arXiv:2304.00376v1 [math.OC] 1 Apr 2023

引导和控制水波的最优策略

Sebastiano Cominelli * Carlo Sinigaglia† Davide E. Quadrelli ‡ Francesco Braghin§

摘要

本文提出了一种控制表面水波及其与浮体相互作用的新方法。我们考虑一个被控制区域包围的浮动目标刚体，并在该区域内设计了三种复杂程度递增的控制策略：一种通过控制气水界面处压力实现的主动策略，以及两种通过设计额外的受控浮动装置实现的被动策略。我们分别将该装置建模为膜和薄板，并研究这种建模选择对整体受控系统性能的影响。我们将该问题表述为一个最优控制问题，其基础状态动力学由一组耦合偏微分方程描述，这组方程刻画了频域中表面水波与浮动目标物体之间的相互作用。考虑受控浮动装置时，还会引入一层额外的中间耦合。该最优控制问题旨在最小化一个对浮体非期望运动进行加权的代价泛函。我们推导出一组一阶必要最优性条件，并使用有限元法进行数值求解。随后，数值模拟表明，该方法能够有效降低浮体所受的水动力载荷。

1 引言

通过设计合适的主动或被动装置来控制水波传播，这一构想主要受到最初由 [1, 2] 针对电磁波提出的隐身理论的启发。要使障碍物对测量相应场的探测器不可见，所采用的主要理论工具是变换理论（TT）；该理论可得出一组材料属性分布，从而改变波在介质中的传播 [3]。在过去二十年间，类似技术已在多种不同的物理领域中得到开发和应用，这些领域的动力学方程具有共同的数学结构，例如声学 [4], 、弹性 [5], 、热传导 [6], 和水波。具体而言，Farhat 等人 [7] 首次将 TT 应用于水波，设计了一种超材料，用于减少表面波照射刚性障碍物时产生的后向散射。随后， [8], 以及 [9, 10], 研究了多个漂浮圆柱环绕固定障碍物所带来的益处。

另一种方法由 [11, 12], 提出：通过选择合适的周围海床形状，引导水波绕过刚性目标物。

*Sebastiano Cominelli是米兰理工大学机械工程系的博士生，地址：意大利米兰 20133（电子邮箱：sebastiano.cominelli@mail.polimi.it），通讯作者。

†Carlo Sinigaglia是米兰理工大学机械工程系的博士生，地址：意大利米兰 20133（电子邮箱：carlo.sinigaglia@polimi.it）

‡Davide E. Quadrelli是米兰理工大学机械工程系的博士生，地址：意大利米兰 20133（电子邮箱：davidee.quadrelli@polimi.it）。§Francesco Braghin教授是米兰理工大学机械工程系的正教授，地址：意大利米兰 20133（电子邮箱：francesco.braghin@polimi.it）。

随后， [13] 提出了一种由许多穿透流体的质量块组成的结构；该结构与合适的海床形状相结合，可限制作用于固定在海床上的水下结构的水动力作用。

然而，对于未与地面刚性连接的漂浮装置，无法采用这些方法。在 [14] 中，有人提出通过改变海床形状来屏蔽漂浮物体，使其免受重力波影响；但在风力涡轮机或其他设施等实际应用中，这些物体大多安装在深海区域，而海床形状对波传播影响甚微。

受海洋浮冰建模技术的启发， [15, 16], 在 [17]提出了一种更为实际的装置。该装置由一块薄浮板组成，环绕着一个处于水深恒定环境中的圆形无限长圆柱；其材料属性通过共形映射法确定 [1]。然而，他们的解基于一些假设；对于漂浮物体，这些假设应予以放宽，因为其中假定障碍物固定不动且延伸至海床。此外，所设计的材料属性要求板具有各向异性和非均匀性，这在实际制造中可能存在困难。最近， [18] 提出通过优化漂浮在圆柱周围的均匀环形板的厚度，来减小漂浮圆柱的振荡；而 [19] 则研究了一种由许多同心均匀层构成的复合板。两种策略均基于轴对称漂浮物体的解析解。

本文建立了一个最优控制问题（OCP），可将水与目标浮体之间的流体动力相互作用纳入考量。该最优控制问题的建模还能够处理复杂几何形状以及对材料属性的实际约束。此外，在该问题的建模中纳入不同的目标函数也相对简单。通过这种方式，我们能够设计出接近实际应用的装置。我们选择作用于障碍物周围区域的控制机制。具体而言，我们研究了与水面相互作用的主动和被动控制策略。

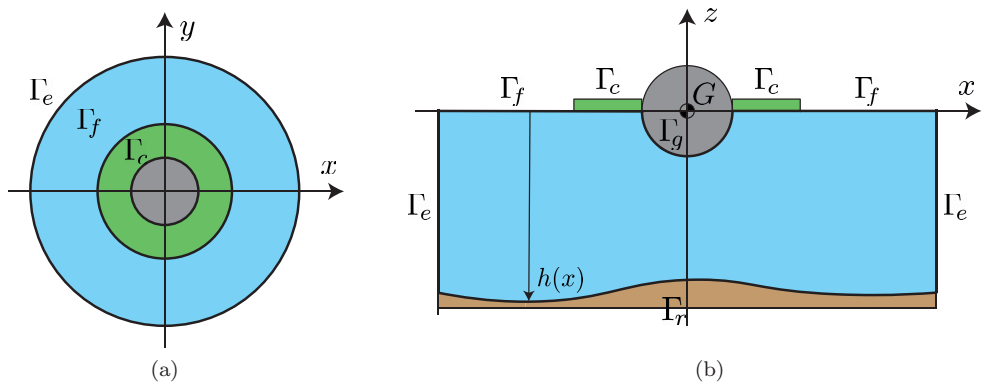
浮动结构的刚体运动可通过代价函数进行度量，因此，该问题被表述为一个最优控制问题（OCP），并受到一组耦合偏微分方程（PDE）的约束，这些方程描述了水和控制装置动力学。

为寻求最优解，我们采用拉格朗日方法推导一阶必要条件，参见例如 [20], ，随后针对若干相关测试案例，使用基于梯度的迭代优化算法求解这些条件。

这种方法的一个显著优势是可以处理任意几何形状的问题，这在工程应用中至关重要。此外，类似于 [21], 提出的一种通过求解偏微分方程约束的最优控制问题来设计声学隐身斗篷的方法，我们预计能够实现一种窄带高性能装置，这为涉及涌浪的应用提供了良好基础。涌浪是由远处风暴产生的充分发展的稳态水波，其特点是具有窄带频谱 [22]。

下面简要介绍本文的组织结构。第2节描述所采用的物理模型及其主要假设；随后，第3节提出一种主动控制策略，用于改变漂浮目标周围气水界面上的压力。

由此得到的最优控制问题（OCP）属于线性二次型问题，可以作为大型线性系统高效求解；此外，借助例如模型降阶策略，还可采用快速求解技术以满足实时应用的需求 [23]。这一控制思路非常适用于浮式系统，例如浮式生产储卸油装置（FPSO），因为这类系统可以投入能量进行主动控制；相反，浮式涡轮机通常难以做到这一点，因此需要寻求被动机制。在处理完主动线性问题后，我们将在第4节和第5节讨论被动策略。具体而言，我们分析两种控制机制：分别使用漂浮弹性膜或板覆盖涡轮机周围部分水面的区域。这两个模型



(a) (b)

图 1：计算域的俯视图 (a) 和侧视图 (b)。浮体是一个球体，其质量密度为水的一半；绿色区域表示控制面。

用于描述耦合动力学的模型最初是为研究浮冰对水波的影响而提出的 [15, 16], ，如今则可方便地作为最优控制问题的约束条件。
在这种情况下，通过改变浮动装置的刚度和惯性特性来调节控制：提高局部刚度会加快水波的传播速度；相反，增大惯性则会使水波减速。请注意，与 [17], 不同，这一框架保证了膜和板均具有各向同性，因此我们获得了一种更易于制造的装置。

2 问题陈述

本节将简要概述本文其余部分所采用的主要建模方程，并总结其推导过程；这对于第 3、4 和 5 节尤其有用，因为其中考虑的不同控制作用会导致系统动力学发生变化。

关于详细推导，请参阅专著 [24]。我们采用的主要假设是：流体无黏、无旋，且波幅较小。

考虑图 1 所示的水体 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，该图展示了海洋环境中一段圆柱形区域的俯视图和侧视图。其互不相交的边界为 Γ_f、Γ_c、Γ_r、Γ_g 和 Γ_e。Γ_f 和 Γ_c 分别是气水界面的自由部分和受控部分，分别由随时间变化的表面 $z = \zeta(x, y, t)$ 及其平衡位置 $z = 0$ 描述；Γ_r 是由函数 $h = h(x, y)$ 描述的海底表面。Γ_g 是目标浮体的湿表面，其位置取决于物体运动；Γ_e 是出于计算需要引入的人工边界。

假设在所关注的时间和空间尺度上，水密度的变化可以忽略不计，则连续性方程和 Navier–Stokes 方程分别充分描述质量和动量的基本守恒定律：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \upsilon \Delta \mathbf{u}, \tag{2}$$

内部 t 计算域 Ω，其中 u = u(x t) $\in \mathbb{R}^3$ 为速度矢量场，$\mathbf{u}_t$ 为其

时间偏导数，而 $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ 表示采用经典流体动力学记法的对流项，即 $(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})_i=\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$。此外，$P=P(\mathbf{x}\ t)$ 为压力场，$\rho=1030\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$为水密度，$g=9.81\mathrm{m\ s^{-2}}$ 为重力加速度，υ为运动黏度系数；向量 $\mathbf{x}=(x,y,z)$ 中的 z 轴竖直向上。假设流体为无黏（$\upsilon=0\mathrm{m^2\ s^{-1}}$）无旋流，则速度场可表示为标量势 $\Phi(\mathbf{x}\ t)$ 的梯度，参见例如 [24]

$$\mathbf{u}=\nabla\Phi. \tag{3}$$

因此，合并（1）和（3）可知，Φ必须满足拉普拉斯方程

$$\Delta\Phi=0. \tag{4}$$

在相同的假设下，从（1）和（2）出发可以推导出众所周知的非定常伯努利方程，得到

$$-\frac{P}{\rho}=gz+\Phi_t+\frac{1}{2}\|\nabla\Phi\|^2 \qquad \text{in } \Omega. \tag{5}$$

最后，如果波幅 A 与波长 λ 之比 $\varepsilon\coloneqq 2\pi\frac{A}{\lambda}$ 远小于 1，即 $\varepsilon\ll 1$，则可以忽略（5）中的二次项，从而得到线性关系

$$-\frac{P}{\rho}=gz+\Phi_t \qquad \text{in } \Omega. \tag{6}$$

在本文中，我们针对具有特定频率的系统，研究能够在时间上无限期运行的控制策略。因此，为了降低数值求解的计算开销，采用频域方法。采用通常的记号，定义以下变量：

$$\begin{pmatrix}\Phi(\mathbf{x},t)\\ \zeta(x,y,t)\\ P(\mathbf{x},t)\end{pmatrix}=\Re\left\{\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{x})\\ \eta(x,y)\\ p(\mathbf{x})\end{pmatrix}e^{j\omega t}\right\}. \tag{7}$$

其中，ϕ、η 和 p 是复值函数，ω 是角频率。因此，方程（4）和（6）分别变为

$$\begin{aligned}\Delta\phi&=0,\\ -\frac{p}{\rho}&=gz+j\omega\phi.\end{aligned} \tag{8}$$

2.1 边界条件

现在，我们简要介绍定义速度势 ϕ 边值问题的其余条件。

e s海床被视为无限刚性的边界；因此，根据方程 (3)，我们可以得出 at 速度 沿 Γ_r 法线方向的分量为零，即

$$\phi_n=0 \qquad \text{on } \Gamma_r, \tag{9}$$

其中，下标 n 表示沿边界外法向量方向的导数 .

现在考虑边界 Γ_f 和 Γ_c：它们属于表面 $z=\zeta(x,y,t)$，其形状同时取决于空间和时间。然而，在波幅较小（$\varepsilon \ll 1$）的假设下，可以将其近似到一阶为平面 $z=0$。

对表面 $z-\eta=0$ 进行一阶展开，并考虑到 $\varepsilon \ll 1$，可得到如下运动学关系

$$\phi_n = j\omega\eta \qquad \text{on } \Gamma_f \cup \Gamma_c \tag{10}$$

该关系描述了在忽略对流项时的速度连续性，详细
推导见 {v1}。此外，在气水界面上，伯努利方程 (6) 表明

$$-\frac{p}{\rho} = g\eta + j\omega\phi \qquad \text{on } \Gamma_f \cup \Gamma_c. \tag{11}$$

因此，在自由表面 Γ_f上，通过合并前两个表达式可得到关于 ϕ 的边界条件。将 (11) 乘以 $j\omega$ 并利用 (10)，可得到 ϕ 在 Γ_f上的边界条件：

$$g\phi_n - \omega^2\phi = -j\omega\frac{p}{\rho} \qquad \text{on } \Gamma_f, \tag{12}$$

其中，右端表示来自环境的强迫项，例如来自风。相反，控制面 Γ_c 上的动力学取决于所采用的控制类型。在这种情况下，运动学关系 (10) 保持有效，而 (11) 则根据第 3、4 和 5 节所分析的情形而变化。我们定义一个算子 E，其编码了流体速度势 ϕ、垂向位移 η 和控制作用 u 应满足的动态平衡：

$$E(\phi,\eta,u)=0 \qquad \text{on } \Gamma_c.$$

对于浮体的湿表面 Γ_g，需要施加两个条件：对 Γ_g 施加运动学约束，以及物体的力平衡。尽管边界会随物体运动，但在一阶近似下，可假设边界固定在其平衡位置，以简化边值问题 [24], 的求解，从而推导出以下两个描述线性化运动的方程：

$$\phi_n = j\omega\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{X}\} \qquad \text{on } \Gamma_g \tag{13}$$

$$[K-\omega^2 M]\{\mathbf{X}\} = -j\omega\rho\int_{\Gamma_g}\phi\{\mathbf{n}\}d\Gamma + \{\mathbf{f}\} \tag{14}$$

其中，$\{\mathbf{X}\}=(\mathbf{x}^b,\boldsymbol{\theta}^b)\in\mathbb{C}^6$ 是列向量，包含浮体在频域中的六个自由度：三个位移 $\mathbf{x}^b\in\mathbb{C}^3$ 和物体相对于固定点 G的三个转角 $\boldsymbol{\theta}^b\in\mathbb{C}^3$；$\{\mathbf{n}\}=(\mathbf{n},(\mathbf{x}-\mathbf{x}_G)\times\mathbf{n})$，$\{\mathbf{n}\}$：$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$ 是表面的广义法向量，其中 $\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 为外法向量，$\mathbf{x}_G$ 为 G的空间坐标。我们用 $\times$ 表示两个向量的叉积。

向量 $\{\mathbf{f}\}\in\mathbb{C}^6$ 汇集了作用于物体的外载荷，并可考虑风和悬链线系泊缆 [24] 所产生的力的影响；为简便起见，本文其余部分均假设 $\{\mathbf{f}\}=\mathbf{0}$。浮体动力学 (14) 取决于刚度矩阵和质量矩阵

K， $M \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ 分别定义为:

$$
\begin{aligned}
K =& \rho g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & I_2^{\mathcal{A}} & -I_1^{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & 0 & I_2^{\mathcal{A}} & I_{22}^{\mathcal{A}} + I_3^V & -I_{12}^{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & 0 & -I_1^{\mathcal{A}} & -I_{21}^{\mathcal{A}} & I_{11}^{\mathcal{A}} + I_3^V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
M =& \begin{bmatrix} M^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{22}^b + I_{33}^b & -I_{21}^b & -I_{31}^b \\ 0 & 0 & 0 & -I_{12}^b & I_{33}^b + I_{11}^b & -I_{32}^b \\ 0 & 0 & 0 & -I_{13}^b & -I_{32}^b & I_{11}^b + I_{22}^b \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中， $\mathcal{A}$ 是 $S^{\mathcal{A}}$的面积， $S^{\mathcal{A}}$ 是物体相对于平面 $z = 0$的横截面，M^b 是物体质量， $I^{\mathcal{A}}$ 和 I^b 分别是相对于表面$S^{\mathcal{A}}$ 和物体体积 V^b 的第一和第二转动惯量，而 I^V 是浸没体积V的转动惯量，即:

$$
\begin{aligned}
I_i^{\mathcal{A}} &= \int_{S^{\mathcal{A}}} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_i dS \\
I_{ij}^{\mathcal{A}} &= \int_{S^{\mathcal{A}}} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_i \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_j dS \\
I_i^V &= \int_V \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_i dV \\
I_{ij}^b &= \int_{V^b} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_i \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G\right)_j dm
\end{aligned}
$$

出于计算方面的考虑，我们截断了该区域，由此产生一个虚拟圆柱边界 Γ_e ，必须在该边界上施加吸收边界条件以避免人工反射。为简单起见，我们采用一阶辐射条件（例如参见 [25, 26]），该条件能够吸收入射角相对于法线较小的波:

$$
\phi_n^s + \alpha \phi^s = 0 \qquad\qquad \text{on } \Gamma_e \tag{16}
$$

其中$\alpha = jk + \frac{1}{2R}$； ϕ^s 是相对于入射势场 ϕ^i的散射势场，其特征参数为单一角频率 ω 和波数 k； R 是圆柱体 Γ_e的底面半径。注意，由于漂浮障碍物位于计算域中央，且吸收边界是环绕物体的圆柱面，因此散射波预计将近乎垂直于Γ_e传播；只要计算域相对于浮体和控制机制足够大，就能获得可接受的数值近似。

入射场 ϕ^i 是波在没有障碍物且水深恒定的区域内传播时的解析解，即 $h(x, y) \equiv h_0$:

$$
\phi^i = j \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(z + h_0)}{\cosh k h_0} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{17}
$$

其中，$\mathbf{k}$ 为波矢， A 为波幅。波数 $k = |\mathbf{k}|$ 和圆频率ω 必须满足色散关系

$$
\omega^2 = gk \tanh k h_0. \tag{18}
$$

换言之，在没有漂浮障碍物且海深恒定并等于 h_0 的情况下，(17) 是势方程 (8)、带有 $p = 0$ 的自由表面平衡条件 (12) 以及海床条件 (9) 的解析解。有关详细推导，读者可再次参阅例如 [24] 。

辐射条件 (16) 仅适用于散射场，因此我们必须利用 $\phi = \phi^s + \phi^i$，将上述所有方程改写为关于 ϕ^s 的形式，因为 ϕ 被视为总速度势。由此得到以下与刚体动力学及 Γ_c 上压力平衡耦合的线性椭圆型偏微分方程:

$$\begin{cases} -\Delta\phi^s = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi^s_n = 0 & \text{on } \Gamma_r \\ \phi^s_n - \dfrac{\omega^2}{g}\phi^s = 0 & \text{on } \Gamma_f \\ \phi^s_n = j\omega\eta - \phi^i_n & \text{on } \Gamma_c \\ \phi^s_n = j\omega\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{X}\} - \phi^i_n & \text{on } \Gamma_g \\ \phi^s_n + \alpha\phi^s = 0 & \text{on } \Gamma_e \end{cases} \tag{19}$$

$$\big(K - \omega^2 M\big)\{\mathbf{X}\} = -j\omega\rho \int_{\Gamma_g} (\phi^s + \phi^i)\{\mathbf{n}\}\, d\Gamma \tag{20}$$

$$E(\phi, \eta, u) = 0 \qquad \text{on } \Gamma_c$$

为简化起见，假设 Γ_f 上的风压为零，因此入射波被视为在关注区域之外生成；对于涌浪而言，这是一个合理的假设。此外，假设海床水深恒定。在此设定下，散射场 ϕ^s 包含浮体相对于 ϕ^i 所引起的扰动，以及由我们施加的任意控制作用所导致的扰动。

3 主动压力控制

本节将建立并求解主动控制问题，其中将障碍物周围的表面压力视为控制机制。控制空间记为 $\mathcal{U}$，并选为 $L^\infty(\Gamma_c, \mathbb{C}) \cap H^1(\Gamma_c, \mathbb{C})$。我们将代价泛函 $J\colon \mathbb{C}^6 \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$J\big(\{\mathbf{X}\}, u\big) := \frac{1}{2}\{\mathbf{X}\}^\dagger C\{\mathbf{X}\} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathcal{U}}\,, \tag{21}$$

其中，$\{\mathbf{X}\}^\dagger = \{\bar{\mathbf{X}}\}^\top$ 表示 $\{\mathbf{X}\}$ 的厄米共轭，$C \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ 是一个正定加权矩阵；空间 $\mathcal{U}$ 上的范数 $\|u\|_{\mathcal{U}}$ 定义为加权范数

$$\|u\|^2_{\mathcal{U}} := (\bar{u}, u)_{\mathcal{U}} = \alpha_u \|u\|^2_{L^2(\Gamma_c)} + \beta_u \|\nabla u\|^2_{L^2(\Gamma_c)}\,,$$

其中，α_u、$\beta_u > 0$ 是正则化参数，分别用于限制控制作用量和空间控制梯度。特别是，α_u 限制控制作用量，而 β_u对控制梯度施加软约束。

请注意，最优控制问题中涉及的代价泛函不受控制机制影响，因为本文始终旨在控制水流，使浮体运动最小化。

这里考虑的第一个情形是主动源在围绕浮体的边界 Γ_c 上施加压力场。由于该问题具有线性二次型特性，因此无需任何迭代算法即可得到精确解。这一特点使下面的讨论适用于实时应用，例如线性二次型调节器 [20]。

因此，我们要寻找表面压力 $p|_{\Gamma_c} = u$, u: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 使代价泛函 J 达到最小。由于表面 Γ_c 上唯一的作用是压力，因此可通过在 Γ_c 上应用伯努利方程 (6) 得到条件 $E(\phi, \eta, u) = 0$:

$$E(\phi, \eta, u) = g\eta + j\omega\phi + \frac{u}{\rho}.$$

它可以与运动学关系 (10) 合并

$$\phi_n - \frac{\omega^2}{g}\phi = -j\frac{\omega}{\rho g}u \qquad \text{在 } \Gamma_c\text{上}$$

and

$$\phi_n^s - \frac{\omega^2}{g}\phi^s = -j\frac{\omega}{\rho g}u \qquad \text{在 } \Gamma_c\text{上}$$

因为 $\phi_n^i - \frac{\omega^2}{g}\phi^i = 0$ 在 Γ_c 上。于是，最优控制问题为

$$\begin{aligned}
&\min_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \tilde{J} = J\Big(\{\mathbf{X}\}(u), u\Big) \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases}
-\Delta\phi^s = 0 & \text{in } \Omega \\
\phi_n^s = 0 & \text{on } \Gamma_r \\
\phi_n^s - \dfrac{\omega^2}{g}\phi^s = 0 & \text{on } \Gamma_f \\
\phi_n^s - \dfrac{\omega^2}{g}\phi^s = -j\dfrac{\omega}{\rho g}u & \text{on } \Gamma_c \\
\phi_n^s = j\omega\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{X}\} - \phi_n^i & \text{on } \Gamma_g \\
\phi_n^s + \alpha\phi^s = 0 & \text{on } \Gamma_e
\end{cases} \\
&\qquad \big(K - \omega^2 M\big)\{\mathbf{X}\} = -j\omega\rho\int_{\Gamma_g}(\phi^s + \phi^i)\{\mathbf{n}\}d\Gamma
\end{aligned} \tag{22}$$

为简便起见，我们选择 $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$；由于 α_u, β_u 严格为正 [20]，解的存在性和唯一性得以保证。我们采用拉格朗日乘子法推导一阶必要条件方程组；例如参见 [20]。我们将拉格朗日函数 $\mathcal{L}$: $\mathcal{W}\times\mathcal{W}'\times\mathbb{C}^6\times\mathbb{C}^6\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}$定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = J + \Re\Big\{ &\int_\Omega \nabla\bar{\lambda}\cdot\nabla\phi^s - \frac{\omega^2}{g}\int_{\Gamma_f}\bar{\lambda}\phi^s - \frac{\omega^2}{g}\int_{\Gamma_c}\bar{\lambda}\phi^s + j\frac{\omega}{\rho g}\int_{\Gamma_c}\bar{\lambda}u - j\omega\int_{\Gamma_g}\bar{\lambda}\{\mathbf{n}\}^\dagger\{\mathbf{X}\} \\
&+ \int_{\Gamma_g}\bar{\lambda}\phi_n^i + \alpha\int_{\Gamma_e}\bar{\lambda}\phi^s + \{\mathbf{Y}\}^\dagger\Big[\big(K - \omega^2 M\big)\{\mathbf{X}\} + j\omega\rho\int_{\Gamma_g}(\phi^s + \phi^i)\{\mathbf{n}\}\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{23}$$

其中， $\lambda \in \mathcal{W}'$ 是状态 ϕ^s 的伴随变量， $\mathcal{W}' = H^1(\Omega\ \mathbb{C})$是其函数空间， $\{\mathbf{Y}\} \in \mathbb{C}^6$ 是 $\{\mathbf{X}\}$的伴随变量。为简化记号，我们省略积分中的微分项。请注意

这里取标量积的实部，但考虑虚部也能得到类似结果。

对 $\mathcal{L}$ 关于状态 ϕ^s 求 Gateˆaux 导数，对 $\{\mathbf{X}\}$ 求导，并令它们为零，即可得到伴随变量的最优性条件：

$$\mathcal{L}'_{\phi^s}[\varphi] = \frac{1}{2}\Big\{ \int_\Omega \nabla\bar{\lambda}\cdot\nabla\varphi - \frac{\omega^2}{g}\int_{\Gamma_f\cup\Gamma_c} \bar{\lambda}\varphi + \alpha\int_{\Gamma_e}\bar{\lambda}\varphi + j\omega\rho\{\mathbf{Y}\}^\dagger \int_{\Gamma_g}\varphi\{\mathbf{n}\}\Big\} = 0 \qquad \forall\varphi\in\mathcal{W},$$

$$\mathcal{L}'_{\{\mathbf{X}\}} = \frac{1}{2}\{\mathbf{X}\}^\dagger C + \frac{1}{2}\Big\{ -j\omega\int_{\Gamma_g}\bar{\lambda}\{\mathbf{n}\}^\dagger + \{\mathbf{Y}\}^\dagger\big(K-\omega^2 M\big)\Big\} = \mathbf{0},$$

其中应用了 Wirtinger 微积分法则来处理复数导数 [27]。相应的强形式为：

$$\begin{cases} -\Delta\lambda = 0 & \text{in } \omega \\ \lambda_n = 0 & \text{on } \Gamma_r \\ \lambda_n - \dfrac{\omega^2}{g}\lambda = 0 & \text{on } \Gamma_f\cup\Gamma_c \\ \lambda_n = j\omega\rho\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{Y}\} & \text{on } \Gamma_g \\ \lambda_n + \bar{\alpha}\lambda = 0 & \text{on } \Gamma_e \end{cases} \tag{24}$$

$$(K-\omega^2 M)^\top\{\mathbf{Y}\} = -j\omega\int_{\Gamma_g}\lambda\{\mathbf{n}\}\,d\Gamma - C^\top\{\mathbf{X}\}$$

最后，对 (23) 关于 u 求导即可得到约化代价梯度：

$$\mathcal{L}'_u[\psi] = \int_{\Gamma_c}\left(\frac{\alpha_u}{2}\bar{u}\psi + \frac{\beta_u}{2}\nabla\bar{u}\cdot\nabla\psi + j\frac{\omega}{2\rho g}\bar{\lambda}\psi\right)d\Gamma = 0 \qquad\qquad \forall\psi\in\mathcal{U}_{ad}; \tag{25}$$

注意，等式成立是因为 $\mathcal{U}_{ad}=\mathcal{U}$。

为寻求数值解，我们采用 Galerkin $\mathbb{P}_2$ 有限元法（FEM）对优化问题进行离散。因此，考虑 Ω 的一个三角剖分 $\mathcal{T}_h$，其特征尺寸为 $h>0$，并分别定义 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}'$ 的离散空间 $\mathcal{W}_h$ 和 $\mathcal{W}'_h$；相应地，$\mathcal{U}_h$ 是定义在 Γ_c 的离散对应空间上的离散控制空间。因此，状态、伴随变量和控制离散为

$$\phi^s(\mathbf{x})\approx\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})^\top\boldsymbol{\phi}, \qquad \lambda(\mathbf{x})\approx\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})^\top\boldsymbol{\lambda}, \qquad u(\mathbf{x})\approx\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})^\top\mathbf{u},$$

离散代价泛函和最优性必要条件为

$$\begin{aligned}
&\text{Cost functional:} && J = \frac{1}{2}\{\mathbf{X}\}^\dagger C\{\mathbf{X}\} + \frac{\alpha_u}{2}\mathbf{u}^\dagger E_c\mathbf{u} + \frac{\beta_u}{2}\mathbf{u}^\dagger A_c\mathbf{u} \\
&\text{State:} && \left[A - \frac{\omega^2}{g}(C_f+C_c) + \alpha C_e\right]\boldsymbol{\phi} = j\omega K_g^\top\{\mathbf{X}\} + \mathbf{f}_g - j\frac{\omega}{\rho g}D_c\mathbf{u} \\
& && (K-\omega^2 M)\{\mathbf{X}\} = -j\omega\rho(K_g\boldsymbol{\phi}+\mathbf{g}) \\
&\text{Adjoint state:} && \left[A - \frac{\omega^2}{g}(C_f+C_c) + \bar{\alpha}C_e\right]\boldsymbol{\lambda} = j\omega\rho K_g^\top\{\mathbf{Y}\} \\
& && (K-\omega^2 M)\{\mathbf{Y}\} = -j\omega K_g\boldsymbol{\lambda} - C^\top\{\mathbf{X}\} \\
&\text{Control gradient:} && \nabla_{\mathbf{u}}J = \left(\frac{\alpha_u}{2}E_c + \frac{\beta_u}{2}A_c\right)\bar{\mathbf{u}} + j\frac{\omega}{2\rho g}D_c^\top\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

其中， $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是区域 Ω 上的刚度矩阵； C_f、 C_c 和 $C_e \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 分别是边界 Γ_f、 Γ_c 和 Γ_e 上的质量矩阵。 $D_c \in \mathbb{R}^{n\times l}$ 是控制矩阵，A_c和 $E_c \in \mathbb{R}^{l\times l}$ 是 Γ_c中的刚度矩阵和质量矩阵。矩阵 $K_g \in \mathbb{R}^{6\times n}$ 定义为

$$(K_g)_{ij} \coloneqq \int_{\Gamma_g} \{\mathbf{n}\}_i \, \varphi_j \, d\Gamma;$$

$\mathbf{f}_g \in \mathbb{C}^n$ 和 $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^6$ 是由背景场给出的强迫项，即

$$\mathbf{f}_g = \int_{\Gamma_g} -\phi_n^i \, \boldsymbol{\varphi} \, d\Gamma \qquad\qquad \mathbf{g} = \int_{\Gamma_g} \phi^i \{\mathbf{n}\} \, d\Gamma$$

最优控制问题 (22) 是一个线性二次型问题，因此，只要代价泛函中的权重矩阵为正定矩阵 [20]，该问题也是凸的，且必要条件也是充分条件；随后可通过求解以下线性系统得到其全局最小值

$$\begin{bmatrix} A_{tot} & -j\omega K_g^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & j\frac{\omega}{\rho g} D_c \\ j\omega\rho K_g & (K-\omega^2 M) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{tot}^\dagger & -j\omega\rho K_g^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^\top & j\omega K_g & (K-\omega^2 M) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -j\frac{\omega}{2\rho g} D_c^\top & \mathbf{0} & \frac{\alpha_u}{2} E_c + \frac{\beta_u}{2} A_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \{\mathbf{X}\} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \{\mathbf{Y}\} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_g \\ j\omega\rho\,\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

其中 $A_{tot} = A - \frac{\omega^2}{g}(C_f + C_c) + \alpha C_e$。

作为案例研究，我们考虑一个均匀密度为 $\rho_b = 0.5\rho$ 的浮球，使其在静力平衡条件下如图 1 所示有一半浸没。假设质心位于原点，即 $\mathbf{x}_G = \mathbf{0}$。由于球对称性， K 矩阵中唯一非零的项是 $(K)_{33}$。这意味着水的作用不会使物体发生旋转，因为 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ on Γ_g，并且假设水的黏度为零。由于动力学是线性的，为简单起见，我们假设入射波 (17) 的波幅为单位值。所有几何尺寸均以球体直径为基准进行归一化，因此我们选取水深为 2.5 m 的平坦海床，即 $h(\mathbf{x}) = 2.5\text{m}$，并将计算域限制在半径为 4 m 的圆柱体内。控制面是环绕浮球的一个环形区域，其外半径为 1 m。

我们选择激励波周期为 $T = 1.2\text{s}$，使归一化波长 $\lambda \approx 2.25$ m 能够有效激励浮体。请注意，由于目标并非以通常意义上的方式使漂浮障碍物隐身，因此我们关注的波长与通常隐身问题中考虑的波长大不相同；特别是，波长很短时 λ，由于目标物上的平均压力 Γ_g 可忽略不计，因此对目标物的激励很小。相反，波长相对较长的波会协调一致地推动浮体。假设波沿y轴传播，即 $\mathbf{k} = (0, k, 0)$。最后，我们选择代价 C为对角矩阵$C = \text{diag}(1, 1, 1, H^2, H^2, H^2)$，其中 $H = 1\text{m}$ 为漂浮物体的特征高度。最后，正则化参数选为 $\alpha_u = \beta_u = 1 \times 10^{-10}$。

数值问题借助开源库 redbKIT[28] 在 Matlab® 中实现，并通过求解线性系统 (26) 得到最优控制问题的解。最优控制作用如图2 (a) 和 (b) 所示；表1列出了{X}的运动幅度，包括幅值和相位。

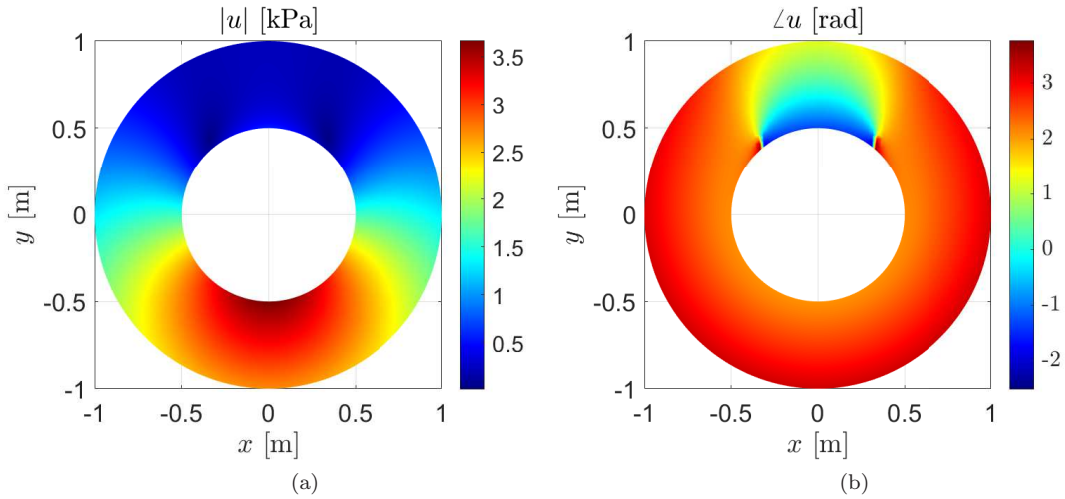


图2： Γ_c上的最优压力幅值（a）和相位（b）；振荡 {X}的改善情况汇总于表1。

{X}[1 ∠弧度]	无控制	压力控制	膜控制	板控制
x	$0.000\angle -2.19$	$0.000\angle -1.99$	$0.000\angle -1.33$	$0.002\angle -1.30$
y	$0.365\angle -1.37$	$0.014\angle -1.37$	$0.196\angle -0.11$	$0.572\angle -0.72$
z	$1.539\angle -2.99$	$0.003\angle -2.98$	$0.131\angle -3.0$	$0.102\angle -0.35$
J	1.25	6.54×10^{-3}	7.05×10^{-2}	2.08×10^{-1}
$\frac{1}{2}\{\mathrm{X}\}^\dagger C\{\mathrm{X}\}$	1.25	1.07×10^{-4}	3.49×10^{-2}	1.16×10^{-1}

表1：三种不同控制策略下物体运动的比较；未报告描述旋转的数值，因为得益于球体的对称性，这些数值几乎为零，且仅由数值误差导致。

4 表面张力与浮动质量

如果可用能量有限，采用被动策略是合理的替代方案。然而，主动控制可以通过充当波源轻松改变波传播，而被动策略通常依靠局部改变波速来引导波。下文将分析后一种方法：我们设计一种浮动装置，其惯性和刚度特性能够实现我们所需的波速对称控制。

浮动膜动力学曾被用作浮冰的简化模型，并由 [15] 提出，其中考虑了惯性和表面张力对水波传播的影响。具体而言，受载表面动力学通过将水流与膜的运动耦合推导而得，该膜被假定漂浮于水面，因此假定水面的竖直运动 ζ 与膜位移相同：

$$\nabla \cdot (T\nabla\zeta) = g\rho\zeta + \rho\Phi_t + m\zeta_{tt} + mg \qquad \text{in } \Gamma_c,$$

其中 T、m：$\Gamma_c \to \mathbb{R}$ 分别为空间变化的表面张力和表面质量惯性。等式左侧表示弹性恢复力，右侧则是静水压力、流体动力压力、浮动膜的惯性及其静载荷之和。我们假设该装置不会脱离水面；因此，膜的内力可以建模为表面张力。

常量重力 mg 会导致静态位移，因此转换到频域时可以忽略：

$$\nabla \cdot (T\nabla\eta) = (g\rho - \omega^2 m)\eta + j\omega\rho\phi \qquad \text{in } \Gamma_c, \tag{27}$$

根据这一设置，平衡函数为 $E = E(\phi, \eta, T, m)$，其形式为定义在表面 Γ_c上的椭圆型偏微分方程。接下来，我们通过作用于控制函数 T 和 m，来控制动力学方程 (27)，以及方程 (19) 和 (20)。

为了完整定义状态 η，我们还需要在 $\partial\Gamma_c$上施加适当的边界条件。由于膜边界处的剪切力为零，因此可以自由振荡，并满足齐次诺伊曼条件：

$$\eta_n = 0 \qquad \text{on } \partial\Gamma_c. \tag{28}$$

请注意，该模型假设膜边界 $\partial\Gamma_c$ 处于水平平衡状态；这一状态在现实中很难实现，因为没有外力作用于其上。此外，即使 T 随空间变化，也必须确保表面的内部平衡。

现在，我们定义两个控制函数 $u \in \mathcal{U}_{ad}$ 和 $v \in \mathcal{V}_{ad}$，它们分别作用于 T 和 m，使得

$$T = u, \qquad 1 - \frac{\omega^2 m}{g\rho} = v.$$

u 和 v 受到约束，因为 T 和 m 为正值，而为保证膜的浮力，m 必须有上限。第二个约束取决于控制装置ρ_c 的密度及其厚度 δ，具体关系由公式 $m = \rho_c\delta$给出。因此，理论上，只要选择适当的厚度，任何表面质量密度 m都不会妨碍膜漂浮。不过，我们假设其极限情况为 $\omega^2 m = g\rho$，这对应于面密度为 m的漂浮物体的共振条件；负载更大的表面会使波消失 [15]。接下来，我们将容许控制空间定义为：

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{ad} &= \{u \in \mathcal{U},\, \varepsilon \le u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c\}, \\ \mathcal{V}_{ad} &= \{v \in \mathcal{U},\, \varepsilon \le v(\mathbf{x}) \le 1 - \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c\}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中，为避免零控制作用情况下出现数值问题， ε 取为 1×10^{-6} 。请注意，在此情况下， $\mathcal{U}=H^1(\Gamma_c,\mathbb{R})\cap L^\infty(\Gamma_c,\mathbb{R})$是一个实值函数空间，其范数由测度 $\|u\|_\Gamma^2=\int_\Gamma \alpha_u u^2+\beta_u|\nabla u|^2\,d\Gamma$定义，并且 $\mathcal{U}_{ad}$、 $\mathcal{V}_{ad}$ 是凸集。

由于有两个控制作用，我们将 J 重新定义为

$$J\big(\{\mathbf{X}\},u,v\big)\coloneqq\frac{1}{2}\{\mathbf{X}\}^\dagger C\{\mathbf{X}\}+\frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{U}}^2+\frac{1}{2}\|v\|_{\mathcal{U}}^2\,. \tag{30}$$

总之，我们旨在最小化 (30)，同时满足带有 $u\in\mathcal{U}_{ad}$, $v\in\mathcal{V}_{ad}$ 的三个耦合动力学方程 (19)、(20) 和 (27)，以及方程 (28)。采用与之前相同的策略，我们定义拉格朗日函数 $\mathcal{M}$:
$\mathcal{W}\times\mathcal{W}'\times\mathbb{C}^6\times\mathbb{C}^6\times\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}'\times\mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\big(\phi^s,\lambda,\{\mathbf{X}\},\{\mathbf{Y}\},\eta,\mu,u,v\big)\coloneqq J+\Re\Big\{&\int_\Omega\nabla\bar\lambda\cdot\nabla\phi^s-\frac{\omega^2}{g}\int_{\Gamma_f}\bar\lambda\phi^s+\int_{\Gamma_c}\bar\lambda(\phi_n^i-j\omega\eta)\\&-j\omega\int_{\Gamma_g}\bar\lambda\{\mathbf{n}\}^\dagger\{\mathbf{X}\}+\int_{\Gamma_g}\bar\lambda\phi_n^i+\alpha\int_{\Gamma_e}\bar\lambda\phi^s\\&+\{\mathbf{Y}\}^\dagger\Big[\big(K-\omega^2M\big)\{\mathbf{X}\}+j\omega\rho\int_{\Gamma_g}(\phi^s+\phi^i)\{\mathbf{n}\}\Big]\\&+\int_{\Gamma_c}u\nabla\bar\mu\cdot\nabla\eta+g\rho v\bar\mu\eta+j\omega\rho\bar\mu(\phi^s+\phi^i)\Big\},\end{aligned} \tag{31}$$

其中， $\eta\in\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}=H^1(\Gamma_c)$，且 $\mu\in\mathcal{Y}'$ 是 η 的伴随状态， $\mathcal{Y}'$ 是其伴随空间。通过对状态 ϕ^s, η 和 $\{\mathbf{X}\}$ 以及控制 u, v 求 $\mathcal{M}$ 的导数，可得到一阶必要条件。为简洁起见，这里仅列出强形式:

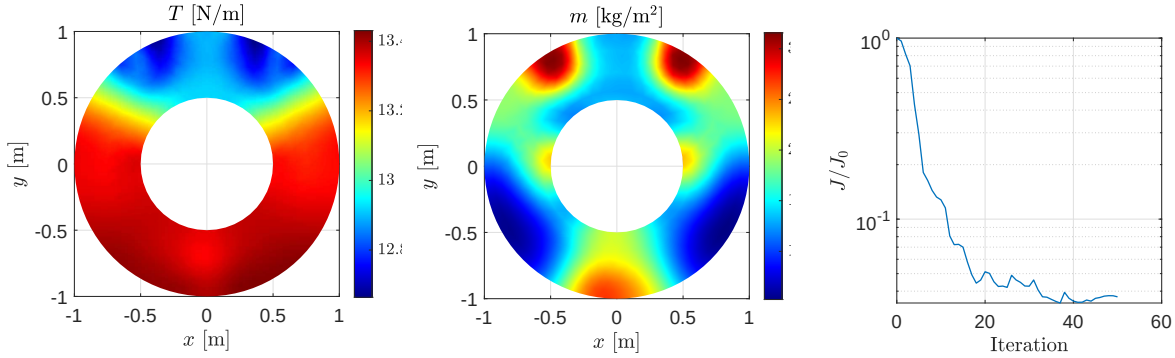
$$\text{adjoint:}\quad\begin{cases}-\Delta\lambda=0 & \text{in }\omega\\ \lambda_n=0 & \text{on }\Gamma_r\\ \lambda_n-\dfrac{\omega^2}{g}\lambda=0 & \text{on }\Gamma_f\\ \lambda_n=j\omega\rho\mu & \text{on }\Gamma_c\\ \lambda_n=j\omega\rho\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{Y}\} & \text{on }\Gamma_g\\ \lambda_n+\bar\alpha\lambda=0 & \text{on }\Gamma_e\end{cases}$$

$$(K-\omega^2M)^\top\{\mathbf{Y}\}=-j\omega\int_{\Gamma_g}\lambda\{\mathbf{n}\}-C^\top\{\mathbf{X}\}$$

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(u\nabla\mu)+g\rho v\mu+j\omega\lambda=0 & \text{on }\Gamma_c\\ \mu_n=0 & \text{on }\partial\Gamma_c\end{cases}$$

$$\text{control:}\quad\begin{aligned}\mathcal{L}_u'[\psi-u^*]&=\int_{\Gamma_c}\beta_u\nabla u^*\cdot\nabla(\psi-u^*)+\big[\alpha_u u^*+\Re(\nabla\bar\mu^*\cdot\nabla\eta^*)\big](\psi-u^*)\ge0\quad\forall\psi\in\mathcal{U}_{ad}\\ \mathcal{L}_v'[\psi-v^*]&=\int_{\Gamma_c}\beta_v\nabla v^*\cdot\nabla(\psi-v^*)+\big[\alpha_v v^*+g\rho\Re(\bar\mu^*\eta^*)\big](\psi-v^*)\ge0\qquad\forall\psi\in\mathcal{V}_{ad}\end{aligned}$$

其中 $(\phi^*,\lambda^*,\eta^*,\mu^*,u^*,v^*)$ 是该控制问题的最优解。请注意，这是一个非线性最优控制问题，因此必须通过迭代方法求得解。



(a) (b) (c)

图3：膜在最优控制 u (a) 和 v (b) 下的特性；(c) 目标函数随迭代的变化。振荡 {X} 的改善汇总于表1。

沿用之前相同的离散化方法，我们得到以下最优性条件 s

$$
\begin{aligned}
&\text{States:} && \left[A - \frac{\omega^2}{g} C_f + \alpha C_e\right] \boldsymbol{\phi} = j\omega K_g^\top \{\mathbf{X}\} + j\omega D_c \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_c \\
& && (K - \omega^2 M)\{\mathbf{X}\} = -j\omega\rho (K_g \boldsymbol{\phi} + \mathbf{g}) \\
& && (\mathbb{A}\mathbf{u} + \rho g \mathbb{B}\mathbf{v})\, \boldsymbol{\eta} = -j\omega\rho D_c^\top \boldsymbol{\phi} \\
&\text{Adjoint states:} && \left[A - \frac{\omega^2}{g} C_f + \bar{\alpha} C_e\right] \boldsymbol{\lambda} = j\omega\rho K_g^\top \{\mathbf{Y}\} + j\omega\rho D_c \boldsymbol{\mu} \\
& && (K - \omega^2 M)^\top \{\mathbf{Y}\} = -j\omega K_g \boldsymbol{\lambda} - C^\top \{\mathbf{X}\} \\
& && (\mathbb{A}\mathbf{u} + \rho g \mathbb{B}\mathbf{v})\, \boldsymbol{\mu} = -j\omega D_c^\top \boldsymbol{\phi} \\
&\text{Control gradients:} && \nabla_{\mathbf{u}} J = (\alpha_u E_c + \beta_u A_c)\, \mathbf{u} + \Re(\bar{\boldsymbol{\mu}} \mathbb{A}\, \boldsymbol{\eta}) \\
& && \nabla_{\mathbf{v}} J = (\alpha_v E_c + \beta_v A_c)\, \mathbf{v} + g\rho\, \Re(\bar{\boldsymbol{\mu}} \mathbb{B}\, \boldsymbol{\eta})
\end{aligned}
\tag{32}
$$

其中，三阶张量 $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n\times n\times l}$ 定义为

$$
(\mathbb{A})_{ijk} \coloneqq \int_{\Gamma_c} \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j\, \psi_k \, d\Gamma, \qquad (\mathbb{B})_{ijk} \coloneqq \int_{\Gamma_c} \phi_i \phi_j \psi_k \, d\Gamma,
$$

乘积 $\mathbb{A}\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\mu}\mathbb{A}$ 是定义为以下形式的矩阵

$$
(\mathbb{A}\mathbf{u})_{ij} \coloneqq \sum_{k=1}^{l} (\mathbb{A})_{ijk}\, u_k, \qquad (\boldsymbol{\mu}\mathbb{A})_{kj} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, (\mathbb{A})_{ijk}.
$$

我们考虑与压力控制情形相同的设置，但在表面上添加了浮动膜模型 Γ_c。我们设置 $\alpha_u = \alpha_v = 1 \times 10^{-4}$ 和 $\beta_u = \beta_v = 4 \times 10^{-2}$；随后，借助 [29, 30], 用于大规模非线性优化的软件包，通过 Matlab® 接口调用 IPOPT，求解非线性最优控制问题。所得最优 T 和 m 与以成本最小化表示的优化收敛结果一同示于图3中。

5 浮板

刚刚提出的控制策略似乎能有效减小浮体运动；然而，由于上述讨论的内部平衡问题，采用可变表面张力的装置可能难以实现，因此在实践中采用更复杂的控制可能会有所帮助。具体而言，表面张力产生的弹性恢复力必须由另一种恢复力替代。

在本节中，控制面 Γ_c 受到漂浮弹性薄板的载荷作用。我们采用的模型与文献中用于研究浮冰对水波影响的模型相似，例如参见 [31, 16]。在这种情形下，板刚度起恢复力的作用，从而提高波速；相反，载荷惯性会使波速降低。因此，与前一种情形类似，我们希望通过推导板的刚度和惯性特性来控制水流。

我们来考虑板平衡的弱形式 [32]:

$$\int_{\Gamma_c} B\big[(1-\nu)D^2\eta : D^2 v + \nu\Delta\eta\Delta v\big]\, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} f v\, d\Gamma \qquad \forall v \in \mathcal{Y}, \tag{33}$$

其中 $B\colon\ \Gamma_c \to \mathbb{R}$ 为局部弯曲刚度， ν 为板材的泊松比， f 为向上的分布载荷。 $D^2\eta$为 η的海森矩阵， $A:\ B$表示矩阵 A和 B之间的弗罗贝尼乌斯内积，即 $A:\ B:= \sum_{i,\ j=1}^{2}(A)_{ij}(B)_{ij}\cdot$请注意，在此情形下，为了正确地定义弱形式（33），我们需要要求 $\eta \in \mathcal{Y} = H^2(\Gamma_c)$。按照与 [32], 中类似的步骤，我们可以推导出空间相关 B情况下的强形式:

$$\begin{cases} \Delta(B\Delta\eta) + (1-\nu)\left(2B_{xy}\eta_{xy} - B_{xx}\eta_{yy} - B_{yy}\eta_{xx}\right) - f = 0 & \text{in } \Gamma_c \\ \Delta\eta - (1-\nu)\eta_{\tau\tau} = 0 & \text{on } \partial\Gamma_c\ , \\ (B\Delta\eta)_n + (1-\nu)(2B_\tau\eta_{n\tau} - B_n\eta_{n\tau} + B\eta_{n\tau\tau}) = 0 & \text{on } \partial\Gamma_c \end{cases} \tag{34}$$

其中下标 τ 表示边界上的切向导数。注意，关于 $\partial\Gamma_c$ 的两个条件成立，是因为我们将板边缘设为自由边界，即力矩和剪力均为零。作用于板上的力 f 由板自身的惯性以及根据 (6) 得到的水压力给出，因此

$$f = -m\zeta_{tt} - mg - \rho g\zeta - \rho\Phi_t,$$

并且，在频域中，

$$f = (m\omega^2 - \rho g)\eta - j\omega\rho\phi.$$

控制问题表述如下：求 u, v，使其最小化 (30)，同时满足三个耦合动力学方程 (19)、(20) 和 (34)，其中 $u \in \mathcal{U}_{ad}, v \in \mathcal{V}_{ad}$ 满足

$$B = u \qquad\qquad 1 - \frac{\omega^2 m}{g\rho} = v;$$

且 $\mathcal{U}_{ad}$、 $\mathcal{V}_{ad}$ 由 (29) 定义。再次应用拉格朗日乘子法来获得一阶必要条件，与 (31) 类似，我们将 $\mathcal{N}$ 定义为： $\mathcal{W}\times\mathcal{W}'\times\mathbb{C}^6\times\mathbb{C}^6\times\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}'\times\mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\big(\phi^s, \lambda, \{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{Y}\}, \eta, \mu, u, v\big) \coloneqq J + \Re\Big\{ & \int_\Omega \nabla\bar{\lambda}\cdot\nabla\phi^s - \frac{\omega^2}{g}\int_{\Gamma_f}\bar{\lambda}\phi^s + \int_{\Gamma_c}\bar{\lambda}(\phi_n^i - j\omega\eta) \\ & - j\omega\int_{\Gamma_g}\bar{\lambda}\{\mathbf{n}\}^\dagger\{\mathbf{X}\} + \int_{\Gamma_g}\bar{\lambda}\phi_n^i + \alpha\int_{\Gamma_e}\bar{\lambda}\phi^s + \{\mathbf{Y}\}^\dagger\Big[\big(K-\omega^2 M\big)\{\mathbf{X}\} + j\omega\rho\int_{\Gamma_g}(\phi^s+\phi^i)\{\mathbf{n}\}\Big] \\ & + \int_{\Gamma_c} u\big[(1-\nu)D^2\eta : D^2\bar{\mu} + \nu\Delta\eta\Delta\bar{\mu}\big] + \int_{\Gamma_c}\big[g\rho v\eta + j\omega\rho(\phi^s+\phi^i)\big]\bar{\mu}\Big\}. \end{aligned} \tag{35}$$

按照与之前相同的步骤，我们得到强形式的伴随方程

$$\begin{cases} -\Delta\lambda = 0 & \text{in } \omega \\ \lambda_n = 0 & \text{on } \Gamma_r \\ \lambda_n - \dfrac{\omega^2}{g}\lambda = 0 & \text{on } \Gamma_f \\ \lambda_n = j\omega\rho\mu & \text{on } \Gamma_c \\ \lambda_n = j\omega\rho\{\mathbf{n}\}^\top\{\mathbf{Y}\} & \text{on } \Gamma_g \\ \lambda_n + \bar{\alpha}\lambda = 0 & \text{on } \Gamma_e \end{cases} \tag{36}$$

$$(K - \omega^2 M)^\top\{\mathbf{Y}\} = -j\omega \int_{\Gamma_g} \lambda\{\mathbf{n}\}\, d\Gamma - C^\top\{\mathbf{X}\}$$

$$\begin{cases} \Delta(u\Delta\mu) + (1-\nu)\left(2u_{xy}\mu_{xy} - u_{xx}\mu_{yy} - u_{yy}\mu_{xx}\right) + \rho g v\mu + j\omega\lambda = 0 & \text{in } \Gamma_c \\ \Delta\mu - (1-\nu)\mu_{\tau\tau} = 0 & \text{on } \partial\Gamma_c \\ (u\Delta\mu)_n + (1-\nu)(2u_\tau\mu_{n\tau} - u_n\mu_{n\tau} + u\mu_{n\tau\tau}) = 0 & \text{on } \partial\Gamma_c \end{cases}$$

以及控制梯度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_u[\psi - u^*] &= \int_{\Gamma_c} \beta_u \nabla u^* \cdot \nabla(\psi - u^*) + \left[\alpha_u u^* + \Re(\nabla\bar{\mu}^* \cdot \nabla\eta^*)\right](\psi - u^*) \geq 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{U}_{ad} \\ \mathcal{L}'_v[\psi - v^*] &= \int_{\Gamma_c} \beta_v \nabla v^* \cdot \nabla(\psi - v^*) + \left[\alpha_v v^* + g\rho\,\Re(\bar{\mu}^*\eta^*)\right](\psi - v^*) \geq 0 \qquad \forall\psi \in \mathcal{V}_{ad} \end{aligned}.$$

最后，对一阶最优性条件进行离散化，以获得数值解。对于离散非线性系统 (32)，唯一的区别在于：刚度张量 $\mathbb{A}$ 描述由内部张力产生的弹性恢复力，而此处将其替换为考虑弯曲刚度的 $\mathbb{L}$。因此，我们不再重写整组方程。不过，值得强调的是 $\mathbb{L}$ 的定义方式，即

$$(\mathbb{L})_{ijk} = \int_{\Gamma_c} \psi_k \left[(1-\nu)D^2\phi_i : D^2\phi_j + \nu\Delta\phi_i\Delta\phi_j\right] d\Gamma, \tag{37}$$

也就是说，只有当 $\mathcal{W}_h \subseteq H^2(\Omega)$ 时，该方法才具有数值一致性；而基于 $\mathbb{P}_1$ 形函数的有限元法并不满足这一条件。为了解决这个问题，同时避免标准非协调方法或混合方法 [33]，所需的计算开销，我们采用 [34] 中所述的恢复梯度技术，该技术能够利用 C^0 有限元求解双调和问题。

现在，通过一块板来控制前文研究的系统，该板的属性通过求解相应的非线性最优控制问题确定。同样，使用 IPOPT 软件进行最小化；图4展示了最优刚度和惯性特性的结果，表1则突出显示了振动降低情况。

6 浮式风力涡轮机

下文中，我们将三种控制策略应用于图5a所示的半潜式浮动风力涡轮机，该机型是欧洲项目 [35]定义的标准机型。几何形状和质量参数根据参考资料计算，因此刚度矩阵和质量矩阵 K and

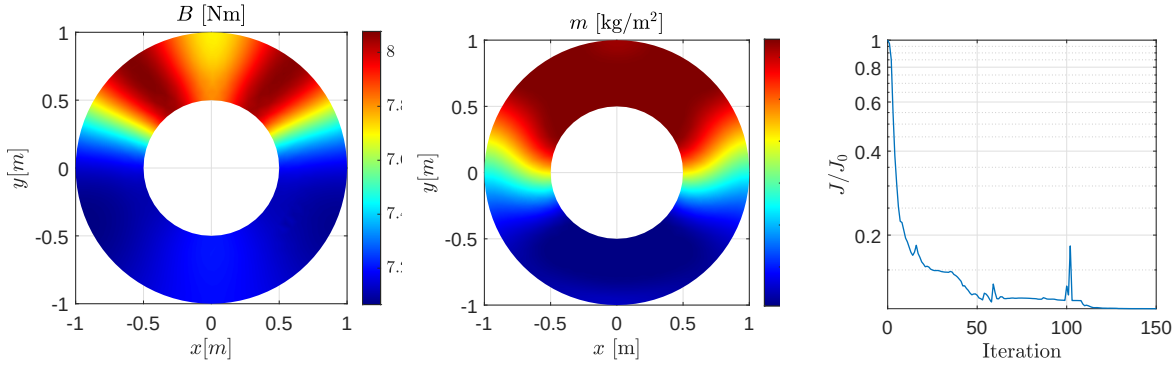


图4：最优控制 u（a）和 v（b）对应的板特性；（c）目标函数随迭代的变化。 {X} 振荡的改善情况总结于表1。

{X}[m/°∠rad]	无控制	压力控制	膜控制	板控制
x	$0.613\angle-1.63$	$0.292\angle-1.63$	$0.056\angle-1.87$	$0.055\angle-1.38$
y	$0.000\angle-2.35$	$0.000\angle-1.53$	$0.053\angle1.61$	$0.012\angle1.59$
z	$0.708\angle-3.11$	$0.121\angle-3.10$	$0.070\angle-1.86$	$0.057\angle-0.36$
θ_x	$0.000\angle-4.68$	$0.000\angle-3.81$	$0.221\angle-3.61$	$0.148\angle2.72$
θ_y	$0.103\angle-4.27$	$0.015\angle-3.29$	$1.706\angle-2.96$	$0.484\angle3.39$
J	4.38×10^{-1}	2.14×10^{-1}	1.81	1.82
$\frac{1}{2}\{X\}^\dagger C\{X\}$	4.38×10^{-1}	5.00×10^{-2}	5.86×10^{-3}	3.22×10^{-3}

表2：三种不同控制策略下涡轮运动的比较；未报告绕 z轴的旋转数值，因为它在所有情况下几乎为零，仅由数值误差引起。

M 由方程（15）定义。 $M^{-1}K$ 的非零特征值近似对应浮式结构的共振，其升沉运动、纵摇和横摇的时间周期分别为 $T_1 = 13.47$秒、$T_2 = 36.33$秒和 $T_3 = 36.30$ 秒。将激励周期选为 13 秒后，系统在 $\omega = 0.48$rad s^{-1}处接近共振。海床深度设为 100 米，膜控制和板控制的正则化参数均设为 $\alpha_u = \alpha_v = 1\times10^{-4}$、 $\beta_u = \beta_v = 1\times10^{-1}$ 。

图5b至5h展示了所施加的控制作用；表2则列出了根据上述三个问题得出的振荡减小情况，包括幅值、相位和代价泛函的最小值。

7 结论

本文提出了一个控制理论框架，通过主动和被动控制机制作用于周围环境，从而改变水波与浮体之间的相互作用。主动控制是指施加压力，并在空间上对其进行最优调制，以减小目标运动。由此得到的最优控制问题是线性二次型问题，并可通过以下方法高效求解

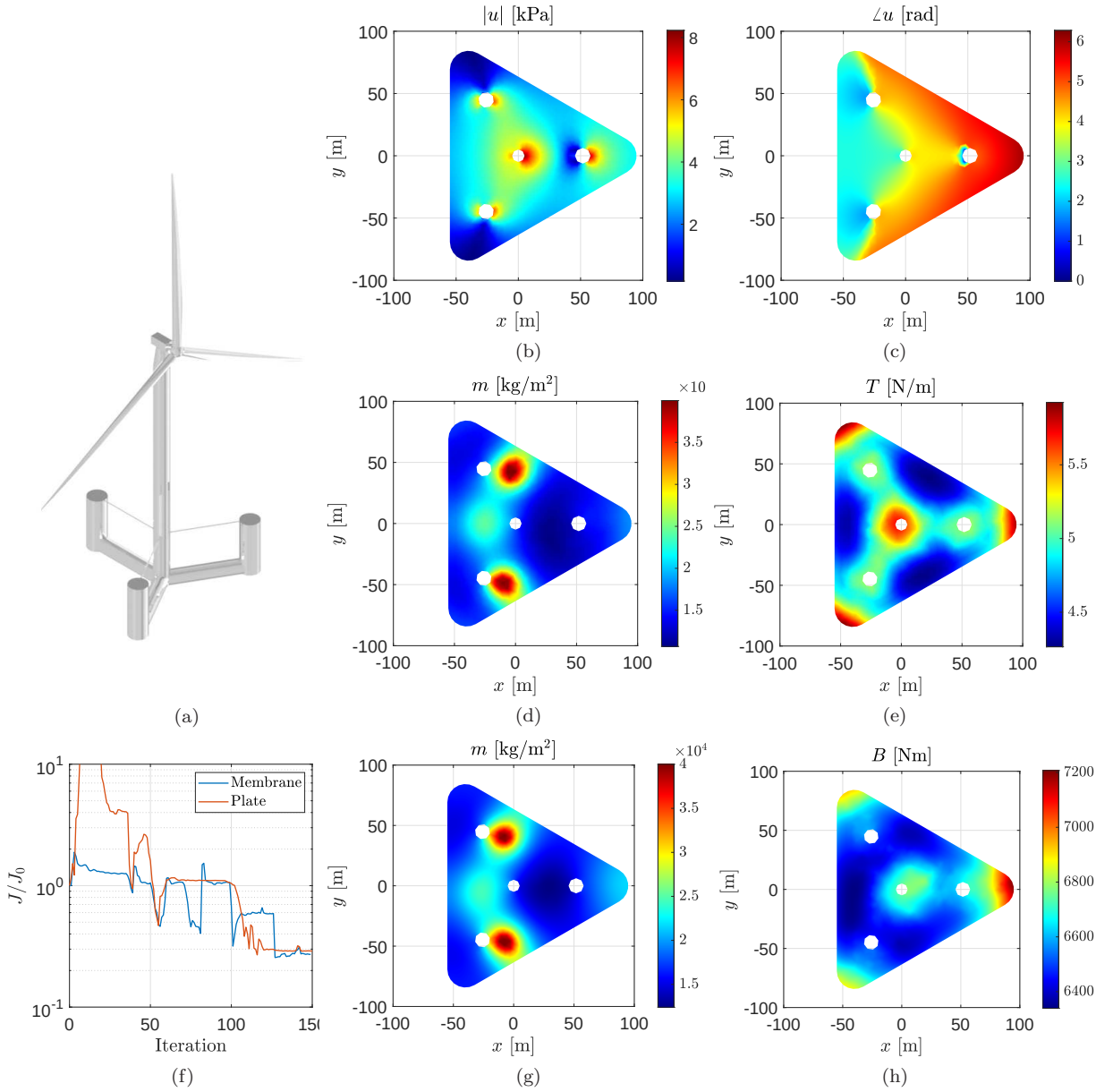


图5：（a）本研究所考虑的浮式风力涡轮机 VolturnUS-S 的形状。（b）和（c）分别显示所施加压力的幅值和相位；（d）和（e）显示膜的面密度和张力；（f）显示膜控制和板控制情况下随迭代次数变化的成本；（g）和（h）显示板的面密度和弯曲刚度。

一种单次方法。这种主动机制大幅减小了振荡，但在实际中可能难以实现。因此，我们引入了两种被动控制机制，它们本身是具有可调属性的浮体：一张膜和一块薄板。通过在空间上对其物理属性进行最优调节，我们展示了这些机制仍可分别将振荡降低两个和一个数量级。这两种情况下，控制问题都是双线性的，并通过变分法推导出一组一阶最优性条件。随后采用迭代方法求解所得系统。

一方面，本文的结果为一种通用且严谨的振动控制策略铺平了道路，并为降低任意物体所受的水动力激励提供了有效的设计指南。另一方面，我们提出的框架相当通用，通过适当修改代价泛函，还可以解决隐身、能量采集等其他问题。未来的工作包括去除小波幅假设，从而考虑更高阶项；这将形成一个完全非线性问题，其中非线性不仅源于完整的纳维–斯托克斯方程，也源于作为问题未知量的流体表面。

参考文献

[1] Leonhardt U. 2006年 光学保角映射。《科学》312，1777–1780。[2] Pendry JB、Schurig D、Smith DR。2006年 控制电磁场。《科学》312，1780–1782。[3] Kadic M、Schittny R、B¨uckmann T、Wegener M。2016年 电磁学、力学和热力学中的隐身实验。变换波物理学：电磁学、弹性动力学与热力学，第335–368页。[4] Cummer SA、Schurig D。2007年 声学隐身的一种途径。《新物理学杂志》9，45。[5] Norris AN、Shuvalov AL。2011年 弹性隐身理论。《波动》48，525–538。[6] Schittny R、Kadic M、Guenneau S、Wegener M。2013年 变换热力学实验：塑造热流。《物理评论快报》110，195901。[7] Farhat M、Enoch S、Guenneau S、Movchan A。2008年 流体中线性表面波的宽带圆柱形声学隐身斗篷。《物理评论快报》101，134501。[8]Newman J。2014年 水波中的圆柱体隐身。《欧洲力学杂志B辑/流体》47，145–150。[9] Zhang Z、He G、Kashiwagi M、Wang Z。2018年 通过准隐身现象减小相邻浮体阵列上的波浪漂移力。《应用海洋研究》71，1–10。[10] Zhang Z、He G、Wang W、Liu S、Wang Z。2020年 利用隐身现象中的缺陷效应，在宽频带内减小截断圆柱体的波浪漂移力。《海洋工程》203，107241。[11] Porter R、Newman J。2014年 利用可变水深地形实现波浪中的垂直圆柱隐身。《流体力学杂志》750，124–143。

[12] Zareei A、Alam MR。2015年 通过非线性介质变换实现浅水波隐身。《流体力学杂志》778，273–287。[13] Dupont G、Guenneau S、Kimmoun O、Molin B、Enoch S。2016年 在缓坡方程中通过均质化实现垂直圆柱隐身。《流体力学杂志》796。[14] Alam MR。2012年 分层海域中的宽带隐身。《物理评论快报》108，084502。[15] Keller JB、Goldstein E。1953年 表面张力和浮冰导致的水波反射。《Eos，美国地球物理联合会会刊》34，43–48。[16] Fox C、Squire VA。1990年 岸固定海冰边缘处的反射与透射特性。《地球物理研究杂志：海洋》95，11629–11639。[17] Zareei A、Alam R。2016年 浮式薄板隐身。载于《第31届国际水波与浮体研讨会论文集》，美国密歇根州，第197–200页。[18] Loukogeorgaki E、Kashiwagi M。2019年 通过优化同心环形板的弯曲刚度，最小化漂浮圆柱的漂移力。《应用海洋研究》85，136–150。[19] Iida T、Zareei A、Alam MR。2023年 使用浮式复合板实现水波隐身。《流体力学杂志》954，A4。[20] Manzoni A、Quarteroni A、Salsa S。2021年 《偏微分方程最优控制》。Springer。[21] Cominelli S、Quadrelli DE、Sinigaglia C、Braghin F。2022年 通过满足声学超材料设计要求的偏微分方程约束优化，设计任意形状的声学隐身斗篷。《英国皇家学会学报A辑》478，20210750。[22] Hasselmann K、Barnett TP、Bouws E、Carlson H、Cartwright DE、Enke K、Ewing J、Gienapp A、Hasselmann D、Kruseman P 等。1973年 联合北海波浪项目（JONSWAP）期间的风浪增长与涌浪衰减测量。《德国水文地理学杂志增刊A辑》。[23] Sinigaglia C、Quadrelli DE、Manzoni A、Braghin F。2022年 通过偏微分方程约束优化和降阶建模实现快速主动热隐身。《英国皇家学会学报A辑》478，20210813。[24] Mei CC、Stiassnie MA、Yue DKP。2005年 《海洋表面波理论与应用：第1部分：线性方面》。World Scientific。[25] Bai KJ。1972年 自由表面势流中的变分法。技术报告，加州大学伯克利分校工程学院。[26] Hsu TW、Lan YJ、Tsay TK、Lin KP。2003年 大角度入射水波模拟的二阶辐射边界条件。《工程力学杂志》129，1429–1438。[27] Wirtinger W。1927年 关于多复变量函数的形式理论。《数学年刊》97，357–375。¨anderlichen。[28] Negri F。2016年 redbKIT 2.2版。http://redbkit.github.io/redbKIT/。

[29] W¨achter A, Biegler LT. 2006年 大规模非线性规划内点过滤线搜索算法的实现。Mathematical Programming 106, 25–57.[30] Bertolazzi E. 2022年 mexIPOPT. https://github.com/ebertolazzi/mexIPOPT. 访问日期：2022- 03-23.[31] Balmforth N, Craster R. 1999年 海洋波浪与冰盖。《流体力学杂志》395, 89–124.[32] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S 等. 1959年 板壳理论，第2卷。McGraw-Hill 纽约.[33] Joly P, Quarteroni A, Rappaz J. 2005年 科学计算。Springer.[34] Guo H, Zhang Z, Zou Q. 2018年 一种用于双调和问题的线性有限元法。Journal of Scientific Computing 74, 1397–1422.[35] . 2023年 IEAWindTask37. https://github.com/IEAWindTask37. 访问日期：2023年3月5日。