, q_2(\theta) = \theta^6 + 4\theta^3 + 12$ and $q_3(\theta) = \theta^3 + 6$， 是 K 的 2-整基。

情形 A6： $v_2(m) = 4, m_2 \equiv 1\ (8)$。这里 $f(x) \equiv x^{12}\ (2)$。按照情形 A4 的做法，我们观察到 $f(x)$ 不是 2-正则的，并且 N_1=18。在此情形下， $\lambda, \psi(Y)$、 $\Phi(x)$ 和 V 与情形 A4 中相同。结合 (4.1)， $f(x)$ 的 V-牛顿多边形是由点 $(0,\ 3v_2(16 - m))$、(1, 18)、(2, 15)、(3, 18) 和 (4, 12) 构成的下凸包。若 $m_2 \equiv 1(16)$，则它有三条负斜率边。第一条边连接 $(0,\ 3v_2(16 - m))$ 与 (1, 18)，第二条边连接 (1, 18) 与 (2, 15)，第三条

边从 (2, 15) 延伸至 (4, 12)。每条边对应的剩余多项式都是线性的。若 $m_2 \equiv 9$ (16)，则 V-牛顿多边形有两条负斜率边。第一条边，记作 S_1，是连接点 (0, 21) 和 (2, 15) 的线段，格点 (1, 18) 位于其上；第二条边，记作 S_2，连接 (2, 15) 与 (4, 12)。与 S_1 和 S_2 相关的剩余多项式分别为 $Y^2+Y+\bar{1}$ 和 $Y+\bar{1}$。因此，$f(x)$ 是 V-正则的。容易验证 $N_2 = 10$。因此，根据定理 3.7，$v_2(\mathrm{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\,\psi(Y)N_2 = 28$，且以下集合是 K 的 2-整基。

$$A_6 = \left\{1, \theta, \theta^2, \frac{q_3(\theta)}{2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^2}, \frac{q_2(\theta)}{2^3}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^3}, \frac{q_1(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^5}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^5}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^9 + 2\theta^6 + 4\theta^3 + 8$, $q_2(\theta) = \theta^6 + 4\theta^3 + 12$ 以及 $q_3(\theta) = \theta^3 + 6$。

情形 A7：$v_2(m) = 6$, $m_2 \equiv 1$ (4)。在此情形下，$f(x) \equiv x^{12}$ (2)。$f(x)$ 的 2-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 6) 和 (12, 0)，斜率为 $\lambda = -\frac{1}{2}(= -\frac{h}{e})$。根据引理 3.8，我们有 $N_1 = 30$。与该边相关联的 $f(x)$ 的剩余多项式为 $Y^6 + \bar{1} = (Y+\bar{1})^2(Y^2+Y+\bar{1})^2 \in \mathbb{F}_2[Y]$，它不是可分的。令 $\psi_1(Y) = Y + \bar{1}$ 且 $\psi_2(Y) = Y^2 + Y + \bar{1}$，则有两种类型 $(x; -\frac{1}{2}, Y+\bar{1})$ 和 $(x; -\frac{1}{2}, Y^2+Y+\bar{1})$。现在我们分别考察每种类型。

考虑第一类（x; $\lambda, \psi_1(Y)$）。令 $\Phi(x) = x^2 - 2$ 以及附属于数据（x; $\lambda, \psi_1(Y)$）的有理数域$_2(x)$上的二阶赋值V_1 定义为 $V_1\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 2\min_{i\geq 0}\{v_2(a_i) + i\frac{1}{2}\}$，则 $V_1(x) = 1$, $V_1(2) = 2$ 且 $V_1(\Phi) = 2$。在这种情形下，V_1-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^6(x) + 12\Phi^5(x) + 60\Phi^4(x) + 160\Phi^3(x) + 240\Phi^2(x) + 192\Phi(x) + 64 - m \quad (4.2)$$

是这些点的下凸包：(0, $2v_2(64-m)$), (1, 14), (2, 12), (3, 16), (4, 12), (5, 14) 和 (6, 12)。若 $m_2 \equiv 1$ (8)，则它有两条负斜率的边。第一条边是连接点 $(0, 2v_2(64-m))$ 与 (1, 14) 的线段，第二条边是连接 (1, 14) 与 (2, 12) 的线段。与每条边相关联的剩余多项式都是线性的。若 $m_2 \equiv 5$ (8)，则 V_1-牛顿多边形有一条负斜率的单边，连接点 (0, 16) 和 (2, 12)，格点 (1, 14) 位于其上。与这条边相关联的剩余多项式是 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。因此 $f(x)$ 是 V_1-正则的，且 $N_2^1 = 2$。

考虑第二类（x; $-\frac{1}{2}$, ψ_2（Y））。令 Φ（x）$= x^4 + 2x^2 + 4$，并定义附属于 Q_2（x）上（x; λ, ψ_2（Y））的二阶赋值 V_2 为 $V_2\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 2\min_{i\geq 0}\{v_2(a_i) + i\frac{1}{2}\}$，则 $V_2(x) = 1$, $V_2(2) = 2$ 且 $V_2(\Phi) = 4$。V_2-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^3(x) - 6x^2\Phi^2(x) + (16x^2 - 32)\Phi(x) + 64 - m \quad (4.3)$$

是由点 (0, $2v_2(64-m)$)、(1, 14)、(2, 12) 和 (3, 12) 构成的下凸包。如果 $m_2 \equiv 1$ (8)，那么它有两条负斜率的边。第一条边是连接 ent

点 (0, $2v_2(64-m)$) 与 (1, 14) 的线段，第二条边则连接点 (1, 14) 和 (2, 12)。与每条边对应的剩余多项式都是线性的。如果 $m_2 \equiv 5$ (8)，那么 V_2-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 16) 和 (2, 12)，格点 (1, 14) 位于该边上。与这条边对应的剩余多项式是一个二次可分多项式。在这种情形下 $N_2^2 = 2$。

考虑定理 3.7，可知 $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\,\psi_1(Y)N_2^1 + \deg\,\psi_2(Y)N_2^2 = 30 + 2 + 4 = 36$ 且 K 的 2-整基为

$$\left\{\frac{q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^3 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^4}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^3 q_1'(\theta)}{2^6}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^{10} + 2\theta^8 + 4\theta^6 + 8\theta^4 + 16\theta^2 + 32$, $q_2(\theta) = \theta^8 + 4\theta^6 + 12\theta^4 + 32\theta^2 + 80$, $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^6 + 8\theta^2 - 16$ 且 $q_2'(\theta) = \theta^4 - 4\theta^2 + 4$.

由于上述 2-整基不是三角形形式，我们将找出一个新的三角形形式的 2-整基。显然，$\theta^{12} = m$ 和 $v_2(m) = 6$ 意味着 $\frac{\theta^2}{2}$、$\frac{\theta^3}{2}$ 和 $\frac{\theta^4}{2^2}$ 是代数整数。由于

$$\frac{q_1(\theta)}{2^6} - \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6} - \frac{q_2(\theta)}{2^4} = \frac{\theta^6 + 8}{2^4} - \frac{4\theta^6 + 80}{2^4} - \frac{12\theta^4 + 24\theta^2}{2^4},$$

我们看到 $\frac{\theta^6+8}{2^4}$ 是一个代数整数。因此，根据命题 3.1，以下集合是 K.的 2-整基

$$A_7 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{\theta^6+8}{2^4}, \frac{\theta^7+8\theta}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}\right\}.$$

情形 A8：$v_2(m) = 6$, $m_2 \equiv 3$ (8)。按照情形 A7 的论证，我们看到 $f(x)$ 不是 2-正则。这里的 λ, $\psi_1(Y)$、$\psi_2(Y)$ 和 N_1 与情形 A7 中相同。

考虑第一类 $(x;\ -\frac{1}{2}, Y + \bar{1})$。取与情形 A7 中相同的 $\Phi(x) = x^2 + 2x - 2$ 和 V_1，则 $V_1(\Phi) = 2$。V_1-牛顿多边形为

$$\begin{aligned} f(x) = \Phi^6 - (12x - 72)\Phi^5 - (400x - 1220)\Phi^4 - (4512x - 8832)\Phi^3 - \\ (23040x - 31536)\Phi^2 - (54976x - 54656)\Phi - 49920x + 36544 - m \end{aligned} \tag{4.4}$$

有一条连接点 (0, 17) 和 (2, 12) 的单边。与这条边关联的剩余多项式是线性的。因此，$f(x)$ 是 V_1-正则的，并且 $N_2^1 = 2$.

考虑第二类 $(x;\ -\frac{1}{2}, Y^2 + Y + \bar{1})$。令 $\Phi(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x + 4$ 和 V_2 与情形 A7 中相同。对于此类型，$V_2(\Phi) = 4$。V_2-牛顿多边形为

$$\begin{aligned} f(x) = \Phi^3(x) - (6x^3 - 18x^2 + 68x - 224)\Phi^2(x) - (800x^3 - 1152x^2 + 2144x - 3520)\Phi(x) \\ -(13184x^3 - 12800x^2 + 11776x + 17728 + m) \end{aligned} \tag{4.5}$$

是点 (0, 17)、(1, 15)、(2, 12) 和 (3, 12) 的下凸包。它只有一条连接点 (0, 17) 和 (2, 12) 的边。与该边相关联的剩余多项式是线性的。因此，$f(x)$ 是 V_2-正则的，并且 $N_2^2 = 2$。

因此，根据定理 3.7， $v_2(\operatorname{ind}\theta) = N_1 + \deg(\psi_1(Y))N_2^1 + \deg(\psi_2(Y))N_2^2 = 30 + 2 + 4 = 36$ 以及以下集合（非三角形形式）是 $K.$ 的 2-整基

$$\left\{\frac{q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^3 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^4}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^3 q_1'(\theta)}{2^6}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^{10} - 2\theta^9 + 6\theta^8 - 16\theta^7 + 44\theta^6 - 120\theta^5 + 328\theta^4 - 896\theta^3 + 2448\theta^2 - 6688\theta + 18272$， $q_2(\theta) = \theta^8 - 4\theta^7 + 16\theta^6 - 56\theta^5 + 188\theta^4 - 608\theta^3 + 1920\theta^2 - 5952\theta + 18192$， $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^7 + 6\theta^6 - 20\theta^5 + 56\theta^4 - 168\theta^3 + 504\theta^2 - 1488\theta + 4432$ 以及 $q_2'(\theta) = \theta^4 - 4\theta^3 + 16\theta^2 - 64\theta + 228.$

在这种情形下

$$\frac{q_1(\theta)}{2^6} - \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6} = \frac{\theta^7 - 3\theta^6 + 12\theta^5 - 44\theta^4 + 148\theta^3 - 496\theta^2 - 1672\theta + 4568}{2^4}$$

这意味着 $\frac{\theta^7+\theta^6-4\theta^5+4\theta^4+4\theta^3+8\theta-8}{2^4}$ 是代数整数。取 $r(\theta) = \theta^7+\theta^6-4\theta^5+4\theta^4+4\theta^3+8\theta-8.$。注意到 1、$\theta$、$\theta^2$、$\frac{\theta^3}{2}$、$\frac{\theta^4}{2^2}$ 均为代数整数，且 $\frac{\theta r(\theta) - q_1'(\theta)) - 3r(\theta)}{2^4} = \frac{-12\theta^6+32\theta^5-32\theta^4+160\theta^3-496\theta^2+1456\theta-4416}{2^4} - \frac{\theta^6-4\theta^5+8\theta^4+4\theta^3+8}{2^4}$，可知 $\frac{\theta^6-4\theta^5+8\theta^4+4\theta^3-8}{2^4} = \frac{s(\theta)}{2^4}$（记作 say）是代数整数。因此，命题 3.1 表明该集合

$$A_8 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{s(\theta)}{2^4}, \frac{r(\theta)}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}\right\}$$

是 $K.$ 的 2-整基

情形 A9： $v_2(m) = 6$, $m_2 \equiv 7$ (8)。在此情形下， $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。仿照情形 A7，可检验得出 $f(x)$ 不是 2-正则，且 $N_1 = 30$。在此情形下， λ, $\psi_1(Y)$,$\psi_2(Y)$, V_1 和 V_2 将与情形 A7 中相同。

对于第一类（x； $\lambda, \psi_1(Y)$），令 $\Phi(x) = x^2 + 2x + 2$。 V_1-牛顿多边形

$$\begin{aligned} f(x) = \Phi^6(x) - (12x - 48)\Phi^5(x) - (160x - 20)\Phi^4(x) - (32x + 448)\Phi^3(x) \\ +(384x + 432)\Phi^2(x) - (192x)\Phi(x) - 64 - m \end{aligned} \tag{4.6}$$

是点 (0, $2v_2(64+m)$)、(1, 15) 和 (2, 12) 的下凸包。若 $m_2 \equiv 7$ (16)，则它只有一条边，记为 S'，连接点 (0, 18) 和 (2, 12)，格点 (1, 15) 位于其上。与 S' 相关联的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。若$m_2 \equiv 15$ (16)，则该 V_1-牛顿多边形有两条负斜率的边。第一条边是连接点 (0, $2v_2(m + 64)$) 与 (1, 15) 的线段，第二条边则连接点 (1, 15) 与 (2, 12)。与每条边相关联的剩余多项式都是线性的。因此， $f(x)$ 是 V_1-正则的，且 $N_2^1 = 3$。

对于第二类（x； $\lambda, \psi_2(Y)$），取 $\Phi(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4$。其 V_2-牛顿多边形为

$$f(x) = \Phi^3(x) - (6x^3 - 6x^2 + 20x - 32)\Phi^2(x) - (64x^3 + 32x^2 + 96x + 128)\Phi(x) - 64 - m \tag{4.7}$$

是点 (0, $2v_2(64+m)$)、(1, 15)、(2, 12) 和 (3, 12) 的下凸包。如果 $m_2 \equiv 7$ (16)，那么它只有一条负斜率的边。该边是连接点 (0, 18) 和 (2, 12) 的线段，格点 (1, 15) 位于其上。与该边对应的剩余多项式没有重根。如果 $m_2 \equiv 15$ (16)，那么 V_2-牛顿多边形 $f(x)$ 有两条负斜率的边。第一条边连接 (0, $2v_2(64 + m)$)

与 (1, 15)，第二条边则从 (1, 15) 延伸到 (2, 12)。与每条边对应的剩余多项式都是线性的。因此 $f(x)$ 是 V_2-正则的，并且 $N_2^2 = 3$。

因此，根据定理 3.7，我们有 $v_2(\text{ind }\theta) = N_1 + \deg\,\psi_1(Y)N_2^1 + \deg\,\psi_2(Y)N_2^2 = 30 + 3 + 6 = 39$。因此，该集合

$$\left\{\frac{q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_2'(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^3 q_2'(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^4}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^4}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^3 q_1'(\theta)}{2^7}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^{10} - 2\theta^9 + 2\theta^8 - 4\theta^6 + 8\theta^5 - 8\theta^4 + 16\theta^2 - 32\theta + 32$, $q_2(\theta) = \theta^8 - 4\theta^7 + 8\theta^6 - 8\theta^5 - 4\theta^4 + 32\theta^3 - 64\theta^2 + 64\theta + 16$, $q_1'(\theta) = \theta^8 - 2\theta^7 + 2\theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 8\theta^3 + 8\theta^2 - 16\theta + 16$ 和 $q_2'(\theta) = \theta^4 - 4\theta^3 + 8\theta^2 - 16\theta + 36$ 是 K. 的 2-整基

容易验证

$$\frac{q_1'(\theta)}{2^5} + \frac{\theta^3 q_1'(\theta)}{2^7} - \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7} = \frac{\theta^7 - 2\theta^6 + 4\theta^4 - 8\theta^3 - 24\theta + 16}{2^5} + \frac{\theta^2}{2}.$$

设 $q_3(\theta) = \theta^7 - 2\theta^6 + 4\theta^4 - 8\theta^3 - 24\theta + 16$，则得到

$$\frac{q_1(\theta)}{2^6} - \frac{\theta^2 q_1'(\theta)}{2^6} - \frac{q_3(\theta)}{2^4} = -\frac{\theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 12\theta^3 - 16\theta + 8}{2^4}.$$

令 $q_4(\theta) = \theta^6 - 4\theta^5 + 8\theta^4 - 12\theta^3 - 16\theta + 8$. 由于 $\frac{\theta^2}{2}$ 是 K中的代数整数，因此$\frac{q_3(\theta)}{2^5}$ 和 $\frac{q_4(\theta)}{2^4}$ 都是代数整数。因此，根据命题 3.1，可知

$$A_9 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2}, \frac{\theta^4}{2^2}, \frac{\theta^5}{2^2}, \frac{q_4(\theta)}{2^4}, \frac{q_3(\theta)}{2^5}, \frac{q_1'(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_1'(\theta)}{2^6}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}\right\},$$

是 K. 的 2-整基

情形 A10： $v_2(m) = 8, m_2 \equiv 1$ (8)。在此情形下， $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。 $f(x)$ 的 2-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 8) 和 (12, 0)，斜率为 $\lambda = -\frac{2}{3}$。与这条边对应的剩余多项式为 $(Y + \bar{1})^4 \in \mathbb{F}_2[Y]$。由引理 3.8，得到 $N_1 = 40$。令 $\psi(Y) = Y + \bar{1}$ 和 $\Phi(x) = x^3 + 4$。根据公式（3.2），我们定义与数据 $(x; \lambda, \psi(Y))$ 相关联的二阶赋值 V，使得 $V(x) = 2, V(2) = 3$，且 $V(\Phi) = 6$。 V-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^4(x) - 16\Phi^3(x) + 96\Phi^2(x) - 256\Phi(x) + 256 - m \tag{4.8}$$

是点 $(0, 3v_2(256 - m))$、(1, 30)、(2, 27)、(3, 30)、(4, 24) 的下凸包。若 $m_2 \equiv 9$ (16)，则它有两条负斜率的边，且与每条边对应的剩余多项式均可分。若 $m_2 \equiv 1$ (16)，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有三条负斜率的边，且与每条边对应的剩余多项式均为线性的。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，并且 $N_2 = 10$。故根据定理 3.7， $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\,\psi(Y)N_2 = 40 + 10 = 50$，且 K 的 2-整基为

$$A_{10} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^2 q_3(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^6}, \frac{q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^9}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^9 - 4\theta^6 + 16\theta^3 - 64$, $q_2(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 48$ 和 $q_3(\theta) = \theta^3 - 12$.

情形 A11： $v_2(m) = 8$, $m_2 \equiv 5$(8)。仿照情形 A10 的论证，可以验证 $f(x)$ 不是 2-正则的。这里的 λ, $\psi(Y)$、 $\Phi(x)$ 和 V 与情形 A10 中相同。利用式 (4.8) 中给出的 $f(x)$ 的 Φ-展开，可以很容易验证，$f(x)$ 的 V-牛顿多边形只有一条负斜率边，且附着于该边的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in F_2[Y]$。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，且 $N_2 = 8$。于是，利用引理 3.8 和定理 3.7，我们发现 $v_2(\text{ind } \theta) = N_1 + \deg \psi(Y) N_2 = 40 + 8 = 48$，而 K 的 2-整基为

$$A_{11} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2^3}, \frac{\theta^2 q_3(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^6}, \frac{q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^8}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^9 - 4\theta^6 + 16\theta^3 - 64$、 $q_2(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 48$ 和 $q_3(\theta) = \theta^3 - 12$。

情形 A12： $v_2(m) = 8$、 $m_2 \equiv 3$ (8)。这里 $f(x) = x^{12}$ (2)。与情形 A10 中的处理相同，我们观察到 $f(x)$ 不是 2-正则。在此情形下， λ、 $\psi(Y)$、 $\Phi(x)$ 和 V将与情形 A10 中相同。由 (4.8) 可知， $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有一条连接点 (0, 27) 和 (4, 24) 的单边。对应于这条边的剩余多项式是线性的。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，且 $N_2 = 3$。由引理 3.8 和定理 3.7 可得， $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \mu N_2 = 40 + 3 = 43$ ，且 K 的一个 2-整基为

$$A_{12} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta q_3(\theta)}{2^2}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^3}, \frac{q_2(\theta)}{2^4}, \frac{\theta q_2(\theta)}{2^5}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{2^5}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^8}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^9 - 4\theta^6 + 16\theta^3 - 64$、 $q_2(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 48$ 和 $q_3(\theta) = \theta^3 - 12$。

情形 A13： $v_2(m) = 10$, $m_2 \equiv 1$ (4)。显然 $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。 $f(x)$ 的 2-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 10) 和 (12, 0)，斜率为 $\lambda = -\frac{5}{6}$。 $f(x)$ 关于 2 的剩余多项式为 $(Y + \bar{1})^2 \in \mathbb{F}_2[Y]$。因此 $f(x)$ 不是 2-正则的。令 $\psi(Y) = Y + \bar{1}$。取 $\Phi(x) = x^6 + 32$, 则 $\Phi(x)$ 可作为附属于 λ 的关键多项式。附属于数据 $(x; \lambda, \psi(Y))$ 的二阶赋值 V 在 $\mathbb{Q}_2(x)$ 上定义为 $V\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 6 \min_{i\geq 0}\{v_2(a_i) + i\frac{5}{6}\}$。因此 $V(x) = 5$, $V(2) = 6$，且 $V(\Phi) = 30$。这里 $f(x) = x^{12} - m = (\Phi(x) - 32)^2 - m = \Phi^2(x) - 64\Phi(x) + 1024 - m$. 若 $m_2 \equiv 1$ (8)，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有两条负斜率边，且每条边所附的剩余多项式都是线性的。若 $m_2 \equiv 5$ (8)，则 $f(x)$ 的 V-牛顿多边形只有一条负斜率边。对应于这条边的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。因此 $f(x)$ 是 V-正则的，且 $N_2 = 6$。于是根据引理 3.8 和定理 3.7 $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg \psi(Y) N_2 = 50 + 6 = 56$ 并且

$$A_{13} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta^4 q_1(\theta)}{2^9}, \frac{\theta^5 q_1(\theta)}{2^{10}}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^6 - 32$ 是 $K.$ 的 2-整基

情形 A14: $v_2(m) = 10$, $m_2 \equiv 3$ (8)。此处 $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。按照情形 A13 的论证可知, $f(x)$ 不是 2-正则。在此情形下, λ, V, N_1 和 $\psi(Y)$ 与情形 A13 中相同。取 $\Phi(x) = x^6 + 8x^3 - 32$。 V-牛顿多边形 $f(x) = \Phi^2(x) + (128 - 16x^3)\Phi(x) - 1024x^3 + 3072 - m$ 有一条连接点 (0, 75) 和 (2, 60) 的单边。与此边对应的剩余多项式是线性的。因此, $f(x)$ 是 V-正则的, 且 $N_2 = 7$。由此, 根据定理 3.7, $v_2(\text{ind } \theta) = N_1 + \mu N_2 = 50 + 7 = 57$, 并且 K 的 2-整基为

$$A_{14} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta^4 q_1(\theta)}{2^9}, \frac{\theta^5 q_1(\theta)}{2^{10}}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 96$。

情形 A15: $v_2(m) = 10$, $m_2 \equiv 7$ (8)。此处 $f(x) \equiv x^{12}$ (2)。与情形 A13 中相同地推导, 可知 $f(x)$ 不是 2-正则。在此情形下, λ, $\psi(Y)$ 和 V 将与情形 A13 中相同。取 $\Phi(x) = x^6 + 8x^3 + 32$, 则 $V(\Phi) = 30$。 Φ-展开式 $f(x)$ 为$f(x) = \Phi^2(x) - 16x^3\Phi(x) - 1024 - m.$ 若 $m_2 \equiv 7$ (16), 则 V-牛顿多边形只有一条边, 连接点 (0, 78) 和 (2, 60), 且格点 (1, 69) 位于其上。与这条边对应的剩余多项式为 $Y^2 + Y + \bar{1} \in \mathbb{F}_2[Y]$。若 $m_2 \equiv 1$ (16), 则 V-牛顿多边形有两条负斜率的边, 且每条边对应的剩余多项式都是线性的。因此, $f(x)$ 是 V-正则的, 并且 $N_2 = 9$。因此, 利用引理 3.8 和定理 3.7, 可知 $v_2(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \mu N_2 = 50 + 9 = 59$, 并且

$$A_{15} = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{2}, \frac{\theta^3}{2^2}, \frac{\theta^4}{2^3}, \frac{\theta^5}{2^4}, \frac{q_1(\theta)}{2^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{2^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{2^8}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{2^9}, \frac{\theta^4 q_1(\theta)}{2^9}, \frac{\theta^5 q_1(\theta)}{2^{10}}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^6 - 8\theta^3 + 32$ 是 $K.$ 的 2-整基

情形 B1: $v_3(m) = 3$, $m_3 \equiv \delta$ (9), 其中 $\delta \in \{1, -1\}$。这里 $f(x) \equiv x^{12}$ (3)。 $f(x)$ 的 3- 牛顿多边形只有一条边, 连接点 (0, 3) 和 (12, 0), 斜率为 $-\frac{1}{4}$。与这条边关联的剩余多项式为 $(Y - \bar{\delta})^3 \in \mathbb{F}_3[Y]$, 其中 δ=1 或 -1, 分别对应 $m_3 \equiv 1$ (3) 或 $m_3 \equiv -1$ (3)。令 $\psi(Y) = Y - \bar{\delta}$。取 $\Phi(x) = x^4 - 3\delta$, 则它是与 $\lambda.$ 关联的关键多项式。根据公式（3.2）, 我们得到 $\mathsf{Q}_3(x)$ 上的二阶赋值 V, 定义为 $V\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 4\min_{i\geq 0}\{v_3(a_i) + i\frac{1}{4}\}$, 使得 $V(x) = 1$, $V(3) = 4$ 且 $V(\Phi) = 4$。 V- 牛顿多边形的

$$f(x) = \Phi^3(x) + 9\delta\Phi^2(x) + 27\Phi(x) + 27\delta - m \tag{4.9}$$

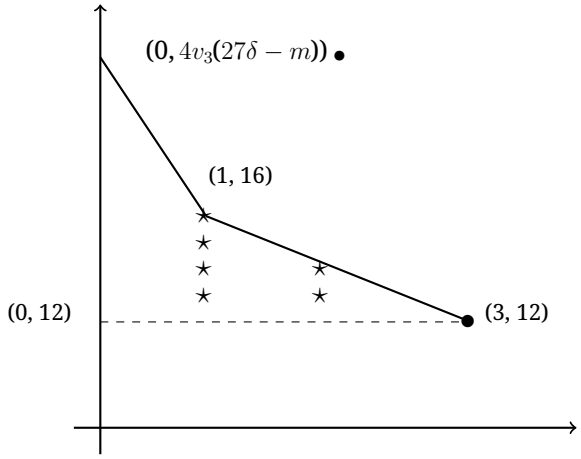

FIGURE 3. V- $f(x)$ 的牛顿多边形。

有两条负斜率的边（见图3）。第一条边是连接点 (0, $4v_3(27\delta - m)$) 和 (1, 16) 的线段，第二条边是连接点 (1, 16) 和 (3, 12) 的线段。与每条边关联的剩余多项式均无重根。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，且 $N_2 = 6$。根据定理 3.7 的记号，我们有 $y_u = -\frac{1}{4}u + 3$，其中 $9 \leq u \leq 12$, $[a_1, b_1] = [0, 1]$, $e_1 = 1$, $f_1 = 1$, $[a_2, b_2] = [1, 3]$, $e_2 = 1$,$f_2 = 2$, $Y_j = -2j + 18$，其中 $1 \leq j \leq 3$。因此，利用引理 3.8 和定理 3.7 可知， $v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\ \psi(Y)$ $N_2 = 18 = 12 + 6 = 18$，而 K 的一个 3-整基为

$$B_1 = \left\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \frac{q_2(\theta)}{3}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3^2}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^2}, \frac{q_1(\theta)}{3^3}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^3}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 + 3\delta\theta^4 + 9$，且 $q_2(\theta) = \theta^4 + 6\delta$。

情形B2： $v_3(m) = 3$， $m_3 \in \{4\delta, 7\delta\}$ (9) $\delta \in \{1, -1\}$。在这种情形下， $f(x) \equiv x^{12}$ (3)。仿照情形 B1 的论证可知， $f(x)$ 不是 3-正则。在这种情形下， λ、 $\psi(Y)$、 $\phi(x)$ 和V 将与情形 B1 中相同。注意到 (4.9)，我们观察到， $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有一条连接点 (0, 16) 和 (3, 12) 的单边。与这条边相关联的剩余多项式是线性的。因此， $f(x)$ 是 V-正则的，且 $N_2 = 3$。因此，引理 3.8 和定理 3.7 蕴含 $v_3(\text{ind}\ \theta) = N_1 + \deg\ \psi(Y) N_2 = 12 + 3 = 15$，并且集合

$$B_2 = \left\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \frac{q_2(\theta)}{3}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^2}, \frac{q_1(\theta)}{3^2}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^2}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^3}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 + 3\delta\theta^4 + 9$ 和 $q_2(\theta) = \theta^4 + 6\delta$ 是 $K.$的 3-整基

情形 B3： $v_3(m) = 6$, $m_3 \equiv 1$ (9)。此处 $f(x) \equiv x^{12}$ (3)。$f(x)$ 的 3-牛顿多边形只有一条边，连接点 (0, 6) 和 (12, 0)，斜率为 $-\frac{1}{2}$。与这条边相关联的剩余多项式为 $Y^6 - \bar{1} = (Y - \bar{1})^3($ $Y + \bar{1})^3 \in \mathbb{F}_3[Y]$，它有

一个重根。因此，$f(x)$ 不是 3-正则的。在这一步，我们有两种类型的数据 $(x; -\frac{1}{2}, Y - \bar{1})$ 和 $(x; -\frac{1}{2}, Y + \bar{1})$。令 $\psi(Y) = Y + \bar{\delta}$，其中 $\delta \in \{1, -1\}$。取 $\Phi(x) = x^2 + 3\delta$。根据公式（3.2），我们可以在 $Q_3(x)$ 上定义二阶赋值 V，使得 $V\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 2\min_{i\geq 0}\{v_3(a_i) + i\frac{1}{2}\}$，从而 $V(\Phi) = 2$, $V(x) = 1$ 且 $V(3) = 2$。$f(x)$ 的 Φ-展开为

$$f(x) = \Phi^6(x) - 18\delta\Phi^5(x) + 135\Phi^4(x) - 540\delta\Phi^3(x) + 1215\Phi^2(x) - 1458\delta\Phi(x) + 729 - m. \tag{4.10}$$

V- $f(x)$ 的牛顿多边形是由点 $(0, 2v_3(729-m))$、(1, 14)、(2, 14)、(3, 12)、(4, 14)、(5, 14)、(6, 12) 构成的下凸包，它有两条负斜率的边。第一条边是连接点 $(0, 2v_3(729 - m))$ 与 (1, 14) 的线段，第二条边是连接点 (1, 14) 与 (3, 12) 的线段。每条边对应的剩余多项式都是可分的。因此，$f(x)$ 是 V-正则的，并且$N_2 = 3$。因此，利用引理 3.8 和定理 3.7，我们得到 $v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg(Y - 1)N_2 + \deg(Y + 1)N_2 = 30 + 3 + 3 = 36$，且 K 的一个 3-整基为 $\{q_3(\theta)$ 33 , $\theta q_3(\theta)$ 33 , $q_3'(\theta)$ 33 , $\theta q_3'(\theta)$ 33 , $q_2(\theta)$ 34 , $q_2'(\theta)$ 34 , $\theta q_2(\theta)$ 35 , $\theta q_2'(\theta)$ 35 , $q_1(\theta)$ 36 , $\theta q_1(\theta)$ 36 , $q_1'(\theta)$ 36 , $\theta q_1'$ ($\frac{\theta}{3^6}$), 其中 $q_1(\theta) = \theta^{10} + 3\theta^8 + 9\theta^6 + 27\theta^4 + 81\theta^2 + 243$, $q_2(\theta) = \theta^8 + 6\theta^6 + 27\theta^4 + 108\theta^2 + 405$，且 $q_1'(\theta) = \theta^{10} - 3\theta^8 + 9\theta^6 - 27\theta^4 + 81\theta^2 - 243$, $q_2'(\theta) = \theta^8 - 6\theta^6 + 27\theta^4 - 108\theta^2 + 405$, $q_3(\theta) = \theta^6 + 9\theta^4 + 54\theta^2 + 270$，且 $q_3'(\theta) = \theta^6 - 9\theta^4 + 54\theta^2 - 270$.$\}$

由于 $\theta^{12} = m$ 和 $v_3(m) = 6$，我们得出 1、θ、$\frac{\theta^2}{3}$、$\frac{\theta^3}{3}$、$\frac{\theta^4}{3^2}$ 都是代数整数。又因为$q_3(\theta)$ 33, $\frac{\theta q_3(\theta)}{3^3}$ 且 $\frac{q_2(\theta)}{3^4}$ 都是代数整数，所以 $\frac{\theta^6}{3^3}$、$\frac{\theta^7}{3^3}$ 和 $\frac{\theta^8}{3^4}$ 都是代数整数。因此$\frac{\theta^8 - 18\theta^4 - 162}{3^5} = \frac{q_1'(\theta)}{3^6} - \frac{q_1}{(}\frac{\theta}{3^6} + \frac{\theta^8}{3^4})$是代数整数。令 $z_2(\theta) = \theta^8 - 18\theta^4 - 162$，则$\theta z_2(\theta)$ $\frac{-\theta q_2\ \theta}{3^5} = -\frac{3\theta^7 + 27\theta^3}{3^4} + \frac{\theta^7 - 15\theta^5 - 9\theta^3 - 27\theta}{3^4} - 2\theta($)，这表明 $\frac{\theta^7 - 15\theta^5 - 9\theta^3 - 27\theta}{3^4} = \frac{z_1(\theta)}{3^4}$ （记作）是代数整数。此外

$$\frac{\theta q_2(\theta) - \theta q_2'(\theta)}{3^5} - \frac{z_1(\theta)}{3^4} = \frac{6\theta^5}{3^3} + \frac{3\theta^7 + 81\theta^3}{3^4} - \frac{\theta^5 - 9\theta}{3^3}$$

意味着 该 $\frac{\theta^5 - 9\theta}{3^3}$ 是一个代数整数。因此，利用命题3.1，集合

$$B_3 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{\theta^4}{3^2}, \frac{\theta^5 - 9\theta}{3^3}, \frac{\theta^6 - 9\theta^2}{3^3}, \frac{z_1(\theta)}{3^4}, \frac{z_2(\theta)}{3^5}, \frac{\theta z_2(\theta)}{3^5}, \frac{q_1(\theta)}{3^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^6}\right\},$$

是 K. 的 3-整基

情形 B4: $v_3(m) = 6$, $m_3 \in \{4, 7\}$ (9)。现在 $f(x) \equiv x^{12}$ (3)。与情形 B3 一样进行推导，很容易验证 $f(x)$ 不是 3-正则。这里，λ, $\psi(Y)$、$\Phi(x)$ 和 V 与情形 B3 相同。利用 (4.10) 中给出的 $f(x)$ 的 Φ 展开式，$f(x)$ 的 V-牛顿多边形是集合 T ={(0, 14), (1, 14), (2, 14), (3, 12), (4, 14), (5, 14), (6, 12)} 中各点的下凸包，它有一条负斜率的单边。该边是连接点 (0, 14) 和 (3, 12) 的线段。与这条边对应的剩余多项式是线性的。因此，$f(x)$ 是 V-正则，并且 $N_2 = 1$.

因此 $v_3(\text{ind }\theta) = N_1 + 2N_2 = 30 + 2 = 32$，而 K 的 3-整基（非三角形形式）为 $B_4 = \Big\{ q_3(\theta)\ 33\ ,\ \theta q_3(\theta)\ 33\ ,\ q_3'(\theta)\ 33\ ,\ \theta q_3'(\theta)\ 33\ ,\ q_2(\theta)\ 34\ ,\ \theta q_2(\theta)\ 34\ ,\ q_2'(\theta)\ 34\ ,\ \theta q_2'(\theta)\ 34\ ,\ q_1(\theta)\ 35\ ,\ q_1'(\theta)\ 35\ ,\ \theta q_1(\theta)\ 36\ ,\ \theta q_1'(\underbrace{\theta}_{3^6})\Big\}$，其中 $q_1(\theta) = \theta^{10} + 3\theta^8 + 9\theta^6 + 27\theta^4 + 81\theta^2 + 243$, $q_2(\theta) = \theta^8 + 6\theta^6 + 27\theta^4 + 108\theta^2 + 405$，且 $q_1'(\theta) = \theta^{10} - 3\theta^8 + 9\theta^6 - 27\theta^4 + 81\theta^2 - 243$，以及 $q_2'(\theta) = \theta^8 - 6\theta^6 + 27\theta^4 - 108\theta^2 + 405$,$q_3(\theta) = \theta^6 + 9\theta^4 + 54\theta^2 + 270$，且 $q_3'(\theta) = \theta^6 - 9\theta^4 + 54\theta^2 - 270.$

在这种情形下，$\theta q_1(\theta) - \theta q_1'(\theta) = 6\theta^9 + 54\theta^5 + 486\theta$ 意味着 $\frac{\theta^9 - 18\theta^5 - 162\theta}{3^5}$是一个代数整数。因此，$K$ 的一个三角形 3-整基为

$$B_4 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^4}{3^2}, \frac{\theta^5}{3^2}, \frac{\theta^6}{3^3}, \frac{\theta^7}{3^3}, \frac{\theta^8}{3^4}, \frac{\theta^9 - 18\theta^5 - 162\theta}{3^5}, \frac{q_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^6}\right\}.$$

情形 B5：$v_3(m) = 6$, $m_3 \equiv -1$ 模 9。注意，$f(x) \equiv x^{12}$ 模 3。这里，$f(x)$的 3-牛顿多边形有一条连接点 (0, 6) 和 (12, 0) 的单边，其斜率为$-\frac{1}{2}$。与该边相关的 $f(x)$ 的剩余多项式为 $Y^6 + \bar{1} = (Y^2 + \bar{1})^3$。谨记引理 3.8，我们有 $N_1 = 30$。令 $\psi(Y) = Y^2 + \bar{1}$。取 $\Phi(x) = x^4 + 9$。根据公式（3.2），我们有 $V\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 2\min_{i\geq 0}\{v_3(a_i) + i\frac{1}{2}\}$，其中 $V(\Phi) = 4$, $V(x) = 1$且 $V(3) = 2$。V-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^3(x) - 27\Phi^2(x) + 243\Phi(x) - 729 - m \tag{4.11}$$

有两条负斜率的边。第一条边是连接点 $(0,\ 2v_3(m + 729))$ 和 (1, 14) 的线段，第二条边是连接点 (1, 14) 和 (3, 12) 的线段。与每条边对应的剩余多项式都是可分的。因此 $v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\psi(Y)N_2 = 36$，且 K 的 3-整基为

$$B_5 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{q_2(\theta)}{3^2}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^4}, \frac{q_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^6}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^6}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 - 9\theta^4 + 81$ 且 $q_2 = \theta^4 - 18$。

情形 B6：$v_2(m) = 6$, $m_3 \in \{-4, -7\}$ (9)。按照情形 B5 中相同的方法，可以容易地验证 $f(x)$ 不是 2-正则的。令 λ、$\psi(Y)$、$\Phi(x)$ 和 V 与情形 B5 中相同。由方程 (4.11) 可知，$f(x)$ 的 V-牛顿多边形只有一条负斜率的边。该边是连接点 (0, 14) 和 (3, 12) 的线段。与该边对应的剩余多项式是线性的。因此$v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\ \psi(Y)$ $N_2 = 32$，且 K 的 3-整基为

$$B_6 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3}, \frac{q_2(\theta)}{3^2}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3^2}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3^3}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^3}, \frac{q_1(\theta)}{3^4}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^5}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^6}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 - 9\theta^4 + 81$ 和 $q_2 = \theta^4 - 18.$

情形 B7：$v_3(m) = 9$, $m_3 \equiv \delta$ (9)，其中 $\delta \in \{1, -1\}$。$f(x)$ 的 3-牛顿多边形具有

一条负斜率的边，即连接点 (0, 9) 和 (12, 0) 的线段，斜率为 $-\frac{3}{4}$。剩余多项式为 $(Y-\bar{\delta})^3$,, 其中 δ 根据 $m_3 \equiv 1$ 模 3 或 $m_3 \equiv -1$ 模 3 分别为 1 或 -1。取 $\psi(Y) = Y - \bar{\delta}$。取 $\Phi(x) = x^4 - 27\delta$。有理数域 $_3(x)$ 上的二阶赋值由 $V\big(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\big) = 4\min_{i\geq 0}\{v_3(a_i) + i\frac{3}{4}\}$ 给出。

于是

$V(\Phi) = 12, V(x) = 3$ 和 $V(3) = 4$。V-牛顿多边形

$$f(x) = \Phi^3(x) + 81\delta\Phi^2(x) + 2187\Phi(x) + 19683\delta - m \tag{4.12}$$

有两条负斜率的边。第一条边是连接点 $(0, 4v_3(-m + 19683\delta))$ 与 (1, 40) 的线段，第二条边则是连接点 (1, 40) 与 (3, 36) 的线段。每条边对应的剩余多项式都是可分的。在此情形下 $N_1 = 45$。因此 $v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\,\psi(Y)N_2 = 51$，而 K 的一个 3-整基为

$$B_7 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3^2}, \frac{q_2(\theta)}{3^3}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3^4}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3^5}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^5}, \frac{q_1(\theta)}{3^7}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^8}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^9}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 + 27\delta\theta^4 + 729$ 且 $q_2(\theta) = \theta^4 + 54\delta$.

情形 B8： $v_3(m) = 9$, $m_3 \in \{\pm 4, \pm 7\}$ (9)。显然 $f(x) \equiv x^{12}$ (3)。根据情形 B7 中给出的论证，我们得出 $f(x)$ 不是 3-正则。在此情形下， λ, $\psi(Y)$,$\Phi(x)$ 和 V 将与情形 B7 中相同。注意到 (4.12)， $f(x)$ 的 V-牛顿多边形有一条连接点 (0, 40) 和 (3, 36) 的单边。与该边相关的剩余多项式是线性的。因此 $v_3(\text{ind}\,\theta) = N_1 + \deg\,\psi(Y)N_2 = 48$，而 K 的一个 3-整基为

$$B_8 = \left\{1, \theta, \frac{\theta^2}{3}, \frac{\theta^3}{3^2}, \frac{q_2(\theta)}{3^3}, \frac{\theta q_2(\theta)}{3^4}, \frac{\theta^2 q_2(\theta)}{3^4}, \frac{\theta^3 q_2(\theta)}{3^5}, \frac{q_1(\theta)}{3^6}, \frac{\theta q_1(\theta)}{3^7}, \frac{\theta^2 q_1(\theta)}{3^8}, \frac{\theta^3 q_1(\theta)}{3^8}\right\},$$

其中 $q_1(\theta) = \theta^8 + 27\delta\theta^4 + 729$ 且 $q_2(\theta) = \theta^4 + 54\delta$.

至此，定理的证明完成。 □

5. Proof of Theorem 2.2

证明。(1) 在此情形下， p- $f(x)$ 的牛顿多边形只有一条边，连接点 $(0, v_p(m))$ 和 (12, 0)。由于 $p \nmid v_p(m)$，因此与该边对应的剩余多项式是可分的。根据定理 3.4，我们有 $v_p(\text{ind}\ \theta) = \frac{1}{2}[11(v_p(m) - 1) + (d-1)]$. 写作$m = p^{v_p}(_m)m_1$，其中 $p \nmid m_1$，于是 $\theta^{12} = p^{v_p}(_m)m_1$. 这意味着 $\frac{\theta^i}{p^{\lfloor \frac{iv_p(m)}{12} \rfloor}}$ 是多项式 $x^{12} - m_1^i p^{iv_p}(_m)_{-12\lfloor {}^{iv_p}(_m)\,{}_{12}\ \rfloor}$ 的根，该多项式具有整数系数。因此，$\frac{\theta^i}{p^{\lfloor {}^{iv_p}(_m)\,{}_{12}\ \rfloor}}$是 $\overline{K}$.中的代数整数。因此，命题 3.1 表明，$\overline{\overline{S = \left\{\frac{\theta^i}{p^{\lfloor \frac{iv_p(m)}{12} \rfloor}} \mid 1 \leq i \leq 12\right\}}}$是 K的 p-整基。(2) $p = 3$和 $p \nmid m$. 于是 $f(x) \equiv (x-1)^3($ $x+1)^3(x^2+1)^3$(3) 或 $f(x) \equiv (x^2-x-1)^3(x^2+$

$x-1)^3$(3)，分别取决于 $m\equiv -1$ (3) 或 $m\equiv 1$ (3)。取 $\phi_1(x)=x^2+1$、$\phi_2(x)=x-\delta$，以及 $\phi_3(x)=x^2-\delta x-1.$，其中 $\delta\in\{1,-1\}.$。对于每个 $i=1$、2、3，ϕ_i 对 $f(x)$ 的展开式为

$$f(x)=\phi_1^6(x)-6\phi_1^5(x)+15\phi_1^4(x)-17\phi_1^3(x)+12\phi_1^2(x)-6\phi_1(x)+1-m, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} f(x)=\phi_2^{12}(x)+12\delta\phi_2^{11}(x)+66\phi_2^{10}(x)+220\delta\phi_2^9(x)+495\phi_2^8(x)+792\delta\phi_2^7(x)+\\ 924\phi_2^6(x)+792\delta\phi_2^5(x)+495\phi_2^4(x)+220\delta\phi_2^3(x)+66\phi_2^2(x)+12\delta\phi_2(x)+1-m, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} f(x)=\phi_3^6(x)+(6\delta x+21)\phi_3^5(x)+(65\delta x+125)\phi_3^4(x)+(256\delta x+338)\phi_3^3(x)\\ +(474\delta x+468)\phi_3^2(x)+(42\delta x+324)\phi_3(x)+89-m+144\delta x. \end{aligned} \tag{5.3}$$

设 $m^2\equiv 1$ (9)，则对每个 $i=1$，2，3，$f(x)$ 的 ϕ_i-牛顿多边形有两条负斜率的边。第一条边是连接点 (0, 1) 与 (1, 1) 的线段，第二条边是连接点 (1, 1) 与 (3, 0) 的线段。与每条边相关联的剩余多项式都是线性的。根据引理 3.8 和定理 3.7，$v_3(\operatorname{ind}\theta)=4$.写作 $\theta^{12}-m\equiv(\theta^4-m)(\theta^8+m\theta^4+m^2)$(3)，并取 $\xi=m^2\theta^8+m\theta^4+1$，则 $(m\theta^4-1)\xi=m^4-1$.因此我们得到 $(m\theta^4)^3\xi^3=((m\theta^4-1+1)\xi)^3=(m^4-1+\xi)^3$.由二项式定理可得 $(m^4-1)\xi^3+3\xi^2(m^4-1)+3\xi(m^2-1)^2+(m^4-1)^3=0$.由于 $m^4\neq 1$，因此 ξ 满足该方程

$$x^3+x^2+3(m^4-1)x+(m^4-1)^2=0$$

具有整数系数。由于 $m^2\equiv 1$ (9) $\frac{\xi}{3}$ 是 $K.$ 中的代数整数，因此$\xi-\frac{(m^4-1)}{3}^{\theta^8}=\frac{\theta^8+m\theta^4+1}{3}$ 是 $K.$ 中的代数整数。设 $h(\theta)=\theta^8+m\theta^4+1$，则命题 3.1 表明，集合 $\{1,\theta,\theta^2,\cdots,\theta^7,{}^{h}_{(\theta)\,3},{}^{\theta h}_{(\theta)\,3},{}^{\theta^2h(\theta)}_{\,3},{}^{\theta^3h(\theta)}_{\,3}\}$ ~~是 K.的 3-整基~~

设 $m^2\not\equiv 1\,(9)$，则对于每个 $i=1$，2，3，ϕ_i-多项式 (x) 的牛顿多边形只有一条边，连接点 (0，1) 和 (3，0)。与该边对应的剩余多项式是线性的。根据引理 3.8 和定理 3.7，$v_3(\operatorname{ind}\theta)=0$ 因此，集合$\{1,\theta,\theta^2,\cdots,\theta^{11}\}$ 是 K.的 3-整基

(3) $p=2$ 和 $p\nmid m$，则 $f(x)\equiv(x+1)^4(x^2+x+1)^4$(2)。令 $\phi_1(x)=x^2+x+1$ 和$\phi_2(x)=x+1$。$f(x)$ 的 ϕ_1 展开式为

$$\begin{aligned} f(x)=\phi_1^6(x)+(9-6x)\phi_1^5(x)-(5x+25)\phi_1^4(x)+(24x+18)\phi_1^3(x)-18x\phi_1^2(x)\\ +(4x-4)\phi_1(x)+1-m. \end{aligned} \tag{5.4}$$

注意到上述展开式以及5.2中给出的展开式，可以验证对于每个 $i=1$，2，的 ϕ_i- 牛顿多边形 $f(x)$ 是下列各点的下凸包：(0，$v_2(1-m)$)、(1，2)、(2，1)、(3，i) 和 (4，0)。

如果 $m\equiv 1\,(8)$，那么对于每个 $i=1$，2，该 ϕ_i-牛顿多边形 $f(x)$ 有 2 条或 3 条负斜率的边。与每条边相关联的剩余多项式都是可分的。根据定理3.7，我们有 $v_2(\operatorname{ind}\,\theta)=3\deg\,\phi_1(x)+3\deg\,\phi_2(x)=9.$ 显然

$\theta^{12} - m \equiv (\theta^3 - 1)(\theta^9 + \theta^6 + \theta^3 + 1)$ (2)。令 $g(\theta) = \theta^9 + \theta^6 + \theta^3 + 1$. 采用与前一种情形相同的步骤，我们发现 $^{g(\theta)}{}_4$ 是该多项式的一个根

$$x^4 - x^3 - \frac{3(m-1)}{8}x^2 + \frac{(m-1)^2}{16}x + \frac{(m-1)^3}{256}.$$

因此，根据命题 3.1, $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-1}{2}, {}^{\theta}{}_{(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{\theta^2(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{g}{}_{(\theta)\ 2^2}$, ${}^{\theta g}{}_{(\theta)\ 2^2}$ ~~${}^{\theta^2 g}{}_{(\theta)\ 2^2}$~~ }是 K 的 2-整基

若 $m \equiv 5$ (8)，则对每个 $i = 1$（2）， $f(x)$ 的 ϕ_i-牛顿多边形有两条负斜率的边。与每条边相关联的剩余多项式都是线性的。根据定理 3.7，我们有 $v_2(\text{ind}\,\theta) = 2\deg\,\phi_1(x) + 2\deg\,\phi_2(x) = 6$. 设 $\theta^{12} = m$，则 $(\theta^6 - 1 + 1)^2 = m$。因此，$\frac{\theta^6-1}{2}$ 是多项式 $x^2 + x + \frac{1-m}{4}$. 的一个根。根据命题 3.1， $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \frac{\theta^6-1}{2}, {}^{\theta}{}_{(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{\theta^2(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{\theta^3(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{\theta^4(\theta^6-1)\ 2}$, ${}^{\theta^5(\theta^6-1)\ 2}$ }是 K. 的 2-整基

若 $m \in \{3, 7\}$ (8)，则对每个 $i = 1$，2，多项式 ϕ_i-牛顿多边形 $f(x)$均只有一条负斜率的边。与这条边相关的剩余多项式是线性的。由引理3.8 和定理3.7，可得 $v_2(\text{ind}\,\theta) = 0$。因此 $\{1, \theta, \cdots, \theta^{11}\}$ 是 K.的 2-整基

(4) $p \nmid 12m$. 在这种情形下， $p \nmid D_f$，因此 $v_p(\text{ind}\ \theta) = 0$. 故 $\{1, \theta, \cdots, \theta^{11}\}$ 是p-整基

References

.[1] R. Dedekind, 《论纯三次数域中的理想类数》, J. Reine Angew. Math. 121 (1900) $40 - 123$. [2] G. Landsberg, 《论由根式构成的代数数类的基本系与判别式》, J. Reine Angew. Math. 117 (1897) $140 - 147$.[3] T. Funakura, 《纯四次数域的整基》, Math. J. Okayama Univ. 26 (1984) $27 - 41$.[4] A. Hameed, T. Nakahara, 《纯八次数域的整基与相对单生成性》, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome, 58 (106) (2015), 419-433.[5] A. Jakhar, S. Kaur, S.K. Khanduja, 《由 $x^5 + ax + b$定义的五次数域的判别式与整基》, J. Algebra Appl. 22 (05) (2023) 2350109, 37 页.[6] J. Guardia, J. Montes, E. Nart, 《代数数论中的高阶牛顿多边形》, Trans. Am. Math. Soc. 364 (1) (2012) $361 - 416$.[7] J. Guardia, J. Montes, E. Nart, 《高阶牛顿多边形与整基》, J. Number Theory 147 (2015) $549 - 589$.[8] A. Jakhar, 《有理数域 Q($\sqrt[p_1 p_2]{a}$) 的显式整基》, J. Number Theory, 240 (2022) $254 - 271$.[9] S. K. Khanduja, S. Kumar, 《通过牛顿多边形延拓赋值及多项式提升》, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012) $2648 - 2656$.[10] Ø. Ore, 《代数数域理论中的牛顿多边形》, Math. Ann. 99 (1928) 84 –117.[11] J. Westlund, 《关于代数数域 $K(\sqrt[p]{m})$ 的基本数》, Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910) $388 - 392$.[12] D.A. Marcus, 《数域》, Universitext, Springer-Verlag，纽约，1977。