arXiv:2304.00370v1 [math.LO] 1 Apr 2023

真理的普遍性质

Mateusz Łełyk, Bartosz Wcisło

2023年4月4日

1 引言

数理逻辑（尤其是基础）中的许多论证都会以某种形式重要地使用真谓词。例如，若要证明某个理论在其扩张中是一致的，通常会先为一类公式定义一个真谓词，然后通过归纳证明：该类中每个可由较弱理论证明的句子都为真。同样，若要推出一个无限理论是有限公理化的，通常会用到可定义的真谓词。最后但同样重要的是，某种语言 $\mathcal{L}$ 的真谓词的存在，常被用来证明给定的 $\mathcal{L}$ 理论模型是 $\mathcal{L}$-递归饱和的。

概括而言，本文研究这类论证中对真谓词的使用是否不可或缺。更具体地说，我们关注模型论性质，并探讨对于给定性质 P，可定义真谓词的存在是否是要一致地施加该性质的必要条件。最清楚的例子之一是施加递归饱和性这一性质：一个非常基本的事实是，每个具有部分归纳非标准满足类（即针对某种非标准复杂度的所有公式的满足谓词，并且满足完全归纳）的非标准模型 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术，都递归饱和（ [9] 中给出了一个非常简单的溢出论证）。由于部分归纳非标准满足类的理论是可公理化的，我们得到一个理论的例子，称为 UTB，它施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性。一般而言，若任意非标准模型 U 的 $\mathcal{L}$ 约化都是递归饱和的，我们就称理论 U 施加 $\mathcal{L}$-递归饱和性。颇令人惊讶的是，在此背景下，可以在一种良好的意义上说，对 UTB 真谓词的使用不可或缺。更准确地说，我们有以下由 Roman Kossak 提出的定理 [12,定理 2.4]:

定理 1. 假设 U 是一个语言为 $\mathcal{L}$ 的理论，该语言扩展了皮亚诺算术，并证明所有带 $\mathcal{L}$公式的归纳模式实例。如果 U 施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$递归饱和性，那么每个 $\mathcal{M} \models U$ 中都存在一个可定义的部分满足类。

因此，Kossak 定理表明，对于一类合理的理论，拥有可定义的满足谓词是施加递归饱和性的必要条件。

另一个似乎与真这一概念的可定义性更直接相关的性质是强制初等等价。考虑弱真理理论 TB^-：它是在 PA 中加入所有形如 $T(\ulcorner\phi\urcorner) \equiv \phi$（其中 T 是一个新谓词）的公理后得到的。于是，TB^- 具有以下性质：只要 $\mathcal{M} \models \mathrm{TB}^-$、$\mathcal{N} \models \mathrm{TB}^-$，且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子模型，那么 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 就满足相同的$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$句子。这可以抽象为一般理论的一种性质：若一个理论 U 满足如下条件，我们就说它强制 $\mathcal{L}$-初等等价：只要 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N} \models U$ 和 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，那么 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$

就满足相同的 $\mathcal{L}$-句子。于是，我们可以问：对于一个（足够强的）理论 U 来说，要强制 $\mathcal{L}$-初等等价，是否必须存在一个可定义的真谓词来表示 $\mathcal{L}$-句子？结果表明，TB^- 确实是确保这一性质所必不可少的（定理17，第 3 点）。

当我们开始探究这个主要问题时，很快就会遇到一些由特定自然真理论在皮亚诺算术之上施加的语义性质，而这些性质并不依赖于相应的真谓词。然而，对于与真相关的概念，似乎存在一些相当自然的候选公理化理论，能够给出这类概念的精确刻画。可定义性就是这类现象的一个例子：每当 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是 UTB^-（不含归纳的、一致塔斯基双条件句理论）的模型，且$\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$的子模型时，它们具有相同的算术可定义元素。这也可以定义为一种理论的抽象性质。然而，要使这一性质成立，我们并不一定需要真谓词。尽管如此，我们可以引入可定义性的公理化理论 DEF^-，它确实对应于这一语义性质。因此，我们可以将最初的问题扩展如下：给定一种与真相关的语义性质，寻找一种在确保该性质成立时不可或缺的公理化理论。

正如我们已经提到的，施加可定义性一般不足以定义一个满足 UTB^- 的谓词。事实上，这可以改述为：在 DEF^- 中无法定义一个满足 UTB^- 的谓词（同时保持语言的算术部分不变）。因此，自然会产生这样的问题：探讨对应于类真语义性质的理论之间的可定义性关系。

我们分析的可定义性概念有多种形式：可以考虑带参数或不带参数的情形。同样，我们可以要求一个理论在每个模型中都定义另一个理论，并且允许使用不同的公式；也可以要求这种可定义性在理论中一致地成立。最后，我们还可以要求模型之间的可定义性是不一致的，但其复杂度具有一致的界限。这些区别适用于我们上面讨论的两类问题：我们可以考察对应于某种语义性质的理论的各种可定义性概念，也可以分析这些理论之间的不同归约。

最后，有时所分析问题的答案取决于基础理论。类似地，选择适当的基础理论也可能大大简化论证。一般而言，我们将尝试在任意序列理论的通用框架中开展工作，但在某些情况下，如果对基础理论接受一些额外的自然假设，我们就能得到更清晰的图景或更优雅的证明（特别是，我们可以选择 PA）。这为我们的研究增添了另一个维度。

本文的结构安排如下。第2节将介绍所有相关概念，包括在任意序列理论的一般背景下讨论的真理公理理论（TB）、可定义性（DEF）和满足（USB 或 UTB）。本文首次引入理论 DEF。此外，我们还将给出理论之间两种可定义关系的定义，分别称为句法可定义性和语义可定义性。最后，我们将介绍一般理论的抽象模型论性质，并用这些性质刻画语义概念的公理化理论。每种性质都分为一致和非一致两种变体。

在第3节中，我们将每一种公理化理论与恰当的模型论概念相配对：我们证明，就句法可定义性而言，真理公理理论、可定义性和满足可以分别通过施加初等等价、保持可定义性和施加初等性这些概念来刻画（定理17）。这些定理以 {v1} 的意义，为这些公理化理论提供了无坐标刻画，

这些公理化理论。在定理 22 和定理 24 中，我们证明上述刻画对于语义可定义性以及模型论性质的非一致对应概念同样成立。

第 4 节探讨了各种语义概念公理化理论之间的可定义性关系。这些结果也可以看作是对先前已知的真理公理理论与满足公理理论之间不可定义性结果的推广（见 [4,推论 3.8] 和 [21, 定理 5.9]）。我们证明，在任何序列基理论之上，满足都不能由真来定义（定理 27）。这解决了 [21] 中的问题 5.10。随后，我们将可定义性公理理论（DEF）纳入这一图景：我们证明，除了一些退化情形外[1]，，该理论严格位于 TB 与 USB 之间（定理 27 和定理 33）。我们证明，每一种分离（DEF 与 TB 之间，以及 USB 与 DEF 之间）都严格成立：每个（非退化）序列理论都有一个模型，该模型可以扩充为 TB（分别为 DEF）的模型，并且在扩充后的模型中，DEF（分别为 USB）不可定义。对于 TB 与 DEF 的情形，证明采用了一种模型构造，使可定义性层级不会塌缩。该构造对任何（非退化）序列理论都一致适用 U；据我们所知，这是序列理论模型论中的一项原创结果（引理 32）。由此可推论，除非 U 是退化的，否则 DEF 模掉 U 后不具有受限公理化。类似的论证表明，对于每个序列 U，TB 模掉 U 后都不具有受限公理化，这解决了 [21, 《开放问题 5.7》] 中提出的一个问题。最后两个小节研究上述理论与两种斯科伦函数公理化理论（一致和非一致；第 4.1 小节）之间的可定义性关系，以及以 PA 为基础理论的特殊情形（第 4.2 小节）。在前一种情形中，我们利用 Kaye-Kossak 式结果（来自 [10], [11] 和 [8]），这些结果涉及皮亚诺算术片段的模型；借此构造出 USB 的模型，其中不存在针对算术公式的可定义见证选取函数（定理 45 和定理 46）。在后一种情形中，我们证明，关于 PA 模型的各种结构性结果，为 TB、DEF 和 USB 提供了更简单且更强的（第 4.2.1 小节）可分离性论证。

在第 5 节中，我们研究施加递归饱和这一性质，以及 Kossak 定理（定理 1）可能的加强形式。通过一种递归论论证（其中涉及对 A 的构造进行算术化，该构造生成一个与跳跃反演定理交织在一起的 ω-通用集合），我们证明存在一种有限语言理论，它施加递归饱和，却不能句法定义 UTB（定理 73）。据我们所知，这是首个能语义定义 UTB、却不能句法定义 UTB 的有限语言理论。其次，我们证明 Kossak 定理确实可以推广到不具有完全归纳的理论（但扩展皮亚诺算术）：我们证明，每个扩展皮亚诺算术、语言可数的序列理论，只要施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和，便能语义定义 UTB，其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$（定理 63）。[2] 这一证明与 Kossak 原本的论证大不相同，并采用了 [2] 所体现思路的迭代省略类型定理。作为推论，我们定义了一个理论 RSAT，它在如下意义上对于施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和具有普遍性：一个 U 语言可数且扩展皮亚诺算术的序列理论，施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和，当且仅当它 U 语义定义 RSAT。

第6节列出了一些开放问题。其中大多数与皮亚诺算术片段的模型论中的某些问题，或与有限公理化理论中的可解释性和可定义性有关。

[1]我们将那些大致来说与外延邻接集合理论不相容的序列理论示例归类为“退化”示例。[2]在 UTB 中，我们不假定适用于含有满足谓词的公式的归纳模式。

2 预备知识

2.1 模型论性质

对于一般的一阶理论，算术 $\Sigma_n \setminus \Pi_n$ 层级未必有多大意义。下文将采用量词交替深度层级；该层级在 [1] 中引入，并在 [22]中用于类似的语境。

定义 2（量词交替深度）。设 $\mathcal{L}$ 是任意一阶语言，并令 AT 表示 $\mathcal{L}$ 的原子公式集合。$\Sigma^*_n(\mathcal{L})$ 和 $\Pi^*_n(\mathcal{L})$ 通过如下同步归纳定义（下文中，以及在上下文清楚时，我们省略对 $\mathcal{L}$ 的引用）：

$$\begin{aligned}
\Sigma^*_0 = \Pi^*_0 &:= \emptyset \\
\Sigma^*_{n+1} &:= \mathrm{AT} \mid \exists v \Sigma^*_{n+1} \mid \Sigma^*_{n+1} \wedge \Sigma^*_{n+1} \mid \Sigma^*_{n+1} \vee \Sigma^*_{n+1} \mid \neg \Pi^*_{n+1} \mid \forall v \Pi^*_n \mid \\
\Pi^*_{n+1} &:= \mathrm{AT} \mid \forall v \Pi^*_{n+1} \mid \Pi^*_{n+1} \wedge \Pi^*_{n+1} \mid \Pi^*_{n+1} \vee \Pi^*_{n+1} \mid \neg \Sigma^*_{n+1} \mid \exists v \Sigma^*_n \mid \\
\Delta^*_{n+1} &:= \Sigma^*_{n+1} \cap \Pi^*_{n+1}
\end{aligned}$$

对于公式 ϕ，$\Sigma^*(\phi)$（$\Pi^*(\phi)$ $\Delta^*(\phi)$）表示 ϕ 的 Σ^*_n (Π^*_n, Δ^*_n) 复杂度。

我们还需要两个更精细的公式复杂度度量。第一个称为深度（dp），第二个称为纯深度（pdp）。简而言之，ϕ 的深度是 ϕ 的句法树中某一分支上逻辑联结词和量词的最大数量。ϕ 的纯深度是 ϕ 的句法树中某一分支的最大长度，其中 ϕ 中出现的项会展开。形式化地，我们递归定义 dp 和 pdp：

$$\begin{aligned}
\mathrm{dp}(\phi) &= 0, \text{ if } \phi \in \mathrm{AT} \\
\mathrm{dp}(\neg\phi) &= \mathrm{dp}(\exists x \phi) = \mathrm{dp}(\forall x \phi) = \mathrm{dp}(\phi) + 1 \\
\mathrm{dp}(\phi \wedge \psi) &= \mathrm{dp}(\phi \vee \psi) = \max\{\mathrm{dp}(\phi), \mathrm{dp}(\psi)\} + 1
\end{aligned}$$

纯深度首先针对项定义：若 t 是常元或变量，则 $\mathrm{pdp}(t) = 0$；若 $\mathrm{pdp}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \max\{\mathrm{pdp}(t_1) \ldots, \mathrm{pdp}(t_n)\} + 1.$。随后，$\mathrm{pdp}(\phi)$ 定义为 $\mathrm{dp}(\phi)$，但原子公式的情况除外，此时规定 $\mathrm{pdp}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \max\{\mathrm{pdp}(t_1) \ldots, \mathrm{pdp}(t_n)\}$。

本文只考虑一阶语言。若 $\mathcal{M}$ 是语言 $\mathcal{L}$ 的任意模型，则 $\mathcal{L}_A$ 表示用命名 A 中每个元素的常元对 $\mathcal{L}$ 作扩张。若 U 是任意一阶理论，则 $\mathcal{L}_U$ 表示其语言。若 $\mathcal{M}$ 是任意模型且 $\mathcal{L}$ 是任意语言，则 $\mathcal{M}{\restriction_{\mathcal{L}}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{L}$-约化。

定义 3. 设 $\mathcal{L}$ 为任意语言。

1. n-Diag($\mathcal{M}$) 表示在 $\mathcal{M}$ 中为真的 $\Sigma^*_n(\mathcal{L}_M)$ 句子集合。我们令 ElDiag($\mathcal{M}$) $= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n$-Diag($\mathcal{M}$)。我们将 $\mathcal{M} \preceq_n \mathcal{N}$ 作为 n-Diag($\mathcal{M}$) $\subseteq n$-Diag($\mathcal{N}$) 的缩写，并将 $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ 用作 ElDiag($\mathcal{M}$) $\subseteq$ ElDiag($\mathcal{N}$) 的缩写。2. n-Th($\mathcal{M}$) 表示在 $\mathcal{M}$ 中为真的 $\Sigma^*_n(\mathcal{L})$ 集合。我们令 $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n$-Th($\mathcal{M}$)。我们将 $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$ 作为 n-Th($\mathcal{M}$) $= n$-Th($\mathcal{N}$) 的缩写，并将 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ 用作 $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ 的缩写。3. n-Def($\mathcal{M}$) 表示 $\mathcal{M}$ 中可定义的 $\Sigma^*_n(\mathcal{L})$ 元素集合。我们令 Def($\mathcal{M}$) $= \bigcup_n n$-Def($\mathcal{M}$)。4. n-DEF($\mathcal{M}$) 表示集合 $\{\langle \theta(x)\ a\rangle \mid \mathcal{M} \models \theta(a) \wedge \exists! x \theta(x)\}$。我们令 DEF($\mathcal{M}$) $= \bigcup_n n$-DEF($\mathcal{M}$)。

定义4。 令 U 为任意理论， $\mathcal{L}$ 为任意语言。

1. 我们称 U 施加 $\mathcal{L}$-初等性 （$\mathcal{L}$-初等等价），如果对每个 $\mathcal{M} \models U$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对所有 $\mathcal{N} \models U$,

$$\mathcal{M} \preceq_n \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}} \preceq \mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}} \qquad (\mathrm{E}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}})$$

$$(\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}}). \qquad (\mathrm{EE}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}})$$

2. 我们称 U 一致地施加 $\mathcal{L}$-初等性 （$\mathcal{L}$-初等等价），如果存在一个 n，使得对每个 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N} \models U$，($\mathrm{E}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}}$,) 成立（分别地，($\mathrm{EE}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}}$,) 成立）。

3. 我们称 U 施加等号于 $\mathcal{L}$-可定义对象 （保留 $\mathcal{L}$-可定义性），如果对每个$\mathcal{M} \models U$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对每个 $\mathcal{N} \models U$

$$n\text{-Def}(\mathcal{M}) = n\text{-Def}(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathrm{Def}(\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}) = \mathrm{Def}(\mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}}). \qquad (\mathrm{ED}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}})$$

$$\big(n\text{-DEF}(\mathcal{M}) = n\text{-DEF}(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathrm{DEF}(\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}) = \mathrm{DEF}(\mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}})\big) \qquad (\mathrm{PD}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}})$$

4. 我们称 U一致地施加等号于 $\mathcal{L}$-可定义对象 （保留 $\mathcal{L}$-可定义性），如果存在一个 n，使得对每个 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N} \models U$，($\mathrm{ED}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}}$,) 成立（分别地，($\mathrm{PD}_n^{\mathcal{M},\mathcal{N}}$,) 成立）。

5. 我们称 U 施加递归 $\mathcal{L}$-饱和性，如果对每个 $\mathcal{M} \models U$， $\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}$ 都是递归饱和的。

2.2 可定义性的各种层次

下文中，翻译和解释的定义取自 [22]。我们使用 $K\colon\ U \lhd V$ 来表示这样一个事实： K 是 V中的 U 的相对解释。 id_U表示恒等解释 $U \lhd U$；如果上下文已经清楚，我们就省略对 U 的引用。设 Θ_0、 Θ_1 是两个签名， $\mathcal{L}$ 是一种语言。我们称翻译$\tau\colon\ \Theta_0 \to \Theta_1$ 是 $\mathcal{L}$-保守的，如果对于每个公式 $\phi \in \mathcal{L}$， $\phi^\tau = \phi$；并且我们称 τ 是直接的，如果它是一维的、非相对化的，并且将恒等翻译为恒等。

定义5。 我们称 U 在 $\mathcal{L}$、 $V \leq_{\mathcal{L}} U$模下句法定义 V，如果 U 通过直接的、无参数且 $\mathcal{L}$-保守的解释解释 V。

我们称U在 $\mathcal{L}$、$V \leq^m_{\mathcal{L}} U$模下语义定义 V，如果对于每个 $\mathcal{M} \models U$，ElDiag($\mathcal{M}$)都在 $\mathcal{L}_M$模下句法定义 V。

我们称 U 语义无参数定义 V 模 $\mathcal{L}$，如果 U 的每个相容且完备的扩张都句法定义 V，模 $\mathcal{L}$。

本文中的所有可定义性结果都考虑这样一种情形：被定义的模 $\mathcal{L}$ 理论是在一种语言中表述的，该语言扩展了 $\mathcal{L}$，并带有一个（一元或二元）谓词 R。在这种语境下，很容易看出，U 句法定义 V模 $\mathcal{L}$，当且仅当存在一个公式 $\phi_R(\bar{x}) \in \mathcal{L}_U$，使得对于 V 的每个 Φ-公理，

$$U \vdash \Phi[\phi_R(\bar{t})/R(\bar{t})],$$

其中， $\Phi[\phi_R(\bar{t})/R(\bar{t})]$ 表示将 $\phi_R(\bar{t})$代入 $R(\bar{t})$的每一次出现所得的结果；为避免不必要的变量捕获，也可以先重命名 $\phi_R(\bar{t})$中的有界变量。

注释6。 很容易看出，如果U在句法上定义V，那么U就在语义上定义V；当V是有限的时，反之亦然。然而，在一般情形下， U可能在语义上定义V，却不能在句法上定义。在这种情况下，对于U的每个模型$\mathcal{M}$，都可以为$\mathcal{L}_V$中的谓词定义解释，使$\mathcal{M}$成为V的模型，但不存在一个适用于所有模型的固定解释。本文在语义概念的公理化理论领域中给出了许多这一现象的例子。

2.3 语义概念的公理化理论

真（满足、可定义性等）的公理化理论分为两部分：基础理论，以及一些针对真这一概念的特定公理。一个重要限制是，句法必须由基础理论唯一编码。对于本文研究的最基本的真理论，只需相当温和的句法理论便足以使其成立：如 [21], 所示，对于能够解释后继基本理论的理论，真理论便有意义；而满足理论则在沃特理论之上有意义。我们将从一个更强的假设出发，即基础理论是序列理论；这已经涵盖了广泛的重要一阶理论。

2.3.1 序列理论

如果一种理论允许定义一种性质良好的有限序列概念，那么它就是序列理论。更准确地说：序列理论必须证明空序列存在，并且任何序列s都可以通过在末尾附加宇宙中的某个给定元素来扩展s。下面给出形式化定义：

定义 7（附加集，序列性）。理论 AS 以含有一个二元关系符号$\in$的语言表述，其公理为

AS1 $\exists x \forall y \big(y \notin x\big)$.

AS2 $\forall x \forall y \exists z \forall w \big(w \in z \equiv w \in x \vee w = y\big)$.

如果存在 AS 在理论 U 中的直接解释，那么理论 U 称为序列的。在此解释下$\in$的翻译记作$\in_U$。如果模型 $\mathcal{M}$ 的初等图 ElDiag($\mathcal{M}$) 是序列的，则称模型 $\mathcal{M}$ 是序列的。我们用 $\in_{\mathcal{M}}$ 代替 $\in_{\mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})}$。如果 $\mathcal{M}$ 是序列的且 $c \in M$，那么 $c^{\mathcal{M}}$表示集合 $\{a \in M \mid \mathcal{M} \models a \in_{\mathcal{M}} c\}$。

为便于后续讨论，我们还引入带外延性的附加集理论 ASE。它是 AS 的一个扩张，增加了公理 $\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y\big)$。

本文将只讨论通过无参数解释直接解释 AS 的序列理论。关于加入参数的问题，我们留待进一步研究。

让我们回顾一些重要的序列理论：PA 表示皮亚诺算术，我们将其视为用有序环语言$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$表述。I$\Sigma_n$ 表示 PA 的一个片段，其中归纳公理仅适用于 Σ_n 形式的公式（按照标准定义， Σ_0 (Δ_0)由所有量词均有界的公式组成），而 BΣ_n 则在 IΔ_0 的基础上加入针对Σ_n 公式的收集公理。为方便起见，我们用 EA 表示语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 中的理论；该理论扩展了$I\Delta_0$，并加入了断言指数函数是全函数的公理 exp。关于这些理论的全部细节和基本事实，可参见 [9] 和 [6]。最后， S^1_2 是 Buss弱算术，研究 P时间可计算性（详情请参见 [6, 第五章 V.4.b，定义4.4]）。

序列性的概念已有大量讨论，例如见 [22]。对于当前项目而言，序列理论最重要的两个特征概述于以下两个事实中（事实 8 和事实10）。

事实 8. 如果 U 是顺序理论，那么 U 可以通过一维无参数解释相对解释 S_2^1 （但允许重新定义等号）。

要了解这是如何实现的，请注意，在 AS 中可以先解释 ASE（通过引入新的恒等关系，将具有相同元素的集合合并起来）。然后，在这一解释中，可以用标准方式定义冯·诺伊曼序数。通过将论域限制为乘法和加法表现良好的那些序数，可以得到对罗宾逊算术 Q 的相对解释。Q 解释 S_2^1 这一事实众所周知（例如参见 [5]）。

约定 9. 我们使用以下缩写：

- 我们假定对所考虑的语言采用固定的哥德尔编码。对于固定公式ϕ，$\ulcorner\phi\urcorner$ 表示 ϕ的哥德尔编码。
- $\underline{n}$ 表示命名 n的二进制数字，即以下表达式：

$$\underline{a_0} + \underline{2} \cdot (\underline{a_1} + \underline{2} \cdot (\underline{a_2} + \ldots (\underline{a_{k-1}} + \underline{2} \cdot \underline{a_k}) \ldots)),$$

  其中 $a_i \in \{0,1\}$、$\underline{0} = 0$、$\underline{1} = 1$ 和 $\underline{2} =$ $(1+1)$ 以及 $(a_i)_{i \leq k}$ 是n的二进制展开。

- 在本文中，当我们在一个序列理论 U 中工作，且有一个固定的解释 N 来解释 S_2^1 时，E 始终表示这样一个可定义等价关系：它被 N 用于从算术签名中翻译恒等关系。对于任意 $n \in \omega$，我们用 $n(x)$ 表示公式 $x = \underline{n}$ 的 N-翻译。需要强调的是，在一般序列理论的语境中，应根据上下文将 $\phi(\underline{n})$ 理解为 $\exists x\big(n(x) \wedge \phi(x)\big)$，其中 $n(x)$ 是表示“为第 n 个序数”这一性质的谓词。还需强调的是，$n(x)$ 未必定义任何特定对象，尽管它唯一确定一个 E-等价类。结合这一约定与前述约定，$\underline{\ulcorner\phi\urcorner}$ 表示一个对应于公式 ϕ 的哥德尔编码的谓词。

- 类似地，在序列理论 U 与 N：$S_2^1 \lhd U$ 的语境中，我们将使用诸如序关系（$<$）、“x 是语言 $\mathcal{L}$ 的一个句子”（$\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$）、“$x$ 是语言 $\mathcal{L}$ 的一个公式”（$\mathrm{Form}_{\mathcal{L}}$）、“$x$ 是纯一阶逻辑中 y 的一个证明”（$\mathrm{Proof}(x,y)$）、“x 的 Σ_n^* 复杂度”（$x = \Sigma_n^*(\phi)$）、“α 是一个赋值”（$\alpha \in \mathrm{Asn}$）等算术谓词；这里所指的是它们向语言 $\mathcal{L}_U$ 的 N-翻译。我们还假设，这些谓词对 N 论域中的元素均有唯一适用对象。

- 为兼顾精确性与可读性，我们经常使用 $\ulcorner\cdot\urcorner$（扩展上文引入的记号）来缩写句法操作。例如，若 ϕ 被理解为一个句子，那么 $\ulcorner\exists x\phi\urcorner$ 表示先在 ϕ 前加上存在量词，再加上变量 x的结果。对于二进制数字的代换，我们使用点记号：$\ulcorner\phi(\dot{x}/v)\urcorner$ 表示在 ϕ中用命名 x 的二进制数字替换变量 v 所得的结果。需要强调的是，我们经常将$\ulcorner\phi(\dot{x}/v)\urcorner$ 视为关于三个变量 x、v 和 ϕ 的函数；若上下文清楚，我们便省略对 v 的说明。

事实10。若 U 是一个序列理论，那么对于每个 n，都存在一个公式 满足$_n(x,\ y)$，它在 U 中可证地满足塔斯基组合条款：对于复杂度为 Δ_n^* 且纯深度属于某个 U-可证割 J的公式。

更精确地说，对于有限语言 $\mathcal{L}$ 中的固定序列理论 U，$\mathrm{CS}^-(\mathcal{L})(\phi)$ 表示 $\mathcal{L}\cup S$ 的如下公式，其中 S 是一个新的二元谓词（初始析取中的 $\bigvee_{R\in\mathcal{L}}$ 和 $\bigvee_{f\in\mathcal{L}}$ 分别遍历 $\mathcal{L}$ 中所有关系符号和所有函数符号（我们将常元视为零元函数符号）：

$$\begin{aligned}\forall\alpha\in\mathrm{Asn}\big[S(\phi,\alpha)\equiv\big[&\bigvee_{R\in\mathcal{L}}\exists v_0,\dots,v_n\big(\phi=\ulcorner R(v_0,\dots,v_n)\urcorner\wedge R(\alpha(v_0),\dots,\alpha(v_n)\big)\\
&\vee\bigvee_{f\in\mathcal{L}}\exists v_0,\dots,v_n\big(\phi=\ulcorner v_0=f(v_1,\dots,v_n)\urcorner\wedge\alpha(v_0)=f(\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n))\big)\\
&\vee\exists\phi_0,\phi_1\big(\phi=\ulcorner\phi_0\wedge\phi_1\urcorner\wedge(S(\phi_0,\alpha)\wedge S(\phi_1,\alpha))\big)\\
&\vee\exists\phi_0,\phi_1\big(\phi=\ulcorner\phi_0\vee\phi_1\urcorner\wedge(S(\phi_0,\alpha)\vee S(\phi_1,\alpha))\big)\\
&\vee\exists\phi_0\big(\phi=\ulcorner\neg\phi_0\urcorner\wedge\neg S(\phi_0,\alpha)\big)\\
&\vee\exists\phi_0\exists v_0\big(\phi=\ulcorner\forall v_0\urcorner\wedge\forall\beta\big(\beta\sim_{v_0}\alpha\to S(\phi_0,\beta)\big)\\
&\vee\exists\phi_0\exists v_0\big(\phi=\ulcorner\exists v_0\urcorner\wedge\exists\beta\big(\beta\sim_{v_0}\alpha\wedge S(\phi_0,\beta)\big)\big]\big].\end{aligned}$$

[22][第 2] 节的结果表明，对于每个 n，都存在一个 U 可证的切 J_n 和一个公式 $\mathrm{Sat}_n(x,y)$，使得

$$U\vdash\forall\phi\big(J_n(\mathrm{pdp}(\phi))\wedge\Delta_n^*(\phi)\to\mathrm{CS}^-(\mathcal{L})(\phi^{te})[\mathrm{Sat}_n(x,y)/S(x,y)]\big),$$

其中 ϕ^{te} 是与 ϕ 等价的典范公式，在该公式中，项符号在上下文 $y=f(x)$ 中各自唯一出现，其中 y 和 x 是变量。下文中，$\mathrm{SAT}_n^{x\,y}[\psi]$，表示公式

$$\forall\phi\big(J_n(\mathrm{pdp}(\phi))\wedge\Delta_n^*(\phi)\to\mathrm{CS}^-(\mathcal{L})(\phi^{te})[\psi(x,y)/S(x,y)]\big)$$

注意，如果 ψ 含有除 x 和 y之外的其他自由变量，$\mathrm{SAT}_n^{x\,y}[\psi]$，可能含有自由变量。最后这个定义将编码集的概念从皮亚诺算术片段的语境推广到了任意序列理论。

定义 11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个序列模型，且 $K\colon S_2^1\lhd$初等图$(\mathcal{M})$。我们称集合 $A\subseteq\omega$ 在 $\mathcal{M}$ 中是 可编码的，如果存在某个 $c\in M$，使得对每个 $n\in\omega$，$\mathcal{M}\models\exists x\big(n(x)\wedge x\in_{\mathcal{M}}c\big)$ 当且仅当 $n\in A$。

2.3.2 真、满足、可定义性

本节的背景中有一个序列理论 U，以及指定的一维无参数解释 $K\colon S_2^1\lhd U$。我们假设 U 的语言是递归可枚举的，并且公式编码由该解释给出。因此，$\ulcorner\phi\urcorner$ 表示编码 ϕ 的自然数，而 $\underline{\ulcorner\phi\urcorner}$ 是选取与 $\ulcorner\phi\urcorner$ 对应的 E-等价类的谓词：

真 $\mathrm{TB}_K(\mathcal{L})$ 通过加入以下形式的所有公理扩展 U

$$T(\underline{\ulcorner\phi\urcorner})\equiv\phi,$$

其中 ϕ 是一个 $\mathcal{L}$-句子，而 T 是一个新的 一元谓词。

可定义性 $\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L})$通过以下形式的所有公理扩展 U：

$$\forall y\big(D(\underline{\ulcorner\phi(x)\urcorner}, y) \equiv \exists! x\phi(x) \wedge \phi(y)\big),$$

对于 $\phi \in \mathcal{L}$ 和 D——一个新的二元谓词。

满足 $\mathrm{USB}_K(\mathcal{L})$ 通过以下形式的所有公理扩展 U

$$\forall x\big(S(\underline{\ulcorner\phi\urcorner}, x) \equiv \phi(x)\big),$$

其中 ϕ 是一个 $\mathcal{L}$公式， S 是一个新的二元谓词。

注 12。 在 TB_K、DEF_K 和 USB_K 中，对 U 的引用隐藏在解释K之中：与 [22] 一样，我们将解释理论和被解释理论都视为指定该解释所需的数据的一部分。

注 13。 对于序列理论，USB_K 与以下理论 $\mathrm{USB}_K^{<\infty}$ 可互相定义；后者通过以下形式的所有公理扩展 U：

$$\forall\alpha\big(\mathrm{Asn}(\phi,\alpha) \to S(\underline{\ulcorner\phi\urcorner}, \alpha) \equiv \phi[\alpha]\big),$$

其中 $\mathrm{Asn}(\phi,\alpha)$ 表示 α 是 ϕ 的一个赋值，而 $\phi[\alpha]$ 表示一个公式

$$\exists x_1,\ldots,x_n\big(\bigwedge_{i\le n}\alpha(v_i) = x_i \wedge \phi[x_1/v_1,\ldots,x_n/v_n]\big),$$

其中 v_0、……、v_n 是 ϕ 的所有自由变量。

此外，如果 $\mathcal{L}$ 扩展了算术语言并且 $K = id$，那么 $\mathrm{USB}_K(\mathcal{L})$ 在模 $\mathcal{L}$ 意义下与理论 $\mathrm{UTB}_K(\mathcal{L})$ 彼此句法可定义；后者通过加入所有形如 $\forall x\big(T(\ulcorner\phi(\dot{x})\urcorner) \equiv \phi(x)\big)$ 的公理扩展了 U，其中 $\phi(x) \in \mathcal{L}$。

注释 14. 真理理论 TB 和 UTB 已在相关文献中得到研究，主要是在皮亚诺算术 PA 的语境下。对于这类基础理论，TB 和 UTB 通常分别表示 TB_{id} 和 UTB_{id} 的扩展，其中归纳模式扩展到 $\mathcal{L}_{\mathrm{TB}}$ 的所有公式（例如参见 [7]）。仅以 T 双条件句为基础的理论通常称为 TB^{-}(UTB^{-}) 或 $\mathrm{TB}\restriction$ ($\mathrm{UTB}\restriction$)。

注15。 本文在三种不同语境中使用“可定义性”一词。首先，给定一个模型 $\mathcal{M}$，元素 $a \in M$ 或子集 $A \subseteq M$ 可以在 $\mathcal{M}$ 中可定义。在这些语境中，“可定义性”具有基础模型论中所熟知的标准含义。其次，一个理论 U 可以在另一个理论 V 中语法上或语义上可定义。为确保精确性，我们始终讨论理论（而非模型），并明确指出可定义性是语义上的还是语法上的。第三，我们讨论可定义性公理化理论 DEF。

3 语义谓词的模型论刻画

很容易验证我们的目标公理化理论具有以下性质：

命题16。 设 U 是任意一个序贯 $\mathcal{L}$-理论，且 N： $S_2^1 \lhd U$。

1. 真理理论$_N$ 一致地施加 $\mathcal{L}$-初等等价。

2. DEF_N 一致地保留 $\mathcal{L}$-可定义性。

3. USB_N 一致地强制 $\mathcal{L}$-初等性。

下一个定理表明，上述每一种模型论性质都能刻画相应理论，且仅差句法可定义性。

定理17. 设 U 是有限语言中的递归可枚举序列理论，且令 $N\colon S_2^1 \lhd U$. 那么

1. 若 U 一致地强制 $\mathcal{L}$-初等性，则 U 在模 $\mathcal{L}$的意义下句法定义$\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$ 。*2.* 若 U 一致地保持 $\mathcal{L}$-可定义性，则 U 在模 $\mathcal{L}$的意义下句法定义$\mathrm{DEF}_N(\mathcal{L})$。*3.* 若 U 一致地强制 $\mathcal{L}$-初等等价，则 U 在模 $\mathcal{L}$的意义下句法定义$\mathrm{TB}_N(\mathcal{L})$。

我们先介绍一个纯粹属于模型论的引理。我们称公式$\phi(x) \in \mathcal{L}$ 是一个 $\mathcal{L}$-定义，如果存在某个公式 $\psi(x)$，使得 $\phi(x) := \psi(x) \wedge \forall y \neq x \neg\psi(y)$。

引理 18. 令 U 为任意理论。

1. 如果 $n \in \omega$ 见证了 U 一致地施加 $\mathcal{L}$-初等性，那么对于每个 $\mathcal{L}$-公式$\phi(\bar{x})$，都存在一个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$ 公式 $\theta_\phi(\bar{x})$，使得 $U \vdash \forall x\big(\theta_\phi(\bar{x}) \equiv \phi(\bar{x})\big)$ *2.* 如果 $n \in \omega$ 见证了 U 一致地保持 $\mathcal{L}$-可定义性，那么对于每个 $\mathcal{L}$-定义$\phi(x)$，都存在一个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$ 公式 $\theta_\phi(x)$，使得 $U \vdash \forall x\big(\theta_\phi(x) \equiv \phi(x)\big)$ *3.* 如果 $n \in \omega$ 见证了 U 一致地施加 $\mathcal{L}$-初等等价，那么对于每个$\mathcal{L}$-句子 ϕ，都存在一个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$-句子 θ_ϕ，使得 $U \vdash \theta_\phi \equiv \phi$.

证明。 我们说明关于 $\mathcal{L}$-初等性的论证，其余情形类似。固定U、 n和 $\phi(x)$（不失一般性，我们可以假设 ϕ只有一个自由变量）。如果 $\phi(x)$与 U不相容，那么我们知道该怎么做。否则，令 $\mathcal{M} \models U$使得对于某些 a、 $\mathcal{M} \models \phi(a)$。由于 n见证了 U施加 $\mathcal{L}$-初等性，因此

$$U + n\text{-Diag}(\mathcal{M}) \vdash \phi(a).$$

因此，存在一个带参数 a、 $b \in M$ 的 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$ 句子 $\theta''_\phi(a,b) \in n\text{-Diag}(\mathcal{M})$，使得（我们假设 a 和 b 不相交）

$$U \vdash \theta''_\phi(a,\bar{b}) \to \phi(a).$$

我们可以放心地假设 a、 b不属于 U的语言。由此，对于$\theta'_\phi(x) := \exists \bar{y}\theta''_\phi(x,\bar{y})$，我们有

$$U \vdash \forall x\big(\theta'_\phi(x) \to \phi(x)\big).$$

令 $A := \{\psi(x) \in \Sigma_n^*(\mathcal{L}_U) \mid U \vdash \forall x(\psi(x) \to \phi(x))\}$。我们断言，对于某些$\psi_0$、 ...、 $\psi_k \in A$，有

$$U \vdash \phi(x) \to \bigvee_{i \leq k} \psi_i(x).$$

假设并非如此。那么 $U + \phi(b) + \{\neg\psi(b) \mid \psi(x) \in A\}$ 相容（b 是一个新常数）。令 $\mathcal{M}$ 为该理论的任意一个模型。我们断言， $U + n\text{-Diag}(\mathcal{M}) + \neg\phi(b)$ 也相容。事实上，若不然，则存在某个 $\theta(x,\bar{y})$，使得 $\theta(b,\bar{c}) \in n\text{-Diag}(\mathcal{M})$

$$U \vdash \forall x\big(\exists \bar{y}\theta(x,\bar{y}) \to \phi(x)\big).$$

然而，此时 $\exists \bar{y}\theta(x,\bar{y}) \in A$，因此 $\mathcal{M} \models \neg\exists\bar{y}\theta(b,\bar{y})$。这与$\theta(b,\bar{c}) \in n$-Diag($\mathcal{M}$) 这一事实矛盾。因此，$U + n$-Diag($\mathcal{M}$) $+ \neg\phi(b)$ 相容，这又与 U 一致地施加 $\mathcal{L}$-初等性这一事实矛盾。□

定理*17*的证明。 与上面的引理类似，我们着眼于 USB_N。定义如下函数 σ： $\mathrm{Form}_{\mathcal{L}} \to \mathrm{Proof}_U$:[3]

$$\sigma(\phi(x)) = \min\{p \mid \exists\theta(x) \in \Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)\mathrm{Proof}_U\big(p, \ulcorner\forall x\big(\theta(x) \equiv \phi(x)\big)\urcorner\big)\}.$$

上文中，$\mathrm{Proof}_U(x,y)$ 是 U 的规范 Σ_1-可证性谓词。引理 18 表明，该函数是全函数且可递归。对于公式 $\phi(x) \in \mathcal{L}$，令$\theta_\phi(x)$ 为唯一的 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$-公式，使得 $\sigma(\phi(x))$ 是 $\forall x\big(\theta_\phi(x) \equiv \phi(x)$ 的证明$\big)$.该映射 $\phi \mapsto \theta_\phi$ 显然是全函数且可递归，我们令 $\rho(x,y)$ 为在 U 中强表示此函数的公式。显然，我们可以假设 U 证明了$\rho(x,y)$ 是一个偏函数。正如我们在事实10中讨论过的，存在 N 的一个割 J 和一个满足谓词 $\mathrm{Sat}_n(s,x)$，使得 U 证明 $\mathrm{Sat}_n(s,x)$ 对所有赋值（按 N 的意义） s 以及来自 J 的所有 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$ 公式都满足组合子句。令:

$$S_U(x,y) := \mathrm{Form}_{\mathcal{L}}(x) \wedge \exists z\big(\rho(x,z) \wedge \mathrm{Sat}_n(z,y)\big).$$

在 U 中，我们证明对于每个 $\phi(v) \in \mathcal{L}$

$$U \vdash \forall x\big(S_U(\underline{\ulcorner\phi(v)\urcorner}, x) \equiv \phi(x)\big).$$

固定 $\phi(v)$，并令 $\rho(\ulcorner\phi(v)\urcorner) = \ulcorner\theta(v)\urcorner$。在 U中，注意到对于任意 a，以下等价关系成立

$$\begin{aligned} S_U(\ulcorner\phi(v)\urcorner, a) &\iff \exists z\big(\rho(\underline{\ulcorner\phi(v)\urcorner}, z) \wedge \mathrm{Sat}_n(z,a)\big) \\ &\iff \mathrm{Sat}_n(\underline{\ulcorner\theta_\phi(v)\urcorner}, a) \\ &\iff \theta_\phi(a) \\ &\iff \phi(a) \end{aligned}$$

第一个等价关系由定义、 $\phi(v)$是一个 $\mathcal{L}$公式这一事实，以及公式哥德尔编码集合的可表示性推出。第二个等价关系由 ρ的可表示性得到。第三个等价关系依据 [22]中恰当版本的“‘正在下雪’——‘正在下雪’”引理成立。最后一个等价关系成立，是因为在U中， $\phi(v)$ 等价于 $\theta_\phi(v)$。□

注释19。 Albert Visser 在证明 [21, 定理3.11]时首次使用了最后这个论证。

命题20。 存在一个理论 $U \supseteq$ 皮亚诺算术，其语言可数，一致施加算术初等性，但不能在模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$意义下语义定义真理理论$_{id}$。

证明。 我们定义 U。除了皮亚诺算术的公理之外，对于每个公式 $\phi(x)$， U 都有一个二元谓词 $S_{\phi(x)}$ 和一条公理

$$\forall y\big(S_{\phi(x)}(\underline{\ulcorner\phi(x)\urcorner}, y) \equiv \phi(y)\big).$$

[3]证明$_U$ 表示由 U的公理所推出的证明的哥德尔编码集合。

要看出 U 在语义上并不定义真理理论$_{id}$，首先注意到，每个 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术的模型都可以扩展为 U 的一个模型，在其中，对每个 ϕ而言， S_ϕ 都是无需参数即可算术可定义的。事实上，固定 $\mathcal{M}$ 和 ϕ（x） $\in \mathcal{L}$，可以令 $S^{\mathcal{M}}_{\phi(x)} = \{\langle \ulcorner \phi$（$x$）$\urcorner$， $a\rangle \mid a \in M \wedge \mathcal{M} \models \phi$（$a$）$\}$。因此，如果从标准模型 $\mathbb{N} \models$ 皮亚诺算术出发，并令 $\mathbb{N}^*$ 为上述将 $\mathbb{N}$ 扩展为 U的模型所得的扩展，那么在$\mathbb{N}^*$中就不可能存在真理理论$_{id}$ 的定义。 □

现在我们转向语义可定义性。下面这个概念会很有用 :

定义 21. 设 $\mathcal{M}$ 是语言 $\mathcal{L}$ 的序列模型，且 N: $S^1_2 \lhd$初等图($\mathcal{M}$)。我们称一个 $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-理论 V可在 $\mathcal{M}$ 关于 N中表示（简写为 在($\mathcal{M}, N$)中可表示），且由公式 $\theta(x, y)$ 表示，当且仅当对于每个 $\mathcal{L}$-公式 $\phi(v)$ 以及每个 a

$$\phi(a) \in V \iff \mathcal{M} \models \theta(\underline{\ulcorner \phi \urcorner}, a).$$

若 V可在 $\mathcal{M}$ 中由 θ表示，则我们定义

$$\mathrm{Proof}_\theta(y, x, z) := \exists \psi \big(\theta(\psi, z) \wedge \mathrm{Proof}_\emptyset(y, \ulcorner \psi \to x \urcorner)\big).$$

我们回顾一下，Proof$_\emptyset(y, x)$ 是标准可判定谓词（的 N-翻译），它强表示关系“y 是纯一阶逻辑中 x 的一个证明”。直观地说，Proof$_\theta(y, x, z)$ 表示 y是 x的一个证明，其中可以使用任意公式$\phi(x)$ 作为公理，只要 $\phi(z) \in V$，其中 V是由 θ表示的理论。

定理 22. 如果 U 是一种序贯的、有限语言中的递归可枚举理论，它施加初等等价（保持 $\mathcal{L}$-可定义性），并且 N: $S^1_2 \lhd U$，那么 U 无参数语义定义真理理论$_N$(DEF$_N$)，模 $\mathcal{L}$。

证明。 我们证明 DEF$_N$ 的情形，TB$_N$ 的证明完全类似。假设 U 保持 $\mathcal{L}$-可定义性，并固定 $\mathcal{M}$ 和一个合适的 n。那么 $U + n$-Diag($\mathcal{M}$) 一致地保持 $\mathcal{L}$-可定义性。因此，根据引理 18，对于每个 $\mathcal{L}$-定义 $\phi(x)$，都存在一个 $\Sigma^*_n(\mathcal{L}_{\mathcal{M}})$-公式 $\theta_\phi(x, b)$，使得

$$U + n\text{-Diag}(\mathcal{M}) \vdash \forall x(\theta_\phi(x, b) \equiv \phi(x)),$$

因此，对于每个 ϕ，都存在公式 $\psi(b) \in n$-Diag($\mathcal{M}$) $\chi \in U$，使得

$$\emptyset \vdash \forall y(\chi \wedge \psi(y) \to \forall x(\theta_\phi(x, y) \equiv \phi(x))).$$

注意，得益于部分满足谓词的存在， n-Diag($\mathcal{M}$) $\cup U$ 在 ($\mathcal{M}, N$) 中是（无参数）可表示的。令 ζ 为表示公式。对于任意公式 ϕ，令 $\phi^d(x) := \phi(x) \wedge \forall y \neq x\, \phi(y)$。我们在 $\mathcal{M}$ 中写出定义 $D_{\mathcal{M}}(\phi, a)$:

$$\exists \theta(x, y) \exists p \exists b \big[\mathrm{Sat}^*_n(\theta, \langle a, b\rangle) \wedge \forall y \neq a \neg \mathrm{Sat}^*_n(\theta, \langle y, b\rangle) \wedge \mathrm{Proof}_\zeta(p, \ulcorner \forall x(\theta(x, y) \equiv \phi^d(x))\urcorner, b) \wedge \\ \wedge \forall p' < p \forall \theta' < p \big(\theta' \in \Sigma^*_n(\mathcal{L}_U) \to \forall b \neg \mathrm{Proof}_\zeta(p', \ulcorner \forall x(\theta'(x, y) \equiv \phi^d(x))\urcorner, b)\big)\big].$$

我们证明， $D_{\mathcal{M}}(x, y)$ 在 $\mathcal{M}$ 中定义了 DEF$_N$。固定 $\phi(x)$，并固定具有以下性质的最短证明 p
存在 $b \in M$、 $\chi \in U$ 和 $\psi(y)$ $\theta(x$、 $y) \in \Sigma^*_n(\mathcal{L}_U)$，使得 $M \models \psi(b)$，并且有 Proof$_\emptyset(p$, $\ulcorner \forall y(\chi \wedge \psi(y) \to \forall x(\theta(x, y) \equiv \phi^d(x)))\urcorner)$。

p 由自然数的良基性良好定义。令 $\ulcorner p \urcorner$ 表示 p 的哥德尔编码。根据定义

$$\mathcal{M} \models \exists b \exists \theta \in \Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)\mathrm{Proof}_\zeta(\underline{\ulcorner p \urcorner}, \ulcorner \forall x(\theta(x,y) \equiv \phi^d(x)) \urcorner, b) \wedge$$
$$\wedge \forall p' < \underline{\ulcorner p \urcorner} \forall \theta' < \underline{\ulcorner p \urcorner}\big(\theta' \in \Sigma_n^*(\mathcal{L}_U) \to \forall b \neg \mathrm{Proof}_\zeta(p', \ulcorner \forall x(\theta'(x,y) \equiv \phi^d(x)) \urcorner, b)\big).$$

此外，$\underline{\ulcorner p \urcorner} \in M$ 是 E等价关系下唯一满足上述条件的 $\mathcal{M}$ 论域中的元素。现在假设 $\mathcal{M} \models D_{\mathcal{M}}(\underline{\ulcorner \phi \urcorner}, a)$。那么显然，存在某个$b$和标准的 $\theta \in \Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$，使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{Sat}_n^*(\theta, \langle a, b\rangle) \wedge \forall y \neq a \neg \mathrm{Sat}_n^*(\theta, \langle y, b\rangle)$。此外，对于相同的 b，$\theta, U + n\text{-Diag}(\mathcal{M}) \vdash \forall x(\theta(x,b) \equiv \phi^d(x))$，因此在 $\mathcal{M}$中，$\phi(x)$定义了 a。现在假设 $\phi(x)$在 $\mathcal{M}$中定义了 a 。那么显然，$\phi^d(x)$定义了 a。任取 b 和 θ，使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{Proof}_\zeta(\ulcorner p \urcorner, \ulcorner \forall x(\theta(x,y) \equiv \phi^d(x)) \urcorner, b)$。根据定义，并且由于 p和 $\theta(x,y)$都是标准的，可得 $\mathcal{M} \models \forall x(\theta(x,b) \equiv \phi^d(x)$。因此，$\theta(x,b)$在 $\mathcal{M}$ 中定义了a，而 $D_{\mathcal{M}}(\underline{\ulcorner \phi \urcorner}, a)$则由$\mathrm{Sat}_n$的"'It's snowing'-It's snowing"引理推出。 □

下面的引理给出了在序列模型中 USB_N可定义的判据。它将用于刻画满足谓词的语义可定义性，并在下一节中区分满足与真以及可定义性。

引理 23. 设 $\mathcal{M}$ 是某个有限语言 $\mathcal{L}'$ 上的序列理论的一个模型，且 $N :\!S_2^1 \lhd$初等图$(\mathcal{M})$。那么，$\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$ 在模 $\mathcal{L}$ 的意义下，在初等图$(\mathcal{M})$ 中句法可定义，当且仅当存在某个$(\mathcal{M}, N)$-可表示的序列 $\mathcal{L}'_{\mathcal{M}}$-理论 V，它与初等图$(\mathcal{M})$相容，并且 $V \vdash$ 初等图$(\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}})$。

证明。 假设 $\mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})$ 通过公式 $S'(\bar{x})$ 定义 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$，并设 n 是 S'的复杂度。令 V 为理论 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})[S'/S] + n\text{-Diag}(\mathcal{M})$。由于部分满足谓词的存在，该理论在 $(\mathcal{M}, N)$ 中可表示。因此显然，对于每个 $\phi(x) \in \mathcal{L}$ 以及所有 $a \in M$，我们都有

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \phi(a) &\iff \mathcal{M} \models S'(\underline{\ulcorner \phi(x) \urcorner}, a)\\ &\iff S'(\underline{\ulcorner \phi(x) \urcorner}, a) \in n\text{-Diag}(\mathcal{M})\\ &\iff V \vdash \phi(a).\end{aligned}$$

现在假设 $V \vdash \mathrm{ElDiag}(\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}})$。由此，再结合 V的一致性以及 $\mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})$的完备性可知，对于每个 $\phi(a) \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$，$\phi(a) \in \mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})$ 当且仅当存在$\psi(x) \in \mathcal{L}'$，使得 $\psi(a) \in V$并且

$$\emptyset \vdash \psi(x) \to \phi(x).$$

令 θ 表示 V在 $\mathcal{M}$中的情形。现在，我们可以将 $S_{\mathcal{M}}(x,c)$ 定义为

$$\exists y\big(\mathrm{Proof}_\theta(y,x,c) \wedge \forall z\big(z < y \to \neg \mathrm{Proof}_\theta(z,x,c)\big)\big)$$

我们按照标准的罗瑟式论证思路，检查这个定义是否成立。固定 $\phi(v) \in \mathcal{L}$ 和任意一个 $a \in M$。首先假设 $\phi(a)$ 在 $\mathcal{M}$中成立。如上所述，对于某个 $\mathcal{L}'$-公式 $\psi(v)$，有 $\psi(a) \in V$

$$\emptyset \vdash \psi(v) \to \phi(v).$$

令 $l \in \omega$ 对这个证明进行编码。显然，$\mathcal{M} \models \mathrm{Proof}_\theta(\underline{l}, \ulcorner \phi(v) \urcorner, a)$。我们断言，不存在 $l' < l$，也不存在满足 $\mathcal{M} \models \mathrm{Sat}_n^*(\xi, a)$ 的 ξ，使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{Proof}_\theta(\underline{l'}, \ulcorner \xi \to \overline{\neg \phi(v)} \urcorner, a)$。事实上，若情况如此，那么 ξ 将是一个标准公式。由于 $\mathcal{M} \models V$，我们

就会有 $\mathcal{M} \models \xi(a)$。然而，显然 $\xi(a) \to \neg\phi(a)$ 在 $\mathcal{M}$ 中也为真。这与 $\phi(a)$ 在 $\mathcal{M}$ 中为真相矛盾。现在假设 $\neg\phi(a)$ 在 $\mathcal{M}$ 中成立。那么，按照前面的推理，我们有某个 $l \in \omega$，使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{Proof}_\theta(l, \ulcorner\neg\phi(v)\urcorner, a)$，并且对所有 $l' < l$，都有 $\mathcal{M} \models \neg\underline{\mathrm{Proof}_\theta(l', \ulcorner\phi(v)\urcorner}, a)$。因此，

$$\mathcal{M} \models \forall y\big(\mathrm{Proof}_\theta(y, (\underline{\ulcorner\phi(v)\urcorner}, c) \to \exists z\big(z < y \wedge \mathrm{Proof}_\theta(z, (\underline{\ulcorner\neg\phi(v)\urcorner}, c)\big).$$

因此 $\mathcal{M} \models \neg S_{\mathcal{M}}(\underline{\ulcorner\phi\urcorner}, a)$。 □

下面的定理是定理17（针对 USB）的一个语义变体。我们强调，这两个定理都不能直接推出另一个。

定理 24. 如果 U 是一个有限语言 $\mathcal{L}'$ 中的递归可枚举序列理论，并且它施加了 $\mathcal{L}$-初等性，那么对于每个解释 $N\colon S_2^1 \lhd U$， U 在模 $\mathcal{L}$ 的意义下语义定义 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$。

证明。 固定 U, N，并令 $\mathcal{M} \models U$。由于 U 施加了 $\mathcal{L}$-初等性，存在一个 n，使得$U + n$-Diag($\mathcal{M}$) $\vdash$ ElDiag($\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}$)。由于 U 是递归可枚举的序列理论，且使用有限语言，因此 U +n-Diag($\mathcal{M}$) 在 ($\mathcal{M}, N$) 中可表示。因此，根据引理 23， $\mathcal{M}$ 定义 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$。 □

4 真理公理理论之间的可定义性、可定义性与满足

现在，我们转而讨论所研究的语义概念理论之间的可定义性关系。若对于某个公式 $\phi(x)$，有 $U \vdash \exists!x\phi(x)$，则称 U 具有一个可定义元素。

命题 25。 对于每个序列理论 U和解释 N： $S_2^1 \lhd U$，真理理论$_N \leq_{\mathcal{L}_U} \mathrm{USB}_N$且 DEF $_N \leq_{\mathcal{L}_U} \mathrm{USB}_N$。此外，如果 U具有一个可定义元素，那么 真理理论$_N \leq_{\mathcal{L}_U} \mathrm{DEF}_N$。

证明。 真理理论$_N \leq_{\mathcal{L}_U} \mathrm{USB}_N$ 的可定义性是显然的。此外，显然

$$D(\phi(x), y) := \exists!z S(\phi(x), z) \wedge S(\phi(x), y)$$

这证明了 DEF_N在 USB_N中的可定义性。对于剩下的情况，设 $\theta(x)$ 是一个 U-可证明的定义。那么，公式

$$T(\phi) := \exists y D(\ulcorner\theta(x) \wedge \phi\urcorner, y),$$

这证明了真理理论$_N$在 DEF_N中的可定义性。在上述内容中，$\ulcorner\theta(x) \wedge \phi\urcorner$表示（$S_2^1$-表示的）具有一个自由变量 ϕ 的函数；该函数以一个句子 ϕ （的哥德尔编码）为输入，返回句子 $\theta(x) \wedge \phi$ （的哥德尔编码）。然而，该函数不必能在 U 中被证明是全定义的；但对于每个标准句子 ϕ，该函数的值都存在，而这就是证明真理理论$_N$可定义性所需的一切。 □

一般来说，DEF_N 并不句法定义 TB_N 模 U。这是基于以下简单观察：

命题 26. 如果 U 有一个模型，其中没有任何元素是无参数可定义的，那么 DEF_N就不会语义上定义 真理理论$_N$ 模 $\mathcal{L}_U$。

证明。 如果 $\mathcal{M} \models U$ 没有无参数可定义元素，那么 DEF_N 可通过无参数公式 $\phi(x, y)$: $= x \neq x \wedge y \neq y$在 $\mathcal{M}$ 中定义。显然，根据针对 Th($\mathcal{M}$)的塔斯基不可定义性定理，TB_N 不能在 $\mathcal{M}$中无参数可定义。 □

一个具体例子是序贯理论 AS，它有一个不含无参数可定义元素的模型。特别地，$(V_\omega, \in) \sqcup (V_\omega, \in)$ 是 AS 的一个模型，其中没有元素是可定义的（对于模型 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ 表示它们的不交并），因为每个元素都可以通过自同构移动。

接下来讨论 TB_N、USB_N 和 DEF_N之间的分离。在特定情形下，若 U 是一个与皮亚诺算术相容的算术语言理论，且 N 是恒等解释，那么 TB_N 和 USB_N 之间的分离最早由 [4]证明。下文将证明 USB_N 不能在 DEF_N 中语义定义；显然，这一结论也可推广到 TB_N 的情形。

定理 27。 设 U 是一个相容的、序贯的递归可枚举 $\mathcal{L}$-理论，且 $N\colon\ S_2^1 \lhd U$。那么，无论是$\mathrm{DEF}_N(\mathcal{L})$ 还是 $\mathrm{TB}_N(\mathcal{L})$，都不能模 $\mathcal{L}$语义定义 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$。

证明。 我们证明 $\mathrm{DEF}_N(\mathcal{L})$ 的情形；$\mathrm{TB}_N(\mathcal{L})$ 的论证类似。固定 U, N。令 $\mathcal{M} \models U$ 为任意 $\mathcal{L}$-递归饱和模型。

由递归饱和性，存在 $c \in M$，使得对于任意 $\phi(x)$ 和任意 $a \in M$

$$\mathcal{M} \models \langle \underline{\ulcorner \phi(x) \urcorner}, a\rangle \in_{\mathcal{M}} c \equiv \exists! x \phi(x) \wedge \phi(a).$$

在上文中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示由 AS 的直接解释给出的配对函数。令 $D^{\mathcal{M}} := \{\langle a, b\rangle \mid \mathcal{M} \models \langle a, b\rangle \in_{\mathcal{M}} c\}$。那么 $(\mathcal{M}, D^{\mathcal{M}}) \models \mathrm{DEF}_N(\mathcal{L})$，且 $D^{\mathcal{M}}$在 $\mathcal{M}$中可由参数定义。因而，根据塔斯基真之不可定义定理（应用于初等图$(\mathcal{M})$），在 $(\mathcal{M}, D^{\mathcal{M}})$ 中不可能有 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$ 的定义。

□

现在，我们将 DEF_N 与 TB_N区分开来。与 DEF_N 和 USB_N的情况不同，我们无法将不可定义性结果推广到所有序列理论，因为其中一些理论会使 DEF_N的行为变得平凡。

例 28. 将 ASf 定义为 AS 的一个扩张，其中加入句子“f 是一个移动每个元素的自同构”。根据命题 26 后的说明，ASf 是一致的。显然，在 ASf的每个模型 $\mathcal{M} \models$ 中，$f^{\mathcal{M}}$都是一个移动每个元素的自同构。因此，DEF_N可通过任意一个扩张可证明为空的公式 $\phi(x, y)$ 在 ASf 中句法可定义。

正如我们在命题 25 中已经指出的，如果 U 有一个可证明可定义的元素，那么 TB_N 包含于 DEF_N。我们很快将在定理 33 中看到，在相对温和的假设下，这种包含实际上是严格的。然而，如果 U 只有有限多个可证明的可定义元素，那么 DEF_N 不会超出 TB_N：

命题 29. 若对于有限多个公式 $\theta_0, \ldots, \theta_n$, U 证明 $\bigwedge_{i \le n} \exists! \theta_i(x)$，并且对于任意公式 $\phi(x)$

$$U \vdash \exists! \phi(x) \to \forall x \big(\phi(x) \to \bigvee_{i \le n} \theta_i(x)\big),$$

那么 真理理论$_N$ 句法定义 DEF_N。

证明。 固定如上所述的 $\{\theta_i\}$，并在真理理论$_N$中令

$$D(\psi(x), y) := \mathrm{Form}_U(\psi(x)) \wedge \bigvee_{i \le n} \big[T(\ulcorner \forall x(\psi(x) \equiv \theta_i(x))\urcorner) \wedge \theta_i(y)\big].$$

如上所述，与命题 25 的证明中一样，$\ulcorner \forall x(\psi(x) \equiv \theta_i(x))\urcorner$ 表示这样一个函数：给定一个带有单个自由变量的公式 $\psi(x)$（的哥德尔编码），返回句子 $\forall x(\psi(x) \equiv \theta_i$({v14)（的哥德尔编码）。

□

此外，不难确信，对每个 n，都存在一个恰好容许 n 个可定义元素的序列理论。我们将证明，若 U 是有限语言 $\mathcal{L}$ 中的序列、递归可枚举理论，且对于某个 n，它有一个模型，其中包含无限多个 Σ_n^*（$\mathcal{L}$）可定义元素，那么真理理论 TB_N 在语义上并不定义 DEF_N 模 $\mathcal{L}$。请注意，每个理论 U 若具有一个相容扩张，该扩张通过一维无参数解释直接解释 ASE，则都属于此类。

证明的思路是构造一个模型 $\mathcal{M} \models U$，使其满足 $c \in M$，并且

1. c 编码理论 $\mathcal{M}$,

2. 存在 $\mathcal{M}$ 的一个划分 $\{M_i\}_{i\in\omega}$，使得对于每个 n，都存在一个元素 $d_n \in$Def($\mathcal{M}$)，它在 $\mathcal{M}$中不是 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_{M_n})$-代数的。

这将确保对于任意 n，初等算术模型 $(\mathcal{M}, c^{\mathcal{M}})$ 都有一个与其初等扩张$\Sigma_n^*(\mathcal{L}_T)$ 初等等价的 $\mathcal{L}_T$ 初等扩张，并且该扩张在可定义元素方面与 $\mathcal{M}$ 不同。此外，ElDiag($\mathcal{M}$) 并未在句法上定义 DEF_N。在我们的构造中，我们将使用灵活公式。

定义 30。设 U 是语言 $\mathcal{L}$ 中的任意理论。公式 $\theta(x)$ 对于U 是 (n,k)-灵活的，当且仅当对于每个 $\mathcal{M} \models U$ 以及每个 $\Sigma_k^*(\mathcal{L})$ 公式 $\delta(x)$，都存在 $\mathcal{M} \preceq_n \mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{N} \models \theta(x) \equiv \delta(x)$。

以下是 [15, 定理 11，第2节3] 的一个变体。

命题 31。如果 U 是一种有限语言中的序贯递归可枚举理论，那么对于每个 n，k 都存在一个$(n,\ k)$-灵活公式，适用于 U。

证明。固定 U 和 $n, k \in \omega$。令 $\mathrm{Proof}_\theta(y,x,z)$ 为定义 21 中针对 $\theta(x,z) := \mathrm{Sat}_{n+1}(x,z) \vee U(x)$ 所定义的可证性谓词（其中 $U(x)$ 是表示 U 的公理集的任意可判定谓词，而 Sat_{n+1} 是 $\mathcal{L}_U$ 的一个部分真谓词）。令$\rho'(y,\phi,\psi)$ 为公式

$$\psi \in \Sigma_k^*(\mathcal{L}_U) \wedge \exists z \mathrm{Proof}_\theta(y, \ulcorner \neg\forall x \big(\phi \equiv \psi\big) \urcorner, z),$$

在上文中，$\ulcorner \neg\forall x \big(\phi \equiv \psi\big) \urcorner$ 表示这样一个函数（的 S_2^1-表示）：给定公式 $\phi(x)$ $\psi(x)$（两者都至多含有 x-自由变量）的（哥德尔编码），返回句子 $\neg\forall x(\phi \equiv \psi)$ 的（哥德尔编码）。最后令

$$\rho(y,\phi,\psi) := \rho'(y,\phi,\psi) \wedge \forall y' \forall \psi' \big(\langle y', \psi' \rangle < \langle y, \psi \rangle \to \neg\rho'(y', \phi, \psi')\big).$$

利用 U 对角引理，定义 $\gamma(x)$为满足以下条件的公式:

$$U \vdash \gamma(x) \equiv \exists y \exists \psi \big(\rho(y, \underline{\ulcorner \gamma \urcorner}, \psi) \wedge \mathrm{Sat}_k(\psi, x)\big).$$

现在任取 $\mathcal{M} \models U$ 和 $\psi \in \Sigma_k^*(\mathcal{L}_U)$，并以导出矛盾为目的，假设不存在使 $\forall x\big(\gamma(x) \equiv \psi(x)\big)$ 为真的 $\Sigma_n^*(\mathcal{L}_U)$-初等扩张 $\mathcal{M}$。由此可得 $U + (n+1)$-初等图($\mathcal{M}$) $\vdash \neg\forall x\big(\gamma(x) \equiv \psi(x)\big)$. 因此，对于某个 $\chi \in (n+1)$-初等图($\mathcal{M}$)

$$U \vdash \chi \to \neg\forall x\big(\gamma(x) \equiv \psi(x)\big).$$

对 $\mathcal{M}$ 中的附加参数进行存在量化后，我们可以假设 χ 属于 U 的语言。取 $\psi \in M$ 和证明 $p \in M$，使得满足 $\langle p$ 的 $\psi\rangle$ 是满足 $\mathcal{M} \models \rho'(\underline{\ulcorner p \urcorner}, \underline{\ulcorner \gamma \urcorner}, \underline{\ulcorner \psi \urcorner})$ 的最小者。根据 $\mathcal{M}$ 的良基部分中的最小数原理，这样的一对确实存在。特别是，p 见证了对于某个 $\chi' \in (n+1)$-Diag($\mathcal{M}$),

$U \vdash \chi' \to \neg\forall x(\gamma \equiv \psi)$。和之前一样，我们可以假设 χ' 不含任何参数。那么显然，$\mathcal{M} \models \rho(\ulcorner p \urcorner, \ulcorner \gamma \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)$。此外，对于任意 y 和 z，如果 $\mathcal{M} \models \rho(y, \ulcorner \gamma \urcorner, z)$，那么 y 属于与 $\ulcorner p \urcorner$ 对应的 E-等价类，而 z 属于与 $\ulcorner \psi \urcorner$ 对应的 E-等价类（见约定 9）。

由此可得 $\mathcal{M} \models \forall x\big(\gamma(x) \equiv \mathsf{Sat}^*_k(\ulcorner \psi \urcorner, x)\big)$。因此，$\mathcal{M} \models \forall x\big(\gamma(x) \equiv \psi(x)\big)$。然而，由于 $\mathcal{M} \models U + \chi', \mathcal{M} \models \neg\forall x\big(\gamma(x) \equiv \psi(x)\big)$。 □

引理 32。对于有限语言 $\mathcal{L}$ 中的每个递归可枚举序列理论 U、每个 n，$k \in \omega$，以及每个包含无限多个 $\Sigma^*_k(\mathcal{L})$可定义元素的模型 $\mathcal{M} \models U$，都存在一个 $\mathcal{N} \succeq_n \mathcal{M}$ 和一个分解 $N = \bigcup_{m\in\omega} M_m$，使得对于每个 m，$l \in \omega$，N 中都存在一个元素，该元素在 $\mathcal{N}$ 中无参数可定义，但不是 $\Sigma^*_l(\mathcal{L}_{M_m})$代数的。

证明。固定上述的 $U, \mathcal{M}$ 和 n, k。不失一般性，假设 $k < n$。我们将定义

- 一个模型链 $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\omega}$;
- 一个公式序列 $\{\theta_i(x)\}_{i\in\omega}$;
- 一个数字序列 $\{n_i\}_{i\in\omega}$。

使得

1. $n_0 = n + 1$ 并且对每个 i, $n_i < \Sigma^*(\theta_{i+1}) < n_{i+1}$，其中 $\Sigma^*(\theta)$ 表示 θ 的复杂度。

2. $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ 并且对每个 i, $\mathcal{M}_i \preceq_{n_i} \mathcal{M}_{i+1}$ 和 $\mathcal{M}_i \models U$。

3. 对于每个 i，$\mathcal{M}_{i+1}$ 都包含一个在 $\mathcal{M}_{i+1}$ 中借助 $\theta_{i+1}(x)$ 可定义、但不是（在 $\mathcal{M}_{i+1}$ 中）$\Sigma^*_{n_i}(\mathcal{L}_{M_i})$-代数的元素。

假设我们已经成功完成。令 $\mathcal{N} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i$。那么可得，对于每个 $i \in \omega$，$\mathcal{M}_i \preceq_{n_i} \mathcal{N}$。因此，以下结论成立

- $\mathcal{N} \models U$ 和 $\mathcal{M} \preceq_n \mathcal{N}$。

  若 d 在 $\mathcal{M}_{i+1}$ 中由公式 θ_{i+1} 可定义，则 •，d 可在 $\mathcal{N}$ 中借助 θ_{i+1} 可定义，并且在 $\mathcal{N}$ 中，d 不是 $\Sigma^*_{n_i}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_i})$-代数的。

现在我们说明如何构造这三个序列。对于 $n = 0$，我们对 n_0 和 $\mathcal{M}_0$ 做必要的处理，并令 $\theta_0(x)$ 为任意公式。假设我们的序列已构造至 k。我们令 θ_{k+1} 为一个（$n_k + 1, n_k + 1$）-灵活公式。令 $\mathsf{Th} := A \cup B \cup C$ 为语言 $\mathcal{L}(\mathcal{M}_k) \cup \{d\}$ 中的一个理论，其中 d 是一个新常数，而 A、B、C 定义如下:

A. $(n_k + 1)$-$\mathsf{Diag}(\mathcal{M}_k)$

B. $\{\exists^{\leq i} x\phi(x) \to \neg\phi(d) \mid \phi(x) \in \Sigma^*_{n_k}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_k}), i \in \omega\}$

C. $\exists! x\theta_{k+1}(x) \wedge \theta_{k+1}(d)$.

我们断言理论 Th 是相容的。事实上，任取 Th 的一个有限片段 K，令 $\phi_0, \ldots, \phi_m$ 为出现在 $B \cap K$ 中的所有 $\Sigma^*_{n_k}(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_k})$-公式。不失一般性，假设它们在 $\mathcal{M}_k$ 中各自仅由有限多个元素满足。选取任意一个 $\psi(x) \in \Sigma^*_k(\mathcal{L}_U)$，它在 $\mathcal{M}_k$ 中定义了一个不同于任何满足 $\bigvee_{j\leq m} \phi_j(x)$ 的元素的元素。即，$\psi(x)$ 满足

$$\mathcal{M}_k \models \exists! x\psi(x) \wedge \forall x\big(\psi(x) \to \bigwedge_{j\leq m} \neg\phi_j(x)\big).$$

这样的 ψ 存在，因为在 $\mathcal{M}$ 中有无限多个 $\Sigma_k^*(\mathcal{L}_U)$ 可定义元素，并且 $\mathcal{M} \preceq_k \mathcal{M}_k$。由 θ_{k+1} 的灵活性可知，存在 $\mathcal{N} \succeq_{n_k} \mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{N} \models U + \forall x\big(\theta_{k+1}(x) \equiv \psi(x)\big)$。根据 ψ 和 n_k 的选取，$\mathcal{N} \models \forall x\big(\psi(x) \to \bigwedge_{j\le m} \neg\phi_j(x)\big)$。因此 $\mathcal{N} \models K$，而理论 Th 确实相容。

令 $\mathcal{M}_{k+1}$ 为 Th 的任意模型。我们设定 $n_{k+1} := \Sigma^*(\theta_{k+1}) + 1$。 □

定理 33。 假设 U 是有限语言 $\mathcal{L}$, $K\colon S_2^1 \lhd U$ *and* n 中的一个序贯递归可枚举理论，并且存在一个模型 $\mathcal{M} \models U$，其中有无限多个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L})$-可定义元素。那么$\mathrm{TB}_K(\mathcal{L})$不能模 $\mathcal{L}$ 语义定义 $\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L})$，也不施加可定义对象的相等性。

证明。 固定 $U, K, n \in \omega$，并令 $\mathcal{M} \models U$ 具有无限多个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L})$-可定义元素。不失一般性，假设它是 ω-饱和的，也就是说， $\mathcal{M}$ 实现所有带有来自 $\mathcal{M}$ 的有限多个参数的类型。于是，对于每个 V， U的完备相容扩张，都存在一个 $c \in M$，它在 $\mathcal{M}$ 中编码 V（根据定义 11）。令 $\mathcal{N}$为按引理 32 所构造的 $\mathcal{M}$ 的 $\Sigma_k^*(\mathcal{L})$-初等扩张，其中 m 大于 $x \in_U y$ 的复杂度（见定义 7）。由于 m 足够大，在 $\mathcal{N}$ 中存在一个编码 $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ 的元素。因此我们可以固定 $c \in N$，使得

$$(\mathcal{N}, c) \models \mathrm{TB}_K(\mathcal{L}).$$

断言 对于所有充分大的 k，对于所有 $b \in N$，都存在一个 $\mathcal{N}' \succeq_k \mathcal{N}$，使得

1. $(\mathcal{N}', c, b) \models \mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b))$
2. $\mathcal{N}$中存在一个可定义元素，而它在 $\mathcal{N}'$中不可定义。

在证明该断言之前，我们先说明它意味着真理理论$_K$ 既不强制可定义对象（($\mathcal{L}$-)）的相等性，也不在语义上定义 DEF_K。事实上，假设该断言为真，则对每个 $b \in \mathcal{N}$， $\mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b))$ 都是一个完备且相容的理论，它在语法上定义 TB_K，并且不强制可定义对象的相等性。因此可直接得出，TB_K 不强制可定义对象的相等性。最后，如果在 $(\mathcal{N}, c)$ 中存在 DEF_K 的定义，那么对某个 $b \in N$，该定义将在 $\mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b))$ 中可证明地成立，因此 DEF_K 将在 $\mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b))$ 中句法可定义。这与 $\mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b))$ 不强制可定义对象的相等性这一事实矛盾。

固定任意一个 k，使其大于 $x \in y$ 的复杂度，以及任意的 $b \in N$。现在，为了证明该断言，我们定义一个满足条件 1 和 2 的模型 $\mathcal{N}'$。令 l 满足 $b \in \mathcal{M}_l$，其中 $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\omega}$ 是引理 32 中为 N 构造的链。现在，取 N 中的任意元素 d，它是无参数可定义的，但不是 $\Sigma_{k+1}^*(\mathcal{L}_{M_l})$-代数的。

考虑理论 Th，它是以下集合的并（我们称公式$\phi(x)$为句法定义式，当且仅当存在某个 $\phi'(x)$，使得 $\phi(x)$具有 $\phi'(x) \wedge \forall y\big(\phi'(y) \to y = x\big)$的形式）：

- 理论$((\mathcal{N}, c, b))$
- $(k+1)$-Diag$(\mathcal{N})$
- $\{\neg\psi(d) \mid \psi(x) \in \mathcal{L} \wedge \psi$ 是句法定义式$\}$

显然，Th 的任何模型都满足 1 和 2，因此只需证明 Th 是一致的。反设不然。那么对于有限多个公式 $\psi_0, \ldots, \psi_t$ 以及某个公式 $\nu(x) \in \Sigma_{k+1}^*(\mathcal{L} \cup \{c, b\})$，使得 $\nu(d) \in (k+1)$-Diag$(\mathcal{N})$，并且我们有

$$\mathrm{Th}((\mathcal{N}, c, b)) \vdash \nu(x) \to \bigvee_{j\le t} \psi_j(x).$$

由此可得，$\mathrm{Th}((\mathcal{N},c,b)) \vdash \exists^{\leq t} x\nu(x)$。然而，这是不可能的，因为 $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}((\mathcal{N},c,b))$，而且 d 在 $\mathcal{N}$ 中不是 $\Sigma^*_{k+1}(\mathcal{L}\cup\{c,b\})$-代数的。 □

推论 34. 设 U 是有限语言中的一个序贯递归可枚举理论，且 $K\colon S^1_2 \lhd U$。假设对于某个 $n\in\omega$，存在一个模型 $\mathcal{M}\models U$，其中有无限多个 $\Sigma^*_n(\mathcal{L})$-可定义元素，那么DEF_K模 U 不存在受限公理化。

证明。 固定上述 U，并假设 V是一个 Σ^*_k-受限的 $\mathcal{L}\cup\{D\}$-理论，使得

$$U+V\equiv \mathrm{DEF}_K(\mathcal{L}).$$

任取一个模型 $\mathcal{M}\models U$ 和 $n\in\omega$，使得在 $\mathcal{M}$ 中存在无限多个 $\Sigma^*_n(\mathcal{L})$-可定义元素。不失一般性，假设 $\mathcal{M}$ 是递归饱和的。因此，存在一个元素 $c\in M$，使得对于所有 $a\in M, \phi(x)\in\mathcal{L}$,

$$\mathcal{M}\models \langle\phi(x),a\rangle\in_{\mathcal{M}} c\equiv \exists! x\phi(x)\wedge\phi(a).$$

以上的 $\langle\cdot,\cdot\rangle, \in_{\mathcal{M}}$ 均表示由 AS 的直接解释给出的集合论运算。由此可得，$\mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})\vdash \mathrm{DEF}_K[\langle x,y\rangle\in c/D(x,y)]$。设 l是 $\langle x,y\rangle\in_{\mathcal{M}} z$的复杂度。根据我们的假设，可得 $U+(k+l)$-理论$((\mathcal{M},c))\vdash V[\langle x,y\rangle\in_{\mathcal{M}} c/D(x,y)]$。因此

$$U+(k+l)\text{-}\mathrm{Th}((\mathcal{M},c))\vdash \mathrm{DEF}_K[\langle x,y\rangle\in_{\mathcal{M}} c/D(x,y)].$$

令 $\mathcal{N}\succeq_{k+l}\mathcal{M}$ 为引理 32 中构造的模型。由此可得 $\mathcal{N}\models U+(k+l)\text{-}\mathrm{Th}(\mathcal{M},c)$，因此，根据我们的假设

$$\mathcal{N}\models \mathrm{DEF}_K[\langle x,y\rangle\in_{\mathcal{M}} c/D(x,y)].$$

因此，对于某个 $m\in\omega$，在 $\mathcal{N}$ 中，所有 $\mathcal{L}$-可定义元素都能用参数 c 通过 $\Sigma^*_m(\mathcal{L})$-定义。这与 $\mathcal{N}$ 的性质矛盾。 □

我们以若干关于真理理论 TB、DEF 和 USB 的语义可定义性与句法可定义性之间关系的观察，结束本节。

命题 35. 对于有限语言 $\mathcal{L}$ 和解释 $N\colon S^1_2\lhd$ 初等图$(\mathcal{M})$ 的任意序列模型 $\mathcal{M}$，如果初等图$(\mathcal{M})$ 句法定义了 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$，那么 理论$(\mathcal{M})$ 句法定义了 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$。

证明。 固定 $\mathcal{M}$、N，并设 $T'_{\mathcal{M}}(x,y,z)$ 满足：对于某个 b，$T'_{\mathcal{M}}(x,y,b)$ 在 $\mathcal{M}$ 中定义 $\mathrm{USB}_N(\mathcal{L})$。令 n 为 $T'_{\mathcal{M}}$ 的复杂度。令 $\mathrm{Sat}_n(x,y)$ 表示适用于 Δ_n 公式的部分满足谓词（如事实10及其后的讨论所述）。令 $\mathrm{Sat}'_n(\psi,z,w_0,w_1)$ 表示公式

$$\mathrm{Form}^{v_0,v_1,v_2}_{\mathcal{L}}(\psi)\wedge \mathrm{Sat}_n(\psi,[v_0\mapsto w_0, v_1\mapsto w_1, v_2\mapsto z]).$$

在上文中，$\mathrm{Form}^{v_0\ v_1\ v_2}_{\mathcal{L}}(\psi)$ 表示 ψ 是一个自由变量恰好为 v_0、v_1、v_2（v_0、v_1、v_2 为固定变量）的公式，而 $[v_0\mapsto x, v_1\mapsto y, v_2\mapsto z]$ 表示将 v_0 赋值为 x、将 v_1 赋值为 y、将 v_2 赋值为 z 的唯一赋值。现在设

$$\Theta(\phi,\psi,x,z):=\mathrm{SAT}^{w_0,w_1}_n[\mathrm{Sat}'_n(\psi,z,w_0,w_1)]\to \mathrm{Sat}_n(\psi,[v_0\mapsto\phi, v_1\mapsto x, v_2\mapsto z]).$$

请回想，$\mathrm{SAT}^{w_0\ w_1}_n[\xi]$，是一个公式，表达了 $\xi(w_0,w_1)$ 是一个 Δ^*_n-满足谓词，其中 w_0 是对应于公式的变量，而 w_1 是对应于变量

赋值的变量（如事实10之后的注释中所介绍）。因此， $\Theta(\phi,\psi,x,z)$ 的直观含义是：如果 $\psi(z,w_0,w_1)$ 是一个针对 Δ_n^* 公式的满足谓词（其中 z 被视为参数），那么根据这个满足谓词， ϕ 被 x 满足。最后，令 $T_{\mathcal{M}}(\phi,x) := \forall\psi(v_0,v_1,v_2) \in \Delta_n^*\forall z\big(J_n(\mathrm{pdp}(\psi)) \rightarrow\Theta(\phi,\psi,x,z)\big)$.

该定义的含义是：当且仅当按照所有复杂度至多为 ϕ 的复杂度的 $\Sigma_n^*(\mathcal{L})$ 真定义， ϕ 满足 x 时， ϕ 满足 x。显然， $T_{\mathcal{M}}$ 不涉及任何参数。这样的定义能够奏效，首先是因为存在可定义的满足谓词（即 $T'_{\mathcal{M}}(x,y,b)$），其次，所有满足谓词都必须在标准复杂度的公式上达成一致。我们省略初等细节。

□

推论36。 设 U 是一种有限语言中的递归可枚举序列理论，且 $N:\ S_2^1 \lhd U$。如果存在一个 n，使得对每个 $\mathcal{M} \models U$，初等图($\mathcal{M}$) 都能以复杂度为 n 的公式句法定义 USB_N，那么 U 就能句法定义 USB_N。

证明。 只需注意，命题 35 的证明中所用的公式 $T_{\mathcal{M}}$ 只依赖于 n，而不依赖于 $\mathcal{M}$。

□

注37。 在定理 64 中，我们将构造一个无限语言中的理论 $U \supseteq$ 皮亚诺算术，使得对于每个 $\mathcal{M} \models U$ 初等图($\mathcal{M}$)，它都用一个原子公式句法定义 $\mathrm{UTB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，但 U并不句法定义 $\mathrm{UTB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。类似地，在定理 73 中，我们将构造一个有限语言中的理论 V，使得在每个模型 $\mathcal{M} \models V$中，初等图($\mathcal{M}$)都能句法定义 $\mathrm{UTB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，但定义的复杂度没有一致上界，而 V并不句法定义 $\mathrm{UTB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

推论36在真理理论$_N$的语境下会彻底失效。

命题38。 如果 U是任意一个序列理论，且 $N:\ S_2^1 \lhd U$，那么就存在一个理论理论 $\supseteq U$，使得在理论的每个模型中，真理理论$_N$ 都可用一个原子公式定义，但理论 并不在 $\mathcal{L}_U$下句法定义真理理论 N。

证明。 固定 U和一个解释 N: $S_2^1 \lhd U$。考虑将 U扩张到含有两个附加谓词 $T_1(x)$、 $T_2(x)$ 的语言，并加入所有形如以下形式的句子

$$T_1(\underline{\ulcorner\phi\urcorner}) \equiv \phi \vee T_2(\underline{\ulcorner\psi\urcorner}) \equiv \psi,$$

其中 $\phi,\psi \in \mathcal{L}$。将这个理论称为 $2\mathrm{TB}_N$。注意，若 $(\mathcal{M},T_1,T_2) \models$ 2真理理论$_N$，那么

$$(\mathcal{M},T_1) \models \mathrm{TB}_N \text{ or } (\mathcal{M},T_2) \models \mathrm{TB}_N.$$

因此，只需证明 $2\mathrm{TB}_N$ 不定义 TB_N。我们将证明 $2\mathrm{TB}_N$ 不蕴含初等等价。任取 n，并令 $\mathcal{M}_1 \models U$ 为 U 的 ω-饱和模型。特别地， $\mathcal{M}_1$ 按照满足 AS 的已定义隶属谓词$\in_U$ 的含义，对 U 的每个相容且完备的扩张进行编码。假设 k 是 $x \in_U y$ 的 U-定义的复杂度。令 θ为 U 上的一个（$k+n$, 0）-灵活公式。不失一般性，假设 $\mathcal{M}_1 \models \exists x\theta(x)$。由命题 31，存在 $\mathcal{M}_2 \succeq_{k+n} \mathcal{M}_1$使得 $\mathcal{M}_2 \models \forall x\neg\theta(x)$。令 c_1、 $c_2 \in M$ 分别为 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的理论的编码。现在令

$$T_1^{\mathcal{M}_i} := \{a \in M_i \mid \mathcal{M}_i \models a \in_U c_1\}$$
$$T_2^{\mathcal{M}_i} := \{a \in M_i \mid \mathcal{M}_i \models a \in_U c_2\}$$

由此可得，$(\mathcal{M}_i, T_1^{\mathcal{M}_i}, T_2^{\mathcal{M}_i}) \models 2\mathrm{TB}_N$，并且

$$(\mathcal{M}_1, T_1^{\mathcal{M}_1}, T_2^{\mathcal{M}_1}) \preceq_n (\mathcal{M}_2, T_1^{\mathcal{M}_2}, T_2^{\mathcal{M}_2}).$$

然而 $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{M}_2)$，由此证明得以结束。 □

事实上，上述证明给出了一个更强的结论：

命题39. 若 U 是任意序列理论，且 $N\colon S_2^1 \lhd U$，则存在一个理论Th $\supseteq U$，使得其每个完全扩张都在模 $\mathcal{L}_U$ 意义下通过一个原子公式句法定义真理理论$_N$，但Th 并不在模 $\mathcal{L}_U$意义下句法定义真理理论$_N$。

下面的推论回答了Albert Visser在 [21][问题5.7]中提出的问题。

推论40. 对于每个序列理论 U 及解释 $N\colon S_2^1 \lhd U$，真理理论$_N$ 在模 U意义下没有受限公理化。

证明. 假设存在一个 n-受限理论 V，使得 $U + V \equiv$真理理论$_N$。令 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$、 $T_1^{\mathcal{M}_1}$ $T_1^{\mathcal{M}_2}$ 38 $\mathcal{M}_1$ $T_1^{\mathcal{M}_1}$ $\models$ $_N$ 按命题的证明中的方法构造。由于（， ）真理理论，因此可得（$\mathcal{M}_1$， $T_1^{\mathcal{M}_1}$） $\models V$；又由于 V是 n-受限的，因此（$\mathcal{M}_2$， $T_1^{\mathcal{M}_2}$） $\models V$。于是（$\mathcal{M}_2$， $T_1^{\mathcal{M}_2}$） $\models$真理理论$_N$，这是不可能的，因为 $\ulcorner \exists x \theta(x) \urcorner \in T_1^{\mathcal{M}_2}$，但 $\mathcal{M}_2 \models \forall x \neg\theta(x)$。

□

细心的读者或许会想，关于理论 DEF_K的一致版本，是否有什么有趣的内容可说。表述这一理论的一种方式是通过以下句子集合

$$\forall x \forall y \big(D(\ulcorner \phi(v,w) \urcorner, x, y) \equiv \exists! v \phi(v,y) \wedge \phi(x,y) \big).$$

$D(\ulcorner \phi(v,w) \urcorner, a, b)$的直观含义是， a 可通过公式 $\phi(x,b)$定义，其中 b 是一个参数。我们将此理论称为 UDEF_K

事实上，很容易看出，对于每个 U，UDEF_K 与 USB_K 彼此可定义。具体而言，USB_K 中 $D(x, y, z)$的定义类似于 DEF_K 与 USB_K的情形，而 UDEF_K 中 $S(\phi(v)\ y)$的定义由以下公式给出：

$$D(\ulcorner v = w \wedge \phi(v) \urcorner, y, y).$$

4.1 斯科伦函数

本节专门讨论斯科伦函数这一概念。我们将其单独处理，因为目前没有明确的语义性质能够刻画其可定义性。不过，值得一提的是，这一概念是经典的，而且与我们的层级十分契合。与前文一样，我们在固定的序列理论 U 上工作，其语言为 $\mathcal{L}$，而 K 是一个指定的解释 $S_2^1 \lhd U$。

斯科伦函数 $\mathrm{S}_K(\mathcal{L})$ 扩展了 U，并加入了所有形式如下的句子

$$\exists x \phi(x) \to \phi(H(\ulcorner \phi \urcorner)),$$

其中， $\phi(x)$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，带有一个自由变量； $H(x)$ 是一个新的函数符号。

一致 Skolem 函数 $\mathrm{US}_K(\mathcal{L})$ 将所有如下形式的句子加入初等算术中

$$\exists x\phi(x,y) \to \phi(H(\underline{\ulcorner\phi\urcorner},y),y),$$

其中，$\phi(x,y)$ 是一个至多含有 x 个 y-自由变量的 $\mathcal{L}$ 公式，而 $H(x,y)$ 是一个新的函数符号。

命题 41. 对于每个序列理论 U以及每个 K： $S_2^1 \lhd U$，真理理论$_K(\mathcal{L}_U)$和 $\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L}_U)$在模 $\mathcal{L}_U$ 意义下均可在 $\mathrm{S}_K(\mathcal{L}_U)$ 中句法可定义。类似地，$\mathrm{USB}_K(\mathcal{L}_U)$ 在模 $\mathcal{L}_U$ 意义下可在 $\mathrm{US}_K(\mathcal{L}_U)$ 中句法可定义。

证明。 我们讨论 $\mathrm{USB}_K(\mathcal{L}_U)$ 的情形，其余情形都非常相似。定义

$$S(\phi,x) := \underline{1}\big(H(\theta_\phi,x)\big),$$

其中 $\theta_\phi(z,x) := \big((1(z) \wedge \phi(x)) \vee (0(z) \wedge \neg\phi(x))\big)$ (回想一下，$\underline{n}(x)$ 是在一般序列理论背景下 $x = \underline{n}$ 的对应概念)。 □

现在，我们转而讨论真理论、可定义性、满足与斯科伦函数之间的分离。我们先比较真与见证函数。下面的引理是引理 32 的一个变体。需要强调的是，与前一个引理不同，它不需要额外假设存在无限多个 $\Sigma_n^*(\mathcal{L})$ 可定义元素。

引理 42. 对于有限语言中的每个递归可枚举序列理论 U、每个模型 $\mathcal{M} \models U$ 以及每个 $n \in \omega$，都存在一个模型 $\mathcal{M} \preceq_n \mathcal{N}$，使得 $N = \bigcup_{i\in\omega} M_i$，并且对于每个 l，$m \in \omega$，都存在$\theta(x) \in \mathcal{L}$，使得 $\mathcal{N} \models \exists x\theta(x)$；但对于每个 $\Sigma_l^*(\mathcal{L}_{M_m})$-可定义元素 $a \in N$，$\mathcal{N} \models \neg\theta(a)$。

证明。 策略与引理 32 的证明相同。我们构造序列 $\{\mathcal{M}_i\}$、$\{\theta_i\}$ 和 $\{n_i\}$，使其满足证明中的条件 1. 和 2.，并将条件 3. 改为以下条件

3′. for each i, $\mathcal{M}_{i+1} \models \exists x\theta_{i+1}(x)$ but for every $\Sigma_{n_i}^*(\mathcal{L}_{\mathcal{M}_i})$ definition $\phi(x)$, $\mathcal{M}_{i+1} \models \neg(\theta_{i+1}(x) \wedge \phi(x))$.

常规验证可知，按此定义的序列 $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\omega}, \mathcal{N} := \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i$ 满足该引理的结论。现在我们来说明如何构造相关序列。我们定义 $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}, n_0 = n+1$，并将 θ_0 选为任意公式。由于 U 是序列理论，存在 $k \in \omega$ 和 $\{\phi_i(x)\}_{i\in\omega}$，使得对每个 j，ϕ_j 的复杂度为 Σ_k^*，$\mathcal{M} \models \exists x\phi_j(x)$，且对任意 $i \neq j$，$\mathcal{M} \models \neg\big(\phi_i(x) \wedge \phi_j(x)\big)$（例如，$\phi_i$ 定义了对应于自然数 i的 E-等价类）。假设给定了 $\mathcal{M}_i, n_i$。我们令 $\theta_{i+1}(x)$ 为 (n_i+1,k)-灵活公式。考虑以下理论

$$\mathrm{Th} := U + (n_i+1)\text{-}\mathrm{Diag}(\mathcal{M}_i) + \{\theta_{i+1}(d)\} + \{\neg\theta_{i+1}(a) \mid a \in M_i\}.$$

我们断言 Th 是相容的。为此，固定一个有限片段 $A \subseteq \mathrm{Th}$，并假设 a_1、……、a_l都是来自 $\mathcal{M}_i$ 的元素，且 $\neg\theta(a)$ 出现在 A中。令 m 为任意一个自然数，使得对所有 $i \leq l$，都有 $\mathcal{M}_i \models \neg\phi_m(a_i)$。根据 θ_{i+1} 的灵活性，存在一个模型 $\mathcal{M}' \models U + \forall x(\theta_{i+1}(x) \equiv \phi_m(x))$，使得 $\mathcal{M}_{i+1} \preceq_{n_i+1} \mathcal{M}'$。显然，$\mathcal{M}' \models A$。现在我们令 $\mathcal{M}_{i+1}$为 Th 的任意一个模型，并设 $n_{i+1} := \Sigma^*(\theta_{i+1}) + 1$。注意，根据初等性，$\mathcal{M}_{i+1}$ 中每个$\Sigma_{n_i}^*(\mathcal{L}_{M_i})$可定义元素都属于 M_i。因此，$\exists x\theta_{i+1}(x)$的见证在 $\mathcal{M}_{i+1}$中都不是$\Sigma_{n_i}^*(\mathcal{L}_{M_i})$-可定义的。 □

定理 43. 对于有限语言中的每个递归可枚举序贯 U以及每个 $K\colon S^1_2 \lhd U$，真理理论$_K($ $\mathcal{L}_U)$在语义上不能定义 $S_K(\mathcal{L}_U)$。

证明。 任取一个 $\mathcal{M} \models U$，它是 ω-饱和的模型。设 $\mathcal{N}$是一个模型，对于等于 U中 $x \in y$ 的定义的复杂度的 n，它满足引理 42 的结论。特别地， $\mathcal{N}$是 $\mathcal{M}$的一个 n–初等扩张。由此可知， $\mathcal{N}$编码了 Th($\mathcal{N}$)。令 $c \in M$ 为这样一个编码。因此，$(\mathcal{N}, c) \models \mathrm{TB}_K[x \in_{\mathcal{N}} c/T(x)]$。我们断言，ElDiag($\mathcal{N}, c$)不能模 $\mathcal{L}_U$ 句法定义 S_K。反设成立，并令 k 为 (x, y) 中 H的定义的复杂度（采用关系形式）。进一步假设，定义中使用的所有参数都属于 M_m。那么， $H(x, y)$ 在 $\mathcal{N}$ 中是 $\Sigma^*_{k+n}(\mathcal{L}_{M_m})$-可定义的。由此可推出，每个非空的无参数可定义集 $A \subseteq N$ 都包含一个在 $\mathcal{N}$ 中 $\Sigma^*_{k+n}(\mathcal{L}_{M_m})$-可定义的见证。这与 $\mathcal{N}$ 的性质矛盾。</output>

□

命题 44. 如果 $U \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 扩展了皮亚诺算术，那么$\mathrm{DEF}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 定义了$\mathrm{S}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，而$\mathrm{USB}_{id}($ $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$在$\mathrm{US}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$下句法定义。

证明。 这基本上是因为皮亚诺算术具有可定义的斯科伦函数。我们来讨论 $\mathrm{US}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的情形。在皮亚诺算术 + $\mathrm{USB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$中，我们定义

$$H(\phi(x, v), y) = z := S(\ulcorner \phi(x, v) \wedge \forall w < x \neg\phi(w, v) \urcorner, \langle z, y\rangle).$$

□

正如接下来的两个定理所示，在上述结果中，皮亚诺算术不能被其任何有限片段替代。遗憾的是，我们并不确切知道 $\mathrm{DEF}_N(\mathcal{L})$ 在哪些序列理论之上语义上/句法定义 $\mathrm{S}_N(\mathcal{L})$。同样，我们也不知道 $\mathrm{USB}_N\mathcal{L}$ 在哪些序列理论之上语义上/句法定义 $\mathrm{US}_N(\mathcal{L})$。不过，我们可以找出一类相当自然的理论，在这类理论之上可定义性会失败。

定理 45. 对于每个 $n \in \omega$，以及每个与 $B\Sigma_n + \neg I\Sigma_n +$ 指数函数相容的 $U \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$，$\mathrm{USB}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 不能在 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$模下无参数语义定义$\mathrm{S}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

证明。 固定 U和 $n \in \omega$，并设 $\mathcal{M} \models U$可数且递归饱和。我们断言，存在一个（非空）的无参数可定义集 $A \subseteq M$，使得 A 不包含任何无参数可定义元素。反设不然。那么，由塔斯基–沃特检验，$K(\mathcal{M}) \preceq \mathcal{M}$。特别地， $K(\mathcal{M}) \models B\Sigma_n + \neg I\Sigma_n +$ 指数函数，并且 $K(\mathcal{M})$ 的每个元素在 $K(\mathcal{M})$ 中都是无参数可定义的。由于 $K(\mathcal{M})$ 没有真初等子模型，这就直接与 [13, 定理 7.4.4]矛盾。

因此，设 $A \subseteq M$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个无参数可定义子集，且不含无参数可定义元素。由于 $\mathcal{M}$ 递归饱和，经过一个简单的来回论证，对每个 $a \in A$，都存在一个能移动 a的 $\mathcal{M}$ 的自同构。令 $S :=\{\langle \ulcorner \phi(x) \urcorner, a\rangle \in \omega \times M \mid \mathcal{M} \models \phi(a)\}$ 为 $\mathcal{M}$的塔斯基满足类。由此可得 $(\mathcal{M}, S) \models \mathrm{USB}_{id}$。此外， $\mathcal{M}$ 与 $(\mathcal{M}, S)$ 的自同构群相同（因为每个同构都保留可定义集，并逐点固定 ω）。假设 $\mathrm{S}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 在 $(\mathcal{M}, S)$ 中是无参数可定义的。由此可得， A 中有一个元素在 $(\mathcal{M}, S)$ 中是无参数可定义的。然而，根据 A的选取， S 和$\mathcal{M}$中的每个元素都能被 $(\mathcal{M}, S)$ 的某个自同构移动。这就完成了证明。

□

定理 46。 对于每个 $n \in \omega$，以及每个与 $B\Sigma_n + \neg I\Sigma_n +$ 指数函数相容的 U，$\mathrm{USB}_{id}($ $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$在语义上不能模 U 定义 US_{id}。

证明。 我们修改上述命题 45 的证明。我们完全按照上文固定 U、n、$\mathcal{M}$，并断言，对于每个 $a \in M$，都存在 M 的一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{a\}$ 可定义子集，其中没有 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{a\}$ 可定义元素。论证思路与之前相同，只是我们使用 $K(\mathcal{M}, a)$，而不是 $K(\mathcal{M})$（即由 $\mathcal{M}$ 的 $(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{a\})$-可定义元素组成的模型）；并且我们使用 [8, 推论 3.5]，而不是 [13, 定理 7.4.4]。

现在，我们让 S 按照与之前完全相同的方式来定义。固定 $a \in M$，并证明不存在以 a 为参数的 H 定义。假设存在这样的定义。令 A 为没有 a可定义元素的 a-可定义集。因此，对于每个元素 $b \in A$，都存在一个自同构 $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$，它固定 a 并移动b。与之前一样，由此可知，$(\mathcal{M}, S)$ 中没有任何元素 A 是 a可定义的，证明至此完成。

□

命题 47. 对于每个序列理论 U和 $K\colon S^1_2 \lhd U$，$\mathrm{S}_K(\mathcal{L}_U)$在模 $\mathcal{L}_U$的意义下，并不语义上定义$\mathrm{USB}_K(\mathcal{L}_U)$。

证明。 这是因为每个序列理论都有一个模型 $\mathcal{M}$，使得对于某个 $c \in M$，$(\mathcal{M}, c) \models \mathrm{S}_N(\mathcal{L}_U)[\langle x, y\rangle \in_{\mathcal{M}} c/H(x) = y]$。事实上，令 $\mathcal{M} \models U$为 U的任意一个递归饱和模型。考虑以下递归类型 $p(x)$（回想一下（约定 9），我们将 $\ulcorner \phi(y) \urcorner$ 视为一个谓词，它刻画了与数词 $\ulcorner \phi \urcorner$所命名的元素相对~~应的~~ E-等价类，因此，$\ulcorner \phi(y) \urcorner(z)$ 意味着 z 等于 $\ulcorner \phi(y) \urcorner$所命名的数词）：

$$\{\exists y \phi(y) \to \exists! z \exists! y (\phi(y) \wedge \ulcorner \phi(y) \urcorner(z) \wedge \langle z, y\rangle \in_{\mathcal{M}} x) \mid \phi(y) \in \mathcal{L}\}.$$

由 U 的序列性，$p(x)$ 是一种类型。任何实现该类型的元素都编码了 $\mathcal{L}$-公式的见证函数。然而，满足 USB 的谓词绝不可能由参数定义。

□

4.2 皮亚诺算术 情形

在本小节中，直至本文结尾（即第 5 节也包括在内），我们将专门讨论这样的语言：它们是在 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 的基础上扩展而来，至多含有可数多个新的谓词符号；以及这样的理论：它们是在皮亚诺算术的基础上扩张而来，并证明其各自语言的完全归纳公理模式。具体而言，我们将省略提及理论中对 S^1_2 的解释，因为假定该解释为恒等解释。由于区分以下两种情形十分重要：对真谓词具有完全归纳，以及仅对算术公式假定归纳，因此我们采用以下记号：上标中的减号表示归纳公理未扩展到整个语言。具体而言，$\mathrm{USB}^-(\mathcal{L})$ 仅表示 $\mathrm{PA} + \mathrm{USB}_{id}(\mathcal{L})$（依照第 2.3 节的术语），而 $\mathrm{USB}(\mathcal{L})$ 则是其在扩展语言中加入归纳公理后的扩张。语言 $\mathcal{L}$ 的所有归纳公理的集合记作 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{L}}$。

我们先来看一个比已证明的定理 24 严格更弱的命题；之所以在此给出，是因为在这一语境下，它的证明尤其具有说明性。

命题 48. 若皮亚诺算术 $\subseteq U$ 是有限语言中的递归可枚举理论，并且一致施加 $\mathcal{L}$- 初等性（初等等价，保持可定义性），且满足 $U \vdash \mathrm{Ind}^{\mathcal{L}_U}$，那么$\mathrm{USB}(\mathcal{L})$（真理理论$(\mathcal{L})$，$\mathrm{DEF}(\mathcal{L})$）在 U 中是句法可定义的。

证明。 我们概述 $\mathrm{USB}(\mathcal{L})$ 的证明（该证明很容易适用于另外两种情形）。我们采用如下约定：若 $\phi(x)$ 是任意公式，那么 $\mathrm{Con}(\phi(x))$ 表示由所有满足 $\phi(x)$ 的公理组成的理论相容这一断言。取 n，使其一致地施加 $\mathcal{L}$-初等性，并由 U 见证。

考虑以下形式化理论（$\mathsf{True}_k(x)$ 是针对 Σ_k^* 句子的部分真谓词，其基于 $\mathsf{Sat}_k(x.y)$）：

$$\alpha(x) := \mathsf{True}_{n+1}(x) \vee \big(U(x) \wedge \mathsf{Con}(U\restriction_x + \mathsf{True}_{n+2})\big).$$

在上述内容中，$U(x)$ 是一个初等谓词，用来表示 U 的公理集，而 $U\restriction_x$ 表示由哥德尔编码为 $\leq x$ 的 U 的所有公理组成的理论；$\mathsf{Con}(U\restriction_x + \mathsf{True}_{n+2})$ 表示，在 $U\restriction_x$ 中可证明的每个 Σ^*_{n+2} 句子都为真。由于 U 包含完整 PA，U 可以证明一阶逻辑的割消去定理。特别地，对于每个 k，分别考察 n，通过考虑无割证明，我们可以在 U 中重新证明标准的归纳论证，并证明 $U\restriction_k + \mathsf{True}_{n+1}$ 是相容的（即，编码小于 k 的 U 公理与所有为真的 Σ^*_{n+1} 句子相容）。因此，$U \vdash \mathsf{Con}(\alpha(x))$（即，由 $\alpha(x)$ 定义的公理集是一个相容理论），并且，对于每个 k，分别.....

$$U \vdash U\restriction_k \subseteq \alpha. \tag{1}$$

根据算术化完备性定理（见 [9, 第 13.2] 节），存在一个可定义模型 $\mathcal{N} = (N, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$，它带有一个可定义的真谓词 $\models^{\mathcal{N}}$，使得 U 可以证明

$$\forall\phi\big(\alpha(\phi) \to \mathcal{N} \models^{\mathcal{N}} \phi\big) \tag{2}$$

令 ι 表示从论域到 $\mathcal{N}$ 的某个初始段上的典范初始嵌入，递归定义为 $\iota(0) = 0^{\mathcal{N}}$, $\iota(x+1) = \iota(x) +^{\mathcal{N}} 1^{\mathcal{N}}$（即 x 被映射到在 $\mathcal{N}$ 中计算出的第 x 个数词的值），并定义

$$T_U(\phi, x) := \mathcal{N} \models^{\mathcal{N}} \phi[\iota(x)].$$

我们验证 $U \vdash \mathsf{USB}^-(\mathcal{L})[T_U/T]$。任取一个模型 $\mathcal{M} \models U$。于是，可定义模型 $\mathcal{N}$ 导出一个真模型（仍用同一个字母表示），而 $\models^{\mathcal{N}}$ 与 $\mathcal{N}$ 的通常满足类一致。因此，由 (1) 和 (2) 可得 $\mathcal{N} \models U$。根据 ι 的性质，$\iota[\mathcal{M}] \subseteq_e \mathcal{N}$。由于 $\mathcal{M} \models \mathsf{True}_{n+1} \subseteq \alpha$，$\iota[\mathcal{M}] \preceq_n \mathcal{N}$。由此可知 $\iota[\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}] \preceq \mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}}$，因为 U 要求 $\mathcal{L}$-初等性。特别地，对于任意 $a \in M$ 和满足 $\phi(x) \in \mathcal{L}$ 的情形，以下两者等价

1. $\mathcal{M} \models T_U(\phi, a)$ 2. $\mathcal{M} \models \mathcal{N} \models^{\mathcal{N}} \phi[\iota(a)]$
3. $\mathcal{N} \models \phi[\iota(a)]$4. $\iota[\mathcal{M}] \models \phi[\iota(a)]$5. $\mathcal{M} \models \phi(a)$

2. 与 3. 之间的等价性是满足关系的绝对性；3. 与 4. 之间的等价性则由 $\iota[\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}}] \preceq \mathcal{N}\restriction_{\mathcal{L}}$ 得出。

□

在下面的分离中，我们将使用以下观察：

命题49. 设 $\mathcal{L}$ 是一种至多可数的语言。假设 $(\mathcal{M}, D) \models$ 皮亚诺算术 $+ \mathrm{DEF}(\mathcal{L})$ 是非标准的。那么，$\mathcal{L}$可定义元素在 $\mathcal{M}$ 中有界。

证明。 我们对以下公式使用溢出原理

$$\psi(x) := \exists c \forall \phi(z) < x \forall y \big(D(\phi(z), y) \to y < c \big).$$

显然，对于每个 $n \in \omega$，$(\mathcal{M}, D) \models \psi(n)$。因此，对于某个 $d \in M \setminus \omega$， $\psi(d)$ 成立，并且 $\psi(d)$ 的见证界定了所有可定义元素。 □

命题 50。 如果 $U \supseteq$ 皮亚诺算术 是一个在至多可数语言中的递归可枚举理论 $\mathcal{L}_U$，使得 $U \vdash$归纳$\mathcal{L}_U$，那么 $U + \mathrm{USB}(\mathcal{L}_U) \not\leq^s_{\mathcal{L}_U} U + \mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U) \not\leq^s_{\mathcal{L}_U} U +$真理理论$(\mathcal{L}_U)$。

证明。 第二个分离结论成立，因为存在一个模型 $(\mathcal{M}, T) \models U + \mathrm{TB}(\mathcal{L}_U)$，其中 $\mathcal{L}_U$-可定义元素是共终的。根据命题49，该模型不能扩展为 $\mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U)$ 的模型。为得到这个模型，任取一个 $(\mathcal{M}, T) \models \mathrm{TB}(\mathcal{L}_U)$，它不是真算术的模型。令 $c \in SSy(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 的理论的编码（这个元素存在，因为我们对真谓词有归纳）。那么 $\mathcal{K}(\mathcal{M})$（由 $\mathcal{L}_U$-可定义元素构成的子模型）是非标准的，并且是 $\mathcal{M}$ 的初等子模型。根据关于 U 的 Gaifman 分裂定理（参见 [9, 推论 7.10]），存在 $\mathcal{N}$ 使得

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}) \preceq_{cof} \mathcal{N} \preceq_e \mathcal{M}.$$

（事实上，$\mathcal{N}$只是$\mathcal{M}$中$\mathcal{K}(\mathcal{M})$的上确界）。由于$\mathcal{N} \preceq_e \mathcal{M}$，我们可以假设$c \in N$，$(\mathcal{N}, c) \models \mathrm{TB}(\mathcal{L}_U)[x \in c/T(x)]$。然而，在$\mathcal{N}$中，可定义元素是共尾的，因为$\mathcal{K}(\mathcal{M}) \preceq_{cof} \mathcal{N}$。

第一个分离结论成立，因为存在一个 $\mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U)$ 的模型，其 $\mathcal{L}_U$-约化不是短递归饱和的，而 $\mathrm{USB}(\mathcal{L}_U)$ 要求 $\mathcal{L}_U$-递归饱和（例如参见[4]）。为说明这样的模型确实存在，任取一个非标准的$(\mathcal{M}, D) \models \mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U)$，并令 d满足：对每个 $\phi(x)$以及每个 $a \in M$

$$(\mathcal{M}, D) \models \langle \underline{\ulcorner \phi(x) \urcorner}, a \rangle \in d \equiv D(\underline{\ulcorner \phi(x) \urcorner}, a).$$

再次通过溢出原理可得 d 的存在性。取 $\mathcal{N} := \mathcal{K}(\mathcal{M}, d)$（即 $\mathcal{M}$ 的子模型，由可用参数 d定义的元素($\mathcal{L}_U \cup \{d\}$)组成）。那么 $d \in \mathcal{N} \preceq_{\mathcal{L}_U} \mathcal{M}$，且 $\mathcal{N}$不是短递归饱和的，因为它不实现类型 $p(x, d)$

$$\{x < d \wedge \big(\exists! y \phi(y, d) \to \neg \phi(x, d)\big) \mid \phi(y) \in \mathcal{L}_U\}.$$

然而， $\mathcal{N}$ 扩展为 $\mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U)$ 的一个模型，因为在 $\mathcal{N}$ 中，满足 $\mathrm{DEF}(\mathcal{L}_U)$ 的谓词可通过公式借助一个参数定义

$$D(x, y) := \mathrm{Form}^1(x) \wedge \langle x, y \rangle \in d.$$

其中 $\mathrm{Form}^1(x)$ 表示 x 是一个只有一个自由变量的公式。 □

回想一下， $\leq^s_{\mathcal{L}}$ 和 $\leq^m_{\mathcal{L}}$ 分别表示模 $\mathcal{L}$ 的句法可定义性和语义可定义性。

推论 51。 $\mathrm{TB} \leq^s_{\mathrm{PA}} \mathrm{DEF} \leq^s_{\mathrm{PA}} \mathrm{USB}$但是 $\mathrm{TB} \not\geq^m_{\mathrm{PA}} \mathrm{DEF} \not\geq^m_{\mathrm{PA}} \mathrm{USB}$。

注释 52. 作为推论，我们还得到上述理论的非归纳版本也具有上述分离和归约。对于这些分离：请注意，若非归纳情形中存在归约，它们便会直接推出完全归纳情形中相应的归约。另一方面，我们对这些理论的归纳版本所得到的归约，实际上只用到了 DEF^-、TB^- 和 USB^- 的公理，而没有用到谓词 D、 T 和 S 的归纳模式。

4.2.1 无模型中的可定义性

在本小节中，我们将进一步强化上述不可定义性结果。我们再次转向 TB、DEF 和 USB 的非归纳变体，分别简称为 TB$^-$、DEF$^-$ 和 USB$^-$。

在下面的命题中，我们将使用 Stuart Smith 的以下结果（[19, 定理 3.11], 以及证明后紧接着的第 351 页评注）

定理 53. 设 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术是非标准的。那么，对于每个 $\mathcal{N}$，只要 $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$，以及每个 $A \subseteq \omega$，$(\mathcal{M}, A) \preceq (\mathcal{N}, A)$。

上文中，$(\mathcal{M}, A)$ 表示将结构 $\mathcal{M}$ 扩张到一种带有新谓词的语言，并将该谓词解释为集合 A。

命题 54. 在每个非标准模型 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术中，都存在一个集合 T，使得 $(\mathcal{M}, T) \models$ 真理理论$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，但 初等图$(\mathcal{M}, T)$ 并不能句法定义 USB$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

证明。 固定 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术，并令 $T = \{\ulcorner\phi\urcorner \in \omega \mid \mathcal{M} \models \phi\}$。我们断言，初等图 $(\mathcal{M}, T)$ 不能模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 句法定义 USB$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。反设结论不成立，并任取一个公式 $S(x, y) \in \mathcal{L}_M$。令 a 为该定义中使用的一个参数；不失一般性，设 a 是非标准的。令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{M}$ 的任意真初等末端扩张（由 MacDowell-Specker 定理 [9, 定理 8.6]可知这样的扩张存在），并令 $\mathcal{K}(a)$ 为 $\mathcal{M}$ 中由那些可从 $\mathcal{M}$ 通过 a定义的元素生成的子模型。此外，令 $\mathcal{M}'$ 为 $\mathcal{M}$ 的子模型，其论域为 $\{d \in M \mid \exists x \in \mathcal{K}(a) \mathcal{M} \models d < x\}$。根据 Gaifman 的结果（见 [9, 推论 7.10]），$\mathcal{M}' \preceq_e \mathcal{M}$（我们不假设这个扩张是真扩张。）我们有

$$\mathcal{M}' \preceq_e \mathcal{M} \precneqq_e \mathcal{N},$$

因此，根据定理 53，对于 $A = T \subset \omega$

$$(\mathcal{M}', T) \preceq_e (\mathcal{M}, T) \precneqq_e (\mathcal{N}, T).$$

注意，ω 在这三个模型中都可由公式 $\phi(x) := \exists y\big(x \leq y \wedge T(y)\big)$定义。此外，$S(x, y)$在 $(\mathcal{M}', T)$ 和 $(\mathcal{N}, T)$ 中都定义了 USB$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，因此

$$(\mathcal{M}', S^{\mathcal{M}'}, \omega) \precneqq_e (\mathcal{N}, S^{\mathcal{N}}, \omega) \tag{E}$$

（回想一下，对于公式 ϕ 和模型 $\mathcal{U}$，$\phi^{\mathcal{U}}$ 表示满足ϕ的$\mathcal{U}$中的元素集合。）然而，$\mathcal{L}_{M'} \cup \{T\}$ 公式

$$\zeta(x, a) := \exists \psi(v_0, v_1) \in \omega \big[S(\ulcorner \psi(v_0, \underline{a}/v_1) \urcorner, x) \wedge \forall z \big(S(\ulcorner \psi(v_0, \underline{a}/v_1) \urcorner, z) \to x = z\big)\big]$$

在 $(\mathcal{M}', S^{\mathcal{M}'}, \omega)$ 和 $(\mathcal{N}, S^{\mathcal{N}}, \omega)$ 中分别定义了 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{L}_{\{a\}}$-可定义元素集合。由于 $(\mathcal{M}', S^{\mathcal{M}'}, \omega) \models \forall y \exists x > y \zeta(x, a)$，且 $(\mathcal{N}, S^{\mathcal{N}}, \omega) \models \exists y \forall x > y \neg\zeta(x, a)$，这与 (E) 矛盾。 □

命题 55。 对于每个模型 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术，以下各项等价：

1. $\mathcal{M} \models$理论$(\mathbb{N})$

2. 对每个 $T \subseteq M$，如果 $(\mathcal{M}, T) \models$真理理论$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，那么 初等图$(\mathcal{M}, T)$ 句法定义DEF$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

证明。任取 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术。首先假设 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$，并取任意满足 $(\mathcal{M}, T) \models$ 真理理论$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的 $T \subseteq M$。那么，下列公式就是 $\mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的一个定义

$$D(\phi(x), y) := T(\ulcorner \exists! x \phi(x) \urcorner) \wedge T(\ulcorner \phi(\dot{y}) \urcorner) \wedge \forall z < y \neg T(\ulcorner \phi(\dot{z}) \urcorner).$$

我们证明它确实成立。首先假设 $\mathcal{M} \models \exists! x \phi(x) \wedge \phi(a)$。由于 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$，$a \in \omega$。特别地，$\phi(\underline{a})$ 是一个标准句子，并且根据 $\mathrm{TB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ $(\mathcal{M}, T) \models T(\exists! x \phi(x)) \wedge T(\ulcorner \phi(\underline{a}) \urcorner)$。由于每个 $b < a$ 也是一个标准数，因此对于任意这样的 b，我们都有 $(\mathcal{M}, T) \models \neg T(\ulcorner \phi(\underline{b}) \urcorner)$。现在假设 $(\mathcal{M}, T) \models D(\phi, a)$。由 $\mathrm{TB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 可知 $\mathcal{M} \models \exists! x \phi(x)$。我们断言 $\mathcal{M} \models \phi(a)$。反设不然。由于 $(\mathcal{M}, T) \models T(\ulcorner \phi(\underline{a}) \urcorner) \wedge \neg \phi(a)$，那么 a 是非标准的。然而，由于 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$，存在唯一的 $n \in \omega$ 使得 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{n})$。由此可得 $(\mathcal{M}, T) \models \exists x < a T(\ulcorner \phi(\dot{x}) \urcorner)$，这与 $D(\phi, a)$ 矛盾。

现在假设 $\mathcal{M}$ 不满足理论$(\mathbb{N})$，并令 $T := \{\phi \in \omega \mid \mathcal{M} \models \phi\}$。令 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{M}$ 的子模型，它由 $\mathcal{M}$中 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ （即无参数）可定义的元素组成。令$\mathcal{M}'$ 满足 $\mathcal{K} \preceq_{cf} \mathcal{M}' \preceq_e \mathcal{M}$。令 $\mathcal{N}$为 $\mathcal{M}$ 的任意真初等端延拓。现在仿照定理 54 的证明，可得：如果初等图 $(\mathcal{M}, T)$ 定义了 $\mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，那么这些扩张

$$(\mathcal{M}', T) \subseteq_e (\mathcal{M}, T) \subsetneq_e (\mathcal{N}, T)$$

不可能全都是初等的，这与定理 53 矛盾。 □

现在我们讨论 $\mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 与 $\mathrm{USB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 之间的关系。这里与前两种情况不同，我们缺少对这样一类模型的完整刻画：它们的每个扩张为 $\mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的模型后，都会定义 $\mathrm{USB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

命题56. 假设 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术 满足：$\mathcal{M}$ 中的每个元素都无参数可定义。设 $D \subseteq M^2$ 满足 $(\mathcal{M}, D) \models \mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。那么 $\mathrm{USB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 在初等图$(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$中是句法可定义的。

证明。 设 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ 是素的，并假设 $(\mathcal{M}, D) \models \mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。设 $T(x)$ 是一个真谓词的定义，它在 $(\mathcal{M}, D)$ 中满足 $\mathrm{TB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$（如命题 25 所示）。我们按以下方式定义$S(\phi, x)$

$$\exists \psi \big(D(\psi, x) \wedge \forall y < \psi \neg D(y, x) \wedge T(\ulcorner \forall x (\psi(x) \to \phi) \urcorner) \big).$$

该定义的正确性由以下事实保证：$\mathcal{M}$ 的每个元素都有一个不含参数的标准定义。

□

最后，我们注意到，对于量词复杂度受限的皮亚诺算术片段，定理 54 不成立。令 $\mathrm{PA}\restriction_n$ 表示皮亚诺算术中复杂度为 Σ_n 的推论集合。

命题 57。 对于每个 n，都存在一个模型 $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}\restriction_n$，使得对于每个满足$(\mathcal{M}, T) \models \mathrm{TB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$的 $T \subseteq M$，$\mathrm{USB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 在初等图$(\mathcal{M}, T)$中是句法可定义的。

证明。 固定 n 以及任意的模型 $\mathcal{N} \models \mathrm{PA}$。令 $\mathcal{K}^n$ 为由 Σ_n-可定义元素构成的 $\mathcal{M}$ 子模型。于是，根据 [9, 定理 10.1] $\mathcal{K}^n \preceq_n \mathcal{M}$，因此 $\mathcal{K}^n \models \mathrm{PA}\restriction_n$。此外，存在一个公式 $\phi(x)$, 使得 $\phi^{\mathcal{K}^n} = \omega$。固定任意的 T，它是 $\mathcal{K}^n$ 论域的一个子集，并满足 $(\mathcal{K}^n, T) \models$ 真理理论$^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。那么，很容易验证，下列公式在 $(\mathcal{K}^n, T)$ 中定义了 $\mathrm{USB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$

$$\theta(\psi(v), a) := \exists \chi(v) \in \Sigma_n \big(\phi(\chi) \wedge \mathrm{Sat}_n(\chi, a) \wedge \forall x \neq a \neg \mathrm{Sat}_n(\chi, x) \wedge T\big(\ulcorner \forall v \big(\chi(v) \to \psi(v)\big) \urcorner\big).$$

□

5 真与递归饱和

我们回顾一下，本节所考虑的所有理论都是 PA 的扩张（可能使用扩展语言），而 $^-$ 上标表示归纳仅针对算术公式成立。以下定义在以 PA 为基础理论的具体语境中会很有用。

定义58. 在下文中，变量 s、t、u 将遍历算术项的哥德尔编码，而变量 v、v_i、w 将遍历变量编码。例如，量词 $\forall t\psi$ 应理解为 $\forall x\big(\mathrm{ClTerm}(x) \to \psi[x/t]\big)$。类似地，$\phi$、$\psi$ 将遍历算术句子的编码，w、v将遍历变量编码，而 $\phi(v)$、$\psi(v)$将遍历至多含有一个所示自由变量的算术公式的编码。对于任意闭项 t，t° 表示 t的值。函数 $t \mapsto t^\circ$ 在皮亚诺算术中可证全定义，因此我们将把符号 x° 当作语言中的函数符号来使用。$\phi \in \mathrm{dp}(x)$是一个以变量 ϕ 和 x 为自变量的算术公式，表达 ϕ 是一个句法深度至多为 x的公式；也就是说，ϕ 的句法树中的每条路径长度都至多为 x （比较第2节）。

$\mathrm{CT}^-(x)$ 表示指数函数公理与以下 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{T\}$ 句子的合取：

$\mathrm{CT1}$ $\forall s,t\big(T(\ulcorner s = t \urcorner) \equiv s^\circ = t^\circ\big)$

$\mathrm{CT2}$ $\forall \phi \in \mathrm{dp}(x) \forall \psi \in \mathrm{dp}(x)\big(T(\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner) \equiv T(\phi) \vee T(\psi)\big)$.

$\mathrm{CT3}$ $\forall \phi \in \mathrm{dp}(x)\big(T(\ulcorner \neg \phi \urcorner) \equiv \neg T(\phi)\big)$.

$\mathrm{CT4}$ $\forall v \forall \phi(v) \in \mathrm{dp}(x)\big(T(\exists v \phi) \equiv \exists y T(\ulcorner \phi(\dot{y}/v) \urcorner)$。

在上述内容中，如约定 9 所引入的，$\ulcorner \neg \phi \urcorner$ 表示一个关于变量ϕ 的可定义函数；给定一个句子 ϕ，该函数返回其哥德尔编码。公理 CT1、CT2 和 CT4 中 $\ulcorner \cdot \urcorner$ 的用法应作类似理解。

CT^- 通过句子 $\forall x \mathrm{CT}^-(x)$ 扩展皮亚诺算术，而 $\mathrm{CT}(x)$ 是在皮亚诺算术基础上加入 $\mathrm{CT}^-(x)$ 和关于 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{T\}$ 的完全归纳方案后得到的理论。

注 59. 对于扩展皮亚诺算术的理论 U（实际上所需条件要弱得多），$\mathrm{UTB}^-_{id}(\mathcal{L}_U)$ 在模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 意义下与 $\mathrm{UTB}^-_{id}(\mathcal{L}_U)$ 的以下项变体在句法上相互可定义；该变体由以下双条件句组成：

$$\forall t\big(T(\ulcorner \phi(t) \urcorner) \equiv \phi(t^\circ)\big).$$

在上文中，$\phi(x)$ 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 的任意公式，而 $\ulcorner \phi(t) \urcorner$ 表示将 t 形式代入 $\phi(x)$ 中的 x 所产生的结果。这种可定义性成立，是因为足够强的算术理论证明，论域中的每个对象都可以用一个闭项命名。本节将以上内容作为 $\mathrm{UTB}_{id}(\mathcal{L}_U)$ 的正式定义。可以说，这是所考察的满足理论中最广为人知的版本。遵循上一节的约定，我们将省略表示在理论中对 S^1_2 采用恒等解释的下标。此外，我们有时也会省略对算术语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$的提及。

众所周知，如果一个模型 (M,T) 满足 UTB，那么它的算术部分M 是递归饱和的。令人惊讶的是，正如 [14], 所示，若假设 (M,T) 满足 CT^-，结论同样成立；CT 是一种包含针对算术句子的组合公理、但不包含归纳的理论。

Roman Kossak 在 [12], 中证明了一个部分逆命题。该证明关键地运用了 MacDowell-Specker 定理（参见 [13]）。回顾一下，如果模型 $\mathcal{N}$ 是模型 $\mathcal{M}$ 的保守扩张，那么 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子模型，并且对于每个 $A \subseteq N$，如果 A 可在带参数的 $\mathcal{N}$ 中定义，那么 $A \cap M$ 也可在带参数的 $\mathcal{M}$ 中定义。

定理 60 (MacDowell-Specker 定理)。 设 理论 是至多可数语言 $\mathcal{L}$ 中的一个理论，使得 理论 $\vdash$ 皮亚诺算术，并且 理论 证明了含有 $\mathcal{L}$ 的公式的归纳模式的所有实例。那么，理论的每个模型都有一个真扩张、保守的初等扩张。

定理 61 (Kossak)。 设 U 是一个可数语言中的理论，包含皮亚诺算术和完整的归纳模式（针对扩展语言）。那么，如果 U 施加（短） $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性，则 U 在语义上定义UTB($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$) 模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$。

证明。 设 $\mathcal{M} \models U$，并设 $\mathcal{M} \precneqq_e \mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{M}$ 的真、保守且初等的末端扩张。由于 U 是满足完整归纳的可数语言中的一个理论， $\mathcal{M}'$ 存在，因此 MacDowell-Specker 定理适用于 U。

固定任意一个 $a \in M' \setminus M$。设 s 是实现以下递归类型的任意元素：

$$p(x) := \{\forall t < a\big(\ulcorner \phi(t) \urcorner \in x \equiv \phi(t^{\circ})\big) \mid \phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}\}.$$

特别地， s 编码了项小于 a、具有标准复杂度的真算术句子集合。令 $T = \{x \in M \mid \mathcal{M}' \models x \in s\}$. 那么，由于扩张是保守的， T 是 $\mathcal{M}$中的一个类，因此可在 $\mathcal{M}$ 中定义。根据定义，$(\mathcal{M}, T)$ 满足 UTB^{-}($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)。由于 $\mathcal{M}$ 满足完全归纳，实际上 $(\mathcal{M}, T) \models$UTB($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)。 □

在上述论证中，归纳是获得保守端扩张的关键。若一个 PA 片段的模型不满足完全归纳，它就根本不可能有初等端延拓，因此该论证照此进行便会彻底失效。这引出了如下问题：如果去掉 U 证明其自身语言的归纳模式这一假设，定理 61 是否仍成立？先来看一个简单例子，它表明，出于相当一般的原因，严格类比的结论不可能成立。

注 62. 考虑语言中以下理论 RSAT($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)：该语言是在 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$的基础上扩展而来，并包含一个新的三元谓词 $R(p, x, y)$。RSAT($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)在 PA 的基础上增加了以下最优性（OP）和非空性（NE）公理：

OP $\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^p(y_1, \ldots, y_k, x) \to \forall x \left(R(\underline{p}, x, \langle y_1, \ldots, y_k \rangle) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^p(y_1, \ldots, y_k, x)\right)$,

NE $\exists x R(\underline{p}, x, \langle y_1, \ldots, y_k \rangle)$,

其中 $\underline{p}$ 是全递归函数 $i \mapsto \phi_i^p$ 的哥德尔编码，而 $\langle y_1, \ldots, y_k \rangle$ 是序列 $y_1, \ldots, y_k$的算术编码。为了提高可读性，我们将写作 $R_p(x, y)$，而不写作$R(p, x, y)$。

我们将 R_p 视为“类型实现者”。每个满足 $R_p(x, \bar{y})$ 的 x，都尽可能多地满足类型 p 中的内容（参数为 $\bar{y}$）。

显然，RSAT($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$) 的任意模型都是递归饱和的；反过来，PA 的任意递归饱和模型都可以扩展为 RSAT($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$) 的模型。特别地，如果 M 是一个递归饱和但无类的 PA 模型（见 [13]），那么它可以扩展为 RSAT 的模型，但不能扩展为 UTB 的模型。（注意，在 RSAT($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$) 的定义中，我们不假设扩展语言满足归纳。）

上述评注中讨论的障碍具有相当普遍的性质，说明无法直接加强定理 61。不过，我们仍可以期望，Kossak 的结果在更一般的情形下基本成立，也就是说，在某个理论中施加递归饱和性的唯一方式，“本质上”是使用真谓词。事实证明，这种直觉是正确的，至少对于扩展了足够强的算术的理论而言。以下 Kossak 定理的加强形式成立：

定理 63. 每个扩展皮亚诺算术、使用可数语言并施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性的理论，在语义上都能模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$定义$\mathrm{UTB}^{-}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

请注意，如果 U 包含完全归纳并在语义上模$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$定义$\mathrm{UTB}^{-}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，那么在每个模型中，可定义的真谓词都会自动满足完全归纳图式，因此上述定理确实强化了 Kossak 的结果。

在给出该结果的证明之前，我们先指出一个更强论断的反例，因为它实际上先于定理 63，并在一定程度上启发了该定理的证明。我们可以问，是否能将定理的结论加强为句法上的可定义性。事实证明，这种加强并不成立。

定理 64. 存在一个理论 $U \supseteq$ 皮亚诺算术 $+ \mathrm{Ind}^{\mathcal{L}_U}$，它施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性，但不能模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$句法定义$\mathrm{UTB}^{-}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

证明。 设 $(\phi_j)_{j\in\omega}$ 是所有算术公式的一个原始递归枚举。考虑算术语言中带有附加谓词T_i、T_ω、 $i \in \omega$的以下理论 U。 U 包含皮亚诺算术、扩展语言的完全归纳，以及以下公理：

$$\neg\forall t\Big(T_j(\ulcorner \phi_i(t) \urcorner) \equiv \phi_i(t^\circ)\Big) \to \forall t\Big(T_\omega(\ulcorner \phi_j(t) \urcorner) \equiv \phi_j(t^\circ)\Big),$$

其中 i、 $j \in \omega$。

我们断言，对于每个模型 $\mathcal{M} \models U$， $\mathcal{M}$ 的算术约化都是递归饱和的。事实上，在每个这样的模型中，都存在一个满足完全 $\mathrm{UTB}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的谓词 S，因为如果谓词 T_j 不满足 $\mathrm{UTB}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的所有公理，那么 T_ω 就满足针对公式 ϕ_j的一致双条件模式实例。因此， T_j、$j < \omega$中至少有一个满足 $\mathrm{UTB}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的公理；或者二者都不满足，此时 T_ω 满足它。

我们进一步断言， U不能模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 句法定义 $\mathrm{UTB}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。事实上，假设存在这样一个定义 ϕ。那么 ϕ 只使用有限多个谓词T_i。取任意足够大的 $N \in \omega$，使得所有这些谓词的指标都是 $i < N$或 $i = \omega$。

考虑一个模型 U，其中算术部分是标准的（即同构于（$\mathbb{N}, +, \times, 0$））， 并且谓词 T_i 按如下方式解释：所有用于 $i \leq N$的谓词 T_i都解释为空集， T_ω 定义为公式$\phi_i, i \leq N$的部分真谓词：

$$T_\omega := \{\ulcorner \phi_i(t) \urcorner \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}(\mathbb{N}) \mid i \leq N \wedge \mathbb{N} \models \phi_i(t^\circ)\},$$

而所有用于 $j > N$ 的 T_j 都定义为标准算术真谓词，即：

$$T_j := \{\ulcorner \phi(t) \urcorner \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \models \phi(t^\circ)\}.$$

可以验证，模型 $(\mathbb{N}, T_i, T_\omega)_{i<\omega}$ 满足理论 U的公理。另一方面，在该模型中，谓词 T_i、$i \leq N$ 和 T_ω 是算术可定义的，因此由公式 ϕ 定义的集合也是算术可定义的，从而不可能满足 $\mathrm{UTB}^{-}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的去引号公理。

□

在定理 64 的证明中，我们引入了一个无穷的谓词族。“越进一步”的谓词 T_i 距离满足 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 越远，而“更接近”的谓词 T_ω 则越接近满足它。特别地， U 的任何完备化实际上都会具有一个谓词，该谓词在理论中可证明地满足 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。事实上，这一模式最终证明在完整的一般性下都成立，而这正是定理 64 的核心思想。需要指出的是，该证明在很大程度上受到了 [2]一项相关工作的启发。

定理 *63* 的证明。 设 U 是一个扩张皮亚诺算术的可数语言中的理论。假设对于每个模型 $\mathcal{M} \models U$， $\mathcal{M}$ 的算术部分都是递归饱和的。先引入一些记号。用 $\tau(x, y)$表示由所有形如以下形式的公式组成的类型:

$$\forall t < x \left(\phi(t^\circ) \equiv \ulcorner \phi(t) \urcorner \in y\right),$$

其中 ϕ 是一个算术公式。换言之， $\tau(x, y)$表示“y 是一个编码，其对应的真谓词适用于不大于 x的标准公式和项”。注意，对于每个 $\mathcal{M} \models$PA以及任意 $a \in M$， $\tau(a, y)$都是 $\mathcal{M}$上的一个类型。此外，如果 $\mathcal{M}$ 是初等算术 EA 的任意模型，并且对于每个 $a \in M$， $\tau(a, y)$都在 $\mathcal{M}$中实现，那么$\mathcal{M} \models$ PA。

令 $\mathcal{L}^*$ 用一个新常数 a扩张 $\mathcal{L}$ 。我们将归纳地构造扩张 U 的 $\mathcal{L}^*$理论 U_α以及 $\mathcal{L}^*$公式的集合 A_α。 令 $U = U_0$。 对于任意 α， 令

$$A_\alpha = \{\exists y \phi(x, y) \in \mathrm{Form}_{\mathcal{L}} \mid U_\alpha \vdash \forall y \left(\phi(a, y) \to \tau(a, y)\right)\}.$$

τ 的出现应作示意性理解： U_α 证明了由上述模板得到的每个句子，即将某个公式 $\pi \in \tau$ 代入 τ所得的句子。对于任意α，我们定义:

$$U_{\alpha+1} = U_\alpha \cup \{\neg \psi(a) \mid \psi(x) \in A_\alpha\}.$$

最后，我们将 U_γ 定义为 γ为极限序数时，所有 U_β 的并集。

注意，如果 U_α 相容，那么 $U_{\alpha+1}$ 严格扩张 U_α。事实上，由于 U_α 扩张了 U，因此在 U的每个模型中， $\tau(a, y)$都得到实现；根据省略类型定理（见 [3, 定理 2.2.9]） ，这一点立即可得。

现在，由于 U_α构成一个递增的集合链，它必定会稳定下来。令 α 为满足 $U_\alpha = U_{\alpha+1}$ 的最小序数。这意味着 U_α 不相容。特别地， α 必定是一个后继序数，设为 $\alpha = \beta + 1$。由于 $U_{\beta+1}$ 不相容，根据紧致性，必定存在一个有限集 $\psi_1(a)$、.....、 $\psi_n(a) \in A_\beta$，使得

$$U_\beta \vdash \bigvee_{i \le n} \psi_i(a).$$

现在我们转向证明的主要部分。任取一个模型 $\mathcal{M} \models U$。令 $\mathcal{M}^* \succeq \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个可数饱和初等扩张。我们断言，存在某个 γ 和某个 $\psi \in A_\gamma$，使得 $\psi(x)$ 在 $\mathcal{M}^*$ 中共尾成立。事实上，反设对任意序数 δ、任意 $\psi \in A_\delta$，都存在 b，使得对于所有 $a > b$， $\neg\psi(a)$ 都成立。由饱和性可知，对于任意 δ，都存在 b_δ，使得对于所有 $a > b_\delta$， $\neg\psi(a)$ 对所有 $\psi \in A_\delta$ 都成立。由超限归纳可知，对于所有 δ 和所有 $a > b_\delta$， $(\mathcal{M}^*, a) \models U_{\delta+1}$。然而，正如我们已经注意到的，存在 β，使得对于 A_β 中一个有限的公式族，$U_\beta \vdash \bigvee_{i \le n} \psi_i(a)$。由于这样的公式只有有限个，其中必有一个在 $\mathcal{M}^*$ 中共尾成立。这就产生了矛盾。

因此，固定最小的 γ，使得 A_γ 中的某个公式在 $\mathcal{M}^*$ 中共尾成立。根据最小性，对于每个 $\delta < \gamma$ 和每个公式 $\xi \in A_\delta$，满足 ξ 的元素在 $\mathcal{M}^*$ 中有界。再次根据饱和性，存在 b_γ，使得没有元素 $a > b_\gamma$ 满足

任意公式 $\xi \in A_\delta, \delta < \gamma$。换言之，对于每个大于 b_δ 的元素 a，$(\mathcal{M}, a) \models U_\gamma$。固定任意这样的 b_γ。

设 $\psi = \exists y \phi(x, y) \in A_\gamma$ 是一个任意公式，它在 $\mathcal{M}^*$ 中对余终多元素成立。那么，以下公式 $T^*(\xi)$ 定义了一个满足 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的谓词：

$$T^*(\xi) := \forall x \exists y > x \exists z \left(\phi(y, z) \wedge \xi \in z \right).$$

也就是说，T^* 表示存在任意大的元素 y，使得对于某个 z，$\phi(y, z)$ 成立，并且 $\xi \in z$。我们验证 T^* 在 $\mathcal{M}^*$ 中满足 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。我们在 $\mathcal{M}^*$ 中进行论证。首先，假设 $T^*(\ulcorner \eta(t) \urcorner)$ 成立。取一个大于 $\max\{t, b_\gamma\}$ 的 $a \in M^*$。那么存在 $b, c > a$，使得 $\phi(b, c)$ 且 $\xi \in c$。由于 $\exists y \phi(x, y) \in A_\gamma$ 且 $(\mathcal{M}^*, b) \models U_\gamma$，$c$ 实现了类型 $\tau(b, c)$。根据 $\tau(x, y)$ 的定义可知，$\eta(t^\circ)$ 在 $\mathcal{M}^*$ 中成立。反过来，假设 $\eta(t^\circ)$ 成立。我们证明 $T^*(\eta(t))$ 也成立。任取 a，并取任意一个大于 $\max\{b_\gamma, a, t\}$ 的元素 b，使得对某个 c，$\phi(b, c)$ 成立。由于 $(\mathcal{M}^*, b) \models U_\gamma$，可知 c 实现了 $\tau(b, y)$，特别是，$\ulcorner \eta(t) \urcorner \in c$。由于最初选取的 a 是任意的，因此 $T^*(\ulcorner \eta(t) \urcorner)$。

由于 T^* 实际上是一个 $\mathcal{L}$公式，根据初等性，T^* 见证了 $\mathrm{ElDiag}(\mathcal{M})$ 在 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$意义下句法定义 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。 □

以 UTB^- 作为引导，我们实际上可以举出一个在语义可定义性意义下施加递归饱和性的最小理论的例子。回忆一下注 62 中的理论 $\mathrm{RSAT}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

在定理 66 的证明中，我们将用到以下结果（[4, 定理 4.1]）

定理 65. 设 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术$+\mathrm{CT}^-(a)$，其中 a 是非标准的。那么存在一个公式$\theta(x) \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ 以及一个非标准的 b，使得 $\mathcal{M} \models \mathrm{CT}(b)[\theta(x)/T(x)]$.

定理 66. 对于可数语言中的任意理论 $U \supseteq$ 皮亚诺算术 $\mathcal{L}$，若其扩展了 皮亚诺算术，则以下条件等价：

1. U 施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性。
2. U 语义定义 $\mathrm{RSAT}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$。

证明。 蕴涵 $2. \Rightarrow 1.$ 显而易见，因此我们证明反方向。假设 U施加了递归饱和性，并任取一个 $\mathcal{M} \models U$。令 $T(x)$ 为一个可定义的 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$-谓词，并令 $\mathcal{L}_T$表示语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{T\}$。对于任意原始递归类型 $p(x, y)$，令 $\{\phi_i(x, y)\}_{i \in \omega}$为其原始递归枚举。为提高可读性，我们将函数 $i \mapsto \phi_i$ 视为一个新的原始符号（应通过代入该函数恰当的绝对 Σ_1 表示予以消去）。令 $\mathrm{Prog}_z[P(z, \bar{x})]$为如下公式（$P(z, \bar{x})$ 是任意公式的占位符）：

$$\forall z \big(\forall i < z P(i, \bar{x}) \to P(z, \bar{x}) \big).$$

我们区分两种情况：

情形 1：标准截段在 $\mathcal{M}$ 中可定义。令 $\omega(x)$ 为 $\mathcal{M}$ 的标准截段的一个 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 定义。我们对 $R_p(x, y)$ 的定义将以下分情况定义形式化：

$$\begin{cases} \forall z \big(\omega(z) \to T(\phi_z(\dot{x}, \dot{y})) \big), & \text{if } \mathrm{Prog}_v[\exists x \forall z < v T(\phi_z(\dot{x}, \dot{y}))] \\ \forall z < v T(\phi_z(\dot{x}, \dot{y})), & \text{if } v \text{ is the greatest such that } \bigcap_{z<v} \{x \mid T(\phi_z(\dot{x}, \dot{y}))\} \neq \emptyset \end{cases}$$

现在我们证明这个定义是有效的。最优性公理成立这一点显而易见：任取参数 y 和任意 $n \in \omega$，并假设 $\bigcap_{z<n}\{x \mid T(\phi_z(\bar{x},\bar{y}))\} \neq \emptyset$。那么无论我们的定义适用哪种情形，任何满足 $R_p(x,y)$ 的 x 都属于集合 $\bigcap_{z<n}\{x \mid T(\phi_z(\dot{x},\dot{y})\}$；根据 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的公理，这个集合与 $\{x \mid \bigwedge_{z<n}\phi_z(x,y)\}$ 相同。下面来看非空性公理。任取 y。若 $\neg\mathrm{Prog}_v[\exists x\forall z < vT(\phi_z(\dot{x},\dot{y}))]$，则根据定义有 $\exists x R_p(x,y)$。现在假设 $\mathrm{Prog}_v[\exists x\forall z < vT(\phi_z(\dot{x},\dot{y}))]$ 成立。由于 $\mathcal{M}$ 是递归饱和的，$p(x,y)$ 可实现。特别地，$\exists x\forall z\big(\omega(z) \rightarrow T(\phi_z(\dot{x},\dot{y})\big)$，至此便完成了（当前情形下的）证明。

情形 2：标准截段在 $\mathcal{M}$中不可定义。 根据 UTB^- 的组合公理，我们有，对于每个 $n \in \omega$，$(\mathcal{M}, T^{\mathcal{M}}) \models \mathrm{CT}^-(n)$。因此，根据我们的假设，存在一个非标准数 a，使得 $(\mathcal{M}, T^{\mathcal{M}}) \models \mathrm{CT}^-(a)$，也就是说，$T$ 是深度至多为 a 的所有句子的组合真谓词。然后，根据定理 65，存在一个 $\mathcal{L}_M$- 公式$T'(x)$，它定义了一个部分归纳满足类；也就是说，对于某个非标准 b

$$(\mathcal{M}, (T')^{\mathcal{M}}) \models \mathrm{CT}^-(b) + \mathrm{Ind}_{\mathcal{L}_T}.$$

我们固定满足上述条件的 T' 和 b。令 c 为任意一个满足$\mathcal{M} \models \forall i < c\, \phi_i \in \mathrm{dp}(b)$ 的非标准数。现在我们只需将 $R_p(x,y)$ 定义为以下公式：

$$\exists v\big[\forall i < vT'(\phi_i(\dot{x},\dot{y})) \wedge \forall v' > v\big(v' > c \vee \neg\exists z\forall i < v'T'(\phi_i(\dot{z},\dot{y}))\big)\big].$$

因此，$R_p(x,y)$ 定义了集合 $\bigcap_{z<v}\{x \mid T'(\phi_z(\dot{x},\dot{y}))\}$，其中 v 是使上述交集非空的最大数$\leq c$（按照约定，空族的交集是模型的整个论域）。由 $(\mathcal{M}, (T')^{\mathcal{M}}) \models \mathrm{Ind}\mathcal{L}_T$ 可知，这样的 v 总是存在。现在只需按常规验证，对于这个定义，非空性公理和最优性公理都成立。

□

备注 67. 很容易看出，如果用一对理论 $V, \mathcal{L}$ 替换 PA 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$，定理 63 和 66 仍然成立，其中 $\mathrm{PA} \subseteq V, \mathcal{L}$ 至多有可数多个额外谓词，并且 $V \vdash \mathrm{Ind}_{\mathcal{L}}$。

通过修改帕霍莫夫和维瑟的证明（[18, 定理 4.1]），我们可以证明，实际上没有任何有限理论可以在定理 66 中替代 RSAT：

命题 68. 如果 U 是一个有限理论，且 $\mathrm{PA}+U$ 强制 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和，那么存在一个有限理论 V，使得 $\mathrm{PA}+V$ 不会模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 语义定义 U，并且 $\mathrm{PA}+V$ 强制 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和。

证明。 在证明中，理论之间所有的可定义性都模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$。首先注意，对于有限理论 U 和任意理论 V，V 语义定义 U 当且仅当 V 句法定义 U。固定 U，并假设 U 强制 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和。对于算术公式 $\phi(x)$，令 $\mathrm{CT}^-\restriction_{\phi(x)}$ 表示以下句子：

$$\forall x\big(\forall y < x\, \phi(y) \rightarrow \mathrm{CT}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})(x)\big).$$

现在应用对角引理，得到一个 Σ_1 公式 $\psi = \exists x\phi(x)$，使得

$$\mathrm{EA} \vdash \psi \equiv \text{"}\mathrm{PA} + \mathrm{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)} \text{ syntactically defines } U\text{"}.$$

我们将证明，$\mathrm{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)}$ 满足命题论题中对理论 V 提出的要求。首先，我们断言 ψ 为假。反设其为真，并取 $n \in \omega$ 使得 $\mathrm{EA} \vdash \phi(\underline{n})$。由部分真谓词的存在性可知，EA 定义了

EA $+$ $\mathsf{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)}$。然而，由 ψ的不动点性质可知，PA 定义了 U。由于 U +PA 要求 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和，因此 PA 要求 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和，这显然是错误的。因此， ψ 为假，由此可知 $\mathsf{PA}+\mathsf{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)}$不定义 U。我们断言，PA $+$ $\mathsf{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)}$ 要求 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 递归饱和。事实上，任取 $\mathcal{M}\models \mathsf{PA}+\mathsf{CT}^-\restriction_{\neg\phi(x)}$。由于 ψ 为假，对于每个 $n\in\omega$，都有 $\mathcal{M}\models\neg\phi(\underline{n})$，因此由溢出原理，存在某个非标准的 c，使得 $\mathcal{M}\models\forall x<c\neg\phi(x)$。因此， $\mathcal{M}\models\mathsf{CT}^-(c)$。由 Lachlan定理（见 [9, 定理 15.5]）可知，$\mathcal{M}\restriction_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}$ 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和的，证明至此完成。 □

最后，我们想回到定理 64。我们将证明，在该定理的证明中使用无限语言，并非论证中不可或缺的要素。在改进后的证明中，我们不再说某个所谓的真谓词定义无法使用所有符号，而只说它不可能具有有界复杂度。这样，我们就兑现了在引言中的承诺：给出一个使用有限语言的理论，它在语义上定义 $\mathsf{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$，但在语法上不能定义。

在证明中，我们将用到可计算性理论中泛型集的性质。我们的论证分为两部分。首先，我们将在引理 72 中证明，对于任意 n，都可以找到一个集合 $A\subseteq\mathbb{N}$（在标准模型中），它定义算术句子的标准真谓词，但不能用复杂度为 $\leq n$ 的公式来定义。为此，我们将两种构造结合起来：（迭代）跳跃逆定理，以及 [16, Chapter V] 和 [17, Chapter XII] 中介绍的 n-泛型构造。接着，我们将证明这一论证可以在算术中形式化，并利用引理 72 构造一个使用有限语言的理论，该理论在每个模型中都定义 $\mathsf{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 谓词，但不能一致地做到这一点。下文中， $\leq_T$、 $\equiv_T$ 分别表示图灵可归约性和图灵等价性。

让我们回顾一下 n-通用集的定义及其基本性质。

定义 69。 设 s 为一个有限二进制序列。我们通过对 ϕ的复杂度作归纳，为含有一个二阶变量 X 的一阶公式定义强迫关系 $s\Vdash\phi$ for ϕ:

- 如果 ϕ 是一个一阶原子公式，则 $s\Vdash\phi$ 当且仅当 $\mathbb{N}\models\phi$。
- 如果 $\phi=n\in X$，则 $s\Vdash\phi$ 当且仅当 $s(n)=1$（特别是 $|s|>n$）。
- 如果 $\phi=\neg\psi$，则 $s\Vdash\phi$ 当且仅当对所有 $t\supseteq s$， $t\nVdash\psi$。
- 如果 $\phi=\psi\vee\eta$，则 $s\Vdash\phi$ 当且仅当 $s\Vdash\psi$ 或 $s\Vdash\eta$。
- 如果 $\phi=\exists x\psi(x)$，那么 $s\Vdash\phi$ 当且仅当存在某个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $s\Vdash\psi(n)$。

定义 70. 令 $A\subseteq\mathbb{N}$。

- 我们称 A 强迫 ϕ，当且仅当存在某个有限的 $s\subseteq A$，使得 $s\Vdash\phi$。
- A 是 n-通用的，当且仅当对于每个 Σ^0_n 句子 ϕ $A\Vdash\phi$ 或 $A\Vdash\neg\phi$。

定理 71. 集合 $A\subseteq\mathbb{N}$ 是 n-通用的，当且仅当对于每个 $\phi\in\Sigma^0_n\cup\Pi^0_n$，$(\mathbb{N},\ A)\models\phi$ 当且仅当 $A\Vdash\ \phi$.

引理 72. 对于任意 $n\in\omega$，存在一个集合 $A\subseteq\mathbb{N}$，使得理论$(\mathbb{N})\subseteq\mathbb{N}$ 在$(\mathbb{N},\ A)$中是可定义的，但理论$(\mathbb{N})$ 不能在$(\mathbb{N},\ A)$ 中用复杂度为 $<\Sigma_n$的公式定义。

证明。 对于给定的 n，我们将找到一个集合 A，使得:

a. $A\oplus 0^{(n)}$ 计算 $0^{(\omega)}$。

b. $A \oplus 0^{(n)}$ 计算 $A^{(n)}$。

我们断言，如果 A 满足 a. 和 b.，那么 Th(ℕ) 在 (ℕ, A) 中不能用复杂度为 $k < n$ 的公式定义。如果可以，那么 $0^{(\omega)} \leq_T A^{(k)}$. 由此会产生如下矛盾：

$$A^{(n)} \leq_T 0^{(n)} \oplus A \leq_T 0^{(\omega)} \oplus A \leq_T A^{(k)}.$$

条件 a. 将由跳跃逆定理的构造来保证（见 [16, 定理 V.2.24]），而条件 b. 将由构造一个n-通用对象来保证（见 [17, XII.1.11]）。如 [17, 命题 XII.1.6], 所述，将强迫关系限制在 Σ_n 句子上后，它在 $0^{(n)}$中是可计算的。我们固定一个 $\phi_i(X)$，枚举含有一个二阶变量的Σ^0_n 公式，并固定一个 ξ_i，枚举所有 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 句子。

我们分阶段构造 A。在每个阶段 n，我们都有一个有限的二进制序列 s_n。我们按如下方式进行：

- 如果 $n+1$ 为偶数，设为 $2k$，那么我们考察公式 ϕ_k。如果存在一个扩张$s \supsetneq s_n$ 使得 $s \Vdash \phi_k$ 成立，那么我们令 s_{n+1} 为满足条件的字典序最小的s。否则，我们令 $s_{n+1} := s_n$。

- 如果 $n+1$ 是奇数，比如说 $2k+1$，那么当 ξ_k 为真时，我们令 s_{n+1} 等于 $s_n \frown \langle 1 \rangle$；当 $\langle 0 \rangle$ 它为假时，则令 s_{n+1} 等于 $s_n \frown$。

最后，我们令 $s = \bigcup s_n$，并令 A 为其特征函数是 s 的唯一集合。显然， A 是 n-泛型的。

事实上，假设 $A \nVdash \phi$ 且 $\phi = \phi_k$。根据定义，对于每个 $s \subseteq A$，都有 $s \nVdash \phi_k$。特别地，$s_{2k} \nVdash \phi_k$，因此 $s_{2k} = s_{2k-1}$。此外，没有任何 $\tau \supset s_{2k}$ 强制 ϕ_k，所以特别可以得出 $s_{2k} \Vdash \neg\phi_k$。至此， n-泛型性 A 的证明完成。我们要检查 A 是否满足条件 a. 和 b.。

断言 I: $A \oplus 0^{(n)}$ **计算** $0^{(\omega)}$。集合 $0^{(\omega)}$（ $k < \omega$ 对应的 $0^{(k)}$ 的简单并）是标准算术真谓词 理论(ℕ) 的图灵度。我们将说明如何从 $A \oplus 0^{(n)}$ 计算出后一个集合。任取 k。我们要判定 $\xi_k \in$ 是否属于 理论(ℕ)。我们归纳地计算有限序列的序列

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \ldots \subseteq s_{2k+1}.$$

假设我们知道 s_{2m}。那么，我们将 s_{2m+1} 计算为与 A一致的 s_{2m} 的唯一一步扩张。另一方面，如果我们知道 s_{2m-1}，就可以将 s_{2m} 定义为按字典序最小、扩张 s_{2m-1} 并迫使 ϕ_m成立的序列。

最后，我们设 $\xi_k \in$ Th(ℕ) 当且仅当 s_{2k+1} 通过添加单个数字 1 扩张了 s_{2k}。

断言 II: $A^{(n)} \equiv_T A \oplus 0^{(n)}$. 只需证明 $A^{(n)} \leq_T A \oplus 0^{(n)}$。我们要检查，对于任意 $\Sigma^0_n(A)$ 公式 ϕ，$\phi(A)$ 是否成立。如前所述，我们可以根据 $A \oplus 0^{(n)}$ 计算出序列 s_0、s_1、s_2，.....。假设 $\phi = \phi_k$。我们断言， $\phi_k(A)$ 成立，当且仅当 s_{2k} 非平凡地扩展 s_{2k-1}。由于 A 是 n-泛型的，我们可以如下推理：

$$\begin{aligned}(\mathbb{N}, A) \models \phi_k(A) &\equiv A \Vdash \phi_k \\ &\equiv \exists s \subset A \;\; s \Vdash \phi_k \\ &\equiv s_{2k} \Vdash \phi_k \\ &\equiv s_{2k-1} \subsetneq s_{2k}\end{aligned}$$

第一个等价关系由 [17, 命题 XII.1.10], 得出；第二个是一个定义，第三个和第四个由构造得出。现在请注意，序列 s_i 可以使用 $A \oplus 0^{(n)}$ 作为预言机来计算。事实上，要根据 s_{2k-1} 计算 s_{2k}，我们只需知道是否存在 $s \supsetneq s_{2k-1}$ 使得 $s \Vdash \phi_k$，而正如我们之前提到的，这是一个 Σ_n 事实。要根据 s_{2k} 计算 s_{2k+1}，我们只需检查集合 A 中对应的那一位是 0 还是 1。至此，论证结束，引理的证明也就完成了。

□

在引理 72 中，我们构造了 $\mathbb{N}$ 的一些子集，它们定义了 Th($\mathbb{N}$)，但所用公式的复杂度不低于某个固定的 k。我们将检查这一构造实际上可以由一个理论刻画，从而将定理 64 推广到有限语言中的理论。

定理 73. 存在一个皮亚诺算术 的有限语言扩展理论 U，它施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性，但不能在模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 意义下句法定义$\mathrm{UTB}^{-}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$。

证明。与之前一样，在证明中，理论间所有的可定义性都取模 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$。固定一个算术公式的原始递归枚举 ($\phi_i$)，并对每个 k，固定一个带有单个二阶变量 X 的算术句子的枚举 (ψ_j^k)。我们将构造一个理论 U，其语言为加入两个谓词A、T_ω和一个常元c后的算术语言。U 的公理包括 PA 的公理、扩展语言的完整归纳公理模式，以及下文描述的无限列公理。

我们首先定义一个辅助的理论序列。对于每个 k，理论 α_k 声称，A 是由 Th($\mathbb{N}$) 的 k-泛型代码构造而来的。更准确地说，α_k 由句子 $\alpha_k^{\phi(x)}$ 组成，其中 $\phi(x) \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$，而 $\alpha_k^{\phi(x)}$ 声称:

„对于每个 x，都存在一个 m 和一个有限序列组成的序列 $\emptyset = s_0 \subseteq s_1 \subseteq \ldots \subseteq s_m$，满足下述条件，并且对于所有 $y \leq x$，$A(y)$ 当且仅当 $s_m(y) = 1$，其中关于序列 s_{i+1} 的条件如下:

- 情形 I: 如果对于某个 l，$j = 2l$，那么
  - 如果存在一个序列 $s \supsetneq s_j$ 使得 $s \Vdash \psi_j^k$，那么 s_{j+1} 就是满足条件的、严格延伸 s_j 的 s 中按字典序最小的那个。– $s_{j+1} = s_j$，否则。

- 情形 II: 如果 $j = 2l + 1$，那么对于 $i \in \{0, 1\}$，$s_j = s_{2l} \frown \langle i \rangle$；此外，如果存在一个闭项 t 使得 $\phi_j = \phi(t)$，那么:
  - If $\phi(t^\circ)$, then $s_{j+1} = s_j \frown \langle 1 \rangle$.
  - If $\neg\phi(t^\circ)$, then $s_{j+1} = s_j \frown \langle 0 \rangle$.

请注意，虽然在情形 I 中，s_{j+1} 相较于s_j所增加的比特数没有上限，但在情形 II 中，s_{j+1} 始终是s_j 扩张一个比特而成。

最后，U 是以下句子的并集:

- 皮亚
诺算术。
- 扩展语言的完全归纳方案。
- $c = \underline{k} \to \alpha^{\phi\ (\bar{x})\ k}$，对于 ϕ 皮亚诺算术的 $\mathcal{L}$公式。
- $c > \underline{3m} \to \forall t \Big(T_\omega(\ulcorner \phi_m(t) \urcorner) \equiv \phi_m(t^\circ) \Big)$.

只需检查 U 在语义上定义了 UTB，但在语法上没有定义。

断言 I： U **在语义上定义**UTB（$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$）

设 $\mathcal{M} \models U$。那么，在 M 中， c要么是标准数，要么是非标准数。若 c 是非标准数，则 T_ω 满足 UTB。若 $c = k \in \omega$，则固定任意一个标准算术公式 ϕ 和一个闭项 $t \in M$（可能是非标准的）。我们描述一种 $\mathcal{M}$-可定义的过程，用于检查 $\phi(t^\circ)$ 是否在 $\mathcal{M}$ 中成立。

固定 d，使得 $\phi(t) = \phi_d$ 出现在我们的枚举中。我们执行 A 的构造。注意，公理 $\alpha_k^{\phi(x)}$ 中定义的序列 $s_0 \subseteq s_1 \subset \ldots$ 的初始片段实际上可以由 A 定义：偶数步骤可以在 $\mathcal{M}$ 的意义下计算，其预言机是所有为真的带参数 Σ_k 句子组成的可定义集。奇数步骤则可以直接在预言机 A 中定义（我们只需检查 A 在相应位置上是 0 还是 1）。特别地，当且仅当 s_{2d+1} 的最后一位是 1 时，我们设 $T(\phi(t))$。

断言 II： U **不能在语法上定义**UTB($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)

假设 U 用一个公式 ϕ 句法定义了 UTB($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$)。假设 $\phi \in \Sigma_k$。考虑模型 $\mathcal{N}$，其算术部分是标准模型 $\mathbb{N}$，常元 c 被解释为 $3k$， T_ω 被解释为针对算术公式 Σ_k 的部分算术真谓词（可以假设其中包括 ϕ_0，……，ϕ_{k-1}），而 A 是证明引理 72 时为 $n = 3k$ 构造的集合。那么显然 $\mathcal{N} \models U$。

在 Σ_k 公式 ϕ 中，我们可以将部分算术谓词 Tr_{Σ_k} 代入 T_ω，并将 $\underline{3k}$ 代入 c，从而得到一个 Σ_{2k+1} 公式 ϕ^*，它在 $(\mathbb{N}, A)$ 中定义了 Th($\mathbb{N}$)。然而，根据引理 72，对于任意 $l < 3k$，Th($\mathbb{N}$) 都不能用谓词 A 中的 Σ_l 公式来定义。 □

6 总结与开放问题

正如我们在引言中提到的，本文探讨的问题有几个不同的“维度”。为便于读者在这些问题之间查阅，下面总结我们的研究结果。

下表讨论理论施加类真语义性质这一问题。

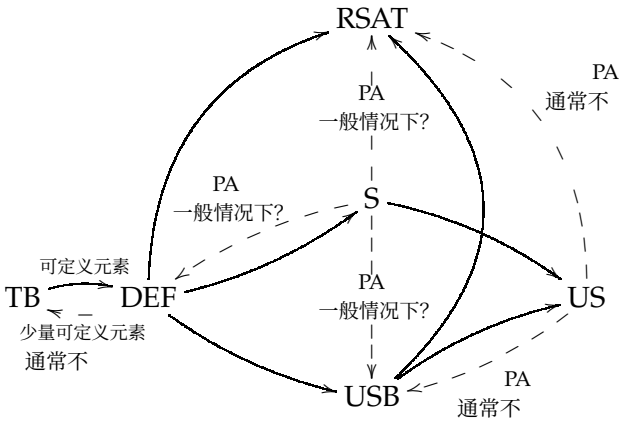
	序列理论、有限语言						皮亚诺算术、可数语言
	蕴含初等等价		PreservDef		ImpElem		ImpRecSat
	非单一	单	非单一	Uni	非单一	Uni	
语义定义	TB	TB	DEF	DEF	USB	USB	RSAT
句法可定义性	none	TB	none	DEF	none	USB	none

第一行列出了我们的分类适用的理论。第二行列出了本文考察的主要模型论性质（及其缩写）。前面三项各有两个版本：一致版本和非一致版本。“语义（句法）可定义性”一行列出的是那些可由相应性质在语义（句法）可定义性意义下刻画的理论。我们写“无”时，表示没有任何主要理论可由相应性质刻画。在所有这些情形下，定理 73 的证明中定义的理论都充当反例。此外，在语义意义下，对于 PA 的扩张，这些性质的非一致版本从左到右的限制依次更强（浅灰色的性质和理论）。例如，任何要求 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$递归饱和性（对于 PA 的扩张）的理论都会保持

$\mathcal{L}_{\text{PA}}$可定义性，但存在一个理论（DEF）保持 $\mathcal{L}_{\text{PA}}$可定义性，却不要求 $\mathcal{L}_{\text{PA}}$递归饱和性。对于所有自然序列理论，除某些退化情形外，模型论性质的一致版本及其相应理论也有同样的关系（深灰色的性质和理论）。

在本文中，我们还分析并考察了类真谓词所能施加的语义性质所对应的公理化理论之间的关系。现在，我们想绘制一张图，展示这些理论之间的相互依赖关系。

下文中，从 U 指向 V 的实心箭头表示 V 在**语法上**定义了 U（可以将其理解为 U 嵌入到 V 中）。若我们不从 V 指向 U 画箭头，则表示在任何序列理论上，V 都不能**语义上**定义 U。唯一的例外是存在一条由其他箭头组成的路径。如果我们不知道 V 是否**语义上**定义了 U，或者这种情况有时会发生、但并非典型情况，我们就画一条带问号的虚线箭头（这始终表示我们甚至不知道语义可定义性是否成立），并且可能附上一些关于已知情况的说明。



图中的大多数条目，无论是肯定的还是否定的，都在本文中直接陈述，主要见第 4 节。之所以没有从 US 到 S 的箭头，是因为 US 自然地定义了 USB；根据命题 47，我们知道，在任何顺序理论上，S 都不能在语义上定义 USB，因此，从 US 到 S 的任何箭头都会导出 USB 与 S 之间一个并不存在的箭头。

理论 RSAT 有些与众不同。[4] 首先请注意，在任意顺序理论上，RSAT 都施加递归饱和性，而其他列出的理论通常都不会这样做，因此 RSAT 无法在其中任何一个理论上被语义定义。

另一方面，很容易验证，RSAT_K 句法定义了 USB_K（因此也定义了 DEF_K）。具体而言，$S(\ulcorner\phi(x)\urcorner, y)$ 当且仅当 $\forall x\big(R(p_{\phi(y)}, x, y) \rightarrow \underline{1}(x)\big)$成立，其中 $p_{\phi(y)}$是（可由 $\ulcorner\phi(y)\urcorner$容易定义的）单元素类型

$$(\phi(y) \wedge \underline{1}(x)) \vee (\neg\phi(y) \wedge \underline{0}(x)).$$

由此可知，对于包含 PA 的理论，RSAT_{id} 定义了 US_{id}。此外，定理 46 的证明可以改编，以证明对于与 $B\Sigma_n + \neg I\Sigma_n + \text{exp}$ 相容的 $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ 中的理论，RSAT_{id} 在语义上并不定义 US_{id}：给定一个递归饱和模型 $\mathcal{M} \models B\Sigma_n + \neg I\Sigma_n + \text{exp}$，可以找到一个 A 集合，它可由一个参数$a \in M$ 定义，但不包含任何可由 a定义的元素。然后，可以规范地

[4]在本文中，我们仅在 PA 的语境下定义了 RSAT。然而，遵循 USB 等其他理论的情形，可以提出一个适用于任意序列理论的定义。

将 $\mathcal{M}$ 扩充为 RSAT_{id} 的一个模型，方法是将 $R(p,x,b)$ 解释为所有实现 $\{\phi_i^p(x,b)\}$ 最大片段的元素所构成的集合。扩充后模型的自同构群与 $\mathcal{M}$ 的自同构群相同，因此可以直接改写证明的其余部分。对于一般理论，除此之外基本上没有已知结果。

下面列出一些尚待解答的问题，以及进一步研究的方向。

Q1 本文考察了可定义性保持这一概念（即算术可定义的元素在给定理论的子模型之间满足相同的定义）。我们还考察了那些要求可定义对象具有相等性的理论，但未能为这类理论给出恰当的刻画。一种可能的候选理论是可定义性理论 DEF。

> 令 U 为语言 $\mathcal{L}$ 中的任意序列理论，且 $K\colon\ S_2^1 \lhd U$。是否存在一种有限语言中的递归可枚举序列理论，它要求 $\mathcal{L}$ 可定义对象具有相等性，但在语义上不定义 $\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L})$（模 $\mathcal{L}$）？如果答案是否定的，那么（模 $\mathcal{L}$）$\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L})$ 的句法可定义性又如何？

Q2 本文探讨了语义性质与相应理论之间关系的大多数问题，都得到了明确的答案。然而，递归饱和性并非如此，原因有三：首先，我们假设理论包含完整 PA，因此一般性大为受限。其次，我们只能得到 RSAT 的语义可定义性，而非句法可定义性，因此这种刻画在某种意义上并不充分，因为它不像其他值得关注的语义概念那样，能得到漂亮的“完备性式”结果。不过，我们的反例似乎实质上依赖于相关理论是无限的这一事实。第三，我们的刻画仅适用于可数语言中的理论（因为用到了省略类型定理）。这三个问题引出了以下问题：

> 假设 U 是一个带有 皮亚诺算术 $\subset U$ 的有限理论，它施加了 $\mathcal{L}_U$-递归饱和性。U 是否在语法上定义了$\mathrm{RSAT}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$?
>
> 假设 U 是一个可数语言 $\mathcal{L}_U \supset \mathcal{L}$ 中的序列理论，带有 $K\colon\ S_2^1 \lhd U$，它施加了 $\mathcal{L}$-递归饱和性。U 是否在语义上定义了$\mathrm{RSAT}_K(\mathcal{L})$？假设 U 是有限的。它是否在语法上定义了 $\mathrm{RSAT}_K(\mathcal{L})$？
>
> 假设 U 是一个带有 皮亚诺算术 $\subset U$ 的任意理论（不一定使用可数语 言），它施加了 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性。$U$ 是否在语义上定义了$\mathrm{RSAT}_{id}(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$?

Q3 我们知道，对于通过对 S_2^1的恒等嵌入扩张皮亚诺算术的理论 U，$\mathrm{USB}_{id}(\mathcal{L}_U)$ 定义了 $\mathrm{S}_{id}(\mathcal{L}_U)$。然而，皮亚诺算术似乎是实现这一可定义性的必要条件，而且我们可以预期，用于区分 USB 与 US 的方法可以加以修改，以得到这种更强的分离。我们指出，根据定理 45，对于皮亚诺算术的任意有限片段，USB_{id} 在语义上不能无参数地定义 S_{id}。不过，此时我们还不能排除存在带参数的定义。

> 设 U 是一个递归可枚举序列理论，并且 $K\colon\ S_2^1 \lhd U$。$\mathrm{USB}_K(\mathcal{L}_U)$ 是否在模 $\mathcal{L}$ 的意义下（可能带有参数）语义上定义了 $\mathrm{S}_K(\mathcal{L}_U)$？若取 U 为 PA 的一个有限片段，取 K 为恒等嵌入，结论是否仍然成立？

Q4 我们关于理论间相互依赖关系的图中缺少一条箭头，而且目前确实不清楚它们之间应满足何种分离条件。

> 设 U 是一个递归可枚举序列理论，并设 $K\colon\ S_2^1 \lhd U$。$\mathrm{DEF}_K(\mathcal{L}_U)$ 是否在语义上定义 $\mathrm{S}_K(\mathcal{L}_U)$ 模 $\mathcal{L}_U$？

Q5 如前所述，除了相当琐碎的观察之外，各理论之间可定义性关系图中 RSAT 的地位完全未定。

设 U 是一个递归可枚举序列理论，且 $K\colon\ S_2^1 \lhd U$。$\mathrm{RSAT}_K(\mathcal{L}_U)$ 是否在模 $\mathcal{L}_U$ 的意义下语义定义 $\mathrm{S}_K(\mathcal{L}_U)$？它是否定义 $\mathrm{USB}_K(\mathcal{L}_U)$？

Q6 在本文中，我们考察了理论语义性质与定义类真谓词之间的关系，以及这些谓词之间的可定义性关系。结合这些结果，我们可以得到各种语义性质本身之间的一些蕴含关系。例如，如果 U 包含皮亚诺算术，并施加 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-递归饱和性，那么它也会施加模型之间的 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-初等性。虽然我们没有系统地研究这类关系，但我们注意到其中至少有一些会引出非平凡的问题，尤其是在施加有限理论等附加条件时。也许还可以提出更多这类问题。

设 $\mathcal{L}$ 是一种语言。是否存在一种有限序贯理论，能够（一致地）施加 $\mathcal{L}$-初等等价，却不能（一致地）保持 $\mathcal{L}$-可定义性？对于保持可定义性／施加初等性这一对关系，也有同样的问题。

Q7 上文中，我们已经提出过这样的问题：在要求递归饱和的一般序列理论中，RSAT 是否可以在语义上定义？下面的问题从一个略有不同的角度探讨这一问题。

设 $\mathcal{L}$ 是一种语言。是否存在一种有限序列理论，它要求 $\mathcal{L}$-递归饱和，却不能一致地要求 $\mathcal{L}$-初等性？

Q8 在第 4.2.1 小节中，我们分析了特定模型中满足真理类概念理论的谓词之间的可定义性。我们证明，在每个非标准的皮亚诺算术模型中，都存在一个满足 TB^- 的谓词，但无法借此定义出满足 USB^- 的谓词；同样，只有在 $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ 的模型中，才能从满足 TB^- 的谓词定义出满足 DEF^- 的谓词。关于真理类理论互可定义性的这类问题，可以扩展到本文引入的其他理论。例如，我们可以探讨 DEF^- 与 USB^- 之间的关系。

对于哪些皮亚诺算术模型 $\mathcal{M} \models$ 皮亚诺算术，对每个满足 $(\mathcal{M}, D) \models \mathrm{DEF}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$ 的 $D \subseteq M^2$，初等图$(\mathcal{M}, D)$ 都定义了 $\mathrm{UTB}^-(\mathcal{L}_{\mathrm{PA}})$？我们猜想，这些恰好是皮亚诺算术皮亚诺算术的素模型。

参考文献

[1] S. Buss. 现场割消去，第 245–277 页。Springer International Publishing, Cham，2015 年。[2] E. Casanovas 和 R. Farré。《不完备理论中的省略类型》。《符号逻辑杂志》，61(1):236–245，1996 年。[3] C.C. Chang 和 H.J. Keisler。模型论。Dover 数学丛书。Dover Publications，2012 年。[4] Ma. Łełyk 和 B. Wcisło。弱真理论的模型。《数学逻辑文档》，56:453–474，2017年。

[5] F. Ferreira 和 G. Ferreira。罗宾逊算术 Q 中的可解释性。《符号逻辑通报》，19(3):289–317，2013年。[6] P. Hájek 和 P. Pudlák。一阶算术的元数学。施普林格，1998年。[7] V. Halbach。真理公理理论。剑桥大学出版社，2011年。[8] R. Kaye。刻画皮亚诺算术的模型论性质。《符号逻辑杂志》，56(3):949–963，1991年。[9] R. Kaye。皮亚诺算术模型。牛津：克拉伦登出版社，1991年。[10] R. Kossak。关于算术强片段模型的扩张。108(1):223– 232，1990年。[11] R. Kossak。关于《算术强片段模型的扩张》的更正。112(3):913–914，1991年。[12] R. Kossak。关于算术递归饱和模型的四个问题。《圣母大学形式逻辑杂志》，36(4):519–530，1995年。[13] R. Kossak 和 J. Schmerl。皮亚诺算术模型的结构。英国牛津：克拉伦登出版社，2006年。[14] A. H. Lachlan。完全满足类与递归饱和。《加拿大数学通报》，24:295–297，1981年。[15] P. Lindström。不完备性的若干方面。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2017年。[16] P. Odifreddi。经典递归论：函数与自然数集理论。经典递归论第 1 部分。北荷兰出版社，1989年。[17] P. Odifreddi。经典递归论：函数与自然数集理论。经典递归论第 2 部分。北荷兰出版社，1989年。[18] F. Pakhomov 和 A. Visser。关于 Krajewski 的一个问题。《符号逻辑杂志》，84:343 – 358，2019年。[19] S. T. Smith。皮亚诺算术中的可扩张集。《美国数学会汇刊》，316(1):337–367，1989年。[20] A. Visser。为什么理论 R 特别？载于 Neil Tennant（编），《基础探索：纪念 *Harvey Friedmann* 的论文集》，第 22 卷，《纪念文集》。College Publications，2014 年。[21] A. Visser。Enayat 理论。未发表的笔记，2019年。[22] A. Visser。小即非常小原理。《数学逻辑季刊》，65(4):453– 478，2019年。