关于收敛速度为 1 2 的级数的一个猜想

John M. Campbell

arXiv:2304.00360v1 [math.NT] 1 Apr 2023

摘要

Sun 于 2022年提出了一个涉及调和数的收敛速度1 2 级数的猜想性求值。我们利用此前提出的基于贝塔型积分的求和技巧，证明了这一猜想及其一个更强的版本。完整证明还需要应用 Bailey 的${}_2F_1\left(\frac{1}{2}\right)$公式、Dixon 的 ${}_3F_2(1)$公式、Chu 提出的 Dixon 公式的近似平衡形式、Watson 关于 ${}_3F_2(1)$级数的公式、Gauss 求和定理、Euler 关于${}_2F_1$级数的公式、椭圆积分奇异值，以及 Campbell 和 Chu 最近引入的类双纽线常数。更广泛地说，我们证明中涉及的技巧对于将难以求解的收敛速度为1 2 的和约化为此前可求值的表达式是有用的。

数学主题分类：33C20，33C75

关键词：调和数；超几何级数；符号求值；闭式；双伽马函数

1 引言

多年来，孙智伟提出了许多引人注目的猜想。其中许多猜想给出了极其困难级数的所谓求值结果；这些级数是通过计算机代数系统软件以实验方式发现的，也可借助数值估计得到。最近，孙智伟 [17] 发布了一篇关于含有调和数的级数的预印本，而我们这篇文章的目的，就是证明孙智伟在这篇最新预印本 [17]中提出的一个猜想。

[17] 中的猜想2.4由孙智伟以如下方式表述： [17], 并指出 [17] 该猜想是在2022年12月提出的。设$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$ 表示调和数序列中的第 m^{th} 项。Γ-函数 [16, §8] 在数学内外都具有重要意义，并将在本文中发挥重要作用；它可以通过欧拉积分定义为$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$，其中 $\Re(x) > 0$。

[17]中的猜想 2.4：我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}(2H_{2k} - H_k) = -\frac{\ln(2)\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^2}{32^k}(2H_{2k} - H_k) = \frac{\ln(2)\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi\sqrt{\pi}}. \tag{2}$$

事实证明，(1) 中的交错级数求值可以直接由 Chu 和 Campbell 在 [14], 中通过超几何线性化方法得到的结果推出，正如我们将在本文后文中简要展示的那样。然而，证明 (2) 中的求值结果要困难得多。本文成功证明了 (2)，详见下文第 2 节。据我们所知，Sun 猜想公式 (2) 此前尚未得到证明。

1.1 背景

Chu [13] 最近运用一种基于系数提取的线性化方法，得到了计算含有 $\binom{2k}{k}^2$ 的级数的恒等式，其中 $k \in \mathbb{N}_0$ 还涉及调和型数；这项工作建立在 Campbell 先前于 [3]给出的、由贝塔积分推导出的结果之上。然而，Chu [13] 的方法至少无法以任何直接的方式用于证明 (2)。具体而言，Chu [13]提出的超几何技巧曾在 [13] 中用于计算收敛速度为$1/32^2$ 的级数，其中涉及

$$\left(\frac{1}{32}\right)^k \binom{2k}{k}^2 H_k \tag{3}$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，例如公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{32}\right)^k \binom{2k}{k}^2 \frac{H_k}{k+1} = 8 - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi^{3/2}} - \frac{4\pi^{3/2} + 16\sqrt{\pi}\ln(2)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \tag{4}$$

先前由 Campbell [3], 引入，以及收敛速度为$1/32^2$ 的级数，其中涉及

$$\left(\frac{1}{32}\right)^k \binom{2k}{k}^2 O_k^{(2)} \tag{5}$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，写作 $O_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i-1}()^2$。然而，通过展开 (2) 的被加数，我们需要计算一个收敛速度为$1/32^2$ 的级数，其中涉及

$$\left(\frac{1}{32}\right)^k \binom{2k}{k}^2 H_{2k} \tag{6}$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，这与 (3) 和 (5) 均不同。

此前已知的涉及（6）且收敛速度为$1/32^2$ 的级数只有少数几个，例如我们之前关于傅里叶–勒让德理论和分数阶微积分的工作 [8]。特别是， [8]证明了

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{32}\right)^k \binom{2k}{k}^2 \frac{H_{2k}}{2k-1} = \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\pi+3\ln(2)-4)}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}-\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)(\pi-3\ln(2)-2)}{16\pi^{3/2}} \tag{8}$$

并且证明了

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^k\binom{2k}{k}^2\frac{H_{2k}}{k+1}=4-\frac{3\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi^{3/2}}-\frac{2\sqrt{\pi}(\pi+3\ln(2)-4)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}, \tag{9}$$

而（7）–（8）和（9）中的结果在 [8] 中被强调为主要结果。我们通过证明（2）来解决 Sun 提出的问题，这种方法与我们此前证明（7）–（8）和（9）的方法性质相似，但（2）的证明要复杂得多，并且需要用到近期关于所谓双纽线型常数的结果[9]。

正如 Chu [13], 所考察的，像（4）这样的级数具有极快的收敛速度，这一点值得关注，尤其是与此前已知的收敛速度为 1 的级数相比，这些级数涉及 $\binom{2k}{k}^2$、$k\in\mathbb{N}_0$ 和调和数，如公式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^k\binom{2k}{k}^2\frac{H_k}{(2k-1)^2}=\frac{12-16\ln(2)}{\pi}$$

该公式由 Choi 在 2014 [11] 中证明，并由 Chen 在 2016 [10], 中独立证明，随后由 Campbell [4] 以及 Wang 和 Chu [20] 加以推广。上述考量极大地推动了开发用于求解涉及（3）中表达式的级数的新方法。

1.2 预备知识

我们将用于证明式 (2) 中 Sun 猜想公式的一项关键工具，是作者先前发表的论文[5] 中提出、并在作者的博士论文 [6]中重现的贝塔型积分技巧。令 $H'_m=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+1}}{m}$ 表示交错调和数序列中的第 m^{th} 项，并回顾关系式 $H'_{2n}=H_{2n}-H_n$。

引理 1. 给定一个序列 $(f_n)_{n\geq 0}$，其级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n H'_{2n}\binom{2n}{n}^2\frac{f_n}{n+1} \tag{10}$$

收敛时，上述级数等于

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\sqrt{1-x^2}\binom{-\frac{1}{2}}{n}f_n\ln(x)\,dx \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n\frac{\binom{2n}{n}^2(2\ln(2)(n+1)+1)}{(n+1)^2}f_n, \tag{12}$$

假设序列 f 满足可以在式（11） *[5, 6]*中交换积分与无穷求和的次序。

超几何级数的求值在本文中至关重要，因此我们认为有必要回顾广义超几何级数这一术语的定义：

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\right]_n \frac{x^n}{n!}. \tag{13} $$

完全椭圆积分将在我们证明 (2) 的过程中发挥重要作用。本文中，第一类和第二类完全椭圆积分 K 和 E 可通过以下麦克劳林级数展开来定义，相关内容可参见经典著作 Pi and the AGM [2,第 8–10] 页：

$$ \mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, k^2 \right], \tag{14} $$

$$ \mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, k^2 \right]. \tag{15} $$

Pi and the AGM [2, 第 25] 页中以定理 1.7 阐述的以下椭圆积分奇异值，也将用于我们对 (2) 的证明：

$$ \mathbf{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}, \tag{16} $$

$$ \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}} + \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}. \tag{17} $$

记 $k' = \sqrt{1-k^2}$，我们还将用到以下微分方程 [2, 第 10] 页：

$$ \frac{d\mathbf{E}}{dk} = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{K}}{k} \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{K}}{dk} = \frac{\mathbf{E}-(k')^2\mathbf{K}}{k(k')^2}. \tag{18} $$

我们将利用高斯求和定理 [1, §1.3]，从而得到

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, 1 \right] = \Gamma\left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix}\right] \tag{19} $$

对于 $\Re(c-a-b) > 0$，记作

$$ \Gamma\left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \ldots, \gamma \\ A, B, \ldots, C \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\cdots\Gamma(\gamma)}{\Gamma(A)\Gamma(B)\cdots\Gamma(C)}. $$

欧拉–马歇罗尼常数满足 $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(H_n - \ln n\right)$。双伽马函数是一种特殊函数，满足 [16, §9]:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z-1}{(n+1)(n+z)}. \tag{20}$$

${}_2F_1$级数的欧拉公式 [15, 第 57]页为

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right] = \Gamma\left[\begin{matrix}c\\c-a,a\end{matrix}\right]\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt,$$

对于 $\Re(c) > \Re(a) > 0$，以及对于 $|\arg(1-z)| < \pi$。根据 [15, 第 111], 页，可应用欧拉公式得到超几何约化公式

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,1\\c,2\end{matrix}\,\middle|\,z\right] = \frac{c-1}{(a-1)(b-1)}\left({}_2F_1\left[\begin{matrix}a-1,b-1\\c-1\end{matrix}\,\middle|\,z\right]-1\right) \tag{21}$$

见 [15, 第 111]页。因此，(19)中的高斯恒等式由(21)给出

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,1\\c,2\end{matrix}\,\middle|\,1\right] = \frac{c-1}{(a-1)(b-1)}\left(\Gamma\left[\begin{matrix}c-1,c-a-b+1\\c-a,c-b\end{matrix}\right]-1\right) \tag{22}$$

对于 $a \neq 1$、 $b \neq 1$以及 $\Re(c-a-b) > -1$ [15, 第 111]页。根据洛必达法则，由(22)可得

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1,1\\c,2\end{matrix}\,\middle|\,1\right] = \frac{c-1}{a-1}\left(\psi(c-1)-\psi(c-a)\right) \tag{23}$$

对于 $a \neq 1$ 以及 $\Re(c-a) > 0$ [15, 第 111]页。(23)中的恒等式将在我们证明(2)时直接用到。

计算结果

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1,\frac{5}{4}\\\frac{3}{2},\frac{7}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right] = 3 - \frac{6\pi^3}{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} \tag{24}$$

由 Campbell 等人在 [8] 中提出，并在 [8] 中作为一条主要定理的一部分加以强调。式 (24) 中的这一求值将为我们证明式 (2) 中的 Sun 猜想公式提供关键工具。式 (24) 中的 ${}_3F_2(1)$ 求值由 [8] 使用 FL 理论和分数阶算子证明。式 (24) 中的求值在类似的背景下应用于 [9], , 其中式 (24) 是通过重新编号论证以及 Watson 关于 ${}_3F_2(1)$ 级数的公式 [1, §1.3] 证明的:

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\\frac{a+b+1}{2},2c\end{matrix}\,\middle|\,1\right] = \Gamma\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},\frac{a+b+1}{2},c-\frac{a+b-1}{2}\\\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2},c-\frac{a-1}{2},c-\frac{b-1}{2}\end{matrix}\right]. \tag{25}$$

事实上，通过遵循 由于 [9], , 我们可以对 (24) 中的级数进行重新编号论证，从而 t

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1,\frac{5}{4}\\\frac{3}{2},\frac{7}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{5}{4}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k\left(\frac{7}{4}\right)_k}$$

$$= -3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{4}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{3}{4}\right)_k}$$
$$= 3\left(1 - {}_3F_2\left[\begin{matrix}1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\end{matrix}\,\middle|\, 1\right]\right),$$

而 (25) 中 Watson恒等式的表述便给出了我们所需的 (24) 中的符号形式。

记

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

表示 $\Re(x) > 0$ 和 $\Re(y) > 0$的贝塔函数。经典的双纽线常数

$$A = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{1}{4n+1} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}} \tag{26}$$

and

$$B = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{1}{4n+3} = \frac{\sqrt{2\pi^3}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \tag{27}$$

在数学史上一直具有重要意义 [9, 19], ，这促使人们探索以下形式的双纽线型常数 [7, 9], ，其中f为适当的序列:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{f_n}{4n+1} \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{f_n}{4n+3}. \tag{28}$$

(28)中的级数将在第2节的主要证明中大量使用。

良配级数的Dixon公式为

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}\,\middle|\, 1\right] = \Gamma\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}-b-c, 1+a-b, 1+a-c \\ 1+a, 1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}-b, 1+\frac{a}{2}-c\end{matrix}\right]. \tag{29}$$

Chu [12] 介绍了 Watson–Whipple–Dixon ${}_3F_2$级数的扩展形式，我们将应用以下 Dixon公式的近似平衡形式 [12] asin [9]:

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c \\ 2+a-b, 2+a-c\end{matrix}\,\middle|\, 1\right] =$$
$$\frac{2^{1+2a-2b-2c}\Gamma(a-b+2)\Gamma(a-c+2)}{\pi(b-1)(1-c)\Gamma(a)\Gamma(a-2b+2)\Gamma(a-2c+2)\Gamma(a-b-c+2)}$$
$$\left(\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{2+a}{2}-c\right)\Gamma\left(\frac{5+a}{2}-b-c\right)\right.$$
$$\left.-\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{2}-c\right)\Gamma\left(\frac{4+a}{2}-b-c\right)\right).$$

直接应用上述超几何恒等式可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+3)^2}=\frac{1}{9}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4},\frac{7}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right]=\frac{4-\pi}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \tag{30}$$

双纽线型常数的求值，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+3}=\frac{\pi^{3/2}(3\ln(2)+2)}{2\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \tag{31}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k\binom{2k}{k}\frac{O_{2k}}{4k+1}=\frac{3\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\ln(2)}{16\sqrt{2\pi}} \tag{32}$$

已在 [9] 中得到证明并作为主要结果列出；我们将在主要证明中应用 (31) 和 (32)，其中令 $O_m=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m-1}$ 表示第 m^{th} 个奇调和数。

Bailey 定理 [1, 第 11]页如下:

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,1-a\\ c\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right]=\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{c}{2},\frac{c+1}{2}\\ \frac{a+c}{2},\frac{1-a+c}{2}\end{matrix}\right]. \tag{33}$$

Tauraso [18] 通过在 (33) 中令 $a=\frac{1}{2}$，并逐项应用算子 $\frac{\partial}{\partial c}\cdot\big|_{c=1}$，得到了如下结果:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^k\binom{2k}{k}^2H_k=\frac{\sqrt{\pi}(\pi-4\ln(2))}{2\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}. \tag{34}$$

然而，应用诸如 $\frac{\partial}{\partial c}\cdot\big|_{c=1/2}$ 之类的算子会降低中心二项式系数的幂次，因此尚不清楚如何仿效 Tauraso 的方法，以期求出如下难以处理的级数:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^k\binom{2k}{k}^2H_{2k}.$$

2 收敛速度为 1 2 的级数猜想的证明1 2

定理 1. Sun 猜想的公式 (2) 成立。

证明。我们首先在引理 1 中令 $f_n=2^{-n}(n+1)$。由引理 1 可得等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^n(H_{2n}-H_n)\binom{2n}{n}^2 \tag{35}$$

and

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ln(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}(n+1)\,dx+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^n\binom{2n}{n}^2\frac{1+2(n+1)\ln(2)}{n+1}.$$

根据式 (14) 和 (15) 中的麦克劳林级数展开以及式 (18) 中的微分方程，我们可以得到幂级数展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}^2}{n+1}y^n=\frac{\mathbf{E}\left(4\sqrt{y}\right)}{4\pi y}+\frac{4\left(1-\frac{1}{16y}\right)\mathbf{K}\left(4\sqrt{y}\right)}{\pi}. \tag{36}$$

根据（36）的展开式以及（16）和（17）中给出的椭圆积分奇异值，我们发现（35）中的级数可表示为:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ln(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}(n+1)\,dx+ \tag{37}$$
$$\frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\ln(2)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi^{3/2}}. \tag{38}$$

根据广义二项式定理，我们发现（37）–（38）可化为:

$$-\frac{4}{\pi\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,(x^2-4)\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx+\frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\ln(2)}{2\pi^{3/2}}. \tag{39}$$

因此，接下来需要计算（39）中的积分，即计算以下表达式:

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,(x^2-4)\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{40}$$

我们可以将（40）改写为

$$-\int_0^1\sqrt{\frac{1-x^2}{2-x^2}}\ln(x)\,dx-2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{41}$$

对（41）中的第一个积分作变量代换，使得 $1-x^2=u$，可得

$$-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\sqrt{u}\ln(1-u)}{\sqrt{1-u^2}}\,du-2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{42}$$

将被积函数因子 $\ln(1-u)$ 展开为麦克劳林级数，再利用控制收敛定理逐项积分，即可由 (42) 得到:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Gamma\begin{bmatrix}\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\\ \frac{n}{2}+\frac{5}{4}\end{bmatrix}-2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{43}$$

对 (43) 进行级数二分，可得

$$\frac{\sqrt{\pi}}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Gamma\begin{bmatrix}n+\frac{3}{4}\\ n+\frac{5}{4}\end{bmatrix}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\Gamma\begin{bmatrix}n+\frac{1}{4}\\ n+\frac{3}{4}\end{bmatrix}- \tag{44}$$

$$2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx.$$

对（44）中的第一个级数进行指标平移后，我们得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Gamma\begin{bmatrix}n+\frac{3}{4}\\ n+\frac{5}{4}\end{bmatrix}=\frac{12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{5\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1,1,\frac{7}{4}\\ 2,\frac{9}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right]. \tag{45}$$

因此，[15, 第 111] 页的（23）中的双伽马函数恒等式使我们能够计算（45）中的 ${}_3F_2$ 表达式。由此可将（42）改写如下：

$$-\frac{\pi^{3/2}(\pi+2\ln(2)-8)}{4\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\Gamma\begin{bmatrix}n+\frac{1}{4}\\ n+\frac{3}{4}\end{bmatrix}- \tag{46}$$

$$2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{47}$$

按照（13）中的记号改写（46）中的无穷级数后，我们发现（46）–（47）等于：

$$-\frac{\pi^{3/2}(\pi+2\ln(2)-8)}{4\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{24\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1,\frac{5}{4}\\ \frac{3}{2},\frac{7}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right]-$$

$$2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx.$$

因此，根据（24）中展示的由 Watson 方法推导出的 ${}_3F_2(1)$ 求值结果，我们发现（40）中的积分等于：

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}-\frac{\pi^{3/2}(\pi+\ln(2)-4)}{2\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}-2\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{48}$$

因此，只需计算（48）中的积分。通过变量代换，我们得到：

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\sqrt{u}\ln(1-u)}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}}\,du.$$

利用适当的柯西乘积，我们可以得到

$$\left(\left(\frac{d}{du}\right)^n\frac{1}{(u+1)\sqrt{1-u^2}}\right)\Bigg|_{u=0}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(n+1)!\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}. \tag{49}$$

因此，根据与 (49) 对应的麦克劳林级数，我们可以得到

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx = \tag{50}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n+1)u^{n+\frac{1}{2}}\ln(1-u)\right)\,du. \tag{51}$$

根据双伽马函数的一个标准矩公式，我们有：

$$\int_0^1 u^{n+\frac{1}{2}}\ln(1-u)\,du = -\frac{2\left(\psi\left(n+\frac{5}{2}\right)+\gamma\right)}{2n+3}. \tag{52}$$

根据式 (20) 中给出的双伽马函数展开公式，由式 (52) 可得

$$\int_0^1 u^{n+\frac{1}{2}}\ln(1-u)\,du = \frac{4\ln(2)-4O_{n+1}-\frac{4}{2n+3}}{2n+3}. \tag{53}$$

根据控制收敛定理，我们可以交换式 (50)–(51) 中积分与无穷求和的顺序，从而得到下式，这与式 (53) 中的记号一致：

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(n+1)\left(4\ln(2)-4O_{n+1}-\frac{4}{2n+3}\right)}{2n+3}.$$

通过对级数进行二分，我们得到

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)\left(4\ln(2)-4O_{2n+1}-\frac{4}{2(2n)+3}\right)}{2(2n)+3}- \tag{54}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \binom{2n+1}{n}\frac{((2n+1)+1)\left(4\ln(2)-4O_{(2n+1)+1}-\frac{4}{2(2n+1)+3}\right)}{2(2n+1)+3}.$$

等价地，

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{1}{4n+1}+\left(-1-\frac{\ln(2)}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}\frac{1}{4n+3}+$$

$$\frac{13+12\ln(2)}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+5}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+3)^2}-$$
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+5)^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+3}-$$
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+5}.$$

由（26）和（27）可得,

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$-\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{32\sqrt{2\pi}}+\frac{\left(-1-\frac{\ln(2)}{2}\right)\sqrt{2\pi^3}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\frac{13+12\ln(2)}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+5}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+3)^2}-$$
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+5)^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+3}-$$
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+5}.$$

From 由式（30）和（31）中的双纽线型常数求值，我们得到

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$-\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{32\sqrt{2\pi}}+\frac{(4-\pi)\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}+\frac{\pi^{3/2}(3\ln(2)+2)}{4\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\left(-1-\frac{\ln(2)}{2}\right)\sqrt{2\pi^3}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\frac{13+12\ln(2)}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+5}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+5)^2}-$$
$$\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+5}.$$

应用重新索引论证，我们得到

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$\frac{-\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)-8\pi^2(2+\pi+\ln(2))}{32\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}+$$

$$\frac{3+4\ln(2)}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+1)^2}+\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}-$$
$$\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{2n-1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+1}.$$

从卡特兰数序列生成函数的一个等价表述中，我们得到:

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$\frac{-\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)-8\pi^2(2+\pi+\ln(2))}{32\sqrt{2\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+1)^2}+$$
$$\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+1}.$$

由式（26）中给出的经典双纽线常数求值，我们得到

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$\frac{-\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)-8\pi^2(2+\pi+\ln(2))}{32\sqrt{2\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}\right)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n+1)^2}+\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}-$$
$$\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{2n-1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+1}.$$

由式（29）中的Dixon公式，我们得到

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$
$$\frac{2\pi\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)(2+\pi+\ln(2))+\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3(3-\pi+4\ln(2))}{64\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{4n+1}.$$

由式 (32) 中双纽线型常数的求值可得

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$
$$\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3(3-\pi+\ln(2))+2\pi\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)(2+\pi+\ln(2))}{64\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-1}-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{O_{2n}}{2n-1}.$$

利用矩公式

$$O_{2n}=\int_0^1\frac{1-x^{4n}}{1-x^2}\,dx,$$

结合幂级数恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1-x^{4n}}{(2n-1)(1-x^2)}=-\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2-1},$$

我们可以得到

$$\int_0^1-\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2-1}\,dx=\mathbf{E}(i),$$

这样我们便可以利用一个已知的椭圆积分奇异值来计算剩余的谐波和。具体而言，

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$\frac{-48\pi^2-8\pi^3-8\pi^2\ln(2)+\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)(-1-\pi+\ln(2))}{32\sqrt{2\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+$$
$$\frac{9}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-3}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n-1}.$$

通过重新索引论证，我们得到

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=$$
$$\frac{3}{8}-\frac{\pi^{3/2}(6+\pi+\ln(2))}{4\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)(-1-\pi+\ln(2))}{32\sqrt{2\pi}}-$$
$$\frac{3}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}+\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+1}+$$
$$\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4n+3}$$

利用卡特兰数序列的生成函数，以及对经典双纽线常数的求值，我们得到

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)(4-2\pi+2\ln(2))}{64\sqrt{2\pi}}-\frac{\pi^{3/2}(\pi+\ln(2))}{4\sqrt{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

因此，由（48）可知，（40）中的积分可化为以下形式：

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,(x^2-4)\ln(x)}{(2-x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}+\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{16}-\frac{\ln(2)}{16\sqrt{2\pi}}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

因此，由（35）和（39）的等式，我们得到等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^n(H_{2n}-H_n)\binom{2n}{n}^2=\frac{(5\ln(2)-\pi)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^{3/2}}.$$

因此，由根据 Bailey 定理推导出的（34）中的调和和求值，我们得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^k\binom{2k}{k}^2H_{2k}=\frac{(\pi-3\ln(2))\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^{3/2}}.\tag{55}$$

因此，通过对（55）式和由 Bailey 定理导出的（34）式作适当的线性组合，我们便可得到所需结果。 □

公式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_k=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi^3}}\left(\pi-5\ln(2)\right)$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_{2k}=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi^3}}\left(\pi-6\ln(2)\right)$$

作为 [14] 中定理 4 的一部分，这些结果已被强调，并通过 [14] 中引入的线性化方法得到证明。因此，对上述公式作适当的线性组合，即可证明式 (1) 中的 Sun 猜想公式。

式 (55) 中的新公式本身也很有趣，并使人想起 [13] 最近讨论的未解决问题：求值

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_k^{(2)}\quad\text{and}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_k^{2}$$

以符号形式表示为 $H_m^{(2)}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$。我们在式 (55) 中的求值也促使我们关注这个求值未解决问题：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_{2k}^{(2)}\quad\text{and}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{32}\right)^{k}\binom{2k}{k}^{2}H_{2k}^{2}$$

以符号形式表示。

参考文献

[1] W. N. Bailey, 《广义超几何级数》, 剑桥大学出版社, 剑桥（1935 年）。

[2] J. M. Borwein and P. B. Borwein, Pi and the AGM, 约翰·威立父子出版公司, 纽约（1987）。

[3] J. M. Campbell, 含调和数和中心二项式系数的平方的新级数, 《落基山数学杂志》49(8)（2019）, 2513–2544。

[4] J. M. Campbell, 涉及 $\frac{1}{\pi}$ 调和数的类拉马努金级数, 《拉马努金杂志》46(2)（2018）, 373–387。[5] J. M. Campbell, 含中心二项式系数的平方和交错调和数的级数, 《地中海数学杂志》16(2)（2019）, 编号37。

[6] J. M. Campbell, 受拉马努金级数启发的 $\frac{1}{\pi}$ 符号求值, 博士论文, 约克大学（2022年）。

[7] J. M. Campbell, WZ proofs for lemniscate-like[e 个整数]tant evaluations, *Int* **21**
格（2021），文章 A107，15。[8] J. M. Campbell, M. Cantarini, and J. D'Aurizio，通过傅里叶-勒让德展开和分数阶算子进行符号计算，《积分变换与特殊函数》33(2)（2022年），157–175。[9] J. M. Campbell and W. Chu，类双纽线常数与无穷级数，《数学斯洛伐克》71(4)（2021年），845–858。[10] H. Chen，与中心二项式系数、卡塔兰数和调和数相关的有趣级数，《整数序列杂志》19(1)（2016年），文章 16.1.5，11。[11] J. Choi，涉及二项式系数、调和数和广义调和数的求和公式，《抽象与应用分析》2014（2014年），编号 501906。[12] W. Chu，具有两个额外整数参数的 Watson-Whipple-Dixon 扩展 ${}_3F_2$ 级数的解析公式，《数学计算》81(277)（2012年），467–479。[13] W. Chu，收敛速率1/2的含调和数无穷级数，《积分变换与特殊函数》33(7)（2022年），570–590。[14] W. Chu and J. M. Campbell，库默尔定理中的调和和，《数学分析与应用杂志》501(2)（2021年），编号 125179。
[15] Y. L. Luke，特殊函数及其近似。第 I、II 卷，爱思唯尔，阿姆斯特丹（1969年）。
[16] E. D. Rainville，《特殊函数》，麦克米伦公司，纽约（1960年）。
[17] Z.-W. Sun，含有调和数项的级数，arXiv:2210.07238（2023年）。
[18] R. Tauraso，与涉及调和数的 ${}_3F_2(1)$ 相关的超同余，《国际数论杂志》14(4)（2018年），1093–1109。[19] J. Todd，双纽线常数，《美国计算机协会通讯》18（1975年），14–19。[20] X. Wang and W. Chu，进一步含有调和数和二项式系数平方的类拉马努金级数，《拉马努金杂志》52(3)（2020年），641–668。

John M. Campbell 多伦多都会
大学数学系
jmaxwellcampbell@gmail.com