arXiv:2304.00383v1 [math.FA] 1 Apr 2023

重排不变空间中的分解性质

KH. V. NAVOYAN

Abstract. 设 X 是一个巴拿赫空间，其基为 $(e_k)_k$ ，双正交泛函为 $(e_k^*)_k$。若作用于 X 上的算子满足 $\inf_k |e_k^*(T(e_k))| > 0$，则称该算子具有 *large diagonal*。若恒等算子可经由任意具有大对角的算子分解，则称基 $(e_k)_k$ 具有 *factorization property*。在假设 Rademacher 序列是弱零的条件下，我们研究 Haar 系统空间中 Haar 系统的分解性质。Haar 系统空间是由二进区间的示性函数所张成的空间关于重排不变范数完备化而成的。我们证明，在 Haar 系统空间上，任意具有大对角的有界算子都近似地是某个具有大对角的对角算子的因子。此外，当 Haar 系统是 Haar 系统空间的无条件基时，它具有分解性质。

1. Introduction

在 Andrew 关于绍德基扰动的论文 [1] 中，他证明了如下结论：若 T 是作用于 L^p上的算子，且 $1 < p < \infty$相对于 Haar 基表示为矩阵时，其对角线有正下界（T 具有大对角线），则像空间 TL^p 含有一个与L^p同构的可补子空间。事实上，他证明了 L^p 上的恒等算子可以经由 T分解。在本文中，我们将这一事实推广到重排不变（r.i.）Haar 系统空间。下面回顾一些定义。

定义 1.1. [1, 定义 1.1] 设 $C > 0$。若巴拿赫空间 X 的规范化绍德基 $\{x_n\}$满足以下条件，则称其为 C-可扰动的：对于任意 $\delta > 0$ 以及任意满足条件 $\|Tx_n - x_n\| < C - \delta$（对所有 n均成立）的有界线性算子 $T\colon X \to X$，空间 $T(X)$都包含一个与 X同构的副本。使 $\{x_n\}$ 为 C- 可扰动的最大 C 称为基 $\{x_n\}$ 的扰动常数。

定义 1.2. [6] 设 X 为具有规范化绍德基 $(e_k)_k$的巴拿赫空间，并设 $(e_k^*)_k$ 为其双正交泛函序列。

(i) 如果空间 X 上的算子 T 满足 $\inf_k |e_k^*(T(e_k))| > 0$ ，那么我们称 T 具有大对角线。(ii) 如果空间 X 上的算子 T 满足 $e_m^*(T(e_k)) = 0$ （对任意 $k \neq m$），则称其为对角算子。(iii) 如果存在有界线性算子 $R, S\colon X \to X$，满足 $I_X = STR$，则称空间 X 上的恒等算子 I_X 可经由 T 分解。

Date：2023年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：46B09、46B25、46B28、47A68。*Key words and phrases.* 算子因子分解、经典巴拿赫空间、无条件基、重排不变空间、Haar 基、忠实 Haar 系统、Rademacher 函数、块基、弱零序列、具有大对角的算子。

(iv) 如果基 $(e_k)_k$ 具有分解性质，那么只要算子 $T:X\to X$ 具有大对角线，空间 X 的恒等算子就可经由 T 分解。

将恒等算子经由具有大对角的算子进行分解这一问题，源于 Pe lczy´nski [13], 的一项研究。他证明了 ℓ^p, $1\le p<\infty$, and c_0 的每个无限维子空间都包含一个更小的子空间，该子空间是有补的，且与整个空间同构。实际上，他由此推得，ℓ^p (orc_0)是素的，即 ℓ^p(correspondingly, of c_0)的每个无限维可补子空间都与 ℓ^p (c_0)同构。
如 [7, Remark 2.4], 所述，容易看出，具有分解性质的基也是 1-可扰动的；但如 [7, Propositions2.5 and 2.7],所示，James 空间连同其收缩基是可扰动的，却不具有分解性质。

此外， [6], 中还证明，对于 $1\le p,q<\infty$，双参数 Hardy 空间 $H^p(H^q)$上的恒等算子可经由每个具有大对角的算子 $T\colon H^p(H^q)\to H^p(H^q)$进行分解。此外， [6] 中的作者证明，存在一个具有无条件基、但不具有分解性质的巴拿赫空间。 [7] Lechner 等人引入了基的策略可再生性这一概念。这使得已有结果的证明得以简化，并得到了一个新结果： $L^1[0,1]$ 上的 Haar 基具有分解性质。他们还证明， $L^1([0,1]^2)$上的双参数 Haar 基，以及 ℓ^p 单位向量基与 Haar 基的张量积，都具有分解性质。

还有一个与分解性质密切相关的概念，称为巴拿赫空间的素性。若对于每个有界投影 $P\colon X\to X$， $P(X)$ 或 $(I-P)(X)$ 同构于 X，则称巴拿赫空间 X 是素的。若一个巴拿赫空间是素的，则可推出 P 具有大对角线，或者$I-P$ 在巴拿赫空间 X的基 $(e_i)_{i=1}^\infty$ 的某个“大”子序列上具有大对角线。正如 [8, 命题 2.4], 中所述，若巴拿赫空间 X 具有手风琴性质，即与其 ℓ_p 和 $1<p<\infty$同构，并且具有一个满足分解性质的基，那么 X 就是素的。特别地，Enflo 证明了 L^p, $1\le p<\infty$ 是素的，其方法是证明，对于每个算子 $T\colon L^p\to L^p$，恒等算子都可经由 T 或 $I-T$ [2, 10] 分解。此外，Capon 在[3] 中为混合范数空间 $L^p(L^q)$,$1<p,q<\infty$ 证明了分解性与素性定理。相应地，对于空间 H^1 和 BMO，M¨uller 在 [12] 中证明了这类定理。此外， [8] 中的作者证明了空间$L^1(L^p)$ 对于 $1<p<\infty$ 是素的。

我们回顾 Haar 系统空间的定义及相关的预备定义。

记 $[0,1)$ 中所有二进区间的集合为 $\mathcal{D}$，即，

$$\mathcal{D}=\Big\{\Big[\frac{i-1}{2^j},\frac{i}{2^j}\Big):j\in\mathbb{N}\cup\{0\},1\le i\le 2^j\Big\}.$$

对于 $n=0$、1、2、.....，令 $\mathcal{D}_n=\{J\in\mathcal{D}\colon\ |J|=2^{-n}\}$，并令 $\mathcal{D}^n=\{J\in\mathcal{D}\colon |J|\ge 2^{-n}\}_n$或 $\mathcal{D}^n=\bigcup\mathcal{D}_j$，再令 $\mathcal{D}^+=\mathcal{D}\cup\{\emptyset\}$。枚举 $\imath\colon\ \mathcal{D}^+\to\mathbb{N}$ 由 $_{j=0}$ 给出

$$\imath(\emptyset)=1,\qquad \imath\bigg(\Big[\frac{i-1}{2^j},\frac{i}{2^j}\Big)\bigg)=2^j+i.$$

对于 $j \in \mathbb{N}$，定义 $I_j = \imath^{-1}(j)$。注意，这会将 $\mathcal{D}^+$ 排列成序列（I_j），并具有如下性质：$I_1 = \emptyset$、$I_2 = [0,1]$ 和 $I_j = I_{2j-1} \cup I_{2j}$、$j \geq 2$。

定义 1.3. 支集为 $I = \left[\frac{i-1}{2^j}、\frac{i}{2^j}\right)$ 的 Haar 函数 h_I 定义为 $h_I = \chi_{I^+} - \chi_{I^-}$，其中二进区间 I^+ 和 I^- 定义如下：

$$I^+ = \left[\frac{i-1}{2^j}, \frac{2i-1}{2^{j+1}}\right), \quad I^- = \left[\frac{2i-1}{2^{j+1}}, \frac{i}{2^j}\right).$$

我们还用自然数为 Haar 函数编号，并令 $h_n = h_{I_n}$，其中 $h_1 = h_\emptyset = \chi_{[0,1)}$。按照此编号，Haar 函数构成 $L^p[0,1]$ 的单调Schauder基，$1 \leq p < \infty$ [5, 例 (v)，第 186] 页。

注意，对于 $j \geq 2$，可得

$$\operatorname{supp}(h_{2j-1}) = [h_j = 1], \text{ and } \operatorname{supp}(h_{2j}) = [h_j = -1].$$

记号 span(·) 表示线性张成。

定义 1.4. [8, 定义 2.12]Haar 系统空间 X 是以下空间在满足下列性质的范数 $\|\cdot\|$ 下的完备化：$Z = \operatorname{span}(\{h_L : L \in \mathcal{D}^+\}) = \operatorname{span}(\{\chi_I : I \in \mathcal{D}\})$。

(i) 若 f 和 g 属于 Z，且 $|f|$ 和 $|g|$ 具有相同分布，则 $\|f\| = \|g\|$。(ii) $\|\chi_{[0,1)}\| = 1$.

以下命题陈述了 Haar 系统空间的重要性质。

命题 1.5. [8, 命题 2.13] 设 X 是一个 Haar 系统空间。

(a) 对每个 $f \in Z = \operatorname{span}(\{\chi_I : I \in \mathcal{D}\})$，都有 $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_X \leq \|f\|_{L_\infty}$。因此，$X$ 可以自然地视为定义在 $[0,1]$ 上的可测函数空间，并且 $\overline{Z}^{\|\cdot\|_{L_\infty}} \subset X \subset L_1$。(b) 我们通过通常表示将 Z 视为 X^* 的一个子空间：

$$\Psi : Z \to X^*, \quad g \to x_g^*, \quad with \ x_g^*(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad for \ f \in X,$$

并将对偶范数记为 $\|\cdot\|_*$。那么，定义 1.4 中的 (i) 和 (ii) 对 $\|\cdot\|_*$ 也成立。因此，关于 $\|\cdot\|_*$ 的 Z 闭包也是一个 Haar 系统空间。

(c) 按照上述引入的线性序，Haar 系统是 X 的单调Schauder基。

(d) 对于由 $\mathcal{D}$ 中元素组成的有限并 A，令 $\mu_A = \|\chi_A\|_X^{-1}$ 和 $\nu_A = \|\chi_A\|_{X^*}^{-1}$。那么，$\mu_A \nu_A = |A|^{-1}$，其中，对于可测集 A，$|\cdot|$ 表示 A 的勒贝格测度。特别地，$(\nu_L h_L, \mu_L h_L)_{L \in \mathcal{D}^+}$ 是 $X^* \times X$ 中的双正交系统。

定义 1.6。[8] 若 X 是定义在 $[0,1$ 上的可测标量函数构成的（非零）巴拿赫空间，则称其为重排不变空间，若以下条件成立。

(i) 每当 $f \in X$ 和 g 是满足 $|g| \leq |f|$ 几乎处处成立的可测函数时，$g \in X$ 和 $\|g\|_X \leq \|f\|_X$。

(ii) 如果 f 和 g 属于 X，且它们具有相同分布，那么 $\|f\|_X = \|g\|_X$。

根据 [9, 命题 2.c.1], ，每个可分重排不变空间 X 都是 Haar 系统空间；根据 [4] （另见 [9, 命题 2.c.5]），当且仅当 X 不包含 ℓ_1^n和 ℓ_∞^n的一致同构副本时，Haar 基是无条件的；这里对所有 n，所考虑的都是具有相同分布函数的不交向量。

在本文中，我们研究 Haar 系统空间中 Haar 系统的分解性质。在第 2 节中，我们证明了后文需要用到的 Haar 系统空间的一些重要性质。在第 3 节中，我们证明如下结果：假设 Haar 系统空间中的 Rademacher 函数序列是弱零的。然后我们证明，对于每个具有大对角线的算子 T，都存在一个具有大对角线的对角算子，它可以近似地通过 T 分解。最后，在第 4 节中，我们假设 Haar 基是无条件的，并且还证明了 Haar 系统空间上的恒等算子可以通过有界线性算子 T 分解。

2. 忠实 Haar 系统

定义 2.1. 忠实 Haar 系统是一个序列 $(h_j)_{j=1}^\infty$，由 $\{0, \pm 1\}$ 值的函数组成，满足 $h_1 = h_1 = 1_{[0,1]}$，且 $(h_j)_{j=2}^\infty$ 属于 $\operatorname{span}(h_I : I \in \mathcal{D})$，使得：

(i) $\operatorname{supp}(\tilde{h}_2) = [0, 1]$,
(ii) If $j \geq 3$ and $j = 2k - 1$, then $\operatorname{supp}(\tilde{h}_j) = [\tilde{h}_k = 1]$, and if $j \geq 4$ and $j = 2k$, then $\operatorname{supp}(\tilde{h}_j) = [\tilde{h}_k = -1]$.

注 2.2. 由于 $(h_j)_{j=2}^\infty \subset$ 张成了$(h_I : I \in \mathcal{D})$，因此对每个 $j \geq 2$ 都有$1 = \int h_j(t)dt = 0$。又由于 h_j 取值于 $\{0, \pm 1\}$，因此

$$|[\tilde{h}_j = 1]| = |[\tilde{h}_j = -1]| = \frac{1}{2}|\operatorname{supp}(\tilde{h}_j)|. \tag{2.1}$$

由定义 2.1 中的 (i) 和 (ii)，通过归纳法可知，对于 $j \geq 2$，的支集的测度等于 I_j 的测度。还可知，对任意 $j \in \mathbb{N}$，j 任意线性组合 $\sum \alpha_i h_i$ 在 h_{j+1}的支集上为常数。$i=1$

由此观察可得以下命题。

命题 2.3. 设 $(h_i)_{i=1}^\infty$ 是一个忠实 Haar 系统。设 f_j 和 g_j 是重排不变空间 F中的可测函数，定义如下：

$$f_j = \sum_{i=1}^{j} \xi_i h_i, \qquad g_j = \sum_{i=1}^{j} \xi_i \tilde{h}_i. \tag{2.2}$$

则 f_j 和 g_j 具有相同分布。

命题 2.3 推出以下推论。

推论 2.4. 设 $(h_i)_{i=1}^\infty$ 是一个忠实 Haar 系统。那么 $(h_i)_{i=1}^\infty$ 与 $(h_i)_{i=1}^\infty$在 Haar 系统空间 X 中等距等价。

~注意到序列 $\left(\frac{h_j}{\|h_j\|_F}\right)_{j=1}^{\infty}$ 是 $\left(\frac{h_j}{\|h_j\|_F}\right)_{j=1}^{\infty}$ 的块基，因此

~ ~ ~其双正交泛函为 $\left(\frac{h_j}{\|h_j\|_{F^*}}\right)_{j=1}^{\infty}$ 和 $\left\langle \frac{h_j}{\|h_j\|_F}, \frac{h_j}{\|h_j\|_{F^*}} \right\rangle = 1$对所有自然数 j均成立。

命题 2.5. [7, 命题 3.7] 假设 X 是一个巴拿赫空间，具有基 (e_n)，其基常数为 $\lambda \geq 1$，且双正交泛函为 (e_n^*)。设 (b_n) 和 (b_n^*) 分别是 (e_n) 和 e_n^* 的块基，使得 $b_m^*(b_n) = \delta_{m,\,n}$，对于$m$、$n \in \mathbb{N}$，并且存在某个 $C \geq 1$，使得

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j b_j\Big\|_X \leq \sqrt{C}\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j\Big\|_X, \text{ and } \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j b_j^*\Big\|_{X^*} \leq \sqrt{C}\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j^*\Big\|_{X^*},$$

对所有 $(\xi_j) \in c_{00}$。
那么 $Y = \overline{\text{span}}(b_j : j \in \mathbb{N})$ 是 X 的一个可补子空间，并且

$$P : X \to Y, \;\; x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(x) b_n$$

是良定义的有界投影，投影到 Y，且满足 $\|P\| \leq \lambda C$。此外，若 (e_n) 是收缩的，则 $\|P\| \leq C$。

利用 [7, 命题 3.7], ，我们推得以下命题。

~命题 2.6。假设 F 是一个 Haar 系统空间，且 $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ 是 F 中的一个忠实~ Haar 系统。那么空间 $G = \overline{\text{span}}(h_j : j \in \mathbb{N})$ 是 F 的可补子空间，并且 $P : F \to G$ 由下式确定：

$$P(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_{F^*}} \right\rangle \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F}, \; f \in F, \tag{2.3}$$

是良定义的有界投影，投影到 G，且满足 $\|P\| = 1$。

3. Approximate factorization of a diagonal operator with a large diagonal through a bounded operator with a large diagonal

本节定理 3.5 的证明使用了以下称为“小扰动引理”的结果。

定理 3.1. [5, 定理 4.23] 设 (x_n) 是巴拿赫空间 X 中的一个基本序列，且 (x_n^*) 是坐标泛函（它们属于 $\text{span}(x_j : j \in \mathbb{N})^*$），并假设 (y_n) 是 X 中的一个序列，使得

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|x_n^*\| < 1. \tag{3.1}$$

则 (y_n) 在 X 中也是一个基，并且与 (x_n) 同构等价；如果 $\overline{\text{span}}(x_j : j \in \mathbb{N})$ 在 X 中是有补的，那么 $\overline{\text{span}}(y_j : j \in \mathbb{N})$ 也具有同样的性质。

我们注意到，Rademacher 序列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0,\emptyset\}} = \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_n} h_I\Big)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0,\emptyset\}}$ 是 Haar 基 $(h_I)_{I\in\mathcal{D}^+}$ 的一个块基，其中令 $r_\emptyset = 1$。从现在起，我们假设 F 是一个具有以下性质的 Haar 系统空间：

($\star$) Rademacher 函数 $(r_n)_n$ 是弱零的。

此条件等价于序列 $(r_n)_n$ 不等价于单位向量基 ℓ_1 备注 2.15]。对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\theta_n = \Big(\theta_n(I)\Big)_{I\in\mathcal{D}_n} \subset\{\pm1\}$，我们定义 $r_n^{\theta_n} = \sum \theta_n(I)h_I.{}_{I\in\mathcal{D}_n}$

引理 3.2. 设 A 是 $\mathcal{D}_k$ 中元素的有限并，且满足 $n>k$，使得 A 属于 $\mathcal{D}^+$。则可得

$$1_A r_n^{\theta_n} \xrightarrow{w} 0, \quad as \quad n\to\infty. \tag{3.2}$$

$*$

证明。回忆一下，若 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 是巴拿赫空间 X 中的有界序列，则 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 弱收敛到零，当且仅当存在凸组合 $\Big(\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j x_j\Big)_{n=1}^\infty$，满足 $\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j = 1$，$\alpha_j\ge 0$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\Big\|\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j x_j\Big\|$ 收敛到 0。因此，由假设 (r_n) 是弱零的可知，存在凸组合 $\Big(\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j\Big)_{n=1}^\infty$，使得

当 $n\to\infty$ 时，$\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j = 1$、$\alpha_j\ge 0$ 和 $\Big\|\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j\Big\|$ 收敛于 0。对于 $\mathbb{N}$ 中给定的 n，我们记

$$f_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j, \qquad g_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j^{\theta_j}. \tag{3.3}$$

我们将 $f_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j$ 记为 $f_n = \sum_{i=1}^\infty \beta_i^n h_i$。于是可得，$g_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n}\alpha_j r_j^{\theta_j}$ ∞ ~ ~ ~ 等于 $g_n = \sum\beta_i^n h_i$，其中 h_i 等于 $-h_i$ 或 h_i。由于 $(h_i)_{i=1}^\infty$ 是一个忠实的 Haar 系统，根据推论 2.4 可得 $\|f_n\| = \|g_n\|$。因此，$r_n^{\theta_n}$ 是弱零的。

接下来，我们要证明对于任意的 $A\in\mathcal{D}^+$，$1_A r_n^{\theta_n}$ 都是弱零的，其中 A 是 $\mathcal{D}_k$ 中元素的有限并，且 $n>k$。
令 A^c 为 $[0,1]$ 中 A 的补集。由于 $1_A r_n^{\theta_n} + 1_{A^c} r_n^{\theta_n} = r_n^{\theta_n}$，可得 $1_A r_n^{\theta_n} + 1_{A^c} r_n^{\theta_n}$ 是弱零的。其次，我们注意到 $1_A r_n^{\theta_n} - 1_{A^c} r_n^{\theta_n}$ 具有 $r_n^{\theta_n'}$ 的形式，其中 θ_n' 可任意选取，因此 $1_A r_n^{\theta_n} - 1_{A^c} r_n^{\theta_n}$ 也为弱零。最后，我们注意到

$$1_A r_n^{\theta_n} = \frac{1}{2}\Big(1_A r_n^{\theta_n} + 1_{A^c} r_n^{\theta_n} + 1_A r_n^{\theta_n} - 1_{A^c} r_n^{\theta_n}\Big),$$

因此，$1_A r_n^{\theta_n}$是弱零的。 □

引理 3.3. 设 F 为一个 Haar 系统空间，其中 Rademacher 序列 $(r_n)_{n=1}^{\infty} = \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_n} h_I\Big)_{n=1}^{\infty}$ 是弱零的。

设 $T: F \to F$ 是一个有界线性算子，存在 $\delta > 0$，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$,

$$\langle Th_j, h_j\rangle \geq \delta \|h_j\|_F \|h_j\|_{F^*} = \delta |I_j|.$$

设 $\eta > 0$ 已给定。

那么存在一个忠实 Haar 系统 $(h_j)_{j=1}^{\infty}$，具有以下特殊形式。对于 $j \geq 2$, $h_j = \sum \theta_I h_I$，其中 Δ_{I_j} 是 $\mathcal{D}$ 的两两不相交子集，其并集 $\bigcup_{I\in\Delta_{I_j}} I$ 与 I_j 具有相同的测度，并且 $(\theta_I)_{I\in\Delta_{I_j}} \subset \{\pm 1\}$，使得：

(i) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\Big\langle T\Big(\frac{h_i}{\|h_i\|_F}\Big), \frac{h_j}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big| < \eta, j\neq i$

(ii) $\langle Th_j, h_j\rangle \geq \delta\|h_j\|_F\|h_j\|_{F^*} = \delta|I_j|$，其中等式对所有 $j \in \mathbb{N}$ 均由命题 1.5 得出。特别地，限制在忠实 Haar 系统 $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ 上的 T 也具有大对角线。

为了证明引理 3.3，我们需要以下概率引理。

引理 3.4. 给定 $k, m \in \mathbb{N}$，其中 $k < m$，以及引理 3.3 中的 T，设 $\varepsilon = \Big(\varepsilon(J)\Big)_{J\in\mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$ 是一族伯努利变量，即 $\varepsilon = \Big(\varepsilon(J)\Big)_{J\in\mathcal{D}_m}$ 是某个概率空间 $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ 上的独立随机变量，并且对于给定的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $J \in \mathcal{D}_m$，有 $\mathbb{P}\Big(\varepsilon(J) = 1\Big) = \mathbb{P}\Big(\varepsilon(J) = -1\Big) = \frac{1}{2}$。

那么

$$\mathbb{E}\left(\frac{\Big\langle \tilde{h}^{\varepsilon}_{k,m}, T(\tilde{h}^{\varepsilon}_{k,m})\Big\rangle}{2^{-k}}\right) \geq \delta, \ \textit{for}\ \tilde{h}^{\varepsilon}_{k,m} = \sum_{J\in\Delta_k} \varepsilon(J) h_J = 1_{\Delta_k^*} \cdot r^{\varepsilon}_m,$$

其中，Δ_k 是 $\mathcal{D}_m$的子集，满足 $|\Delta_k^*| = 2^{-k}$，其中 $\Delta_k^* = \cup_{J\in\Delta_k} J$。

引理 3.4 的证明。我们计算：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Big\langle \tilde{h}^{\varepsilon}_{k,m}, T(\tilde{h}^{\varepsilon}_{k,m})\Big\rangle \cdot \frac{1}{2^{-k}}\right) &= \mathbb{E}\left(\Big\langle \sum_{J'\in\Delta_k} \varepsilon(J') h_{J'}, \sum_{J\in\Delta_k} \varepsilon(J) T(h_J)\Big\rangle \cdot \frac{1}{2^{-k}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{J'\in\Delta_k}\sum_{J\in\Delta_k} \varepsilon(J')\varepsilon(J)\Big\langle h_{J'}, T(h_J)\Big\rangle \cdot \frac{1}{2^{-k}}\right) \\
&= \sum_{J\in\Delta_k} \Big\langle h_J, T(h_J)\Big\rangle \frac{1}{2^{-k}} \\
&\quad + \sum_{\substack{J,J'\in\Delta_k \\ J\neq J'}} \mathbb{E}\Big(\varepsilon(J)\varepsilon(J')\Big) \cdot \Big\langle h_{J'}, T(h_J)\Big\rangle \frac{1}{2^{-k}} \\
&= \sum_{J\in\Delta_k} \Big\langle h_J, T(h_J)\Big\rangle \frac{1}{2^{-k}} \\
&\geq \sum_{J\in\Delta_k} \delta|J| \frac{1}{2^{-k}}
\end{aligned}$$

$$= \delta \frac{1}{2^{-k}} \sum_{J \in \Delta_k} |J| = \delta \frac{1}{2^{-k}} 2^{-k} = \delta.$$

□

利用引理 3.4，我们推得，对于所有的 $m > k$ 以及满足 $|\Delta_k^*| = 2^{-k}$ 的不交集合族 $\Delta_k \subset \mathcal{D}$，我们可以选择 $\gamma_{k,\ m} = \Big(\gamma_{k,m}(J)\Big)_{J \in \Delta_k} \subset \{\pm 1\}$，使得以下结论成立：

$$\Big\langle T(\tilde{h}_{k,m}^{\gamma_{k,m}}), \tilde{h}_{k,m}^{\gamma_{k,m}} \Big\rangle \geq \delta \cdot 2^{-k}. \tag{3.4}$$

引理 3.3 的证明。对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\theta = \Big(\theta(J)\Big)_{J \in \mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$，令 r_m^θ 如引理 3.2 中所述。另设 $(\eta_i)_i$ 为正数序列，满足 $\sum_{i=k+1}^{\infty} \eta_i < \eta_k$，并按使得 $\sum_{i=1} \eta_i < \eta$的方式选取。

我们选取

$$\tilde{h}_1 = h_\emptyset = 1_{[0,1]}. \tag{3.5}$$

˜对于 $j \geq 2$，我们将归纳地选取 h_j，使其具有如下形式

$$\tilde{h}_j = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_{m_j} \\ I \subset \Delta_j^*}} \theta_j(I) h_I, \tag{3.6}$$

其中 Δ_j^* 是二进区间的不交并，且 $m_j > m_{j-1}$与$\Big(\theta_j(I)\Big)_{I \in \mathcal{D}_{m_j}}$ ⊂ $\{\pm 1\}$，使得 $\mathrm{supp}(h_2) = \Delta_2^* = [0,1]$，并且

$I \subset \Delta_j^*$

$$\Delta_j^* = \mathrm{supp}(\tilde{h}_j) = [\tilde{h}_k = 1], \text{ if } j = 2k-1,\ j \geq 3, \tag{3.7}$$

$$\Delta_j^* = \mathrm{supp}(\tilde{h}_j) = [\tilde{h}_k = -1], \text{ if } j = 2k,\ j \geq 4, \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \Big| \Big\langle \frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F}, \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_{F^*}} \Big\rangle \Big| < \frac{\eta_j}{2}, \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \Big| \Big\langle \frac{T^*(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_{F^*}}, \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F} \Big\rangle \Big| = \sum_{i=1}^{j-1} \Big| \Big\langle \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}, \frac{T(\tilde{h}_j)}{\|h_j\|_F} \Big\rangle \Big| < \frac{\eta_j}{2}, \tag{3.10}$$

$$\Big\langle \frac{T^*(\tilde{h}_j)}{\|h_j\|_{F^*}}, \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F} \Big\rangle > \delta. \tag{3.11}$$

注意，(3.9) 和 (3.10) 将推出引理 3.3 的 (i)，而 (3.11) 将推出 (ii)，˜同时 (3.5)、(3.6)、(3.7) 和 (3.8) 将确保 $(h_j)j$ 是一个忠实 Haar 系统。

˜由于我们选择了 $h_1 = h_\emptyset = h_1 = 1$，因此 (3.11) 对 $j = 1$ 成立，而在该情况下 (3.9)、(3.10) 是空泛成立的。

˜现在我们定义 h_2。为此，我们首先选择 $n_2 > 0$，使得存在由 Haar 函数组成的有限线性组合，记为 Y_1 ($Y_1 \in \text{span}(h_I : I \in \mathcal{D}^{n_2})$)，并且

$$\left\| T(\tilde{h}_1) - Y_1 \right\|_{F^*} < \frac{\eta_2}{2}. \tag{3.12}$$

因此，对于 $m > n_2$ 以及所有 $\theta = \Big(\theta(I)\Big)_{I\in\mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$，以下结论成立：

$$\left| \left\langle Y_1, \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| = 0. \tag{3.13}$$

结合 (3.12) 和 (3.13)，可得：

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle T(\tilde{h}_1), \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| &= \left| \left\langle T(\tilde{h}_1) - Y_1 + Y_1, \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| \\
&\le \left| \left\langle T(\tilde{h}_1) - Y_1, \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| + \left| \left\langle Y_1, \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle T(\tilde{h}_1) - Y_1, \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\rangle \right| < \frac{\eta_2}{2} \cdot \left\| \frac{r_m^\theta}{\|h_2\|_{F^*}} \right\|_{F^*} < \frac{\eta_2}{2},
\end{aligned}$$

该结论对 $m > n_2$ 的任意取值以及所有 $\theta = \Big(\theta(I)\Big)_{I\in\mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$ 都成立，这是因为 r_m^θ 和 h_2 具有相同分布。因此，当我们将 $\tilde{h}_2$ 替换为 r_m^θ 时，不等式 (3.9) 对 $j = 2$ 成立，其中 $m > n_2$ 可任意取值，且任意 $\theta = \Big(\theta(I)$ $\Big)_{I\in\mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$ 均可取。

我们还希望确保 (3.10) 和 (3.11) 成立。为此，我们参考 (3.4)（引理 3.4 的推论），并对 $m > n_2$ 选择 $\gamma_{2,\ m} = \Big(\gamma_{2,m}(I)\Big)_{I\in\mathcal{D}_m} \subset \{\pm 1\}$，从而有

$$\left\langle \frac{T^*(r_m^{\gamma_{2,m}})}{\|h_2\|_{F^*}}, \frac{r_m^{\gamma_{2,m}}}{\|h_2\|_F} \right\rangle > \delta. \tag{3.14}$$

此外，由引理 3.2 可知 $r^{\gamma_{2,m}\ m} \xrightarrow{w} 0$，因此存在$m_2 > n_2$，使得：

$$\left| \left\langle T^*(\tilde{h}_1), \frac{r_{m_2}^{\gamma_{2,m_2}}}{\|h_2\|_F} \right\rangle \right| < \frac{\eta_2}{2}. \tag{3.15}$$

˜因此，(3.10) 和 (3.11) 对于 $j=2$ 成立，其中 $\theta_2=\gamma_{2,m_2}$，且 $h_2=\sum_{I\in\mathcal{D}_{m_2}}\theta_2(I)h_I=\sum_{I\in\mathcal{D}_{m_2}}\gamma_{2,m_2}(I)h_I$.

˜接下来，我们定义 $\tilde{h}_j$，对于 $j\geq 3$，假设已为 $i<j$ 选定满足条件 (3.7)、(3.8)、(3.9)、(3.10) 和 (3.11) 的 h_i。我们选择 $n_j\geq m_{j-1}$，使得对于 $i=2$、.....、$j-1$，存在 Haar 函数的有限线性组合 Y_i，且 $Y_i\in\operatorname{span}(h_J\colon J\in\mathcal{D}^{n_j})$，从而

$$\left\|\frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F}-Y_i\right\|_{F^*}<\frac{\eta_j}{2(j-1)},\quad i=2,\dots,j-1. \tag{3.16}$$

˜然后，对于 $k\geq 2$ 和 $j=2k-1$，我们取 $\Delta_j^*=\Delta_{I_k^+}^*=[h_k=1]$；如果 $j=2k$，我们˜选择 $\Delta_j^*=\Delta_{I_k^-}^*=[h_k=-1]$。因此，我们希望借此确保 (3.7) 和 (3.8)。

此外，我们注意到，对于 $m>n_j$，以及所有 $\theta=\Big(\theta(J)\Big)_{\substack{J\subset\Delta_j^*\\ J\in\mathcal{D}_m}}\subset\{\pm1\}$，以下结论成立：

$$\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle Y_i,\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|=0, \tag{3.17}$$

结合 (3.16)，可得如下计算：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle\frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F},\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|&=\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle\frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F}-Y_i+Y_i,\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|\\&\leq\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle\frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F}-Y_i,\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|+\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle Y_i,\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|\\&=\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle\frac{T(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_F}-Y_i,\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^\theta}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|<\frac{\eta_j}{2}.\end{aligned}$$

因此，当我们将 $\tilde{h}_j$ 替换为 $1_{\Delta_j^*}r_m^\theta$ 时，对于任意选择的 $m>n_j$ 以及任意 $\theta=\Big(\theta(I)\Big)_{I\in\mathcal{D}}$，不等式 (3.9) 对 j 成立。

现在我们要确保 (3.10) 和 (3.11) 成立。我们利用 (3.4)（这是引理 3.4 的推论）来选取 $\gamma_{j,m}=\Big(\gamma_{j,m}(J)_{J\subset\Delta^*}\subset\{\pm1\}$，使得对于 $m>n_j$，有

$$\Big\langle\frac{T^*(1_{\Delta_j^*}r_m^{\gamma_{j,m}})}{\|h_j\|_{F^*}},\frac{1_{\Delta_j^*}r_m^{\gamma_{j,m}}}{\|h_j\|_F}\Big\rangle>\delta. \tag{3.18}$$

此外，引理 3.2 意味着 $1_{\Delta_j^*}r^{\gamma_{j,m}}{}_m\xrightarrow{w}0$。因此，存在 $m_j>n_j$，使得：

$$\sum_{i=1}^{j-1}\Big|\Big\langle\frac{T^*(\tilde{h}_i)}{\|h_i\|_{F^*}},\frac{1_{\Delta_j^*}r_{m_j}^{\gamma_{j,m_j}}}{\|h_j\|_F}\Big\rangle\Big|<\frac{\eta_j}{2}. \tag{3.19}$$

˜因此，(3.10) 和 (3.11) 对 $\theta_j = \gamma_{j,m_j}$ 成立，并且 $h_j = \sum_{I\in\mathcal{D}_{m_j} I\subset\Delta_j^*} \theta_j(I)h_I =$

$$\sum_{\substack{I\in\mathcal{D}_{m_j}\\ I\subset\Delta_j^*}} \gamma_{j,m_j}(I)h_I.$$

□

定理 3.5（具有大对角线的对角算子经具有大对角线的有界算子作近似因子分解）。设 F 是一个 Haar 系统空间，其中 Rademacher 序列 $(r_n)_{n=1}^\infty = \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_n} h_I\Big)_{n=1}^\infty$ 弱零。设 $T\colon F\to F$ 是有界线性算子，使得对任意 $j\in\mathbb{N}$,

$$\langle Th_j, h_j\rangle \geq \delta\|h_j\|_F\|h_j\|_{F^*} = \delta|I_j|.$$

˜设 $\eta>0$ 已给定，并设 $(h_j)_j$ 是满足引理 3.3 的条件 (i) 和 (ii) 的忠实 Haar 系统。则由下式给出的对角算子 $D\colon F\to F$

$$D(h_j) = \Big\langle T\Big(\frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F}\Big), \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle h_j,\ j\in\mathbb{N} \tag{3.20}$$

是有界的，并且存在有界线性算子 $A, B\colon F\to F$，使得 $\|A\|\|B\|\leq 1$，从而 $\|D-BTA\|\leq 2\eta$ 和 $\|D\|\leq\|T\|+2\eta$。也就是说，下图以误差 2η 交换。

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\ T\ } & F \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ F & \xrightarrow[\ D\ ]{} & F \end{array}$$

˜证明。令 $G=\overline{\operatorname{span}(h_j\colon j\in\mathbb{N})}$。由推论 2.4 可知，算子$A\colon F\to G$，定义为

$$A(h_j) = \tilde{h}_j,\ j\in\mathbb{N}, \tag{3.21}$$

是一个等距映射。因此，逆算子 $A^{-1}\colon G\to F$，其中 $A^{-1}(\tilde{h}_j)=h_j$，定义良好且也是一个等距映射。

此外，由命题 2.6 可推出 $P\colon F\to G$，定义为

$$P(f) = \sum_{j=1}^\infty \Big\langle f, \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F},\ f\text{ in }F, \tag{3.22}$$

是一个定义良好的投影到 G，其范数满足 $\|P\|=1$。记作$B=A^{-1}P$。由此可得，对于 $j\in\mathbb{N}$:

$$BTA(h_j) = A^{-1}PTA(h_j) \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
&= A^{-1}PT(\tilde{h}_j) = A^{-1}P\Big(T(\tilde{h}_j)\Big)\\
&= A^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_F}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle A^{-1}\Big(\frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_F}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{h_i}{\|h_i\|_F}.
\end{aligned}
$$

因此，由 (3.20) 和 (3.23) 可知，对于每个 j，在 $\mathbb{N}$ 中：

$$
\begin{aligned}
(3.24)\qquad &\|BTA(h_j) - D(h_j)\| = \|A^{-1}PTA(h_j) - D(h_j)\|\\
=&\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{h_i}{\|h_i\|_F} - \Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{h_j}{\|h_j\|_F}\Big\|\\
=&\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle \frac{h_i}{\|h_i\|_F}\Big\|\\
\le&\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\Big|\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle\Big| \cdot \Big\|\frac{h_i}{\|h_i\|_F}\Big\|\\
=&\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\Big|\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|.
\end{aligned}
$$

任取

$$
(3.25)\qquad f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{h_j}{\|h_j\|_F} \text{ in } F,
$$

使得 $\|f\| \le 1$。

由于 Haar 基是单调的，对于所有 n，$|a_n| \le 2$。
因此，由（3.24）可得：

$$
\begin{aligned}
(3.26)\qquad &\|BTA(f) - D(f)\| = \|A^{-1}PTA(f) - D(f)\|\\
\le&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|}{\|h_j\|_F}\cdot\|A^{-1}PTA(h_j) - D(h_j)\|\\
\le&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|}{\|h_j\|_F}\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\Big|\Big\langle T(\tilde{h}_j), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle\Big|\\
\le&2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\Big|\Big\langle T\Big(\frac{\tilde{h}_j}{\|h_j\|_F}\Big), \frac{\tilde{h}_i}{\|h_i\|_{F^*}}\Big\rangle\Big| < 2\eta,
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式由引理 3.3 得出。这意味着：

$$\|BTA - D\| = \|A^{-1}PTA - D\| \le 2\eta. \tag{3.27}$$

我们对算子 A 和 B 的范数乘积以及 D 的范数有如下估计：

$$\|A\|\|B\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}P\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|P\| \le 1. \tag{3.28}$$

$$\|D\| \le \|BTA\| + 2\eta \le \|B\| \cdot \|T\| \cdot \|A\| + 2\eta \le \|T\| + 2\eta. \tag{3.29}$$

□

4. Factorization of the identity through a bounded operator with a large diagonal

推论 4.1（通过具有大对角的有界算子进行恒等算子的分解）。设 F 是一个 Haar 系统空间，其中 Haar 系统是无条件 Schauder 基，并假设 Rademacher 序列 $(r_n)_{n=1}^{\infty} = \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}_n} h_I\Big)_{n=1}^{\infty}$ 是弱零的。

设 $T\colon F \to F$ 是一个有界线性算子，使得对于任意 $j \in \mathbb{N}$，

$$|\langle Th_j, h_j\rangle| \ge \delta \|h_j\|_F \|h_j\|_{F^*} = \delta |I_j|.$$

那么存在算子 $A, B\colon F \to F$，使得 F 上的恒等算子（记作 I_F）可经由 T 分解。也就是说，以下交换图是交换的。

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\ T\ } & F \\ {\scriptstyle A}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ F & \xrightarrow[\ I_F\ ]{} & F \end{array}$$

证明。不失一般性，我们可以假设 $\langle Th_i, h_i\rangle \ge 0$，因为否则我们转而考虑 $T = T \circ D$，其对角算子 $D\colon F \to F$ 由 $\bar{D}(h_i) = \Big(\operatorname{sign}\langle Th_i, h_i\rangle\Big)h_i$ 定义。由于 (h_i) 是无条件的，$\bar{D}$ 有界，因此 T 有界。在这种情况下，我们计算：

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}h_j, h_j\rangle = \langle T \circ \bar{D}(h_j), h_j\rangle &= \Big\langle T\Big(\operatorname{sign}\langle Th_j, h_j\rangle h_j\Big), h_j\Big\rangle \\ &= \operatorname{sign}\langle Th_j, h_j\rangle \langle Th_j, h_j\rangle = |\langle Th_j, h_j\rangle| \ge \delta \|h_j\|_F \|h_j\|_{F^*}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

因此，该结论由定理 3.5 得出。

□

5. Open questions

我们或许想考察，在 Haar 系统空间中不假设 Haar 系统具有无条件性时，恒等算子在什么条件下可以通过一个具有大对角线的有界算子进行分解。此外，我们还想找出其他一些巴拿赫函数空间，其中 Haar 系统是一个基，并满足分解性质。

致谢。作者感谢 Thomas Schlumprecht 教授所进行的有益讨论并提出的重要建议。

References

[1] A. D. Andrew. *Perturbations of Schauder bases in the spaces $C(K)$ and L_p, $p > 1$.*《数学研究》65 (1979), no. 3, 287 - 298. [2] D. Alspach, P. Enflo, and E. Odell. *On the structure of separable $\mathcal{L}_p$ spaces ($1 < p < \infty$).*《数学研究》60 (1977), no. 1, 79 - 90. [3] M. Capon. *Primarité de $L^p(L^r)$ $1 < p, r < \infty$.*《以色列数学杂志》42 (1982), no. 1-2, 87 - 98. [4] H. W. Ellis, and I. Halperin: *Haar functions and the basis problem for Banach spaces.*《伦敦数学会杂志》 31, 28 - 39 (1956). [5] M. Fabian, P. Habala, P. H´ajek, V. Montesinos, and V. Zizler. *Banach space theory*. Springer - Verlag, 2011. [6] N. J. Laustsen, R. Lechner, and P. F. X. M¨uller. . *Factorization of the identity through operators with large diagonal* **275** 2018 11, 3169 3207 .《泛函分析杂志》( ), no. - . [7] R. Lechner, P. Motakis, P. F. X. M¨uller, and Th. Schlumprecht. . *Strategically reproducible bases and the factorization property* 238 1 13 60, 2020 .《以色列数学杂志》, ( ): - . [8] R. Lechner, P. Motakis, P. F. X. M¨uller, and Th. Schlumprecht. ( ) . *The space L_1 L_p is primary for $1 < p < \infty$* 10 2022 32, 36 .《数学论坛：西格玛》( ), Paper No. e pp.. [9] J. Lindenstrauss, and L. Tzafriri. 经典巴拿赫空间. II, volume 97 of . *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]* Springer - Verlag, Berlin - New York, 1979. 函数空间。[10] B. Maurey. *Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*. Syst`eme de Haar, S´eminaire Maurey-Schwartz 1974-1975: Exp. Nos. I et II, 1975, pp. 26 pp. (erratum, p. 1). [11] R. E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Springer - Verlag, 1998. [12] P. F. X. M¨uller. *On projections in H^1 and BMO. Studia Math. **89** (1988), no. 2, 145 - 158*. [13] A. Pe lczy´nski. *Projections in certain Banach spaces*.《数学研究》19 (1960), 209 - 228.

Department of Mathematics and Statistics, Thompson Rivers University, Kamloops,BC V2C 0C8, Canada*Email address*: khazhakanush@gmail.com