arXiv:2304.00366v1 [math.FA] 1 Apr 2023

Soprunov 和 Zvavitch 的混合体积 Bézout 不等式的极值体

Maud Szusterman*

Abstract. 在 [SZ], 中，Soprunov 和 Zvavitch 将（来自代数几何的）贝祖不等式转化为单纯形所满足的混合体积不等式。他们猜想，在 $\mathbb{R}^n$中的所有凸体中，这组不等式能够刻画单纯形。与 Saroglou 合作，他们证明了在所有多面体中成立的这一刻画 [SSZ1]；对于一组更大的不等式，他们还证明了在所有凸体中的这一刻画 [SSZ2]。对于 $n \geq 4$，该猜想仍未解决。在本文中，我们研究了凸体 K的边界结构所需满足的必要条件，以使 K 其满足所有不等式。特别地，我们给出了三维情形的一个新解。

1. Introduction

我们将 $\mathcal{K}^n$ 定义为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集类：如果 $K \in \mathcal{K}^n$ 具有非空内点，则称 K 为凸体。我们将 $\mathcal{K}_0^n$ 定义为 $\mathcal{K}^n$的子类，其元素是内点包含原点的凸体。如果 K，$L \in \mathcal{K}^n$，则将 $K + L = \{a + b, a \in K, b \in L\}$ 记为它们的闵可夫斯基和。我们将 $\mathbb{R}^n$ 视为 $\mathcal{K}^n$ 的子集（对应于单点集）；例如，如果$x \in \mathbb{R}^n$，则 $K + x$ 表示 K的相应平移。

我们用 $\mathrm{Vol}_n(K)$ 表示 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维体积，即其 Lebesgue 测度，并用 B_2^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位欧几里得球。我们使用记号 $\kappa_n = \mathrm{Vol}_n(B_2^n)$。
J. Steiner 已证明（见 [Sch，第223]页），存在一族系数 $(w_k)_{k=0}^n \in \mathbb{R}_+^{n+1}$，它们仅依赖于 K，使得对于任意 $t > 0$,

$$\mathrm{Vol}_n(K + tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_k t^{n-k}. \tag{1}$$

后者称为 Steiner 公式。实数 (w_k) 称为拟表面积积分，包含了关于 K的大量几何信息：例如，可以由（1）推出 $w_n = \mathrm{Vol}_n(K)$，$w_0 = \kappa_n$，以及 $w_{n-1} = \frac{1}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)$，其中 ∂K 表示 K的（拓扑）边界，而 $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)$ 是 K的表面积；还可以推出 $w_1 = \kappa_n w(K)$ 与平均宽度 $w(K)$ 成正比。

Minkowski 已证明，将 B_2^n 替换为任意凸体 L时，也成立类似的公式：$\mathrm{Vol}_n(K + tL)$ 是关于 t 的 n次多项式，且系数非负。对于 $0 \leq k \leq n$，t^{n-k} 的系数通常记为 $\binom{n}{k} V_n(K[k], L[n-k])$，其中 $V_n(.)$ 是定义在 $(\mathcal{K}^n)^n$上的混合体积泛函；而 $(K[k], L[n-k])$ 表示 K 作为参数出现 k 次，L出现 $n-k$ 次。（更多详情见第 2 节第 4 页。）

更一般地，Minkowski 已证明，对于任意 $m \geq 2$，以及任意 $(K_1, ..., K_m) \in (\mathcal{K}^n)^m$，$((t_i)_{1 \leq i \leq m} \mapsto \mathrm{Vol}_n(t_1K_1 + ... + t_mK_m))$ 是一个（齐次）多项式，其系数仅取决于 $(K_1, ..., K_m)$。该定理使我们能够将任意元组 $(K_1, ..., K_n) \in (\mathcal{K}^n)^n$ 的混合体积定义为 $V_n(K_1, ..., K_n) = \frac{1}{n}! \frac{\partial P}{\partial t_1 ... \partial t_n}$，其中 $P(t_1, ..., t_n) = \mathrm{Vol}_n(t_1K_1 + ... + t_nK_n)$。这一概念的提出促成了 Brunn-Minkowski理论的诞生（例如参见 [Sch，第 5-7] 章）。

* 作者在数学计算与实验研究所驻留期间，于罗德岛州普罗维登斯参加调和分析与凸性项目时，获得了美国国家科学基金会 DMS-1929284 号资助。

对于任意 $(K,L) \in (\mathcal{K}_0^n)^2$,, 序列 $(a_k)_{0\le k\le n} := (V_n(K[k], L[n-k])\ 0 \le k \le n)$ 是对数凹的，特别可得，对于任意 $k = 0, 1, \dots, n$，有 $a_{n-k}^n \ge a_n^{n-k} a_0^k$。这些是 Alexandrov-Fenchel不等式的特例，参见 [Sch, （7.63）, 第 401] 页。特别地，取 $k = 1$ 和 $L = B_2^n$，即可得到经典的等周不等式：

$$\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)^n}{\mathrm{Vol}_n(K)^{n-1}} \ge \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})^n}{\mathrm{Vol}_n(B_2^n)^{n-1}}. \tag{2}$$

不等式（2）表明，() :体积$_{n-1}$ $(\partial K)^{\ n}$ 体积$_n$ $(K)^{\ n-1}$ 在 K 为欧几里得球时取极小值（事实上，这些是唯一的极小化体）。注意， $\rho(K)$可以任意大（例如考虑高度为 $h \to \infty$的圆柱）。然而，反等周不等式成立：K. Ball 引入了如下仿射不变量最小比率：$\mathrm{Iso}(K) = \min_{T\in O(n)} \rho(TK)$，其中 T遍历 $T \in O(n)$中的线性等距变换。Ball 证明，当 K 为 n-单纯形时，$\mathrm{Iso}(K)$取最大值，并且单形是唯一的最大化者。

记 Aff$^*(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$的可逆仿射变换群。在凸体类中，考虑等价关系 $K' \sim K$，若对于某个 $T \in$ Aff$^*(\mathbb{R}^n)$有 $K' = TK$：记$\mathcal{AK}_0^n$ 为该关系的商集（例如，在$\mathcal{AK}_0^n$中只有一个 n-单纯形）。由于对于任意 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 以及任意 $T \in$Aff$^*(\mathbb{R}^n)$，都有 $\mathrm{Iso}(K) =$Iso(TK)，因此可以将 Iso 视为定义在$\mathcal{AK}_0^n$上的函数。

令 Δ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个 n 单纯形。注意，K. Ball 的反等周不等式 $\mathrm{Iso}(K) \le \mathrm{Iso}(\Delta)$ 可以用混合体积改写：对于任意 $K \in \mathcal{K}_0^n$，都存在一个椭球 $\mathcal{E}$，使得：

$$V(K[n-1], \mathcal{E})^n V(\Delta)^{n-1} \le V(K)^{n-1} V(\Delta[n-1], \mathcal{E})^n.$$

在本文中，我们将研究另一组涉及单纯形的混合体积不等式。这组不等式由 Soprunov 和 Zvavitch 在 [SZ], 中提出，他们称之为 混合体积的贝祖不等式。更具体地说，[SZ] 证明了，对于任意 $(A,B) \in (\mathcal{K}^n)^2$, Δ 满足：

$$V_n(A, B, \Delta[n-2]) V_n(\Delta) \le V_n(A, \Delta[n-1]) V_n(B, \Delta[n-1]) \tag{3}$$

其中， $V_n(K)$ 是 $V_n(K[n]) =$Vol$_n(K)$ 的简写。他们给出了这个不等式的两种证明：一种简短的几何证明 [SZ，定理2。5], 另一种则基于 Bernstein-Kushnirenko-Khovanskii 定理（例如参见 [EKh，定理 1]）。

以下不等式被称为 Fenchel不等式（参见 [FGM，命题 2。1] 以了解证明）：

$$\forall K, A, B \in \mathcal{K}_0^n,\ V_n(A, B, K[n-2]) V_n(K) \le 2 V_n(A, K[n-1]) V_n(B, K[n-1]). \tag{4}$$

该不等式是精确的：取 $K = O_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum |x_i| \le 1\}$为交叉多胞体，并取 A, B为两个适当选取的线段，则等式（4）成立（请注意：对于任意 $K \in \mathcal{K}_0^n$，等式（4）成立的唯一可能是 A, B 均为线段，见下文引理 3 ）。

这促使我们作出如下定义：

$$b_2(K) := \max \frac{V_n(A, B, K[n-2]) V_n(K)}{V_n(A, K[n-1]) V_n(B, K[n-1])},$$

其中最大值取遍成对的（A, B）$\in$（$\mathcal{K}_0^n$）^{2}（或者等价地，取遍成对的（A, B）$\in$（$\mathcal{K}^n \setminus \mathbb{R}^n$）^{2}）。取 $A = B = K$，可得 b_2（K）≥ 1。另一方面，引理 3 表明 b_2（K）≤ 2。

注意， b_2 是仿射不变的，并且也可以定义为满足以下条件的最小 $b \ge 1$：$F_{K,\,b} \ge 0$，其中 $F_{K,\,b}$ 是定义在（$\mathcal{K}^n$）^{2} 上的双线性形式，其定义为 $F_{K,\,b}$（A, B）$= bV_n$（A, $K[n-1]$）V_n（B, $K[n-1]$）$- V_n$（A, B, $K[n-2]$）V_n（K）。

采用这些记号，猜想 1。1（见 [SZ] ）可改述如下。

猜想 1. 设 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 是一个凸体，满足 $b_2(K) = 1$。那么 K 是一个 n-单纯形。

换言之， Δ 将是 b_2中所有凸体里唯一的极小化体 $\mathbb{R}^n$。据作者所知，除了 $\mathcal{AK}_0^n$中的 O_n之外，还没有其他凸体被认为是 b_2的最大化者。猜想1 是本文的主要研究焦点。

与 $b_2(K)$ 类似，我们再引入一个仿射不变贝祖常数：定义 n-线性形式 $G_{K,b}(A_1,...,A_n) = bV_n(A_1,...,A_n)V_n(K) - V_n(A_2,...,A_n,K)V_n(A_1,K[n-1])$。我们用 $G_{K,b} \geq 0$ 表示 $G_{K,b}(A_1,...,A_n) \geq 0$ 对所有 $(A_i) \in (\mathcal{K}^n)^n$ 均成立。定义 $b(K) = \inf\{b \geq 1 : G_{K,b} \geq 0\}$。SSZ [中已证明 $b(\Delta) = 1$，事实上，同样的几何证明（如用于 $b_2(\Delta) = 1$ 的证明）也适用。在下文第3节中，我们给出另一种证明，该证明基于伯恩斯坦–霍夫曼–库什尼连科定理[B, Khov, Ku]。

在 [SSZ2], Saroglou、Soprunov 和 Zvavitch 得到了以下刻画：

定理1. 设 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 满足 $b(K) = 1$。则 K 是一个 n-单纯形。

SSZ2 的推论[SSZ2，定理11] 是猜想1 在3维中成立。关于上界，Xiao 证明了：

定理2. 对任意凸体 $K \in \mathcal{K}_0^n$， $b(K) \leq n$。

他实际上证明了更一般的不等式（见 [Xi，定理11]），但上述上界是一个非常特殊的情形，可以直接由 Diskant不等式推出（例如 Xiao 就曾用它推导出 [Xi，不等式 (3)]）：见下文的命题1 和2，我们还给出了一个例子，说明 n 是尖锐的。

在陈述本文的主要结果（下文的定理 A）之前，我们需要引入一两个记号。用 S_K 表示 K 的表面积测度。记 $K^u = \{y \in K : \langle y, u\rangle = h_K(u)\}$，其中 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，而 h_K 是 K 的支撑函数（定义见第 2 节中的 h_K 和 S_K）。最后，记 $\Omega_k = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : K^u$ 是 k 维的 $\}$。特别地， $supp\ (S_K) \cap \Omega_0$ 是边界的正则方向集合，而 Ω_{n-1} 是 K 的各个面（若存在）的外法向量集合。一些已有的排除条件（用于满足 $b_2(K) = 1$）涉及 Ω_0，（见下文定理 10），或涉及 Ω_{n-1} （见下文定理 9）。

本文的主要结果是以下排除条件。

定理 A. 假设 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 满足 $b_2(K) = 1$。则 $S_K(\Omega_{n-2}) = 0$。

这一结果结合此前一些与猜想相关的结果1 (见下文定理 6、10 和9，为三维情形下该猜想给出了一个非常简短的证明。

推论 1. 在 $\mathbb{R}^3$中， b_2的唯一极小化体是三单纯形。

我们在此指出，若类似的必要条件对低维Ω_{n-k}也成立，那么同样的证明（推论1的证明）也适用，$n \geq 4$。更准确地说，若 b_2 必须满足 $S_K(\Omega_{n-k}) = 0$，对所有 $k = 2$，.....，k_0，则猜想1 在维数 n 下成立，任意$2 \leq n \leq k_0 + 1$均如此；参见第1 节中推论5的证明及其后的评论。

致谢 作者感谢 Artem Zvavitch 将猜想1介绍给她，并与她进行了启发性的讨论。作者也感谢 Evgueni Abakoumov 和 Dylan Langharst 在整个项目过程中给予的支持，以及许多宝贵的讨论和建议。

2. Notations and basic definitions

如果 $K \in \mathcal{K}^n$， $t > 0$，那么 $tK = \{tx, x \in K\}$ 称为 K的膨胀体。我们称 K 和 L 是位似的，如果 L 是 K的一个膨胀体的平移，即存在 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $L = x + tK$。根据此定义，位似关系是 $\mathcal{K}^n$ 上的一个等价关系。有时我们也采用扩展概念（如 [Sch]中所示），并称 L 是 K 的位似体，当 $t = 0$时，也就是说，当 L 是单点集时（这会破坏关系的对称性）。具体采用哪种约定将由上下文明确。

以下定理归功于 Minkowski（参见 [Mink]）。

定理 3. 固定 $m \geq 2$，并设 K_1、...、K_m 是位于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体。那么，$\mathrm{Vol}_n(t_1K_1 + ... + t_mK_m)$ 作为 $(t_1$、...、$t_m) \in \mathbb{R}_+^m$ 的函数，是一个（齐次）多项式。此外，其所有系数均为非负数，而单项式 $\prod t_i^{a_i}$ 的系数仅取决于 $\{K_i : a_i \neq 0\}$。

换句话说，闵可夫斯基定理表明，存在一族由 $a \in \{\alpha \in \mathbb{N}^m$ 索引的（非负）实数 $(w_a)_a$: $\sum \alpha_j = n\}$，其仅取决于 $(K_1, ..., K_m)$，使得对于所有 $t_i > 0$:

$$\mathrm{Vol}_n(t_1K_1 + ... + t_mK_m) = \sum_{a_1+...+a_m=n} \binom{n}{a} w_a t^a = \sum_{a_1+...+a_m=n} \frac{n!}{a_1!...a_m!} w_a \left(\prod_{i=1}^m t_i^{a_i}\right).$$

该多项式中的系数 w_a 称为混合体积；如果 $a = (a_1, ..., a_m)$（其中 $\sum a_i = n$），则 w_a 通常记作 $V_n(A_1[a_1], ..., A_m[a_m])$。如果对于每个 i都有 $m = n$ 和 $a_i = 1$，通常记作$V_n(A_1, \dots, A_n)$。同样，通常将 $V_n(A_1[n-2], A_2[1], A_3[0], A_4[1])$ =记作: $V_n(A_1[n-2], A_2, A_4)$。

定理3 的一个直接推论是以下极化公式:

$$n!V_n(A_1, ..., A_n) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \mathrm{Vol}_n(A_J) \quad \text{where } A_J = A_{j_1} + ... + A_{j_k}, \text{ if } J = \{j_1, ..., j_k\}. \tag{5}$$

以下是混合体积的一些基本性质（（a）、（b）和（e）由（5）以及 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的基本性质推出，而（c）和（d）则可由定理 3 轻易推出。

（a）平移不变性：对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $V(K_1,..., K_n) = V(x + K_1, K_2, ..., K_n)$; （b）参数的对称性：对于任意 $\sigma \in \mathcal{S}_n$ 以及任意 $K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}^n$, 有: $V(K_1, ..., K_n) = V(K_{\sigma(1)},..., K_{\sigma(k)})$; （c）（正）齐次性：对于任意 $t_1, ..., t_n > 0$, 有

$$V(t_1K_1, ..., t_nK_n) = \left(\prod_i t_i\right) V(K_1, ..., K_n)$$

(d) 多线性：对于任意 $A, B, L_2, ..., L_n \in \mathcal{K}^n$, , 均有:

$$V(A + B, L_2, ..., L_n) = V(A, L_2, ..., L_n) + V(B, L_2, ..., L_n).$$

(e) 连续性（关于豪斯多夫距离）

由 (b) 和 (d)，可得如下极化公式[1]，对于任意 $0 \leq k \leq n-1$，以及任意凸体 $A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_{n-k}$:

$$(n-k)!V_n(A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_{n-k}) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n-k]} V_n(A_1, ..., A_k, B_J[n-k]) \quad \text{where } B_J = \sum_{i \in J} B_i. \tag{6}$$

混合体积还具有其他一些众所周知的性质（证明及更多细节请参见 [Sch，第 4] 章），包括非负性和单调性:

(1) $V(K_1,..., K_n) \geq 0$（非负性） (2) 若 $K' \subset K_1$，则 $V(K', K_2,..., K_n) \leq V(K_1, ..., K_n)$（单调性）

亚历山德罗夫–芬切尔不等式（参见 [All] 或 [Sch，第393]页）断言，对于任意 $(K_3,..., K_n)$，二次泛函 $V(\cdot, \cdot, K_3, ..., K_n)$ 是双曲的，其含义是（对于任意 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0^n$）:

$$V(K_1, K_1, K_3, ..., K_n)V(K_2, K_2, K_3, ..., K_n) \leq V(K_1, K_2, ..., K_n)^2.$$

记 $\langle x,y\rangle = \sum_i x_iy_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的通常标量积。若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，回忆一下， K的支撑函数为 $h_K(x) = \max_{y \in K} \langle y, x\rangle$。注意，对任意 $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $h_K(tx) = th_K(x)$。因此， h_K也常被视为定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数: $= \partial B_2^n$。注意，若 $0 \in K$，则对任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$， $h_K(u) \geq 0$。类似地，若 $K \in \mathcal{K}_0^n$，则 $\min_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K > 0$。

我们记 $K^u = \{x \in K : \langle x, u\rangle = h_K(u)\}$。注意，对于任意 $K, L \in \mathcal{K}_0^n$ 以及任意 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $(K + L)^u = K^u + L^u$。特别地，当 P, Q 是两个多面体时， u 不一定非得是 P 或 Q 的外法向量，才能成为多面体 $P + Q$ 的一个外法向量。当 B 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的子集时，定义相对于 K 的 B 的逆球面像 $\tau(K, B)$: $\tau(K, B) = \bigcup_{u \in B} K^u$。

[1]注意，情形 $k = 0$ 对应于 (5)

表面积测度 $S_K(\cdot)$ 是 K上的博雷尔测度 $\mathbb{S}^{n-1}$，满足 $S_K(B)=\mathcal{H}^{n-1}(\tau(K,B))$，对于任意博雷尔子集 $B\subset\mathbb{S}^{n-1}$。这里 $\mathcal{H}^{n-1}(\cdot)$ 表示（$n-1$）维豪斯多夫测度。关于凸体的表面积测度，更多内容参见 Sch，第214页，第279] 。

事实1 （Minkowski 唯一性定理，[Sch]中的定理 8.3.1）。 测度 S_K 由 K （在平移意义下）唯一确定，即 $S_K=S_L$ 意味着 $L=K+x$ 存在某个 $x\in\mathbb{R}^n$。

回忆一下，如果 Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的闭子集，且 g 是 Ω 上的连续函数，则关于（Ω g）的 Wulff 形定义为 W（Ω g）$=\bigcap_{u\in\Omega}\{x\in\mathbb{R}^n:\ \langle x,\ u\rangle\le g$（$u$）$\}$；这在 $\mathbb{R}^n$ 中定义了一个（可能为空的）紧凸集；注意，当 $g>0$ 在 Ω 上时， W（Ω g）是一个凸体。关于 Wulff 形的更多细节，参见 [Sch，第 410-5] 页。这里，假设 K 是一个凸体，Ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的闭子集，满足 supp（S_K）$\subset$ Ω，并且 $f:\ \Omega\to\mathbb{R}$ 是连续函数：我们将（W_t）$_t$ 记为与（Ω f）相关的 Wulff 形扰动族，即 $W_t:=W$（Ω h_K+tf）。注意，当 $|t|$ 足够小时，即如果 $I=I$（K， f）表示使 W_t 成为凸体的开区间，则有 Vol$_n$（W_t）>0。下文中，我们可以将（W_t）$_t$ 简写为（W_t）$_{t\in I}$。

例如，若 $K=P=\bigcap_{j=1}^N H^-(u_j,h_j)$ 是一个多面体，其外法向量集为$E(P)=\{u_j,j\le N\}$，若 χ_v表示 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ 的示性函数，那么取 $f_j=\chi_{u_j}\in\mathcal{C}(E(P)\ \mathbb{R})$ 可得到扰动多面体族 $(P_j,_s)_s$，其中 P_j，$_s=\left(\bigcap_{k\le N,k\ne j}H^-(u_k,h_k)\right)\cap H^-(u_j,h_j+s)$。另一个例子：假设 $0\in int(K)$，那么（只要 $supp(S_K)\subset\Omega$），对任意足够小的 $t>0$，都有 $(1-Ct)K\subset W(\Omega\ h_K+tf)\subset(1+Ct)K$，其中 $C=\max|f|/\min h_K$。

下述定理称为亚历山德罗夫变分引理。关于[Al1] 中的证明，另请参见 [Sch，引理 7.4。3]。

定理 4. 假设 K 是一个凸体， $supp(S_K)\subset\Omega$，且 $f\in\mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R})$。对于 $t\in\mathbb{R}$，记作$W_t=W(\Omega\ h_K+tf)$。那么 $(t\mapsto\text{Vol}_n(W_t))$ 在 0 处可微，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,Vol_n(W_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{Vol_n(W_t)-Vol_n(K)}{t}=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(u)dS_K(u),\tag{7}$$

对上述定理的证明稍作修改，即可得到一个关于（第一）混合体积的类似结论，如下所示（参见 [S，引理 3]）。

引理 1（亚历山德罗夫变分引理的混合体积版本）。假设 K 是一个凸体，$supp(S_K)\subset\Omega$，且 $f\in\mathcal{C}(\Omega\ \mathbb{R})$。令 $W_t=W(\Omega\ h_K+tf)$、 $t\in I$ 为相应的沃尔夫形扰动。记 $V_1(t):=V(W_t,K[n-1])$。那么 $(t\mapsto V_1(t))$ 在 0 处可微，并且：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{V_1(t)-V_n(K)}{t}=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(u)dS_K(u),\tag{8}$$

给定 K，Ω 和 f 如引理 1中所述，且 $(W_t)_{t\in I}$ 为沃尔夫形扰动的相应族，可以很容易验证，对于任意 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，映射 $(t\mapsto h_{W_t}(u))$ 在 I上是凹的。特别地，该映射在 $t=0$处既左可微又右可微。事实上，引理 1 还能得出更精确的结论。

引理 2. 设 $(W_t)_t$ 是给定凸体 K 关于 (Ω f) 的沃尔夫形扰动。那么对于 S_K-几乎处处的 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}h_{W_t}(u)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{h_{W_t}(u)-h_K(u)}{t}=f(u).\tag{9}$$

这是引理 1的直接推论。该引理已见于 [SSZ2], ，参见其中的 [定理 3。5] 及其证明。

当 P 为多面体时，记 $E(P)$为其外法向量集合，则 S_P 是定义在$\mathbb{S}^{n-1}$上的离散测度，由$\sum_{u\in E(P)}$ Vol$_{n-1}(P^u)\delta_u$给出，其中 δ_v表示位于 v处的狄拉克测度。接着

凸体 L 与多面体 P 之间的第一混合体积可表示为：

$$V(L,P[n-1])=\frac{1}{n}\sum_{u\in E(P)}h_L(u)V_{n-1}(P^u). \tag{10}$$

这个积分表示也适用于 $K\in\mathcal{K}_0^n$：令 $f=h_L$ 在（8）中，可得[2]

$$V(L,K[n-1])=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(u)dS_K(u). \tag{11}$$

更一般地，在适当的弱条件下，若 $K_2,...,K_n\in\mathcal{K}^n$，则存在唯一的测度$S(K_2,...,K_n,.)$定义在球面上，使得对于所有凸体 L，混合体积可表示为：

$$V(L,K_2,...,K_n)=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(u)dS(K_2,...,K_n,u).$$

当 $P_2,...,P_n$ 为多面体时，记 $E(P_2,...,P_n)=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:\ V_{n-1}(P_2^u,...,P_n^u)>0\}$。则混合表面积测度 $S(P_2,...,P_n,.)$是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$上的离散测度，给出如下：

$$V(L,P_2,...,P_n)=\frac{1}{n}\sum_{u\in E}h_L(u)V_{n-1}(P_2^u,...,P_n^u)\text{ where }E=E(P_2,...,P_n).$$

（这可由（10）通过极化[3]。）

令 $\Omega=supp(S_K)$表示 K的表面积测度的支撑。在接下来的几节中，我们会多次根据面 K^u的维数对 Ω 进行划分，即写作 $\Omega=\Omega_0\cup...\cup\Omega_{n-1}$，其中 $\Omega_k=\{u\in\Omega:K^u\text{ 是 }k\text{维的 }\}$。例如，若 $K=P$ 是 $\mathbb{R}^n$中的（满维）多面体，则 $\Omega=\Omega_{n-1}$ 是 K的外法向量集合；而若 $K=B_2^n$，则 $\Omega=\Omega_0=\mathbb{S}^{n-1}$。

混合体积与线段相结合时具有很好的性质，具体如下列公式所示。

a- 对于 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，以及任意的 $K\in\mathcal{K}^n$，有：$V_n(K+t[0,u])=V_n(K)+tV_{n-1}(\pi_{u^\perp}(K))$，其中$\pi_{u^\perp}$是到线性超平面 $u^\perp$上的正交投影。由此可直接推出：

$$V(K[n-1],[0,u])=\frac{1}{n}\text{Vol}_{n-1}\left(\pi_{u^\perp}(K)\right). \tag{12}$$

通过极化，对于任意的 K_1，...，$K_{n-1}\in\mathcal{K}^n$，也有：

$$V(K_1,...,K_{n-1},[0,u])=\frac{1}{n}V_{n-1}\left(\pi_{u^\perp}(K_1),...,\pi_{u^\perp}(K_{n-1})\right).$$

b- 固定 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的两个方向 u 和 v，并设 $L_1=[0,u]$、$L_2=[0,v]$。然后，将上述公式应用两次可得：

$$V(L_1,L_2,K[n-2])=\frac{1}{n(n-1)}V_{n-2}(\pi_{U^\perp}K)|det_2(u,v)|=\frac{2}{n(n-1)}V_{n-2}(\pi_{U^\perp}K)V_2(L_1,L_2) \tag{13}$$

其中 $U^\perp$ 表示与 u 和 v 正交的 $(n-2)$ 维空间（若 u、v 共线，则这三项均为零）。

c- 固定 k 个线性无关方向 $u_j\in\mathbb{S}^{n-1}$、$j\in\{1,...,k\}$，则有类似公式：

$$V_n([0,u_1],...,[0,u_k],K_{k+1},...,K_n)=\frac{k!V_k([0,u_1],...,[0,u_k])}{n(n-1)...(n-k+1)}V_{n-k}\left(\pi_{U^\perp}K_{k+1},...,\pi_{U^\perp}K_n\right),$$

其中 $U^\perp$ 表示与 u_1正交的（$n-k$）维空间，...，u_k（如果 u_1，...，u_k 线性无关，则两边均为零）。

[2]注意，S_K 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上唯一满足（11）的博雷尔测度（对任意凸体 L），即（11）等价于第 5 页顶部通过逆球面像给出的定义。（由引理1）可轻易推出这一点。[3]更准确地说：在维数 n 下，使用（$k=1$，使用（$P+Q$）$^u=P^u+Q^u$，然后在维数（5）下使用$n-1$）。

混合体积的另一个众所周知的性质如下：设 $K_1,...,K_n \in \mathcal{K}^n$，并设$T \in$仿射变换*($\mathbb{R}^n$。则 $V(TK_1,...,TK_n) = |det(T)|(K_1,...,K_n)$。由此可得 $b_2(K)$ 和 $b(K)$（这两个概念的定义见第1 节）是仿射不变的。

最后，我们还需要一些关于球面的记号：若 u、$v \in \mathbb{S}^{n-1}$，则 $dist(u,v)$ 表示球面上 u 与 v 之间的距离：例如，$\text{dist}(u,-u) = \pi$。若 $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 与 $\epsilon > 0$，我们记作 $A^\epsilon := \{u \in \mathbb{S}^{n-1}: dist(u,A) \leq \epsilon\}$。若 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，且 $\epsilon > 0$，则称 $U(u,\epsilon)$ 为以 u 为中心、半径为 ϵ 的球冠（位于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上），定义为 $U(u,\epsilon) = \{w \in \mathbb{S}^{n-1}: dist(u,w) \leq \epsilon\}$。设 $\epsilon, t > 0$，并假设 $t\epsilon < \pi$：则若 $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且 $U = U(u_0,\epsilon)$，我们记作 $tU := U(u_0, t\epsilon)$。

3. Zeroes of polynomials and mixed volumes

本节概述方程（3）的证明。首先，我们回顾代数几何中的一些事实。设 P、$Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ 是两个多项式，其次数分别为 d_1、d_2。我们用 $Z_P \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ 表示 P 的零点集：$Z_P = \{(x,y) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2: P((x,y)) = 0\}$。当 P 和 Q 互素时，$Z_P \cap Z_Q$ 是有限集；贝祖定理 [F，第 8 号命题.4] 给出交集基数的上界，即两个多项式次数的乘积：

$$|Z_P \cap Z_Q| \leq d_1 d_2.$$

更一般地，若 Q_1、.....、$Q_n \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的 n 个多项式，且没有非平凡公因子，则 $Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}$ 是 $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ 中的有限集；贝祖不等式给出该交集基数的上界，即这些多项式次数的乘积。

$$(B_n) \qquad deg(Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}) := |Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}| \leq d_1 d_2 ... d_n.$$

除了零点集合外，与多项式相关的另一个几何对象 $Q \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$是它的牛顿多面体。这个多面体定义为满足以下条件的整数点 $(k_1,...,k_n)$ 的凸包：单项式 $x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$在 P中的系数非零。伯恩斯坦-霍夫曼斯基-库什尼伦科定理（参见 [B、Ku、Kh], 或 [EKh]）允许我们用相关牛顿多面体的混合体积来表示大多数 n元多项式组 $(Q_1,...,Q_n)$ 的交数$|Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}|$（也称为代数簇 的次数，当交集有限时，它等于交集的基数）$Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}$：

$$deg(Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_n}) = n! V(P_1,...,P_n) \quad \text{where } P_i \text{ is the Newton polytope of } Q_i.$$

虽然这个等式并非对每个由 n 个多项式组成的组 $(Q_1, ..., Q_n)$ 都成立，但对于某些自然分布下的随机 n 元多项式，若 $(Q_1, ..., Q_n)$ 是这样的多项式组，则该等式几乎必然成立。例如，我们可以先固定任意的 $(Q_1, ..., Q_n)$，再令 $(Q_1', ..., Q_n')$ 为一组 n 个多项式，使得 Q_i' 具有与 Q_i相同的单项式 X^α，但其 $Q_i' = \sum c_\alpha' X^\alpha$不同，其中 c_α' 是一个随机复数，以 c_α（Q_i中 X^α 的系数）为中心，且分布在一个不包含 0 的小圆盘内。虽然 $n! V(P_1, ..., P_n)$ 是固定的（且仅取决于 $(Q_1, ..., Q_n)$，或者说取决于其单项式集合），交集 $Z_{Q_1'} \cap ... \cap Z_{Q_n'}$ 却是随机的；不过，几乎必然所有 Q_i' 都互素，因此这是一个有限交集。所以，公共零点集合$Z_{Q_1'} \cap ... \cap Z_{Q_n'} \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ 几乎必然是一个（随机的）有限集合。这个有限集合的大小总是至多为 $n! V(P_1, ..., P_n)$；伯恩斯坦–霍夫曼–库什尼连科定理指出，这个上界几乎必然就是该集合的实际大小。关于此定理的更多细节，请参见 [Kh] 。

当 $Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_k}$ 为无限集时，其次数 $deg(Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_k})$ 仍然是一个定义良好的整数，而贝祖定理的一个更一般形式是以下不等式：

$$deg(Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_k}) \leq d_1 ... d_k \ .$$

在这种情况下，Bernstein-Khovanskii-Kushnirenko 定理仍然成立[4]，并且可以通过相关多面体的混合体积来表示这个次数：

$$deg(Z_{Q_1} \cap ... \cap Z_{Q_k}) = n! V(P_1, ..., P_k, \Delta_n[n-k]), \quad \text{where } \Delta_n = Conv(0, e_1, ..., e_n).$$

[4]（如果 Q_i 有 *generic* 系数）

作为一个特例：当 $k=1$ 时，可得 $deg(Z_{Q_1})=n!\,V(P_1,\,\Delta_n[n-1])$。此外（几乎必然） $deg(Z_{Q_1})=d_1$，即 Q_1 的次数。现在我们回顾这如何证明公式（3），另见 [SZ，第 2], 页；接下来我们将看看类似的论证如何得出 $b(\Delta)=1$。

事实上，令 $k=2$，并设 P_1 和 P_2 是两个牛顿多面体。设 Q_1 和 Q_2 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的两个随机多项式，使得 P_i 是 Q_i 的牛顿多面体（例如，对某个任意的 $Q_i^{(0)}$ 的每个非零系数加入相互独立的小噪声，其中 $Q_i^{(0)}$ 的单项式集合是 P_i 的顶点集合）。那么，几乎必然地，贝祖不等式和伯恩斯坦-霍夫曼斯基-库什尼伦科定理中的等式均成立，从而得到以下关于混合体积的不等式：

$$deg(Z_1\cap Z_2)\leq d_1d_2\ \ \Rightarrow\ \ V_n(P_1,P_2,\Delta_n[n-2])V_n(\Delta_n)\leq V_n(P_1,\Delta_n[n-1])V_n(P_2,\Delta_n[n-1]).$$

（这里用到了 $\Delta_n=Conv(0,e_1,...,e_n)$ 的体积为 $(n!)^{-1}$。）

因此，对于顶点位于 $\mathbb{N}^n$ 中的任意一对多面体 (P_1,P_2)，该不等式都成立。由混合体积的齐次性可知，对于 $(\delta P_1,\delta P_2)$，该不等式同样成立，也就是说，对于顶点位于 $(\delta\mathbb{N})^n$ 中的多面体对，该不等式成立。由混合体积的平移不变性可知，对于顶点位于 $(\delta\mathbb{Z})^n$ 中的多面体对，该不等式仍然成立。由混合体积的连续性可知，由于任意一对凸体 (L_1,L_2) 都可以用一对顶点位于 $(\delta\mathbb{Z})^n$ 中的多面体 $(P_{1,\,\delta},P_{2,\,\delta})$ 逼近（其中 $d_{\mathcal{H}}(P_i,L_i)\leq\delta$），因此可以得出，该不等式不仅对牛顿多面体对 (P_1,P_2) 成立，而且对任意一对凸体 (L_1,L_2) 都成立。

类似地，可以由贝祖不等式（ n ）推出关于B_n凸体混合体积的贝祖不等式。取 Q_1，.....，Q_n 个多项式[5]，属于 $\mathbb{C}^n$。令 $X=Z_{Q_1}$和$Y=Z_{Q_2}\cap...\cap Z_{Q_n}$。那么伯恩斯坦-霍夫曼斯基-库什尼伦科定理表明，对于 Q_i的泛型选取，有：

$$deg(X)=n!V(P_1,\Delta_n[n-1]),\quad deg(Y)=n!V(P_2,...,P_n,\Delta_n),\quad deg(X\cap Y)=n!V(P_1,...,P_n).$$

其中，P_i 是多项式 $Q_i.$ 的牛顿多面体。因此，贝祖不等式 $deg(X\cap Y)\ \leq deg(X)deg(Y)$可改写为

$$V(P_1,...,P_n)V(\Delta_n)\leq V(P_1,\Delta_n[n-1])V(P_2,...,P_n,\Delta_n).$$

与之前一样，利用 $V(.)$的齐次性和平移不变性，以及用顶点位于网格上的多面体同时逼近一组凸体，若将牛顿多面体 P_i替换为任意凸体 $K_i.$，同一不等式仍然成立。换言之：

$$\forall K_1,\dots,K_n\in\mathcal{K}^n,\quad V(K_1,...,K_n)V(\Delta_n)\leq V(K_1,\Delta_n[n-1])V(K_2,...,K_n,\Delta_n). \tag{14}$$

对于任意仿射变换 T（以及任意 $L_i\in\mathcal{K}^n$），$V(TL_1,...,TL_n)=|det(T)|V(L_1,...,L_n)$这一事实意味着，对于任意单纯形 Δ以及任意 n元凸体组（K_i），我们有：

$$V(K_1,...,K_n)V(\Delta)\leq V(K_1,\Delta[n-1])V(K_2,...,K_n,\Delta). \tag{15}$$

为了研究单纯形以外的物体的（15），我们引入了记号 $b(K)$，它也可以等价地定义为以下上确界：

$p.3$

$$b(K)=\sup_{K_1,...,K_n}\frac{V(K_1,...,K_n)V(K)}{V(K_1,K[n-1])V(K_2,...,K_n,K)}, \tag{16}$$

其中，上确界取遍具有非空内点的 n 元组物体。换言之，$b(K)$ 是最小常数 $b>0$，使得对于任意 K_1、.....、$K_n\in\mathcal{K}^n$，均有：

$$V(K_1,...,K_n)V(K)\leq b(K)V(K_1,K[n-1])V(K_2,...,K_n,K). \tag{17}$$

注意，$b(K)$ 是仿射不变的。公式（15）表明，对于任意 n-单纯形 Δ，$b(\Delta)\leq 1$。注意，通过选取 $K_3=...=K_n=K$，对于任意 $K\in\mathcal{K}^n_0$，有 $b(K)\geq b_2(K)\geq 1$。因此，对于任意单纯形 $\Delta.$，有 $b(\Delta)=b_2(\Delta)=1$。关于这一事实，还可以给出一个更简短的纯几何证明（见 [SSZ2]，第 9 页）。

[5]或者先固定 $P_1,...,P_n$，令 A_i 为 P_i 的顶点集合，然后令 $Q_i=\sum_{\alpha\in A_i}(2+u_\alpha)X^\alpha$ 为一个随机多项式，其中 $u_\alpha\in\mathbb{D}$ 是来自单位圆盘的独立同分布均匀点，并对每个 $i=1,2,\dots,n$ 独立地进行此操作

现在讨论 $\max_K b(K)$ 的上界。由混合体积的单调性、$b(\Delta) \le 1$ （对所有 n-单形均成立）这一事实，以及 Lassak 给出的事实：任意凸体 K 都包含一个 n- 单纯形 Δ，满足 $\Delta \subset K \subset (n+2)\Delta$，可立即得到 $\max_K b(K) \le (n+2)^n$：

$$V(L_1,...,L_n)V(K) \le (n+2)^n V(L_1,...,L_n)V(\Delta) \le (n+2)^n V(\Delta, L_2,...,L_n)V(L_1,\Delta[n-1])$$
$$\le (n+2)^n V(K,L_2,...,L_n)V(L_1,K[n-1]).$$

（另见 [SZ，命题 5.1]，其中利用 Lassak 的结果对一些相关量给出了上界）。

借助约翰定理，可以得到一个稍好的上界。回顾一下，K 相对于 L 的内切半径 $r(K,L)$ 定义如下：

$$r(K,L) = \max\{r > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^n, x + rL \subset K\}.$$

注意，在将 $b(K)$ 定义为最大比值时，最大值可以在满足 $L_1 \subset K$ 且 L_1 包含长度至少为 $c = r(K, B_2^n)$ 的线段的 n-元组 $(L_1,...,L_n)$ 上取得。（这可由混合体积的平移不变性和齐次性轻易推出）。

定义 $c_0 := \frac{c}{\text{体积}_n(K)} \min_u \text{体积}_{n-1}(\pi_{u^\perp}(K))$，因此 $c_0 > 0$ (if $K \in \mathcal{K}_0^n$)。注意，c_0 仅取决于 K。然后，由于 L_1 包含一条长度为 c 的线段，利用 $V(.)$ 的单调性可得：

$$V(K[n-1],L_1) \ge c \min_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} V(K[n-1],[0,u]) = \frac{c}{n}\min_u \text{Vol}_{n-1}(\pi_{u^\perp}(K)) = c_0 \text{Vol}_n(K).$$

并且由于 $L_1 \subset K$，这个后一个下界给出：

$$V(L_1,...,L_n)V(K) \le V(K,L_2,...,L_n)V(K) \le c_0^{-1}V(K,L_2,...,L_n)V(K[n-1],L_1), \quad \text{and thus } b(K) \le c_0^{-1}.$$

由于 $b(K)$ 是仿射不变的，我们可以假设 K 处于其约翰位置，即 $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$。在这种情况下，$\min_u V(\pi_{u^\perp}(K)) \ge \kappa_{n-1}$，而 $V(K) \le n^{n/2}\kappa_n$，因此上述论证给出

$$b(K) \le c_0^{-1} = \frac{n\text{Vol}_n(K)}{r(K,B_2^n)\min_u V(\pi_{u^\perp}(K))} \le \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} n^{\frac{n}{2}+1} < \sqrt{2\pi} n^{\frac{n+1}{2}}$$

（其中最后一个不等式源于 Γ 函数的对数凸性）。

事实上，最佳上界是 $\max_K b(K) \le n$。不难看出，n 是紧的（见下文命题 2），而这个上界可通过 Diskant 不等式推导得出；该不等式给出了内切半径的下界，正如 Xiao 首先注意到的（见 [Xi，推论 1.2，不等式 (2)、(3)]）。

命题 1（Diskant不等式）。设 K、L 是两个凸体。则：

$$V(K[n-1],L)^{n/n-1} - V(K)V(L)^{1/n-1} \ge \left[V(K[n-1],L)^{1/n-1} - r(K,L)V(L)^{1/n-1}\right]^n.$$

命题 2. 对所有 $K \in \mathcal{K}_0^n$, $b(K) \le n$。此外，这个上界是锐的。

证明. 记 $r = r(K,L)$，$v_1 = V_1(K,L) = V(K[n-1],L)$，$v_0 = \text{Vol}_n(K)$, 以及 $v_L = \text{Vol}_n(L)$。最后，记 $u = \frac{v_0 v_L^{1/n-1}}{v_1^{n/n-1}} \ge 0$。注意，由 Brunn-Minkowski 第一不等式可得 $u \le 1$。因此$1-(1-u)^{1/n} \ge \frac{u}{n}$。将此与 Diskant不等式（如命题 1 所述）结合，得到：

$$r \ge \left(\frac{v_1}{v_L}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(1-(1-u)^{1/n}\right) \ge \frac{1}{n}u\left(\frac{v_1}{v_L}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{n}\frac{V(K)}{V(K[n-1],L)}.$$

根据混合体积的多线性，我们不妨将 L_1 替换为 $x + r(K,L_1)L_1$（在将 $b(K)$ 定义为最大值时），因此可假设 $L \subset K$ 且 $r = 1$。此时，上述不等式为 $V(K) \le nV(K[n-1],L)$，而 $V(.)$ 的单调性表明 $V(L,L_2,...,L_n) \le V(K,L_2,...,L_n)$。由于这对任意的 $L_2,...,L_n$ 都成立，因此可得 $b(K) \le n$。

为说明 $\max_K b(K) \leq n$ 是一个紧的上界，取 $K = [0,1]^n = [0,e_1] + ... + [0,e_n]$，其中 (e_i) 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基。取 $L_1 = [0,e_1]$, $L_2 = [0,e_2]$，等等。于是

$$V(K, L_2, ..., L_n) = V(L_1 + L_2 + ... + L_n, L_2, L_3, ..., L_n) = \sum_{j=1}^{n} V(L_j, L_2, ..., L_n) = V(L_1, L_2, ..., L_n)$$

因为对于任意 $j \geq 2$, $V(L_j, L_2, ..., L_n) = 0$。与此同时，$nV(K[n-1], L_1) = \mathrm{Vol}_{n-1}\left(\pi_{e_1^{\perp}}(K)\right) = 1 = \mathrm{Vol}_n(K)$。因此，

$$V(L_1, L_2, ..., L_n)V(K) = nV(K[n-1], L_1)V(K, L_2, ..., L_n), \quad \text{showing that } b([0,1]^n) = n.$$

□

令 $C = [0,1]^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位立方体。上述证明自然引出了以下问题：

问题 1. 设 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 满足 $b(K) = n$。是否存在某个仿射变换 C，使得 $K = TC$？

换句 换言之，立方体是使 $b(K)$ 达到最大值的唯一凸体（见 $\mathcal{AK}_0$）吗?

我们简要讨论一下 $b_2(K)$ 的下界。请注意，上述证明末尾的论证还可得出 $b_2([0,1]^n) \geq \frac{n}{n-1}$。为此，令 $L_i = [0,e_i]$，其中 $i = 1, 2, ..., n$，使得 $C = [0,1]^n = L_1 + ... + L_n$。那么，对于 $i = 1, 2$: $V(C[n-1], L_i) = \frac{1}{n}$，而 $V(C[n-2], L_1, L_2) = \frac{1}{n(n-1)}$ 且 $V(C) = 1$。因此 $b_2(C) \geq \frac{n}{n-1}$。事实上，$b_2([0,1]^n) = \frac{n}{n-1}$。

命题 5. 令 $C = [0,1]^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位立方体。则 $b_2(C) = \frac{n}{n-1}$。

证明。我们刚才通过选取立方体的两条不平行边作为（L_1, L_2），论证了 b_2（C）$\geq \frac{n}{n-1}$。还需验证，对于任意 A、$B \in \mathcal{K}^n$:

$$V(A, B, C[n-2])V(C) \leq \frac{n}{n-1} V(A, C[n-1])V(B, C[n-1]).$$

利用混合体积的性质（b）和（d），以及 $C = [0,e_1] + ... + [0,e_n]$，可得:

$$V(A, C[n-1]) = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} V(A, ([0,e_k])_{1 \leq k \leq n, k \neq i}) = \frac{1}{n} \sum_i |\pi_i(A)|$$

其中 π_i 是正交投影 到 $\mathbb{R}e_i$ 上的正交投影，而 $|A'|$ 是（线段） A'的长度。同理 ,

$$V(A, B, C[n-2]) = (n-2)! \sum_{i<j} V(A, B, , ([0,e_k])_{1 \leq k \leq n, k \neq i,j}) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} V_2(\pi_{i,j}(A), \pi_{i,j}(B))$$

其中 $\pi_{i,\ j}$ 表示到 $\mathbb{R}e_i + \mathbb{R}e_j$ 上的正交投影。

对于所有 $i < j$，注意到 $V_2(\pi_{i,\ j}(A)\, \pi_{i,\ j}(B)) \leq \frac{1}{2}(|\pi_i(A)||\pi_j(B)| + |\pi_j(A)||\pi_i(B)|)$，根据引理 5（见附录）。因此:

$$\begin{aligned} V(C)V(A, B, C[n-2]) &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} V_2(\pi_{i,j}(A), \pi_{i,j}(B)) \\ &\leq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i<j} (|\pi_i(A)|\pi_j(B)| + |\pi_j(A)||\pi_i(B)|) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\pi_i(A)||\pi_j(B)| \leq \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_i |\pi_i(A)|\right) \left(\sum_j |\pi_j(B)|\right) \\ &= \frac{n}{n-1} V(A, C[n-1])V(B, C[n-1]). \end{aligned}$$

□

备注：由此证明可知，等号成立的条件是 A、 B 完全正交；更准确地说，在我们的情形下，若存在 $I=\{i_1,...,i_k\}\subset[n]$和 x_0、 $x_1\in\mathbb{R}^n$，使得 $A\subset E+x_0$和 $B\subset E^{\perp}+x_1$，其中 $E=\mathbb{R}e_{i_1}+...+\mathbb{R}e_{i_k}$。

然而，$\frac{n}{n-1}\neq$ 最大值$_K\, b_2(K)$，也就是说：对于 $b_2(,)$ 立方体并非最大化者，因为实际上最大值 $_K\, b_2(K)=2$，这可由引理 3 （称为芬切尔不等式）及其后的例子得出。事实上， $b_2(C)$ 是否为拟圆锥体中的最大值，与 Dembo、Cover、Thomas猜想的一个受限版本有关（见附录中的备注 6.1 ，另见 [FMMZ] 及其中的参考文献）。

在 [FGM 的命题 2 中，1], 已证明，对于任意 A， B， C， $K\in\mathcal{K}_0^n$，有：

$$\frac{V(B+C,B+C,K[n-2])}{V(B+C,A,K[n-2])}\geq\frac{V(B,B,K[n-2])}{V(B,A,K[n-2])}+\frac{V(C,C,K[n-2])}{V(C,A,K[n-2])}. \tag{18}$$

特殊情形 $K=A$ 可由布伦-明可夫斯基不等式推出。当 K 任意时，可利用两个Alexandrov-Fenchel不等式推导得出；证明（以及更一般的结论）可参见 [FGM 的引理和命题 2。1]

由（18）可得以下结论，另见 [Fen]。

引理3。设 $K\in\mathcal{K}_0^n$为一个凸体。若 $M,L\in\mathcal{K}^n$ 为紧凸集，记 $V(M,L)=V_n(M,L,K[n-2])$。那么对于任意 $(M,L)\in(\mathcal{K}^n)^2$:

$$V(K,K)V(M,L)\leq 2V(K,L)V(K,M).$$

实际上，当 $V(M,L)=V_n(M,L,K[n-2])>0$时，可以得到更强的不等式：

$$V(K,K)V(M,L)\leq 2V(K,L)V(K,M)-\frac{V(L,L)V(K,M)^2}{V(M,L)}. \tag{19}$$

（推导（19）时，在（ $K=B$ 中取 18），并取 $A=M$， $C=L$）。

注意，引理3 恰好告诉我们，对于任意凸体 $K\in\mathcal{K}^n$， b_2（K）≤ 2。

我们回顾一下，这个不等式是尖锐的：取 $K=O_n$ 中的 l_1球。记 (e_i) 为 $\mathbb{R}^n$中的标准基。令 L_1，并令 L_2 为两条线段： $L_1=[0,e_1+e_2]$, $L_2=[0,e_1-e_2]$。于是

$$V_n(L_2,K[n-1])=V_n(L_1,K[n-1])=\frac{\sqrt{2}}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi K)$$

其中 π 表示到（e_1+e_2）$^{\perp}$的正交投影，因此 $\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi K)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Vol}_{n-1}(O_{n-1})$ 。另一方面（根据（13），

$$V_n(L_1,L_2,K[n-2])=\frac{2V_2(L_1,L_2)}{n(n-1)}\mathrm{Vol}_{n-2}(O_{n-2})=\frac{2}{n(n-1)}\mathrm{Vol}_{n-2}(O_{n-2})$$

由于将 O_n 投影到（e_1,e_2）$^{\perp}$所得为 O_{n-2}，且 L_1 和 L_2 的长度均为 $\sqrt{2}$，并且彼此正交。因此

$$V_n(L_1,K[n-1])V_n(L_2,K[n-1])=\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(O_{n-1})^2}{n^2}=\frac{2^{2n-2}}{(n!)^2}=\frac{1}{2}\frac{2^{2n-1}}{(n!)^2}=\frac{1}{2}V_n(L_1,L_2,K[n-2])V_n(K).$$

因此 $b_2(O_n)=2$。假设 $K\in\mathcal{K}_0^n$: 那么由于（19），引理 3中等号成立仅当 M， L 都是线段。换言之，$b_2(K)=2$ 当且仅当存在 u， $v\in\mathbb{S}^{n-1}$，使得

$$\mathrm{Vol}_n(K)\mathrm{Vol}_{n-2}(\pi_{(u,v)^{\perp}}K)V_2([0,u],[0,v])=\frac{(n-1)}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_{u^{\perp}}K)\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_{v^{\perp}}K)$$

这里提醒一下，$\pi_{(u,v)^{\perp}}$ 表示到（u,v）$^{\perp}$的（正交）投影。

尽管猜想 1 （将 Δ 刻画为 b_2 在 $\mathcal{K}_0^n$中唯一极小化体的结论）仍未解决，但将范围限制为 n-多面体时，这一刻画已得到证明。

定理 6（单纯形刻画，[SSZ1]）。设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 n-多面体。则 $b_2(P) > 1$，除非 P 是一个 n-单纯形。

为方便读者，下面简要概述证明思路。该证明用到以下事实（参见 [SSZ1，引理 3.1]）。

事实 2. 设 $P = \cap_{i=1}^N H^-(u_i, h_i)$ 是一个 n-多面体，其外法向量为 $u_1, ..., u_N$，支撑向量为 $(h_i)_{i\leq N}$。设 $i \leq N$，且 $|t|$ 足够小。那么混合表面积测度$\sigma_r := S(P[n-1-r], P_{i,t}[r], .)$ 的支撑均与 $\sigma_0 = S_P$ 相同。

定理 6 的证明。假设 P 是一个 n-多面体，且 $b_2(P) = 1$。换言之，对于所有多面体 L_1, L_2，$F(L_1, L_2) \geq 0$，其中 $F(A, B) = V_n(A, P[n-1])V_n(B, P[n-1]) - V_n(A, B, P[n-2])V_n(P)$。

记 u_1、.....、u_N 为 P 的外法向量，并记 $F_i = P^{u_i}$ 为相应的面。借助积分公式（10）以及上述事实 2，将假设 $F(L_1, L_2) \geq 0$ 应用于 $L_1 = P_{i,t}$ 和 $L_2 = P_{j,s}$，可得对于任意足够小的 $|s|$、$|t|$ 以及 i、$j \leq N$:

$$F(L_1, L_2) = \left(V(P) + \frac{t}{n}V_{n-1}(F_i)\right)\left(V(P) + \frac{s}{n}V_{n-1}(F_j)\right) - \left(V(P) + \frac{t}{n}V_{n-1}(F_i) + \frac{s}{n}V_{n-1}(F'_j)\right)V(P) \geq 0$$

其中 $V_{n-1}(F'_j) := V_{n-1}(P_{i\,t}^{u_j}, P^{u_j}[n-2])$（采用这一记号是由闵可夫斯基存在定理[6], 所保证的，不过当前证明并不需要闵可夫斯基定理）。

化简后，我们得到 $s\left[V(F_j)\left(1 + \frac{t}{n}\frac{V}{V(F_i)(P)}\right) - V(F'_j)\right] \geq 0$，对任意 $|s| < \delta$ 和 $j \leq N$ 均成立。由此可知，对于所有 $j \leq N$，有 $V(F'_j) = \lambda_t V(F_j)$，其中 $\lambda_t = 1 + \frac{t}{n}\frac{V}{V(F_i)(P)} = \frac{V(P_{i,t}, P[n-1])V(P)}{}$。

由于 $\sigma_1 = S(P_{i,t}, P[n-2], .)$ 与 S_P 的支撑相同（参见事实 2），因此 N方程 $V(F'_j) = \lambda_t V(F_j)$ 足以得出 $\sigma_1 = \lambda_t S_P = \lambda_t \sigma_0$，即得出 σ_1 与 σ_0成比例。

可以将 $F(A, P_{i,t}) \geq 0$ 改写为 $\int h_A d\sigma_1 \leq \lambda_t \int h_A d\sigma_0$，由此我们刚刚推得 $\sigma_1 = \lambda_t \sigma_0$（取 $A = P_{j,s}$，令 $j \leq N$ 和 $s = \pm\delta$ 取不同值）。亚历山德罗夫-芬切尔不等式$V(A, P_{i,t}, P_{i,t}, P[n-3])V(A, P[n-1]) \leq V(A, P_{i,t}, P[n-2])^2$可写为:

$$\left(\int h_A d\sigma_2\right)\left(\int h_A d\sigma_0\right) \leq \left(\int h_A d\sigma_1\right)^2.$$

因此，$\sigma_1 = \lambda_t \sigma_0$ 意味着对所有 A，都有 $\int h_A d\sigma_2 \leq \lambda_t^2 \int h_A d\sigma_0$。

与上文类似，取 $A = P_{j,\ s}$，令 $j \leq N$ 且 $s = \pm\delta$，并利用事实 2，由这些不等式可推出 $\sigma_2 = \lambda_t^2 \sigma_0$。

通过归纳论证（使用更多 Aleksandrov-Fenchel 不等式和事实 2），可得$\sigma_r = \lambda_t^r \sigma_0$，对所有 $r \leq n-1$均成立。特别地，可得 $S_{P_{i,\ t}} = \sigma_{n-1} = \lambda_t^{n-1}\sigma_0 = \lambda_t^{n-1} S_P$，由此（根据事实 1）可知，$P_{i,\ t}$ 与 P 位似。

最后，只需证明：一个具有 $n+2$ 个或更多顶点的多面体，总有一个面 F_i，使得对所有足够小的 $t > 0$，$P_{i,\ t}$ 与 P 不位似。这是因为，如果 P 不是一个 n- 单纯形，那么 P 就有一个面 $F_i = P^{u_i}$，使得 P至少有两个顶点位于 F_i之外。将这两个顶点记为 v_0、v_1。

注意，当 $t > 0$ 足够小时，P中位于 F_i之外的所有顶点仍然是$P_{i,t}$的顶点。特别是，距离 $||v_1 - v_0||$ 在扰动下保持不变。若$P_{i,t}$与 P位似，由于我们已知 $\sigma_1 = \lambda_t \sigma_0$，那么 P两个顶点之间的任意距离 $||v_j - v_k||$ 在扰动下都应乘以 $\lambda_t > 1$：若有$P_{i,t} = x + \lambda_t P$，那么 $v'_j = x + \lambda_t v_j$ 将是$P_{i,t}$的顶点，特别是我们应有 $||v'_1 - v'_0|| > ||v_1 - v_0||$（然而，由于此处的 $v'_1 = v_1$ 和 $v'_0 = v_0$，我们有 $||v'_1 - v'_0|| = ||v_1 - v_0||$）。□

[6]这表明存在 $P' = P'_{i,t}$，使得对所有 L，$V(L, P_{i,t}, P[n-2]) = V(L, P'[n-1])$

接下来，我们想回顾几个已知性质，这些性质可以排除凸体 K 成为 $b_2(.)$的极小化体。下一个命题指出， b_2 极小化体必须是不可分解的：这是[SZ，定理 3。3]。

命题 3。假设 K 是可分解的，即 $K = A + B$，且 A 和 B 不位似。那么 $b_2(K) > 1$。

结果表明，定理 6 和命题 3 只是一个更一般结果的特例。在[SSZ2],中引入了弱可分解性这一概念。

定义 7。设 K 是一个内点非空的凸体。若存在一个与 K 不位似的 L，使得 $supp(S_{K+L}) \subset supp(S_K)$，则称 K 弱可分解。

注 1 任何光滑凸体都是弱可分解的，因为 $supp(S_K) = \mathbb{S}^{n-1}$ （对 L 任取一个多面体即可）。同样，任何满足 $supp(S_K)$ 包含 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个开子集的凸体，都是弱可分解的。

注 2 单纯形是唯一一个不弱可分解的 n-多面体（证明见附录中的引理 6）。因此，下面的定理 8 推出了上面的定理 6 。

注 3. 若 K 是可分解的，即 $K = A + B$ 与 A、B 不位似（因此，A与 K 也不位似），则 K 是弱可分解的。事实上，取 $L = A$。于是：

$$S_{K+L} = S_{2A+B} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} \sigma_k \quad \text{while} \quad S_K = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sigma_k$$

其中， $\sigma_k = S(A[n-1-k]、B[k], .)$ 是 A、B之间的混合表面积测度。由此可得，$supp(S_K) = supp(S_{K+L}) = \cup_{k=0}^{n-1} supp(\sigma_k)$。

下面的定理由 Saroglou、Soprunov 和 Zvavitch 提出（见 [SSZ2，定理 5。7]）。

定理 8. 设 K 是一个弱可分解体。则 $b_2(K) > 1$。

换言之，与可分解性一样，弱可分解性也是一个排除条件（在寻找 $b_2(.)$ 的极小化体时）。证明通过用 Wulff 形扰动替换 P_j、$_s$ ，重现了定理 6 的归纳过程。尽管多面体的表面积测度的离散性质（以及事实 2，即表面积测度的支撑相对于与扰动的闵可夫斯基和具有良好性质）是上述定理 6 证明中迭代推出 $\sigma_r = \lambda_t^r \sigma_0$的关键因素，但在这一其他情形下，事实 2 并不成立（如果我们还选择用 Wulff 形扰动替换 P_i、$_t$ ），而是由假设 $S_{K+L} << S_K$自动得到；推导 $\sigma_r = \lambda_t^r \sigma_0$ （此时 $\sigma_r = S(L[r]、K[n-1-r], .)$）的主要工具则是 Alexandrov 变分引理（见引理 1 和引理 2）。详情请参见 [SSZ2]，第 16 页。

鉴于上述定理，[SSZ2] 曾提出疑问： n-单形是否是唯一的凸体$K \in \mathcal{K}_0^n$，它们不是弱可分解的。若答案为是，则猜想 1 将得到解决。

问题 2. 锥 $C = Conv(e_n, B)$ 是否弱不可分解，其中 $B = \pi_{e_n^\perp}(B_2^n) \subset e_n^\perp$ 是$e_n^\perp$中的单位球?

4. An excluding condition with isoperimetric ratios

如果某个性质 $\mathcal{P}$ 满足：当 K 具有 $\mathcal{P}$时， K 不可能是 $b_2(.)$常数的极小化体，我们就称 $\mathcal{P}$ 为排除条件（即不属于极小化体集合的条件）。例如，上文定理8表明，弱可分解性（特别包括非 n-单纯形的多面体，或可分解性）是一项排除条件。本节给出一个新的排除条件，它涉及至少有一个面的凸体（但不一定是多面体）。我们将在 $\mathbb{R}^n$ 中研究 $n \geq 3$，该条件意味着具有无限多个面是一项排除条件（见下文定理9 ）。

若 K 是一个 k维凸体，且 $k \geq 2$，则记 $\mathrm{Isop}(K) = \frac{1}{k}\frac{|\partial K|}{|K|} := \frac{1}{k}\frac{\text{体积}_{k-1}(\partial K)}{\text{体积}_k(K)}$。

在[S],作者证明了以下结论。

命题4. 设 K 是一个凸体，且 K 有一个满足以下条件的面 F： 等周比(F) $>$ 等周比(K)。则 $b_2(K) > 1$。

回顾一下，对于任意（可逆）仿射变换 T， $b_2(K) = b_2(TK)$。另一方面，量

$$\sup_F \frac{\mathrm{Isop}(F)}{\mathrm{Isop}(K)} = \sup_F \frac{n\mathrm{Vol}_{n-2}(\partial F)\mathrm{Vol}_n(K)}{(n-1)\mathrm{Vol}_{n-1}(F)\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)},$$

其中上确界取遍所有面，该量并非仿射不变。因此，上述命题立即推出以下命题。

命题 5. 设 K是一个凸体，其某个仿射对 $K' = TK$有一个满足以下条件的面 F':

$$\frac{Vol_{n-2}(\partial F')}{(n-1)\,Vol_{n-1}(F')} > \frac{Vol_{n-1}(\partial K')}{n\,Vol_n(K')}.$$

那么 $b_2(K) > 1$。

换言之，若 $\max_T$上确界$_{F\text{等周比}(TF)\text{等周比}(TK)} > 1$，其中最大值取遍 $T \in O(n)$（而上确界取遍 K 的各个面），则 $b_2(K) > 1$. （参见 [S]，了解上述命题的一些应用）。

此外，命题 5 给出了以下结果的一个简短证明，该结果指出 Ω_{n-1} （凸体各个面的外单位法向量所构成的集合）为无限集（就基数而言）是一个排除条件。

定理 9 （[SSZ2]中的定理4.2）。 设 K 是一个具有无限多个面的凸体。那么$b_2(K) > 1$。

证明。 若 K 具有无限多个面，则其中无限多个面满足等周比(F) $>$ 等周比(K)，因此定理 9 可由命题 4 推出。

设 C 是一个 d维凸体。那么

$$\mathrm{Isop}(C) = \frac{1}{d}\frac{\mathrm{Vol}_{d-1}(\partial C)}{\mathrm{Vol}_d(C)} = \frac{1}{d}\frac{\mathrm{Vol}_{d-1}(\partial C)}{\mathrm{Vol}_d(C)^{d-1/d}}\mathrm{Vol}_d(C)^{-1/d} \geq \frac{1}{d}\frac{\mathrm{Vol}_{d-1}(\partial B_2^d)}{\mathrm{Vol}_d(B_2^d)^{d-1/d}}\mathrm{Vol}_d(C)^{-1/d} = \frac{\kappa_d^{1/d}}{\mathrm{Vol}_d(C)^{1/d}},$$

其中我们用到了等周不等式，且 κ_d 表示 d 维欧几里得球的体积。

由此可得，当 $\mathrm{Vol}_{n-1}(F) \to 0$ 时，$\mathrm{Isop}(F) \to +\infty$。由于凸体的表面积测度有限，因此若 K 有无限多个面，则除有限个外，它们都满足 $\mathrm{Isop}(F) > \mathrm{Isop}(K)$。□

我们以两个问题结束本节：第一个问题探讨多面体中是否存在 Ball 的反等周不等式的离散模拟。我们用 Δ表示一个 n 维单纯形。我们用 $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{K}_0^n$表示 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维多面体类。

问题 3. 对于 $P \in \mathcal{P}^n$，是否有 $\max_{T\in O(n)} \max_F {}^{Isop}{}_{(TF)\,Isop(TP)}$ 在 $P = \Delta$ 时取得最小值?

一个相关的问题如下：

问题 4. 设 $P \in \mathcal{P}^n$，且不是单纯形。我们是否有 $\max_{T\in O(n)} \max_F {}^{Isop}{}_{(TF)\,Isop(TP)} > 1$?

换言之，是否总存在一个仿射变换 T，使得 $P' = TP$至少有一个面F'满足等周比(F') $>$等周比({v6)?

如果对后一个问题的回答是肯定的，那么上面的命题 5 便给出了定理 6的另一种证明。注意，问题 4 的肯定答案意味着问题 3也有肯定答案（尽管我们不知道 $\max_{T\in O(n)}\max_{F\text{等周比}(TF)\text{ 等周比}(T\Delta)}$的确切值，但由命题 5可知，$\max_{T\in O(n)}\max_{F\text{等周比}(TF)\text{ 等周比}(T\Delta)\leq 1}$）。

另一个相关问题如下：能否找到一个多面体 P，使得当 $T\in O(n)$ 时，最大比值 $\max_{F\text{等周比}(TF)\text{ 等周比 }(TP)}$，在 TP 处~~于其约~~翰位置时并未达到最小值？一个可能的理想候选是这样的多面体：使 $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial(TP))$ 达到最小值的变换 T（满足 $|det(T)|=1$）与将 P 置于约翰位置的变换并不相同（即那些 T，使得包含在 TP 内且体积最大的椭球是欧几里得球）。

5. An excluding condition for minimizing b_2

在 [SSZ1], 中证明了，严格点位于边界上（例如，当 ∂K 某处具有正曲率时就会出现这种情况）是一个排除条件。严格点是指点 $y\in\partial K$，使得没有任何位于边界上的线段 L 包含 y。我们在此陈述一个蕴含上述排除条件的排除条件。

回顾记号 $supp(S_K)=\Omega=\Omega_0\cup\ldots\cup\Omega_{n-1}$，其中 $\Omega_k=\{u\in\Omega:\ K^u\text{ 是 }k\text{-维的}\}$。$\Omega_0$ 的元素称为边界的正则方向。若 $y\in\partial K$，我们回顾记号$\sigma(y)=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:y\in K^u\}$。

注意，若 K 有一个严格点（位于其边界上），则 $\Omega_0\neq\emptyset$: 这由以下事实推出： $\sigma(z)\cap\Omega\neq\emptyset$, 对任意 $z\in\partial K$均成立。换言之，以下条件是对[SSZ1，定理 4的一个略强的加强。1]。

定理 10。假设 $\Omega_0\neq\emptyset$。则 $b_2(K)>1$。

证明使用了标准的紧致性论证，以及公式（11）。

我们首先需要回顾一个广为人知的事实。固定 K 一个凸体，以及 $y\in\partial K$。则 $\sigma(y)=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:\ y\in K^u\}=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:\ \langle y,u\rangle=h_K(u)\}$ 是球面的一个非空、紧致、测地凸子集，且不能同时包含 $u,-u$ （即不包含任何一对对跖点）。由这 4 个性质可以推出， $\sigma(y)$ 包含于一个开半球 $\{v\in\mathbb{S}^{n-1}:\langle v,u_1\rangle>0\}$中，其中心 u_1 可选取为属于 $\sigma(y)$。

引理 4. 设 K 是一个凸体，且 $y\in\partial K$。那么存在 $u_1\in\sigma(y)$，使得对于任意 $v\in\sigma(y)$，都有 $\langle v,u_1\rangle>0$。

定理 *10* 的证明。设 $u_0\in\Omega_0$, 并设 $y\in K$ 使得 $K^{u_0}=\{y\}$。由引理 4 可知，存在 $u_1\in\sigma(y)$，使得对于所有 $u\in\sigma(y)$，都有 $\langle u_1,u\rangle>0$ 。

对于 $\epsilon>0$，记 $K_\epsilon=K\cap\{x\in\mathbb{R}^n:\ \langle x,u_0\rangle\leq\langle y,u_0\rangle-\epsilon\}$。注意，若 $\epsilon>0$ 足够小，则 $\pi(K)=\pi(K_\epsilon)$，其中 $\pi=\pi_{u_1^\perp}$ 表示到 $u_1^\perp$ 上的正交投影。

事实上，若非如此，则可找到一个序列 $z_\epsilon\in K\setminus K_\epsilon$，使得 $\pi(z_\epsilon)\notin\pi(K_\epsilon)$，并且，$z_\epsilon$ 在某个方向 $w_\epsilon\in\mathbb{S}^{n-1}\cap u_1^\perp$ 上达到最大值： $h_K(w_\epsilon)=h_{\pi(K)}(w_\epsilon)=\langle w_\epsilon,z_\epsilon\rangle=\langle w_\epsilon,\pi(z_\epsilon)\rangle$。取一个子序列后，可假设 $w_\epsilon\to w\in u_1^\perp\cap\mathbb{S}^{n-1}$，且 $z_\epsilon\to z\in\partial K$。但是，由于 $K^{u_0}=\{y\}$，且 $\langle z_\epsilon,u_0\rangle>h_K(u_0)-\epsilon$，我们有 $z=y$，即 $\lim z_\epsilon=y$。由连续性可推出 $y\in K^w$，换言之， $w\in\sigma(y)$，这与以下事实矛盾：对于所有 $v\in\sigma(y)$，都有 $\langle u_1,v\rangle>0$ 。

接下来，固定 $\epsilon>0$ 充分小，使得 $\pi(K)=\pi(K_\epsilon)$. 然后（利用（12）），$V([0,u_1],K[n-1])=V(K_\epsilon,[0,u_1],K[n-2])=\frac{1}{n}$体积$_{n-1}(\pi(K))$，从而证明

$$V(K_\epsilon,[0,u_1],K[n-2])V(K)>V(K_\epsilon,K[n-1])V([0,u_1],K[n-1]),$$

只需证明 $V(K)>V(K_\epsilon,K[n-1])$. 该不等式由积分公式 (11) 以及假设 $u_0\in supp(S_K)$ 得出。事实上，$h_{K_\epsilon}(u_0)=h_K(u_0)-\epsilon$(按定义

of K_ϵ)，由 $h_{K_\epsilon}-h_K$ 的连续性可知，存在某个 $\delta>0$，使得 $(h_K-h_{K_\epsilon})(u)>\frac{\epsilon}{2}$ 当且仅当$u\in U(u_0,\delta)$ $=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:\text{dist}(u,u_0)\leq\delta\}$。此外，对于所有 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，都有 $(h_K-h_{K_\epsilon})(u)\geq 0$。因此，由测度 S_K 的非负性可得：

$$V(K)-V(K_\epsilon,K[n-1])=\frac{1}{n}\int(h_K-h_{K_\epsilon})dS_K\geq\frac{\epsilon}{2n}S_K\left(U(u_0,\delta)\right)>0,$$

其中，正性源于假设 $u_0\in supp(S_K)$。 □

下述命题是本文的主要结果。它给出了一个排除条件，针对的是 Ω_{n-2}，而非 Ω_0 或 Ω_{n-1}。

定理 A。设 $S_K(\Omega_{n-2})>0$。则 $b_2(K)>1$。

举例来说：在 $\mathbb{R}^3$ 中，若 $B=\pi_{e_3^\perp}(B_2^3)$ 是 $e_3^\perp$ 中的单位球，且 $C=Conv(B,e_3)$ 表示 B 与 e_3 的凸包，那么 Ω_1 是一个圆（位于 $\mathbb{S}^2$ 上）。因此 $b_2(C)>1$。

在开始证明定理 A之前，我们先说明如何利用它证明推论 1。

推论 1 的证明。考虑 $K\in\mathcal{K}^3$。令 $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2$ 为表面积测度 S_K的支撑。若 $\Omega_0\neq\emptyset$，则由定理 10 可得 $b_2(K)>1$。因此，我们可以假设 $\Omega_0=\emptyset$。若 Ω_2 是无限集，则由定理 9 可得 $b_2(K)>1$。因此，我们可以假设 Ω_2 是有限集。若$S_K(\Omega_1)>0$，则定理 A 推出 $b_2(K)>1$。因此，我们可以假设 $S_K(\Omega_1)=0$。于是，$S_K(\Omega)=S_K(\Omega_2)$，且 Ω_2是有限集，因而是闭集，所以（根据测度支撑的定义）可得 $\Omega=\Omega_2,$，这意味着 K 是一个多面体。由定理 6 可知，满足 $b_2(P)=1$ 的唯一 n-多面体是单形。□

请注意，如果能够证明 $S_K(\Omega_{n-3})>0$蕴含 $b_2(K)>1$，那么对上述证明稍作改编即可得出：$b_2(K)=1$ 刻画了4维凸体中的4维单形。类似地，如果对于 $k=2,3,4$，$S_K(\Omega_{n-k})=0$ 是（满足 $b_2(K)=1$ 的）必要条件，那么上述证明将得出：Δ_5 是 $\mathcal{K}_0^5$ 中 b_2 的唯一极小化体。

需要指出的是，上述推论已经出现在[SSZ2]中。事实上，在证明$b(K)=1$ 刻画单纯形时，Saroglou、Soprunov 和 Zvavitch 得到了一个更强的刻画，即 $b'(K)=1$ 刻画单纯形，其中：

$$b'(K)=\max_{L_1,\dots,L_{n-1}}\frac{V(L_1,\dots,L_{n-1},K)V(K)}{V(K,K,L_2,\dots,L_{n-1})V(L_1,K[n-1])}.$$

由于 $b'(K)\leq b(K)$ 对所有 K都成立，而且有时不等式是严格的（例如立方体），因此条件 $b'(K)=1$ 较弱（因此刻画更强）。请注意，当 $n=3$时，$b'(K)=b_2(K)$ 对所有 K都成立，这就是推论1 是 [SSZ2定理11]的推论的原因。

现在我们转到定理 A 的证明。

定理 A 的证明。令 $n\geq 3$。假设 $S_K(\Omega_{n-2})>0$。若 $\Omega_0\neq\emptyset$，则由定理 10，我们知道$b_2(K)>1$：因此可以假设 $\Omega_0=\emptyset$。同样，可以假设 Ω_{n-1} 是有限集。

$$\text{Define }\Omega_\delta:=\{u\in\Omega_{n-2}:\text{Vol}_{n-2}(K^u)\geq\delta\},\ \text{so that}\quad\Omega_{n-2}=\cup_{\delta>0}\Omega_\delta.$$

固定 $\delta>0$ 使得 $S_K(\Omega_\delta)>0$，并令 $V_0=\Omega_\delta$。注意，$V_0=\cup_\epsilon\left(V_0\setminus\Omega_{n-1}^\epsilon\right)$，其中 $A^\epsilon=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:$ $dist(u,A)\leq\epsilon\}$，因为 Ω_{n-1}是有限的。固定 $\epsilon>0$使得 $S_K(V_0\setminus\Omega_{n-1}^\epsilon)>0$。令$V:=V_0\setminus\Omega_{n-1}^\epsilon$。

设 $\epsilon_0=\frac{1}{10}\epsilon$，并用半径为 ϵ_0、中心位于 V 中的球冠覆盖 $V\subset\mathbb{S}^{n-1}$。在这些球冠中，至少有一个，记作 $U_0=U(z_0,\epsilon_0)$，满足 $S_K(V\cap U_0)>0$。定义好 U_i 后，用半径为 $\epsilon_{i+1}=\frac{1}{4}\epsilon_i$ 的球冠覆盖 V。其中可以选取一个 U_{i+1}，使得 $U_{i+1}\cap U_i\neq\emptyset$，并且 $S_K(V\cap U_{i+1})>0$。

我们断言 $S_K(2U_k)\to 0$，这里提醒一下，若 $U_k=U(z_k,\epsilon_k)$，则 $2U_k=U(z_k,2\epsilon_k)$。

事实上，设 $U=\bigcap_m\bigcup_{k\geq m}(2U_k)$。由于 $\epsilon_{i+1}=\frac{1}{4}\epsilon_i$ 和 $U_{i+1}\cap U_i\neq\emptyset$，注意到 $2U_{i+1}\subset 2U_i$：特别地，U 是一个单点集；若 $U=\{u_0\}$，则有 $u_0\in 2U_0$。根据构造，$2U_0\cap\Omega_{n-1}=\emptyset$，因此 $u_0\notin\Omega_{n-1}$，换言之，K^{u_0}的维数至多为 $(n-2)$，且 $S_K(U)=S_K(\{u_0\})=0$。由于 $S_K(U)\geq\limsup_k S_K(2U_k)$，因此很容易推出 $S_K(2U_k)\to 0$。

定义 $f_i:\ \mathbb{S}^{n-1}\to[0,1]$，连续，且满足 $f_i=1$ 在 U_i上，以及 $f_i=0$ 在 $2U_i$ [7]之外。定义 K 的沃尔夫形扰动如下：$L_i(t)=W(h_K+tf_i)$。根据引理 2，可得

$$\frac{h_{L_i(t)}(u)-h_K(u)}{t}\to 1\quad\text{for } S_K\text{-almost every } u\in U_i.$$

称 $W_i:=\{u\in U_i:\ \frac{h_{L_i(t)}(u)-h_K(u)}{t}\to 1\text{为 } t\to 0\}$。那么，几乎必然收敛告诉我们，$S_K(W_i\cap V)=S_K(U_i\cap V)>0$，因此 $W_i\cap V\neq\emptyset$。固定 $u_i\in W_i\cap V$。由于 $u_i\in V$，我们知道 K^{u_i} 的维数为 $(n-2)$（此外，$\mathrm{Vol}_{n-2}(K^{u_i})\geq\delta$）。令 $v_i\in\mathbb{S}^{n-1}\cap u_i^{\perp}$ 满足 $K^{u_i}\subset v_i^{\perp}$（除 ±1 符号外，它是唯一确定的）。令 M_i 为平方：$M_i=[0,u_i]+[0,v_i]$，因此 $M_i^{u_i}$ 是 $[0,v_i]$ 的一个平移。

接下来的断言完成了证明。

断言 11. 设 $F(A,B)=V(A,B,K[n-2])V(K)-V(A,K[n-1])V(B,K[n-1])$，其中 $A,B\in\mathcal{K}^n$。那么，如果 $k>1$ 足够大，且如果 $t\in(0,t_k)$ 足够小，则有 $F(L_k(t)\ M_k)>0$。

为证明这一断言，我们改写如下：

$$F(A,B)=[V(A,B,K[n-2])-V(K,B,K[n-2])]\,V(K)-[V(A,K[n-1])-V(K)]\,V(B,K[n-1]),$$

从而 $F(L_k(t)\ M_k)=A_k(t)V(K)-B_k(t)V(M_k,K[n-1])$，其中

$$A_k(t)=V(L_k(t),M_k,K[n-2])-V(K,M_k,K[n-2])\text{ and }B_k(t)=V(L_k(t),K[n-1])-V(K).$$

现在，$B_k(t)=\frac{1}{n}\int(h_{L_k(t)}-h_K)dS_K\leq\frac{t}{n}\int f_k dS_K\leq\frac{t}{n}S_K(2U_k)$，因为 $supp(f_k)\subset 2U_k$，且 $\max f=1$。

与此同时，$V(M_k,K[n-1])=V([0,u_k],K[n-1])+V([0,v_k],K[n-1])$，因此，令 $C_K=\max_{u\in\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_{u^{\perp}}(K))$，可得 $V(M_k,K[n-1])\leq\frac{2}{n}\max_{u\in\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_{u^{\perp}}(K))=\frac{2}{n}C_K$。

另一方面，记 $\sigma=S(M_k,K[n-2],.)$ 为 M_k 与 K 之间的混合表面积测度，则：

$$A_k(t)=V(L_k(t),M_k,K[n-2])-V(K,M_k,K[n-2])=\frac{1}{n}\int(h_{L_k(t)}-h_K)(u)d\sigma(u).$$

于是 $A_k(t)\geq\frac{1}{n}(h_{L_k(t)}-h_K)(u_k)S(M_k,K[n-2],u_k)$，但注意到

$$S(M_k,K[n-2],u_k)=V_{n-1}(M_k^{u_k},K^{u_k}[n-2])=V_{n-1}([0,v_k],K^{u_k}[n-2])=\frac{1}{n-1}\mathrm{Vol}_{n-2}(\pi_{v_k^{\perp}}(K^{u_k})).$$

$$\text{Hence, }S(M_k,K[n-2],u_k)=\frac{1}{n-1}\mathrm{Vol}_{n-2}(\pi_{v_k^{\perp}}(K^{u_k}))=\frac{1}{n-1}\mathrm{Vol}_{n-2}(K^{u_k})\geq\frac{\delta}{n-1}$$

其中，第二个等号由 v_k 的选取可得，而不等式则由 $u_k\in V\subset\Omega_\delta$ 得出。

由于 u_k 也被选为属于 W_k，注意到 $(h_{L_k(t)}-h_K)(u_k)\sim t$ 当 $t\to 0$ 时。因此，若 t 足够小（例如 $t\in(0,t_k)$），则有：$A_k(t)\geq\frac{\delta}{2n(n-1)}t$。

将这些不等式结合起来可得，对于任意 k，以及任意 $t\in(0,t_k)$：

$$F(L_k(t),M_k)\geq\left(\frac{\delta}{2n(n-1)}V(K)-\frac{2}{n^2}C_K S_K(2U_k)\right)t.$$

由于 $S_K(2U_k)\to 0$，因此结论成立。 □

[7] if $U_k=U(z_k,\epsilon_k)$ is cap centered at z_k, then $2U_k:=U(z_k,2\epsilon_k)$

5.1. 将 Δ 刻画为 $b(K)$ 的唯一极小化体。本节致力于证明以下定理。

定理 **em 1.** [SSZ2] 设 K 是一个凸体，满足 $b(K)=1$。那么， K 是一个 n-单纯 $x.$

尽管该定理是 [SSZ2，定理1的一个推论，1], 我们仍沿用前几节的记号，在此给出一个更简单的证明。定理1 和 A 的证明确实非常相似。

证明。假设 K 不是一个 n-单纯形。根据定理 9，我们可以假设Ω_{n-1} 是一个有限集。如果K 是一个多面体，我们已经知道 $b(K)\geq b_2(K)>1$。因此我们可以假设$\Omega\neq\Omega_{n-1}$。如果 K的边界上存在正则点，也就是说，如果$\Omega_0\neq\emptyset$，我们知道 $b(K)\geq b_2(K)>1$：我们可以假设$\Omega_0=\emptyset$。

若 Ω_{n-1} 为空（没有面），则设 $V:=\Omega$。否则，注意到 $\Omega\setminus\Omega_{n-1}=\cup_{\epsilon>0}\left(\Omega\setminus\Omega_{n-1}^{\epsilon}\right)$，这是因为 Ω_{n-1} 是有限的。因此 $S_K(\Omega)=\lim_{\epsilon}S_K\left(\Omega\setminus\Omega_{n-1}^{\epsilon}\right)$，从而当 ϵ 足够小时， $S_K\left(\Omega\setminus\Omega_{n-1}^{\epsilon}\right)>0$。我们固定这样一个 ϵ，并设 $V:=\Omega\setminus\Omega_{n-1}^{\epsilon}$。

可以用半径为 $\epsilon_0=\frac{1}{3}\epsilon$、中心取自 V 的球冠覆盖 $V\subset\mathbb{S}^{n-1}$：在这些球冠中，可以选取一个，记作 $U_0=U(z_0,\epsilon_0)$（其中 $z_0\in V$），使得 $S_K(V\cap U_0)>0$。可以用半径为 $\epsilon_1=\frac{1}{4}\epsilon_0$ 的球冠覆盖 U_0：从中选取 U_1，使得 $S_K(U_1\cap V)>0$。依此类推。由此定义出一个球冠序列 (U_k)，它满足 $U_k\cap U_{k+1}\neq\emptyset$，且 $2U_{k+1}\subset 2U_k\subset 2U_0$。令 u_0 为该序列的极限点： $\{u_0\}=\bigcap_m\bigcup_{k\geq m}(2U_k)$。于是 $u_0\in 2U_0=U(z_0,2\epsilon_0)$，并且 $\operatorname{dist}(u_0,\Omega_{n-1})\geq\operatorname{dist}(z_0,\Omega_{n-1})-2\epsilon_0\geq\epsilon_0>0$，因此 $u_0\notin\Omega_{n-1}$，从而 $S_K(\{u_0\})=0$。

由此可得 $S_K(2U_k)\to 0$。

接下来定义如下连续函数序列：令 $f_0:\mathbb{S}^{n-1}\to[0,1]$ 的支撑包含于 $2U_0$（回顾一下，若 $U_0=U(u_0,\delta)$，则 $2U_0:=U(x,2\delta)$），使得 $f_0=1$在 U_0上成立。类似地，令$f_i:\mathbb{S}^{n-1}\to[0,1]$ 的支撑包含于 $2U_i$，使得 $f_i=1$ 在 U_i上成立。根据构造，对所有i， $2U_i\cap\Omega_{n-1}=\emptyset$。接下来定义 K 的沃尔夫形扰动： $L_k(t)=W(h_K+tf_k)$。

根据引理 2，我们知道，对于 S_K-几乎处处的 $u\in U_k$， $\frac{h_{L_k(t)}(u)-h_K(u)}{t}\to 1$。称$W_k\subset U_k$ 为满足该收敛条件的向量集合 u。于是 $S_K(V\cap W_k)=S_K(V\cap U_k)>0$，从而证明了对每个 k， $V\cap W_k$ 非空。固定 $u_k\in V\cap W_k$。

定义 $M_k=B_2^n\cap H_k^-$ 其中 $H_k^-=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \langle x,u_k\rangle\leq 0\}$。因此， $M_k^{u_k}\approx B_2^{n-1}$是 $u_k^{\perp}$ 中的单位球。下一个断言完成证明。

断言 12. 如果 $k>1$ 足够大，且 $0<t<t_k$ 足够小，那么：

$$V(L_k(t),M_k[n-1])V(K)>V(K,M_k[n-1])V(L_k(t),K[n-1]).$$

令 $F(A,B)=V(A,B[n-1])V(K)-V(A,K[n-1])V(K,B[n-1])$，以便我们旨在证明：当 k 足够大且 t 足够小时， $F(L_k(t)\ M_k)>0$。

改写 $F(L_k(t)\ M_k)=A_k(t)V(K)-B_k(t)V(K,M_k[n-1])$，其中 $A_k(t)=V(L_k(t)\ M_k[n-1])-V(K,M_k[n-1])$，且 $B_k(t)=V(L_k(t)\ K[n-1])-V(K)$。回想一下，由于 $L_k(t)$ 是沃尔夫形，我们有 $h_{L_k(t)}\leq h_K+tf$ (对所有 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$)。因此

$$B_k(t)\leq\frac{t}{n}\int f_k(u)dS_K(u)\leq\frac{t}{n}S_K(2U_k)\text{ since }f_k\leq 1\text{ and }supp(f_k)\subset 2U_k.$$

记 $w(K)$ 为 K 的平均宽度：平均宽度可定义为 $w(K)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_K(u)du$，其中 h_K 表示 K 的支撑函数，而 du 表示球面上的 Haar 测度。于是， $V(K,M_k[n-1])\leq V(K,B_2^n[n-1])=\kappa_n w(K)$ 有一个常数上界（因为 K 是固定的）。现在记 S_{M_k} 为半球 M_k 的表面积测度。回顾一下， $S_{M_k}(\{u_k\})=\kappa_{n-1}$，

因为 $M_k^{u_k} \approx B_2^{n-1}$。为简洁起见，下文将 $L_k(t)$ 写作 L。

$$A_k(t) = \frac{1}{n}\int (h_L - h_K)(u) dS_{M_k}(u) = \frac{1}{n}(h_L - h_K)(u_k) S_{M_k}(u_k) = \frac{\kappa_{n-1}}{n}(h_L(u_k) - h_K(u_k)). \tag{20}$$

第二个等式源于 f_k的选取，由此可知，对于任意 $t > 0$，对所有位于 $2U_k$之外的 v，特别是对所有 $v \in \mathbb{S}^{n-1} \cap H_k^-$，均有$h_{L_k(t)}(v) = h_K(v)$；同时还利用了这样一个事实：由于 M_k 是半球，$supp(S_{M_k}) = \{u_k\} \cup \left(\mathbb{S}^{n-1} \cap H_k^-\right)$。

令$c_n = \frac{\kappa_{n-1}}{2n}$。由于 $u_k \in W_k$，等式（20）给出 $A_k(t) \sim 2c_n t$。特别地，对于任意足够小的 t，例如 $t \in (0, t_k)$，有 $A_k(t) \geq c_n t$。由此下界、前面两个上界以及 $S_K(2U_k) \to 0$可知，对于任意足够大的 k，以及任意 $t \in (0, t_k)$：

$$F(L_k(t), M_k) = A_k(t)V(K) - B_k(t)V(K, M_k[n-1]) \geq \left(c_n V(K) - \frac{\kappa_n w(K)}{n} S_K(2U_k)\right) t > 0. \tag{21}$$

□

6. Appendix and remarks

本节我们给出引理 5 的一个简短证明，该引理用于证明 $b_2(C) = \frac{n}{n-1}$，其中 $C = [0,1]^n$。我们感谢 Eli Putterman 提供这个巧妙的证明。随后，我们解释为什么单纯形是唯一一个不可弱可分解的 n-多面体，这意味着定理 6 可视为定理 8 的推论。

当 L 是一条线段时，我们用 $|L|$ 表示它的长度。

引理 5。设 A、B 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个凸体。设 $\pi_i(D)$ 为 D 在坐标轴 $\mathbb{R}e_i (i = 1,2)$ 上的正交投影。那么 $V_2(A,B) \leq \frac{1}{2}(|\pi_1(A)||\pi_2(B)| + |\pi_2(A)||\pi_1(B)|)$。

证明。设 $L_1(A) := \pi_1(A)$，且 $L_2(A) := \pi_2(A)$ 分别为 A 在 $\mathbb{R}e_1$ 和 $\mathbb{R}e_2$ 上的投影。同样，记 $L_i(B)$ 为 B 在 $\mathbb{R}e_i$, $i = 1,2$ 上的投影。

注意，$A \subset R_A := L_1(A) + L_2(A)$，同理，$B \subset R_B := L_1(B) + L_2(B)$。由混合体积的单调性可知，$V_2(A,B) \leq V_2(R_A, R_B)$。

由于 R_A 和 R_B 是矩形，混合体积 $V_2(R_A, R_B)$很容易计算：

$$\begin{aligned} V_2(R_A, R_B) &= V_2(L_1(A) + L_2(A), L_1(B) + L_2(B)) = V_2(L_1(A), L_2(B)) + V_2(L_2(A), L_1(B)) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\pi_1(A)||\pi_2(B)| + |\pi_2(A)||\pi_1(B)|\right). \end{aligned}$$

□

引理 6. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个满维多胞体。那么，除非 P 是一个 n-单纯形，否则 P 是弱可分解的。

证明. 设 P是一个至少有 $n+2$ 个顶点的多面体。那么存在一个面 F，使得至少有两个顶点（记为 x 和 y）位于 F之外。不失一般性，可设 x 和 y相邻，即 $[x,y]$是 P的一条棱。令 u_1为 F的外法向量。假设 P总共有N个面，且 $P = \cap_{j=1}^N H^-(u_j, h_j)$，这里回顾一下记号：$H^-(u,b) = \{x : \langle x, u\rangle \leq b\}$。

回顾一下，对于任意 $t > 0$，多面体 $P_{1,t}$由 $P_{1,t} = H^-(u_1, h_1 + t) \cap \left(\bigcap_{j>1} H^-(u_j, h_j)\right)$定义，并且对于足够小的 t, $P_{1,t}$ 与 P具有相同的外法向量，此外其支撑向量由下式给出：$h_{P_{1,t}}(u_j) = h_j + t\delta_{1,j}$, $j \leq N$。

因此 $V(P[n-1], P_{1,t}) = V(P) + \frac{t}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(P^{u_1}) = V(P) + \frac{t}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(F)$。若（反设）$P_{1,t}$与 P 位似，则存在 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $P_{1,t} = x + \lambda P$，且（必然）$\lambda = V(P[n-1], P_{1,t})/V(P) = 1 + \frac{t}{n}\mathrm{Vol}_{n-1}(F)$ $\mathrm{Vol}_n(P) > 1$（其中 $\lambda > 1$若 $t > 0$）。

当顶点 $v \in F$ 移动到附近的顶点 $v_t \in F_t = P_{1\,t}^{u_1}$ 时，由$P_{1,\ t}$ 的定义可知，顶点 x 和 y 不会移动：它们也是 $P_{1,\ t}$的顶点。此外，棱 $[x,y]$ 可以被某个仿射超平面与 F 分隔开：记 H^+ 为该超平面所界定的半空间，其中 $[x,y]$ 属于该半空间。那么对于任意 $t>0$，都有 $P \cap H^+ = P_{1,\ t} \cap H^+$。特别地，$[x,y]$ 也是$P_{i,\ t}$的一条棱。

但如果 $P_{i,\ t}$ 与 P位似，那么 P的每条棱 e 都对应 $P_{1,\ t}$的一条棱 e_t，其长度应为 $|e_t| = \lambda|e| > |e|$。然而，$[x_t, y_t] = [x,y]$ 与 $[x,y]$的长度相同。

反过来，我们来证明 Δ 不是弱可分解的（其中 Δ 是一个 n-单纯形）。设$K \in \mathcal{K}_0^n$ 满足 $S_{K+\Delta} << S_\Delta$。由于总有 $S_K << S_{K+\Delta}$，我们可推出 $supp(S_K) \subset supp(S_\Delta) =: \{u_1, ..., u_{n+1}\}$；特别地，$supp(S_K)$ 是有限的，且 K是一个多面体。由于 K有界，$supp(S_K)$ 至少有 $n+1$个元素：因此 $supp(S_K) = supp(\Delta)$，这意味着 K是一个单纯形，其外法向单位向量与 Δ相同，故 K 和 Δ 位似。□

6.1. 关于立方体和 l_2-球的注记。在命题 5 中，我们证明了 $b_2(C) = \frac{n}{n-1}$，其中 $C = [0,1]^n$ 是单位立方体。由于 $b(C) = n = \max_K b(K)$，人们可能会想知道 C 对于 b_2是否也达到最大值，但 l_1-球给出了一个反例（见引理3及其后的例子）。于是人们可能会进一步问：$b_2(C)$ 是否对于 $K \in \mathcal{Z}_0^n$达到最大值，其中 $\mathcal{Z}_0^n$ 表示 n维拟圆锥体的类（圆锥体 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 是线段之和，而拟圆锥体是圆锥体的极限，关于豪斯多夫收敛[8]，如果 $\mathcal{Z}^n \subset \mathcal{K}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的拟圆锥体类，则记作 $\mathcal{Z}_0^n = \mathcal{Z}^n \cap \mathcal{K}_0^n$）。

一些作者（见 [FMMZ]）最近一直在研究与 b_2相关的仿射不变量。具体而言，定义 $b_{\mathcal{Z}}(K) = \sup_{(A,B)\ V\ \overset{V}{A}(A,B,K[n-2])V(K),K[n-1])V(B,K[n-1]),\ \text{其中上确界取遍}} b_2(C)$拟圆锥体的有序对（或等价地，取遍有序对 $(A,B) \in (\mathcal{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n)^2$）。注意，$b_{\mathcal{Z}}(K) \le b_2(K)$。

命题 5 的计算表明 $b_2(C) = b_{\mathcal{Z}}(C)$，但尚不清楚对于任意 K 是否必然如此，即使将范围限制为 $K \in \mathcal{Z}_0^n$。例如，考虑 $K = B_2^n$，即欧几里得球。容易验证（应用 (12)、(13) 和多线性）可得 $b_{\mathcal{Z}}(B_2^n) = \frac{n}{n-1}\frac{\kappa_n\kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2} = \frac{W_{n-2}}{W_{n-1}}$（因此特别有 $b_{\mathcal{Z}}(B_2^n) < \frac{n}{n-1} = b_{\mathcal{Z}}(C)$），其中 $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)^n d\theta$。

我们注意到[AFO，定理1。2] 表明 $b_2(B_2^n) = b_{\mathcal{Z}}(B_2^n)$，但是否取等似乎尚不清楚。更一般地，对于所有 $b_2(K) = b_{\mathcal{Z}}(K)$ 是否成立（甚至对所有 $K \in \mathcal{Z}_0^n$，（或者甚至对所有$K \in \mathcal{K}_0^n$）），尚不清楚。

根据 [FMMZ，定理 3。9]，最大值$\max_{K \in \mathcal{Z}_0^n} b_{\mathcal{Z}}(K) = \frac{n}{n-1}$ 等价于

$$\frac{\mathrm{Vol}_{n-2}(\partial(\pi_{u^\perp}K))}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_{u^\perp}K)} \le \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial K)}{\mathrm{Vol}_n(K)}, \quad \text{for all } K \in \mathcal{Z}_0^n \text{ and all } u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

对于某些 $K \in \mathcal{K}_0^n$，上述不等式并不成立（参见[FGM] 中[命题 3。1] 之后讨论的等号情形），但在拟圆锥体这一受限类中可能成立。

References

[Al1] A. D. Aleksandrov, *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung* （俄文，德文摘要）《数学文集》，*zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper* 3(45)，1，（1938），第27–46页。[Al2] A. D. Aleksandrov, *A.D. Alexandrov, Selected works. Part I. Selected scientific papers*。P. S. V. Naidu 从俄文翻译。Yu. G. Reshetnyak 和 S. S. Kutateladze 编校并撰写序言。苏联数学经典，第4卷。Gordon and Breach 出版社，阿姆斯特丹，1996年。x+322 页 [AFO] S. Artstein-Avidan, D. Florentin, Y. Ostrover *Remarks about mixed discriminants and volumes*，《当代数学通信》，16（2014），第2期，1350031。[Ba] K. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality* 2 44 1991 2, 。《伦敦数学学会杂志》（） 351 359 （），第–期。

[8]换言之：$\mathcal{Z}^n$ 是包含所有线段且在 Minkowski 加法下封闭的 $\mathcal{K}^n$ 最小（拓扑）闭子类

[B] D. N. Bernstein, *The number of roots of a system of equations*, 《泛函分析及其应用》9（2），（1975）183–185。[D] V.I, Diskant, *Bounds for the discrepancy between convex bodies in terms of the isoperimetric difference*（俄文）。《西伯利亚数学杂志》（1972）。[EKh] A. Esterov, A. Khovanskii, *Elimination theory and Newton polytopes*, 《泛函分析及其他数学》，（2），（2008），第45–71页。[Fen] W. Fenchel, *Généralisation du théorème de Brunn et Minkowski concernant les corps convexes*（法文）。载于：《巴黎科学院院报》。203（1936），第764–766页。[F] W. Fulton, *intersection Theory*，第2版，施普林格，1998年。[FGM] M. Fradelizi, A. Giannopoulos, M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*, 《以色列数学杂志》135（2003），157–179。[FMMZ] M. Fradelizi, M. Madiman, M. Meyer, and A. Zvavitch, *On the volume of the Minkowski sum of zonoids.*，预印本，2022年。[Ga] R. J. Gardner, *The Brunn–Minkowski inequality*, 《美国数学会通报》39（2002），355–405。[Kh] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedra and the genus of complete intersections*, 《泛函分析及其应用》12（1978），第38–46页。[Khov] A. G. Khovanskii, *Newton polyhedron, Hilbert polynomial, and sums of finite sets*, 《泛函分析及其应用》26（1992），第276–281页。[Ku] A. G. Kushnirenko, *Newton polyhedra and Bezout's theorem*（俄文）《泛函分析及其应用》10, 第3期，（1976）82–83。[Kus76] A. G. Kushnirenko, *Polyedres de Newton et nombres de Milnor.*, 《数学发明》32(1): 1–31，1976年。[Las] M. Lassak, *Approximation of convex bodies by inscribed simplices of maximum volume.*，《代数与几何通讯》52（2011），第2期，389–394。[Mink] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*，第二卷。B.G. Teubner，1911年。[Sa] Saroglou, *On the equivalence between two problems of asymmetry on convex bodies*, 《离散与计算几何》54（2015），第3期，573–585。[SSZ1] Saroglou, I. Soprunov, and A. Zvavitch, *Characterization of simplices via the Bezout inequality for mixed volumes* 144 2016 12, 5333 5340 ，《美国数学会会刊》，（），第–期。[SSZ2] Saroglou, I. Soprunov, and A. Zvavitch, *Wulff shapes and a characterization of simplices via a Bezout type inequality* 357 2019 106789 ，《数学进展》，（），。[Sch] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*。第2版，扩充版。《数学及其应用百科全书》第151卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[SZ] I. Soprunov, A. Zvavitch, *Bezout Inequality for Mixed volumes*, 《国际数学研究通知》2016年，第23期，7230–7252页。[S] M. Szusterman, *A New Excluding Condition Towards the Soprunov-Zvavitch Conjecture on Bezout-type inequalities* ，已投稿。[Wu] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystal lflächen*, 《晶体学杂志》34（1901），449–530。[Xi] Jian Xiao, *Bézout type inequality in convex geometry*, 《国际数学研究通知》，IMRN, 16, （2019），4950–4965。

(Maud Szusterman) Department of Mathematics, Universite Paris Cité, France*Email address*: maud.szusterman@imj-prg.fr