arXiv:2304.00384v1 [math.PR] 1 Apr 2023

关于牛顿热力学的札记

JACK MORAVA

Abstract. 我们将矩母函数解释为

$$\mathbb{E}(\exp_{\mathbb{G}_m}(tX)) := \exp_F(t) \in \mathbb{R}[[x]]$$

随机变量 X 的一个相关的一维形式群律 F 的指数函数，该群律定义于 $\mathbb{R}$之上。

引言 在 p-进傅里叶理论中（[11]引理 3.4，第 460 页脚注处的图表），Schneider-Teitelbaum 模[1]

$$\mathsf{st}_F = \exp_{\mathbb{G}_m} \circ \log_F$$

F 与累积量生成函数

$$\kappa_F = \log_{\mathbb{G}_m} \circ \exp_F$$

的 X （大致而言，即其对应的吉布斯自由能 [12]）在变换坐标的交织作用下

$$\kappa_F = \log_{\mathbb{G}_m} \circ \mathsf{st}^{-1} \circ \exp_{\mathbb{G}_m}, \mathsf{st}_F = \exp_{\mathbb{G}_m} \circ \kappa^{-1} \circ \log_{\mathbb{G}_m},$$

作为函数互为逆函数。Quillen 对复配边环 MU_* 的形式群分类解释，将 st（因此也包括 κ）表示为具有有理系数的普适对称函数。VL Ginzburg 的辛配边环 $\mathcal{B}_*$ [3, 7] 则提供了这一解释的热力学扩展，其中

$$[\mathbb{C}P_1, \omega] \sim 1/kT \cdot [\mathbb{C}P_1] \dots$$

§1.1 回顾对称函数 [5](I §2)，有

$$E(t) = \prod (1 + x_i t), H(t) = E(-t)^{-1}$$

$$P(t) = H'(t)/H(t) = \sum p_r t^r \Rightarrow H(t) = \exp(p_1 \cdot \sum \wp_n \frac{t^n}{n}),$$

[1]若 X 为泊松分布，则为自然对数；伯努利分布给出 Todd 算术亏格

这里采用略显古怪的记号 $p_n = p_1 \cdot \wp_n$ 表示幂和 $p_n = \sum x_i^n$。它们是一个周期分次代数 $\mathsf{S}[e_1^{-1}]$ 中的元素，该代数由对称函数（在 $\mathbb{Z}$上）构成，每个偶数次数各有一个生成元。

[这个代数至少具有一个克莱因四元群 $\{e, h;\ m, f\}$ 组有用的基[9](§1.2)，对应于对虚向量丛（及其特征类）施加的运算，这些运算由逆 $V \mapsto -V$和复共轭$V \mapsto \overline{V}$共同定义；分号表示关于 Hall（正定整数）内积 [5](I §4.9)的对偶性。基的变换可以用科斯塔矩阵 [5](I §6)表示。]

§1.2 回顾一级射影表示

$$\Omega \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{PGl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H});$$

then

*) $\mathbb{C}P_\infty \simeq B\mathbb{T} \simeq H(\mathbb{Z}, 2)$ so $\pi_2(\mathbb{C}P_\infty) \cong \mathbb{Z}$

**) $\Omega\mathrm{SU}(2) \simeq (\Omega\Sigma) S^2 \simeq \vee_{n\geq 0} S^{2n}$ 稳定地

***) $b = b_{(1)} = [S^2 = \mathbb{C}P_1 \subset \mathbb{C}P_\infty]$ 生成 $\pi_{2\circ}$ 令

$$b_{(n)} = [\mathbb{C}P_n \subset \mathbb{C}P_\infty] \in \mathrm{MU}_{2n}\mathbb{C}P_\infty$$

如 [11]中所示。

由 **) 可知，$H_*\Omega\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{Z}[b]$ 作为庞特里亚金环，而$H^*\mathbb{C}P_\infty \cong \mathbb{Z}[c]$作为霍普夫代数。我们将带有除幂运算的 $H_*\mathbb{C}P_\infty \cong \mathbb{Z}[\gamma^* b]\ \gamma^k x = x^k/k$ 记作！并类似地记作 $H^*\Omega\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{Z}[\gamma^* c]$。

§1.3 配边环（适当预量子化流形的） $\mathcal{B}_*$ 自然同构于 $\mathrm{MU}_* B\mathbb{T}$。赫雷维茨–博德曼–切恩–韦伊–托姆特征数同态

$$\mathfrak{h} : \mathcal{B}_* \cong \mathrm{MU}_* B\mathbb{T} \to H_*(\mathbb{C}P_\infty; \mathrm{MU}_*) \to H_*(MU, \mathbb{Q})[b]$$

是单射，并且在有理化后成为同构。从现在起，我们将通过托姆同构 $H_*\mathrm{MU} \cong H_* B\mathrm{U} \cong \mathsf{S}_*$，把 MU_* 与其在对称函数中的像等同起来；这最自然地 [2] 用相对于基m的切恩根来表示。

以 ω 中的多项式表示辛配边类（如 $[\mathbb{C}P_n, \omega] := \mathbb{C}P_n(\omega)$）是 [8] 的主题；例如，$b$ 可以自然地识别为 $\mathbb{C}P_1(\omega)$。为方便起见，记 $\beta = \mathbb{C}P_1(\omega)/\mathbb{C}P_1$，因此 $b = \beta\mathbb{C}P_1$，其中 β 与 $1/kT$ 类似。

根据 Quillen、Lazard 和 Miˇsˇcenko 的结果，对偶形式霍普夫代数 MU $^*\mathbb{C}P_\infty \cong$MU$^*[[c]]$ 由其群律刻画

$$c_0 +_{\mathrm{MU}} c_1 = \exp_{\mathrm{MU}}(\log_{\mathrm{MU}}(c_0) + \log_{\mathrm{MU}}(c_1)) \in \mathrm{MU}^*[[c_0, c_1]]$$

with

$$\log_{\mathrm{MU}}(c) = \sum \mathbb{C}P_{n-1}\frac{c^n}{n}.$$

于是我们写作

$$\mathsf{st}_{\mathrm{MU}}(t) = \exp_{\mathbb{G}_m}(b\log_{\mathrm{MU}}(t)) \sim bt + \cdots \in (\mathsf{S}\otimes\mathbb{Q}[b])[[t]]$$

通过将 $b\mathbb{C}P_{n-1}$ 认作 n 次幂和 p_n。Ravenel 和 Wilson[10] 证明，生成函数

$$b(t) = 1 + \sum b_{(n)}t^n$$

是万有 Cartier 特征 [4]

$$b(t_0) +_{\mathrm{MU}} b(t_1) = b(t_0)\cdot b(t_1),$$

对于 Lazard-Quillen 环。

II 玻尔兹曼指数

§2.1 实数轴的有限子集 $E = \{0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_l\}$ 定义了一个阶梯函数 $\lambda\colon\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}\cup\infty$；这些就是 [1],中所说的能量集，它们构成了统计力学中正则系综 [8] 的重要实例。拉普拉斯算子的特征值或星光的谱本可作为例子，但它们都是无限的.....

Let

$$B : E \mapsto \exp_{BE}(t) := \sum \exp_{\mathbb{G}_m}(-\lambda_i t) = -\sum \lambda_i^n \frac{t^n}{n!}$$

$$= -\sum \wp_n(\lambda)\gamma^n(p_1 t) = -p_1 t - \cdots \in (\mathsf{S}_*\otimes\mathbb{Q})[[t]]$$

定义能量集 E的玻尔兹曼形式群律 $BE\in\mathbb{Q}[[X,Y]]$的指数函数。在形式世界中，一如往常

$$\log_{\mathbb{G}_m}(x) = -\log|1-x|, \exp_{\mathbb{G}_m} = 1 - e^{-x} \in \mathbb{Q}[[x]],$$

而右侧的和是对称函数 [3] 的完备分次代数中的元素，它由牛顿幂和取值定义

$$p_n \mapsto p_n(\lambda) = \sum \lambda_i^n \in \mathsf{S}_{2n}\otimes\mathbb{Q}$$

关于函数 $\lambda(i) = \lambda_i$.（的有限部分） $\wp_n = p_1^{-n}p_n$的元素是齐次化或归一化后的形式，例如 $\wp_1 = 1$。这里， p_1 是一种平均值，预计可逆；在某种意义上， $p_1\sim 1/kT$ 属于热力学。

在这种语言中，归一化吉布斯自由能

$$\Omega(p_1 x) \sim -\log_{\mathbb{G}_m} \exp_{BE}(x) \in \mathbb{Q}[\wp_*][[p_1 x]]$$

是一个广义累积量 [9]（§3.0），[14] 生成函数，可辨认为由能量系综 E 在幺半群函子的复合中定义的形式群基本 Cartier 特征的扭曲逆元

$$[\text{Energetic}] \to \text{Spec}\mathsf{S} \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^1 \to \text{Spec}\mathcal{B}$$

的幺半群函子。

累积量具有良好的可加性；我猜物理学家或许会以某种方式，将其理解为合并谐振子的乔姆斯基层。

§2.2 Baez 构造可扩展为对 $\mathbb{Q}$ 上一维形式群律的有限能量系综定义平均值。辛特征数同态将这些类 $\wp_n b^n = p_n$ 提升为定义一个吉布斯类 $\Omega \sim 1 + \sum \Omega_n b^{n+1} \in \mathcal{B}_* \otimes \mathbb{Q}$，或许这是渐近表达式中首项（拓扑）项的一个通用例子 [6]，例如 Stirling 公式中的项。这些构造在非交换概率论 [2],[5]（§3.3）中有推广。

同构

$$H^*_{\mathbb{Q}}|[X//G]| = H^0(G, H^*_{\mathbb{Q}}(X))$$

（对于作用于空间 X 的有限群 G）提示我们将 $\mathbf{MU}_* \otimes \mathbb{Q}$ 视为轨形的（朴素）特征数代数，即由二维球面的除幂在 $\mathbb{Q}$ 上生成的自由交换代数

$$\text{SP}^n \mathbb{C}P(1) := \mathbb{C}P(1)^n / \Sigma_n \cong \mathbb{C}P(n)$$

从而得到 Todd 类.....

致谢 感谢 K Vogtmann `arXiv:2202.08739` 和 J Baez 提供了非常有帮助的通信。

References

1. JBaez，https://golem.ph.utexas.edu/category/2022/10/partition_function_as_cardinal.htm 1
2. PE Conner、EE Floyd，《配边与 K 理论的关系》，Springer Lecture Notes 28（1966） 3. VL Ginzburg，《接触配边群与辛配边群的计算》，Topology 31，767 – 773（1992） 4. NM Katz，Nicholas M.，《形式群与 p-进插值》，Ast´erisque，法国数学会 41 – 42，55 – 66（1977）

5. IG MacDonald, 《对称函数与霍尔多项式》, Oxford Classic Texts（2015） 6. M Marcolli、N Tedeschi, 《熵代数与伯克霍夫分解》 https://arxiv.org/abs/1412.0247 7. J Morava, 《辛流形的配边与渐近展开》, Proc. Steklov Inst. Math.（225）261 –– 268（1999） 8. ——, 《形式群与几何量子化》https://arxiv.org/abs/1905.06181 9. ——, 《代数拓扑中的重整化群胚》, https://arxiv.org/abs/2007.16155 10. DC Ravenel、WS Wilson, 《复配边的霍普夫环》, J. Pure Appl. Algebra 9, 241 – 280（1976/77） 11. P Schneider、J Teitelbaum, 《 p-进傅里叶理论》, Doc. Math. 6, 447 – 481（2001） 12. K Vogtmann、M Borinsky, 《利用量子场论计算欧拉示性数》, https://arxiv.org/abs/2202.08739 13. https://en.wikipedia.org/wiki/Grand_canonical_ensemble 14. https://en.wikipedia.org/wiki/Cumulant

Department of Mathematics, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland