arXiv:2304.00400v1 [math.CO] 1 Apr 2023

有限域上的向量空间中的 Rado 重数问题

Juanjo Ru´e* Christoph Spiegel†

2023年4月4日

摘要

我们研究了加性结构的拉姆齐重数问题的一种类似问题，特别是确定了 $\mathbb{F}_3^n$的三染色中单色三项等差数列的最小数量，并首次得到了 $\mathbb{F}_5^n$的二染色中单色4项等差数列最小数量的非平凡下界。前者与 Cumings 等人在 [7] 极值图论中的结果相呼应，后者则改进了 Saad 和 Wolf 的结果 [41]。这些下界尤其是通过将 Razborov 的旗代数演算 [38]推广到有限域上的向量空间中的加性结构而得到的。

1 引言

1959 年，Goodman [19] 证明，在任意图中，渐近地至少有四分之一的顶点三元组要么构成一个团，要么构成一个独立集。这促使人们开始研究拉姆齐重数问题：对于完全图的任意边染色，人们希望确定指定大小的单色团的最小数量。拉姆齐定理结合基本的双重计数论证保证，渐近地必有某个正比例的团是单色的，因此研究重点主要在于确定这一比例的精确值。鉴于随机图 $G(n,\ 1/2)$ 等构造能够达到 Goodman 结果中的数值，Erd˝os [11] 最初于 1962 年猜想，这一结论不仅适用于三角形，也应适用于任意大小的团 k。1989 年，Thomason [44] 证明了这一猜想不成立，并为任意 $k \geq 4$得到了渐近上界 $0.936 \cdot 2^{1-k(k-1)/2}$。较近时期，Conlon [6] 证明了下界 $C^{-k^2\,(1+o\,(1)}$，适用于 $C \approx 2.18$。要改进渐近界，或确定三角形之外情形的精确值，出乎意料地困难；大量结果 [44, 15, 45, 17, 31, 43, 22, 12, 33]逐步改进了 $k = 4$ 和 $k = 5$这些特定情形的上界与下界，但迄今仍未能弥合两者之间的差距。

*加泰罗尼亚理工大学（UPC）数学系与数学研究所（IMTech），以及数学研究中心（CRM），西班牙巴塞罗那。电子邮箱：juan.jose.rue@upc.edu。

†Zuse Institute，社会、科学与技术人工智能系及柏林数学研究中心 MATH+，德国柏林。电子邮箱：spiegel@zib.de。

近来，人们对研究这类问题的算术类比情形兴趣日增。这一研究最初由 Graham、R¨odl 和 Ruczinsky[20] 于 1996 年提出，他们给出了一个渐近下界，针对前 n 个整数的二染色中单色舒尔三元组的最小数量。此后不久，Robertson 和 Zeilberger [40], Schoen [42], 以及 Datskovsky [9]确定了精确的渐近最小值。事实上，后者还证明了一个令人惊讶的性质：在 $\mathbb{Z}_n$ 的任意二染色中，舒尔三元组的数量只取决于各颜色类的基数。Cameron、Cilleruelo 和 Serra [5] 将这一观察推广到任意有限阿贝尔群中奇数个变量的任意线性方程的解。沿着类似思路，Parrilo、Robertson 和 Saracino [34] 为前 n个整数的二染色中单色三项等差数列的最小数量建立了上界和下界，尤其还推翻了一个民间猜想：最小值应由随机染色达到。

本文将聚焦于小阶有限域上的向量空间中特定加性结构的拉姆齐重数问题的对应版本。全文中，我们固定一个素数幂 $q \in \mathbb{N}$，并记 $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的唯一有限域，通常也记作 GF(q)。给定一个子集 $T \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 以及由某个矩阵 L 定义的线性映射 $A \in \mathcal{M}^{r\times m}(\mathbb{Z})$，其中矩阵的整数元素与 q[1]互素，我们希望研究

$$\mathcal{S}_L(T) = \{\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in T^m : L(\mathbf{s}) = A \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0} \text{ and } s_i \neq s_j \text{ for } i \neq j\}, \tag{1}$$

即 T 中所有项互不相同的解所构成的集合。在全文中，我们假设 A 满秩，且 $\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n) \neq \emptyset$。我们还将记 $s_L(T) = |\mathcal{S}_L(T)|/|\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)|$。最重要的加性结构或许是舒尔三元组，即满足$\mathcal{S}_{L_{\text{Schur}}}(T) = \{(x, y, z) \in T^3 : x + y = z, x \neq y, x \neq 0, y \neq 0\}$的线性映射 L_{Schur}；以及 k 项等差数列（k-等差数列），即对于任意满足 $\mathcal{S}_{L_{k\text{-AP}}}(T) = \{(a, a + d, \ldots, a + (k - 1)\, d) \in T^k : d \neq 0\}$ 的 $k \geq 3$，相应的线性映射 $L_{k\text{-AP}}$。

将 $[c] = \{1, \ldots, c\}$ 写作给定的颜色数 $c \in \mathbb{N}$，我们称 $\gamma : \mathbb{F}_q^n \to [c]$ 一个维数为 dim(γ) 的 c-染色 $= n$，并将 $\gamma^{(i)}$ 记作使用 $1 \leq i \leq c$着色的元素集合，以及将 $\Gamma_{q,\, c}(n)$ 记作 $\mathbb{F}_q^n$的所有 c-染色的集合。拉多重数问题（仿照图论中所使用的术语创造这一名称）旨在确定

$$m_{q,c}(L) = \lim_{n\to\infty} \min_{\gamma\in\Gamma_{q,c}(n)} s_L(\gamma^{(1)}) + \ldots + s_L(\gamma^{(c)}). \tag{2}$$

由单调性可知该极限存在，并且根据定义有$0 \leq m_{q,\, c}(L) \leq 1$。若满足拉多定理的条件[37]，那么实际上有 $m_{q,\, c}(L) > 0$，并且我们称 L 对 q 是 c-common 的，如果 $m_{q,\, c}(L) = c^{1-m}$。回顾一下，L 由一个有 r 行、m 列的矩阵 A 定义；也就是说，单色解的最小数量在均匀随机染色下取其期望值。对于 $r = 1$，Cameron、Cilleruelo 和 Serra 的结果 [5]

[1]这里介绍的方法当然也适用于系数属于 $\mathbb{F}_q$ 的情形，例如 Saad 和 Wolf [41], Fox、Pham 和 Zhao [14], 以及 Kam˘cev、Liebenau 和 Morrison [24, 23],所研究的情形；甚至更一般地，适用于它们定义 $\mathbb{F}_q$ 的任意置换的情形，例如 Cameron、Cilleruelo 和Serra [5]所研究的情形。

证明了，若 L 为奇数，则任意 m都是 2-common 的。当 m 为偶数时，Saad 和 Wolf [41] 证明了，任意 L 若其系数可以分成若干对，且每对系数之和为零，则它都是 2-common 的。Fox、Pham 和 Zhao [14] 证明了这一充分条件实际上也是必要条件。当 $r > 1$ 时，相关研究则少得多。Kamˇcev、Liebenau 和 Morrison [24]近期通过证明任意 L 只要“诱导”出某个更小的 2×4 线性映射，就不是常见的，从而刻画了一大类非共同线性映射。

聚焦于 q 的特定取值，Kr´al、Lamaison 和 Pach [25] 最近还刻画了在假设 $r = 2$ 且 m 为奇数时， $q = 2$ 的 2-共同性 L 。当 $q = 5$ 时，最值得研究的加性结构是 4项等差数列 [46]。Saad 和 Wolf [41] 证明了它们不是 2-共同的，并给出了 $1/8 - 7 \cdot 2^{10} \cdot 5^{-2} \approx 0.1247 < 2^{-4}$ 的上界。我们为这一问题建立了首个非平凡下界，同时显著改进了上界。

命题 1.1。我们有 $1/10 < m_{5,\ 2}(A_{4\text{-}AP}) \leq 13/126 = 0.1\overline{031746}$。

事实上，我们猜想这个上界是紧的。超越 4项等差数列，我们还可以证明 $m_{5,\ 2}(A_{5\text{-AP}}) \leq 1/126 < 2^{-4}$，从而证明 5-项等差数列在 $\mathbb{F}_5$ 中同样不是 2-共同的，但在这种情况下，我们没有得到任何有意义的下界。

对多于两种颜色的着色中的单色结构进行研究，也已证明与极值图论相关。最值得注意的是，Cummings等人 [7] 扩展了 Goodman [19] 的结果，确定了三染色中三角形的精确 Ramsey 重数，并表明尽管三角形是 2-常见的，却不是 3-常见的。我们在加法情形中研究类似问题，并确定了 $\mathbb{F}_3^n$ 的三染色中三项等差数列的精确 Rado重数，同样表明它们不是 3-常见的。

定理 1.2。我们有 $m_{3,3}(A_{3\text{-}AP}) = 1/27$。

我们还可以证明 $0.041258 \leq m_{2,3}(A_{\text{Schur}}) = 1/16 < 3^{-2}$ ，以及 $m_{3,3}(A_{\text{Schur}}) \leq 7/81 < 3^{-2}$，从而证明对于 $q = 2$ 和 $q = 3$，舒尔三元组也不是 3-常见的。

所有结果的上界都通过明确的膨胀型构造获得。图论情形中的下界最近通过一种依赖 Razborov [38] 提出的旗代数的计算方法得以获得。这一方法已被扩展到不同的背景中，但迄今似乎尚未在算术情形中得到探索。我们通过在有限域模型中发展所需的理论，并将其应用于获得上述结果，在这一方向上迈出了第一步。

大纲 第 2 节将介绍有限域上向量空间染色所需的基本概念，以及如何计算其中的解。随后，第 3 节将正式引入旗代数，并介绍一种通过膨胀构造求得上界的基本方法。基于前面各节的内容，我们将在第 4 节说明引言中所述结果是如何得出的。最后，第 5 节将给出一些总结性评论，并探讨未来研究的可能方向。

2 同构与双重计数

由于在本节及接下来的两节中， q 将是任意但固定的素数幂， c 也将是任意但固定的整数，因此通常会在记号中省略二者。特别地，我们将 $\Gamma(n)=\Gamma_{q,\ c}(n)$ 记作所有维数为 n 的 c-染色的集合。我们还将记作 $\Gamma=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Gamma(n)$，并令 0 维向量空间只包含一个点，即 $\mathbb{F}_q^0=\{0\}$，因此无论 q 如何， $|\Gamma(0)|=c$ 。

2.1 向量空间中部分固定态射的概念

我们用 e_j 表示 $\mathbb{F}_q^n$ 中第 j个标准单位基向量（适用于 $1\le j\le n$ ），并采用一种不太常见但便于记号的写法，用 e_0 表示零向量。

定义 2.1。我们将仿射线性映射 $\varphi:\ \mathbb{F}_q^k\to\mathbb{F}_q^n$ 称为态射，并称其为某个 $t\ge 0$ 的 t-固定态射，若对所有 $0\le j\le t$，都有 $\varphi(e_j)=e_j$ 。态射单射时称为单态射；若 $n=k$，则单态射是同构。

为方便记号，我们将 t 的取值范围扩展到 -1，以纳入非固定态射，并始终用 t^+ 表示 $\max\{t,0\}$。对于给定的 $t\ge -1$ 和 $n,k\ge t^+$，我们用 $\mathrm{M}_t(k;n)$ 表示从 $\mathbb{F}_q^k$ 到 $\mathbb{F}_q^n$ 的 t-固定态射集合，其中态射按 $\mathbb{F}_q^k$的 t-固定同构取商。当 $n\ge k$时，我们同样用 $\mathrm{Mon}_t(k;\ n)$ 表示具有相同性质的单态射集合。我们还将 $\mathrm{Mon}_t(k;n)$ 中元素的像称为 $\mathbb{F}_q^n$的 t-固定 k维子空间，因此，0-固定子空间对应线性子空间，非固定子空间对应仿射子空间。我们再进一步推广记号：给定 k_1、……、 $k_m\ge t^+$ 以及 $n\ge k_1+\ldots+k_m-(m-1)\,t^+$，我们用 $\mathrm{Mon}_t(k_1,\ldots\ldots,k_m;\ n)$ 表示所有单态射元组 $(\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_m)$ 的集合，其中 $(\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_m)\ \in\mathrm{Mon}_t(k_1;n)\ \times\ldots\times\mathrm{Mon}_t(k_m;n)$，且它们仅在 t-固定子空间上重叠，也就是说，它们满足

$$\varphi_i(\mathbb{F}_q^{k_i})\cap\varphi_j(\mathbb{F}_q^{k_j})=\begin{cases}\mathrm{id}_{t,n}(\mathbb{F}_q^t) & \text{for } t\ge 0,\\ \emptyset & \text{for } t=-1,\end{cases}$$

对于任意 $1\ \le i<j\le m$，其中我们令 $\mathrm{id}_{t\ ,n}$ 表示从 $\mathbb{F}_q^t$ 到 $\mathbb{F}^n$的唯一 t-固定同构

$_q$。为了计算单态射的数量，我们需要以高斯多项式系数的形式定义多项式系数的一个 q-类比。简要地假设 $q\ge 1$ 为实数，我们将 $[n]_q=\sum_{i=0}^{n-1}q^i$ 记作 q-数 n，其中注意到，对于 $q\ \ne\ 1$， $[n]_q=(1-q^n)/(1-q)$，以及 $[n]_1\ =\lim_{q\to 1}[n]_q\ =\ n$；此外， $[n]_q!$ $=\ [n]_q\cdots[2]_q\,[1]_q$表示 q的 n-阶乘。现在，对于任意的 k_1、……、 $k_m\ \ge\ 0$和 $n\ge k'=k_1+\ldots+k_m$ ，高斯多项式系数可定义为

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}_q=\frac{[n]_q!}{[k_1]_q!\cdots[k_m]_q!\,[n-k']_q!}.$$

引理 2.2。对于任意整数 $0 \le k_1$、……、k_m 和 $n \ge k' = k_1 + \ldots + k_m$，我们有 e

$$|\operatorname{Mon}_{-1}(k_1, \ldots, k_m; n)| = q^{n-k'} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m}_q .$$

对于整数 $0 \le t \le k_1$、…、k_m 和 $n \ge k' = k_1 + \ldots + k_m -$ $(m-1)$ t，我们有

$$|\operatorname{Mon}_t(k_1, \ldots, k_m; n)| = \binom{n-t}{k_1 - t, \ldots, k_m - t}_q .$$

证明。高斯二项式系数 $\binom{n}{k}_q$ 计数了 $\mathbb{F}_q^n$ 中所有 0-固定的 k 维子空间的数量。为说明这一点，注意，恰有 $(q^n-1)\,(q^{n-1}-1)\,\cdots(q^{n-k+1}-1)$ 种方法选取 $\mathbb{F}_q^n$ 中的 k 个线性无关向量；在 $\mathbb{F}_q^k$ 中计入同构后，所需的分母即为 $(q^k-1)\,(q^{k-1}-1)\,\cdots(q-1)$。注意到

$$\begin{aligned} |\operatorname{Mon}_t(k_1, \ldots, k_m; n)| &= \operatorname{Mon}_0(k_1 - t, \ldots, k_m - t; n - t)| \\ &= |\operatorname{Mon}_0(k_1 - t; n - t)|\,|\operatorname{Mon}_0(k_2 - t, \ldots, k_m - t; n - k_1)| \end{aligned}$$

并迭代可得，当 $t \ge 0$ 时，$|\mathbf{Mon}_t(k_1, \ldots, k_m; n)|$ 的所需等式。注意到 $\mathbb{F}_q^n$ 恰好包含给定的 k' 维子空间的 $q^{n-k'}$ 个仿射副本，即可得到 $t = -1$ 的公式。

□

推论 2.3。我们有

$$|\operatorname{Mon}_t(k_1, \ldots, k_m; n')|\,|\operatorname{Mon}_t(n'; n)| = |\operatorname{Mon}_t(k_1, \ldots, k_m; n)| \binom{n-k'}{n'-k'}_q$$

对于任意 $t \ge -1$、k_1、…、$k_m \ge t^+$，以及 $n \ge n' \ge k' = k_1 + \ldots + k_m - (m-1)\,t^+$。

2.2 同构与着色密度

对于某个 $t \ge -1$，我们称两个染色 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(n)$ 是 t-固定同构的，记作 $\gamma_1 \cong_t \gamma_2$，如果存在一个 t-固定同构 $\varphi\colon \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$ 满足 $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \circ \varphi$。我们令

$$\Gamma^t(n) = \Gamma(n)/\cong_t \tag{3}$$

表示所有 $\mathbb{F}_q^n$ 的 c-染色在 t-固定同构意义下的集合，即对每个等价类选取一个规范但任意的代表。我们还用 $\Gamma^t = \bigcup_{n=t^+}^{\infty} \Gamma^t(n)$ 表示任意维数的所有染色在 t-固定同构意义下的集合。给定两个染色 $\delta \in \Gamma^t(k)$ 和 $\gamma \in \Gamma^t(n)$，其中 $n \ge k \ge t^+$，若一个 t-固定单态射 $\varphi \in \mathbf{M}_t(k; n)$ 在 γ 中诱导出 δ 的一个副本，且 δ 是 γ 的子着色，则称之为此情形，其中 $\delta \cong_t \gamma \circ \varphi$。将单态射替换为不一定是单射的态射时，我们称其诱导出一个退化副本，并称 δ 为退化子着色。

给定 k_1、……、$k_m \ge t^+$ 和 $n \ge k_1 + \ldots + k_m - (m-1)\,t^+$，某些着色$\delta_1 \in \Gamma^t(k_1)$、……、$\delta_m \in \Gamma^t(k_m)$ 在 $\gamma \in \Gamma^t(n)$ 中的密度现定义为一个

q/n	1	2	3	4	5
2	3	5	10	32	382
3	4	14	1028		
4	8	1648			
5	6	3324			

q/n	1	2	3	4	5
2	4	8	20	92	2744
3	6	36	15 636		
4	14	7724			
5	12	72 192			

表1： $\mathbb{F}_q^n$ 在未固定（左）和0固定（右）同构下的二染色数量。注意，$\Gamma_{2,\ 2}^t(n)$的基数分别由 OEIS 数列 A000585 和 A000214 给出。

q/n	1	2	3	4
2	6	15	60	996
3	10	140	25 665 178	
4	30	1 630 868		
5	24	70 793 574		

q/n	1	2	3	4
2	9	30	180	6546
3	18	648		
4	69	8 451 708		
5	72			

Tabl图 2： $\mathbb{F}_q^n$ 的三染色在未固定（左）和 0-固定（右）同构意义下的数量 .

从 $\mathrm{Mon}_t(k_1、\ldots\ldots、\ k_m; n)$ 中均匀随机选取的 t-固定单态射在 γ 中诱导出 $\delta_1、\ldots\ldots、\ \delta_m$ 的副本的概率，即

$$p_t(\delta_1,\ldots,\delta_m;\gamma)=\frac{|\{(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\in \mathrm{Mon}_t(k_1,\ldots,k_m;n):\gamma\circ\varphi_i\cong_t\delta_i \text{ for all } 1\le i\le m\}|}{|\,\mathrm{Mon}_t(k_1,\ldots,k_m;n)|}. \quad (4)$$

对于 $n、\ k\ge t^+$，我们也将 γ 中某个 $\delta\in\Gamma^t(k)$ 的退化密度定义为：一个不一定是单射的 t-固定态射执行相同操作的概率，即

$$p_t^d(\delta;\gamma)=|\{\varphi\in \mathrm{M}_t(k;n):\gamma\circ\varphi\cong_t\delta\}|\,/\,|\,\mathrm{M}_t(k;n)|. \quad (5)$$

The 以下引理指出，渐近地，这两种概念会趋于一致 .

引理 2.4。对于任意 $t\ge -1、\ k\ge t^+、\ \delta\in\Gamma^t(k)$ 和 $\gamma\in\Gamma^t(n)$，其中 $n\to\infty$，我们有 e

$$p_t^d(\delta;\gamma)=p_t(\delta;\gamma)\,(1+o_n(1)). \quad (6)$$

证明。注意到 $|\,\mathrm{M}_t(k,n)|=|\,\mathrm{Mon}_t(k,n)|\,(1+o_n(1))$，即可立即得出结论；也就是说，当 n 足够大时，我们预期平均态射是单射。 □

下面将证明一个简单但根本的平均等式，适用于非退化的密度概念。

引理 2.5. 对于任意 $t\ge -1、\ k_1、\ldots\ldots、\ k_m\ge t^+、\ n\ge n'\ge k'=k_1+\ldots+k_m-(m-1)\,t^+$，以及着色 $\delta_1\in\Gamma^t(k_1)、\ldots\ldots、\ \delta_m\in\Gamma^t(k_m)、\ \gamma\in\Gamma^t(n)$，有

$$p_t(\delta_1,\ldots,\delta_m;\gamma)=\sum_{\beta\in\Gamma^t(n')}p_t(\delta_1,\ldots,\delta_m;\beta)\,p_t(\beta;\gamma). \quad (7)$$

证明。该陈述基于一个基本的双重计数论证。我们有

$$
\begin{aligned}
& p_t(\delta_1,\dots,\delta_m;\gamma)\,|\operatorname{Mon}_t(k_1,\dots k_m;n)|\begin{pmatrix}n-k'\\ n'-k'\end{pmatrix}_q \\
&= \sum_{(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in\operatorname{Mon}_t(k_1,\dots,k_m;n)} \mathbb{1}_{\gamma\circ\varphi_1\cong_t\delta_1}\cdots\mathbb{1}_{\gamma\circ\varphi_m\cong_t\delta_m}\begin{pmatrix}n-k'\\ n'-k'\end{pmatrix}_q \\
&= \sum_{\varphi'\in\operatorname{Mon}_t(n',n)}\ \sum_{(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in\operatorname{Mon}_t(k_1,\dots,k_m;n')} \mathbb{1}_{\gamma\circ\varphi'\circ\varphi_1\cong_t\delta_1}\cdots\mathbb{1}_{\gamma\circ\varphi'\circ\varphi_m\cong_t\delta_m} \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{F}_{n'}^{\tau}}\ \sum_{\varphi'\in\operatorname{Mon}_t(n',n)} \mathbb{1}_{\gamma\circ\varphi'\cong_t\beta}\ \sum_{(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in\operatorname{Mon}_t(k_1,\dots,k_m;n')} \mathbb{1}_{\beta\circ\varphi_1\cong_t\delta_1}\cdots\mathbb{1}_{\beta\circ\varphi_m\cong_t\delta_m} \\
&= \sum_{\beta\in\mathcal{F}_{n'}^{\tau}} p_t(\beta;\gamma)\,|\operatorname{Mon}_t(n';n)|\,p_t(\delta_1,\dots,\delta_m;\beta)\,|\operatorname{Mon}_t(k_1,\dots,k_m;n')|,
\end{aligned}
$$

通过推论 2.3 建立该命题。 □

2.3 计算着色中的解

对于给定的线性映射 L，我们已经定义了子集 $T\subseteq\mathbb{F}_q^n$ 中具有互不相同的项的解的集合 $\mathcal{S}_L(T)$。此外，我们还需要集合

$$\mathcal{S}'_L(T)=\{\mathbf{s}\in T^m : L(\mathbf{s})=\mathbf{0}\}\supseteq\mathcal{S}_L(T). \tag{8}$$

其中包含所有项不一定互不相同的解。下面的引理说明，渐近地，计算 $\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)$ 中的元素还是计算 $\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$ 中的元素并无区别。

命题 2.6。对于任意线性映射 L，有 $|\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)|=|\mathcal{S}_L\mathbb{F}_q^n(|\,(1+o)(1))$

证明。回顾一下，与线性映射 $L:\mathbb{F}_q^m\to\mathbb{F}_q^r$ 相关联的矩阵 $A\in\mathcal{M}^{m\times r}$ 被假设为满秩，因此 $|\mathcal{S}'_L(T)|=\Theta(q^{n(m-r)})$。$m$ 个坐标中的每个可能的重复项集合都定义了其自身的线性映射；除无重复项的情形外，该映射的自由度严格小于 $m-r$，因而有 $o(q^{n(m-r)})$ 个解。由于可能的重复项只有有限种，渐近地，$\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$ 中几乎每个元素也都属于 $\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)$。

□

为了发展旗代数方法，我们的解概念还需要满足一个平均等式，即解的密度需要能够表示为特定旗的加权密度，并且需要在适当的同构概念下保持不变。遗憾的是，$\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)$ 或 $\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$ 并不满足这一点，因此，对于任意 $t\geq -1$ 和 $n\geq t^+$，我们将解 $\mathbf{s}\in\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$ 的 t-固定维数 $\dim_t(s)$ 定义为满足以下条件的最小 $k\geq t^+$：存在一个 t-固定的 k 维子空间 $\mathbb{F}_q^n$，包含 $\mathbf{s}$ 的所有分量。请注意，就我们的目的而言，我们只需要未固定维数和 0-固定维数，但更一般地表述这些概念会更简单。我们将其记为

$$\dim_t(L)=\max\{\dim_t(\mathbf{s}):\mathbf{s}\in\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n),n\geq t^+\} \tag{9}$$

给定线性映射 L 的任意解中最大的 t-固定维数。我们还称给定的线性映射 L 为不变的，若对于任意解 $\mathbf{s} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$ 以及任意元素$a \in \mathbb{F}_q^n$，都有 $a + \mathbf{s} = (a + x_1, \ldots, a + x_m) \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$。[2]

引理 2.7。对于任意线性映射 L，当 $t \geq 0$ 时，我们有 $\dim_t(L) = m - r + t$；当 L 是不变的时，我们还有 $\dim_{-1}(L) = m - r - 1$。

证明。回想一下，与线性映射 $L : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q^r$ 相关联的矩阵 $A \in \mathcal{M}^{m \times r}$ 假定为满秩，因此我们有 $m - r$ 个自由度。当 $t \geq 0$时，这些自由度可以取在固定的 t 维子空间之外，并与该子空间一起构成一个 t-固定的 $m - r + t$ 维子空间。当 $t = -1$时，对于不变的 L，仿射项带来的自由度恰好使自由度减少 1；根据假设，对于任意 $a \in \mathbb{F}_q^n$ 和 $\mathbf{s} - a \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)$，都有 $\dim_{-1}(\mathbf{s}) = \dim_{-1}(\mathbf{s} - a)$。

□

因此，我们称 L 是可容许的，如果 $t \geq 0$，或者如果 $t = -1$ 且 L 是不变的。对于某个可容许的$\mathbf{s} \in \mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)$ 的解 L，如果 $\dim$-固定的满维 $\dim_t(s)$ 达到引理 2.7 中所述的相应上界。对于给定集合 $T \subseteq \mathbb{F}_q^n$，我们将某个可容许的 L 所对应的满维解集合记为

$$\mathcal{S}_L^t(T) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{S}'_L(T) : \dim_t(\mathbf{s}) = \dim_t(L)\} \tag{10}$$

并且也记作 $s_L^t(T) = |\mathcal{S}_L^t(T)| / |\mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)|$。我们将利用的一个重要性质是，每个全维解都定义了一个唯一的 $\dim(L)$ 维 t-不变子空间，且该解包含于其中。利用这一点，我们来证明：当 n 趋于无穷时，无论我们统计 $\mathcal{S}_L(\mathbb{F}_q^n)$ 中的元素还是 $\mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)$ 中的元素，渐近结果都没有区别。

命题 2.8。对于任意 $t \geq -1$ 和可容许线性映射 L，有

$$|\mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathcal{S}(\mathbb{F}_q^n)| \left(1 + o(1)\right).$$

证明。记 $d = \dim(L)$，并令 $\mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^n) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n) : \dim(\mathbf{s}) = k\}$ 表示对于任意 $t^+ \leq k \leq d$，$\mathbb{F}_q^n$ 中的 k 维 t-不变解的集合。由于每个解 $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^n)$ 都定义了 $\mathbb{F}_q^n$ 的一个唯一 k 维子空间，该子空间完全包含其各项，因此可得$|\mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathrm{Mon}_t(k;\, n)||\mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^k)|$。利用引理 2.2，以及 $|\mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^k)| = \theta(1)$，并令 $\binom{n}{k}_q = \Theta(q^{kn})$，当 n 趋于无穷时，便得到

$$|\mathcal{S}_L^{t,k}(\mathbb{F}_q^n)| = q^{n-k} \binom{n}{k}_q |\mathcal{S}_L^{t,k}(\mathbb{F}_q^k)| = \Theta(q^{(k-t)\,n}).$$

对于任意 $t \geq -1$。由此可得，当 $k < d$ 时，$|\mathcal{S}^{t,k}_L(\mathbb{F}_q^n)| = o(|\mathcal{S}_L^d(\mathbb{F}_q^n)|)$；又由于 $\mathcal{S}^{t,d}_L(\mathbb{F}_q^n) = \mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)$，因此 $|\mathcal{S}'_L(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathcal{S}^t(\mathbb{F}_q^n)| \left(1 + o(1)\right)$。所需结论遂由命题 2.6 得出。

□

[2]请注意，等差数列显然是不变的，而舒尔三元组则不是。一般而言，一个线性映射是不变的，当且仅当其关联矩阵的各列之和模 q 等于 0。

Th以下备注说明了为什么我们同时考虑非固定态射和 0-固定态射。

备注 2.9。对于任意 $t \geq -1$、可容许线性映射 L、整数 $n \geq \dim_t(L)$、 t-固定同构$\varphi\colon \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q^n$，以及解 $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)$，有 $(\varphi(x_1) \ldots, \varphi(x_m)) \in \mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)$；也就是说， $\mathbb{F}_q^n$ 的子集中的解的数量在 t-固定同构下是不变的。

若 L 不是不变的，则对 $t = -1$ 而言，情况便不再如此。一般来说，因此需要考虑 0-固定态射；但只要专门处理不变结构，就可以采用更简洁的做法，因为非固定态射会使染色的同构类数量更少。最后，我们以说明全维解满足所需的平均性质来结束本节。

命题 2.10。设给定 $t \geq -1$ 以及一个可容许线性映射 L 。对于任意满足 $\dim_t(L) \leq k \leq n$ 的整数、染色 $\gamma \in \Gamma^t(n)$ 和颜色 $1 \leq i \leq c$ ，有

$$s_L^t(\gamma^{(i)}) = \sum_{\delta \in \Gamma^t(k)} s_L^t(\delta^{(i)})\, p_t(\delta; \gamma).$$

证明。为简化记号，对于任意 $\varphi \in \mathrm{Mon}_t(d; n)$，记 $d = \dim_t(L)$ 以及 $\varphi^{-1}(T) = \{x \in \mathbb{F}_q^d \colon \varphi(x) \in T\}$。由于每个 t-固定的全维解都唯一确定一个 d 维的 t-固定子空间，且其各项均属于该子空间，因此有

$$|\mathcal{S}_L^t(\gamma^{(i)})| = \sum_{\varphi \in \mathrm{Mon}_t(d;n)} |\mathcal{S}_L^t\big((\gamma \circ \varphi)^{(i)}\big)| = \sum_{\delta \in \Gamma^t(d)} |\mathcal{S}_L^t(\delta^{(i)})| \cdot |\{\varphi \in \mathrm{Mon}_t(d; n) : \gamma \circ \varphi \cong_t \delta\}|.$$

特别地，这意味着 $|\mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathcal{S}_L^t(\mathbb{F}_q^d)|\,|\mathrm{Mon}_t(d;\, n)|$，因此将两边除以 $|S_L^t(\mathbb{F}_q^n)|$即可证明当 $k = d$时该结论成立。引理 2.5 将其推广到任意 $k > d$。 □

3 有限域向量空间的旗代数

旗代数理论由 Razborov 提出 [38] ，涵盖了极值组合学中一类特定问题，这类问题涉及渐近密度之间的关系。在其他方法中，该理论可以通过构造并求解一个半定规划，为本文研究的这类问题推导下界。这一方法已成功应用于极值图论中的许多长期未解问题 [39, 13, 21, 1, 2, 7, 3] ，且已有多种关于这一主题的优秀入门介绍，例如 Silva 等人撰写的介绍 [10]。本节旨在针对本文的具体应用，简明且自足地介绍这一框架，并说明若干与问题相关的细节。

3.1 旗代数的可容许参数

假设给定一个参数 $\lambda\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ ，存在 $t_\lambda \in \{-1, 0\}$ ，使得 λ 在 t_λ-固定同构下是不变的，也就是说，只要 $\gamma \cong_{t_\lambda} \gamma'$，就有 $\lambda(\gamma) = \lambda(\gamma')$，

以及一个整数 $n_\lambda \in \mathbb{N}$，满足

$$\lambda(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^{t_\lambda}(n)} \lambda(\beta)\, p_{t_\lambda}(\beta, \gamma) \tag{11}$$

对所有 $\gamma \in \Gamma^{t_\lambda}$ 以及 $n_\lambda \le n \le$ 维数(γ)。注意，在上一节的注释 2.9 和命题 2.10 中，我们已经证明，对于给定的线性映射 L，单色满维解所占的比例定义了这样一个参数，其中 $t_\lambda = 0$ 对于一般的 L 以及$t_\lambda = -1$ 对于不变的情形，在这两种情况下都有 $n_\lambda =$ 维数$_{t_\lambda}(L)$。给定 λ，我们现在希望确定

$$\lambda^\star = \lim_{n\to\infty} \min_{\gamma \in \Gamma^{t_\lambda}(n)} \lambda(\gamma). \tag{12}$$

由方程（11）可知单调性成立，因此极限存在；容易看出，对任意 $N \ge n_\lambda$，都有一个平凡的下界 $\lambda^\star \ge \min_{\delta \in \Gamma^{t_\lambda}(N)} \lambda(\delta)$。

在正式定义旗代数之前，先指出，本节介绍的所有内容都可以轻易推广到避免有限个 $\mathcal{X} \subset \Gamma$ 禁色着色 $\Gamma_{\mathcal{X}}$ 的染色情形：只需考虑那些不含 $\mathcal{X}$ 中任何元素作为非退化诱导子着色的染色，而不是始终考虑 Γ。这样便可以研究 Tur´án 型问题，甚至可以研究类似的问题，例如在独立数有界的图中，团的最大数量[11, 32, 8, 36]。由于引言中提出的问题仅涉及 $\mathcal{X} = \emptyset$的情形，我们不再进一步强调这一点。

3.2 旗代数及其语义锥的形式化定义

对于任意 $t \ge 0$，我们将 $\Gamma^t(t) = \Gamma(t)$ 的元素称为维数为 t 的型。我们还引入一个唯一的空型，记作 $\varnothing$，其维数为 $t = -1$。对于给定的维数为 t 且 $n \ge t^+$ 的型 τ，我们将满足 $F \circ \mathrm{id}_{t,\, n} \equiv \tau$ 的染色 $F \in \Gamma(n)$ 称为型 τ 的旗（或称 τ-旗）。回顾一下，$\mathrm{id}_{t,\, n}$ 表示从 $\mathbb{F}_q^t$ 到 $\mathbb{F}_q^n$ 的唯一 t-固定同构；还要注意，对于 $t = -1$，这一要求显然成立。我们将记作

$$\mathcal{F}_n^\tau = \{F \in \Gamma(n) : F \circ \mathrm{id}_{t,n} \equiv \tau\} / \cong_t$$

表示给定类型 τ 和维数 n 的所有旗在 t-固定同构下的集合，也就是说，我们仍为每个等价类选取一个典范代表。我们还将用 $\mathcal{F}^\tau = \bigcup_{n \ge t^+} \mathcal{F}^\tau$ 表示任意维数的所有 τ-旗。借助这些概念，现在可以给出旗代数的形式化定义。为遵循旗代数文献中的常见记号，从现在起，我们将用 F、H、G 而非 δ、β、γ 来表示旗。

定义 3.1. 对于给定的型 τ，其旗代数 $\mathcal{A}^\tau$通过考虑 $\mathbb{R}\mathcal{F}^\tau / \mathcal{K}^\tau$ 定义，其中

$$\mathcal{K}^\tau = \Big\{ F - \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\tau} p_t(F; F')\, F' : F \in \mathcal{F}^\tau, n \ge \dim(F) \Big\}, \tag{13}$$

并赋予其如下乘法：由.....的双线性扩张给出

$$F_1 \cdot F_2 = \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\tau} p_t(F_1, F_2; H)\, H + \mathcal{K}^\tau \tag{14}$$

对任意两个旗 F_1、$F_2 \in \mathcal{F}^\tau$以及任意的 $n \geq \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(\tau)$ 定义。

注意，根据引理 n，乘积定义中 2.5 的选取确实是任意的，并且 τ 是 $\mathcal{A}^\tau$ 的乘法单位元。对于涉及 $\mathcal{A}^\tau$ 中元素的代数表达式，我们将省略 τ 和 $\mathcal{K}^\tau$，因此例如对于常数 $c \in \mathbb{R}$，我们只需写 c 来表示 $c\tau + \mathcal{K}^\tau$ 中的元素 $\mathcal{A}^\tau$。代数中未直接对应于某个旗的元素通常用小写 f 表示。

从组合视角来看，我们关注 $\mathcal{F}^\tau$ 中的收敛序列 $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$，即旗序列 $G_k \in \mathcal{F}^\tau$，其中 $\dim(G_k)$ 趋于无穷，并且对任意 $F \in \mathcal{F}^\tau$，$\lim_{k\to\infty} p_t(F; G_k)$ 都存在。注意，根据紧致性，每个递增序列都有一个收敛子序列[38, 定理 3.2]。旗代数的决定性性质是，正同态 ϕ，即满足对所有 $F \in \mathcal{F}^\tau$ 均有 $\phi(F) \geq 0$ 的代数同态 $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\tau, \mathbb{R})$，与极限泛函一一对应；极限泛函是映射$f\colon \mathcal{F}^\tau \to \mathbb{R}$的线性延拓，这些映射通过对某个收敛序列 $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 定义为 $f(F) = \lim_{k\to\infty} p(F; G_k)$。

定理 3.2（ [38]中的定理 3.3）。每个极限泛函都是正同态，且每个正同态都是极限泛函。

基于这一认识，我们用 $\mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\tau, \mathbb{R})$ 表示正同态的集合，并

$$\mathcal{S}^\tau = \{f \in \mathcal{A}^\tau : \phi(f) \geq 0 \text{ for all } \phi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\tau, \mathbb{R})\} \tag{15}$$

表示型 τ 的语义锥。由于 ϕ 是代数同态，对于任意 f、f_1、$f_2 \in \mathcal{S}^\tau$ 和 $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们还有 $c \cdot f \in \mathcal{S}^\tau$ 以及 $f_1 + f_2 \in \mathcal{S}^\tau$；也就是说，对于任意型 τ，$\mathcal{S}^\tau$ 确实是一个锥。我们用语义锥 $\mathcal{S}^\tau$ 在 $\mathcal{A}^\tau$ 上定义偏序，其中当且仅当 $f_1 - f_2 \in \mathcal{S}^\tau$ 时，$f_1 \geq f_2$ 成立。记

$$C_\lambda^\tau = \sum_{\beta \in \mathcal{F}_{n_\lambda}^\tau} \lambda(\beta)\, \beta, \tag{16}$$

对于任意型 τ 维数为 t_λ 且 t_λ 和 n_λ 如第 3.1 节开头所述，我们现在可以通过以下锥优化问题重新表述在方程（ $\lambda^\star$ ）中确定 12 的问题

$$\lambda^\star = \max\{\lambda' \in \mathbb{R} : C_\lambda^\tau \geq \lambda' \text{ for all types } \tau \text{ of dimension } t_\lambda\}. \tag{17}$$

与图的情形一样，为某个型构造论证通常更为自然τ，而不是直接用于方程（17）中的型。我们需要将这些论证“拉回”到我们所关注的旗空间中。给定一个 τ 维数为 $t \geq t_\lambda$的型，我们令 τ_λ 表示唯一的 0 维型，并满足 $\tau_\lambda(0) = \tau(0)$，如果 $t_\lambda = 0$，而在 $\varnothing$ 时则表示空型 $t_\lambda = -1$。对于给定的旗 $F \in \mathcal{F}_n^\tau$，现在令 $F|_{t_\lambda}$表示$\mathcal{F}_n^{\tau_\lambda}$中的元素，该元素通过将 F视为 Γ^{t_λ}中的元素得到；也就是说，对于 $t_\lambda = -1$，我们忽略所有固定部分；对于$t_\lambda = 0$，除固定的零元素外的部分也全部忽略。

定义 3.3。给定一个型 τ，其维数为 $t \geq t_\lambda$。向下算子 $[\![\cdot]\!]_{t_\lambda}: \mathcal{A}^\tau \to \mathcal{A}^{\tau_\lambda}$ 由 $F \mapsto q_{t_\lambda}(F)$ 的线性延拓给出，其中 $\cdot F|_{t_\lambda}$ 对任意 $F \in \mathcal{F}_n^\tau$ 定义，而$q_\lambda(F)$表示：从所有 t_λ-固定的 $\mathbb{F}_q^n$ 同构中均匀随机选取一个时，它将$F|_{t_\lambda}$变为 $\mathcal{F}_n^\tau$中某个元素的概率。

向下算子的决定性性质，除了它是线性的之外，[38, 定理 2。5],还在于它是保序的，即 $f \geq 0$在 $\mathcal{A}^\tau$意味着 $[\![f]\!]_{t_\lambda} \geq 0$在 $\mathcal{A}^{\tau_\lambda}$中，或等价地$[\![\mathcal{S}^\tau]\!]_{t_\lambda} \subseteq \mathcal{S}^{\tau_\lambda}$ [38, 定理 3。1]。请注意，这与柯西–施瓦茨不等式密切相关。在旗代数的语境中，该不等式可表述为 $[\![f^2]\!]_{t_\lambda} \geq [\![f]\!]_{t_\lambda}^2$ [38, 定理 3。14]。

3.3 如何通过旗代数获得下界

证明对于一个维数为 $t_\lambda \in \{-1, 0\}$的特定型 τ，有 $C_\lambda^\tau \geq \lambda'$ 的一种方法，是找到正元素 f_1，...，$f_m \in \mathcal{S}^\tau$，并证明 $C_\lambda^\tau - \lambda' \geq f_1 + \ldots + f_m$ 在$\mathcal{A}^\tau$中成立。这不仅能确立一个下界，还能揭示极值收敛序列的结构信息，因为对于任何满足 $\phi(C_\lambda^\tau) = \lambda'$的 $1 \leq i \leq m$ 和$\phi \in \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\tau, \mathbb{R})$，都必须有 $\phi(f_i) = 0$ 。平方显然是正元素的一种选择，因此，我们可以通过定义一个满足条件 $\tau'_\lambda = \tau$ 的型集 $\mathcal{T}$（对任意 $\tau' \in \mathcal{T}$均成立），以及代数元素的有限集合 $\mathcal{B}_{\tau'} \subset \mathcal{A}^{\tau'}$，并验证

$$C_\lambda^\tau - \lambda' \geq \sum_{\tau' \in \mathcal{T}} \sum_{f \in \mathcal{B}_{\tau'}} [\![f^2]\!]_{t_\lambda}. \tag{18}$$

注意，对于 $t_\lambda = -1$，我们只需对空型 $\tau = \varnothing$证明一次；而对于$t_\lambda = 0$，实际上需要针对所有维数为 0 的 c 类型 τ 分别进行验证。不过，当所讨论的参数在颜色置换下保持不变时（引言中陈述的结果即属此情形），实际上只需针对任意选定的一个维数为 0 的型验证上述结论。

在实践中，方程（18）可以在 $\mathcal{F}_N^\tau$ 上验证，其中 $N \geq 0$为某个固定且适当小的值。型 $\mathcal{T}$ 的维数为 $-1 \leq t \leq N-2$；对于每个给定的、维数为 τ' 的型t，集合 $\mathcal{B}_{\tau'}$ 由 $\mathcal{F}_{\lfloor (N-t)/2 \rfloor}^{\tau'}$ 中的旗的线性组合所构成的陪集组成，$t \geq 0$ 当$\mathcal{F}_{N-1}^{\tau'}$ 且 $t = -1$时。此类表达式可利用平方和（SOS）与半定规划（SDP）之间成熟的联系求得 [35]。这些技术细节已有其他研究探讨，因此本文不再着重强调。

3.4 上界的显式构造

最后，我们暂时离开旗代数，简要探讨如何为满足第 λ 3.1 节所规定要求的参数 获取上界。过去人们采用过多种方法来求上界，而迄今最强有力的方法似乎是简单图膨胀的一种类比。

对于任意 $n \geq 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$和 $S = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subseteq [n]$, 我们将 $x\restriction_S = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{F}_q^k$记作把 x限制为索引属于 S 的那些项。当 $k = 0$, 因而 $S = \emptyset$ 时, 我们记作 $x\restriction_\emptyset = 0 \in \mathbb{F}_q^0$。对于 $k \geq 0$, 给定染色 $\gamma \in \Gamma^t(n)$, 其中 $t \geq -1$ 且 $n \geq t^+$, 其 k 重膨胀 $\gamma^{[k]} \in \Gamma^t(n+k)$ 定义如下:

$$\gamma^{[k]}(x) = \gamma(x\restriction_n)$$

对于任意 $x \in \mathbb{F}_q^{n+k}$。膨胀的决定性性质在于, 它对子染色的退化密度具有不变性。我们通过以下方式引入参数 λ 的退化版本:

$$\lambda^d(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^{t_\lambda}(n_\lambda)} \lambda(\beta)\, p^d_{t_\lambda}(\beta, \gamma) \tag{19}$$

对于任意染色 $\gamma \in \Gamma^{t_\lambda}$。以下引理说明, 我们可以从任意染色导出 $\lambda^\star$ 的一个上界。

引理 3.4。对于任意染色 $\gamma \in \Gamma^{t_\lambda}$, 我们有 $\lambda^\star \leq \lambda^d(\gamma)$。

证明。根据 $\lambda^\star$ 的定义, 显然有 $\lambda^\star \leq \liminf_{k\to\infty} \lambda(\gamma^{[k]})$。由引理 2.4, 得到 $\lambda(\gamma^{[k]}) = \lambda^d(\gamma^{[k]})(1 + o_k(1))$。给定任意满足 $k' \geq 0$ 的染色 $\delta \in \Gamma^t(k')$, 有 $p^d_{t_\lambda}(\delta, \gamma^{[k]}) = p^d_{t_\lambda}(\delta, \gamma)$, 因此 $\lambda^d(\gamma^{[k]}) = \lambda^d(\gamma)$, 引理得证。 □

这一基本论证已经能够帮助我们在某些情形下建立紧界。然而, 当满足某些要求时, 可以迭代给定的构造, 从而得到更好的上界。对于给定的 $\gamma \in \Gamma^t(n)$ 和 $\beta \in \Gamma(k)$, 其中 $t \geq -1$、$n \geq t^+$ 和 $k \geq 0$, 乘积构造 $\gamma \otimes \beta \in \Gamma^t(n+k)$ 定义为

$$\gamma \otimes \beta(x) = \begin{cases} \beta(x\restriction_{\{n+1,\ldots n+k\}}) & \text{if } x\restriction_{\{1,\ldots,n\}} = 0, \\ \gamma(x\restriction_{\{1,\ldots,n\}}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们注意到, 与乘积构造类似的概念此前已在加法情形中用于处理 $\mathbb{Z}_n$ 中的结构, 参见 [27, 33]。为陈述下一个命题, 令 $\gamma_i = i \cdot \mathbb{1}_0 + (1 - \mathbb{1}_0) \cdot \gamma$ 表示由 γ 对任意 $1 \leq i \leq c$ 通过令 $\gamma_i(0) = i$ 以及 $\gamma_0 \in \Gamma(0)$ 得到的染色, 其中染色由 $\gamma_0(0) = \gamma(0)$ 给出。

命题 3.5. 对于任意满足对所有 $1 \leq i \leq c$ 均有 $\lambda^d(\gamma_i) = \lambda^d(\gamma)$ 的 $\gamma \in \Gamma^{t_\lambda}(n)$, 我们有

$$\lambda^\star \leq \frac{|\,\mathrm{M}_{t_\lambda}(n_\lambda, n)|\,\lambda^d(\gamma) - \lambda^d(\gamma_0)}{|\,\mathrm{M}_{t_\lambda}(n_\lambda, n)| - 1}. \tag{20}$$

证明。由于对所有 $1 \leq i \leq c$, $\lambda^d(\gamma_i) = \lambda^d(\gamma)$, 因此我们有

$$\lambda^d(\gamma \otimes \gamma) = \lambda^d(\gamma) - \frac{\lambda^d(\gamma_0) - \lambda^d(\gamma)}{|\,\mathrm{M}_{t_\lambda}(n_\lambda, n)|}.$$

迭代应用乘积构造, 并考虑 $\lambda^d(\gamma \otimes \gamma \otimes \ldots \otimes \gamma)$ 的极限, 即可得到所需结论。

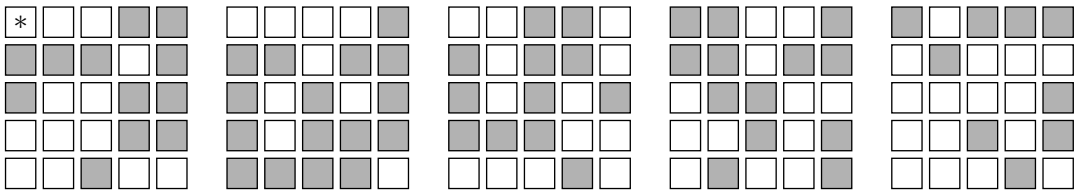
□

4 Ramsey 重数命题的证明

所有上界都依赖于引理 3.4 或命题 3.5 ，相应的着色通常通过计算得到：要么穷举检查某个维数以下的所有着色，要么采用 Parczyk 等人最近在图论背景下探索的搜索启发式。 [33] 下界的证明将使用旗代数框架给出。首先通过 `csdp` [4] 数值求解半定规划（SDP）形式，然后对输出进行 LDL 分解并将结果舍入为精确有理数值，或者使用 `SoPlex` [16, 18] 求解精确有理数的线性规划（LP），以便在需要满足 λ' 的精确取值时得到所需结果。后一种情况下，通常可以根据数值解轻松推测出解的零特征向量空间，并在 LP 形式中加以约束。我们将按照方程（18）中的平方和形式表示证明证书。我们力求以自足的方式呈现证明，但验证本文部分论断所需的代码可在网上找到： `github.com/FordUniver/rs_radomult_23`。

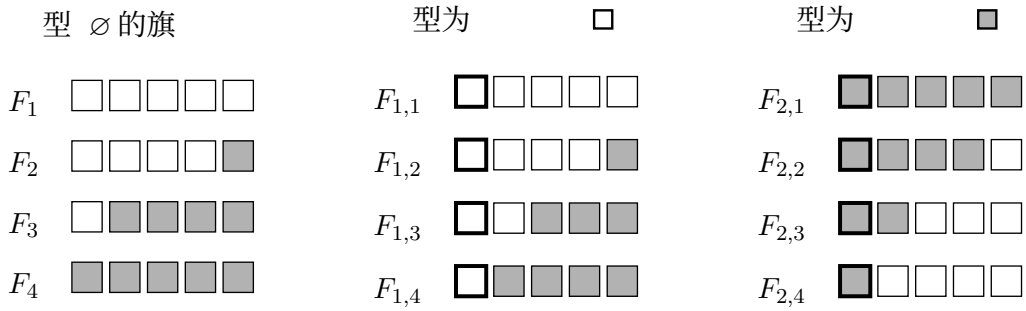
4.1 命题1.1的证明

上界。 其值 13/126 通过迭代膨胀得到，也就是将命题3.5 应用于以下三维二染色：



请注意，我们用星号标出了颜色可自由选择的元素 0。验证命题3.5 的要求并计算方程（20）在计算上都很简单。

下界。为了给出下界的证书，我们先以图示方式为与维数为 -1 和 0 的型相对应的相关旗定义一些变量名：



下界的证明现在可以通过首先用计算验证以下结论来得出：

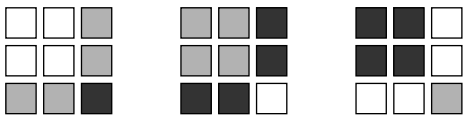
$$F_1 + F_4 + (F_2 + F_3)/5 - 1/10 \geq \sum_{i=1}^{2} \left(9/10 \cdot [\![\left(F_{i,1} + (5\,F_{i,2} - 5\,F_{i,3} - 10\,F_{i,4})/27\right)^2]\!]_{-1}$$

$$\ldots + 61/162 \cdot [\![\big((F_{i,3} - F_{i,2})/2 + F_{i,4} \big)^2]\!]_{-1} \Big)$$

该结论对 $\Gamma_{5\,2}^{-1}(2)$ 中的所有元素都成立，也就是说，对所有未固定的二维空间二染色都成立。以高效方式获得全部 3324 种此类染色，在计算上并非完全容易，但借助图同构问题的实际求解方法中的一些见解，仍是可行的 [28, 29, 30]。这已经说明 m_5,2($L_{4\text{-AP}}$) $\geq 1/10$。为证明这实际上必须是严格不等式，设 ϕ 是一个假设的极限泛函，满足 $\phi(F_1 + F_4 + (F_2 + F_3)/5) = 1/10$。右侧的各项之和意味着 $\phi(F_{i,3} - F_{i,2} + 2\,F_{i,4}) = 0$，因此$\phi(F_{i,1}) = 0$ 对 $i \in \{1, 2\}$成立，而这又意味着 $\phi(F_1) = \phi(F_4) = 0$。然而，这与 m_5,2($L_{5\text{-AP}}$) > 0这一事实矛盾，由此得出 m_5,2($L_{4\text{-AP}}$) $> 1/10$。

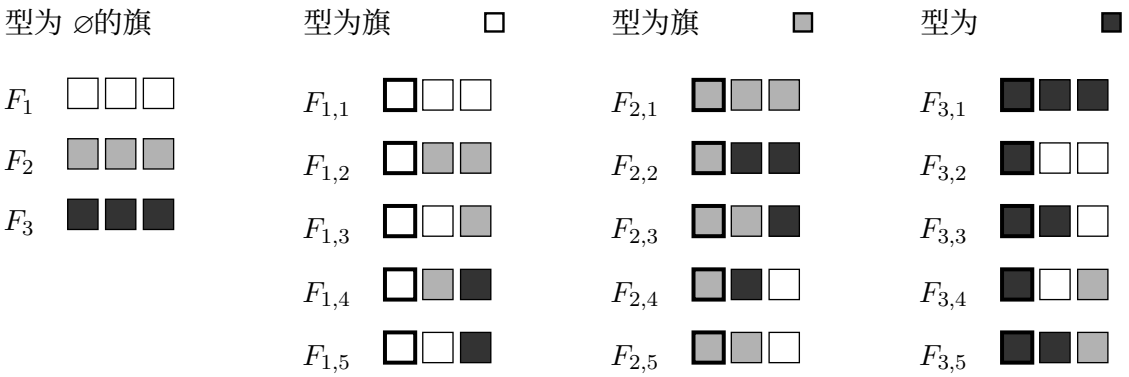
4.2 定理1.2的证明

上界。上界通过一个简单的膨胀得到，即将引理3.4 应用于以下三维三染色：



请注意，这种染色实际上是 $\mathbb{F}_3^3$的拉姆齐（或 Rado）染色，也就是说，它不包含任何非退化的单色三项等差数列副本。相应的下界实际上意味着，不存在 $\mathbb{F}_3^4$的此类染色。Lidick´y 和 Pfender [26]此前研究过拉姆齐重数问题与拉姆齐数之间的这类联系。

下界。现在，让我们再次用图形方式为维数为 -1 和 0 的类型所对应的相关旗定义一些变量名：



现在通过计算验证以下内容，即可证明下界：

$$\begin{aligned} F_i - 1/27 \geq\ & 26/27 \cdot [\![\big(F_{i,1} - 99/182\,F_{i,2} + 75/208\,F_{i,3} - 11/28\,F_{i,4} - 3/26\,F_{i,5} \big)^2]\!]_{-1} \\ & \ldots + 1685/1911 \cdot [\![\big(F_{i,2} - 231/26960\,F_{i,3} + 1703/6740\,F_{i,4} - 1869/3370\,F_{i,5} \big)^2]\!]_{-1} \\ & \ldots + 71779/431360 \cdot [\![\big(F_{i,3} - 358196/502453\,F_{i,4} - 412904/502453\,F_{i,5} \big)^2]\!]_{-1} \end{aligned}$$

$$\ldots + 5431408/10551513 \cdot [\![\left(F_{i,4} - 1/4\, F_{i,5}\right)^2]\!]_{-1}$$

对于任意 $i \in \{1,2,3\}$，此结论对 $\Gamma_{3\,3,}^{-1}$(2) 中的所有元素均成立，也就是说，对所有未固定的二维三染色都成立。通过计算即可轻松获得全部 140 种此类染色。

4.3 其余结论的证明

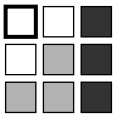
5-等差数列（APs）位于 $\mathbb{F}_5^n$。对于 $1/126$，$m_{5\text{的上界}2}(A_{5\text{-AP}})$ 是通过迭代膨胀得到的：将命题 3.5 应用于与$m_{5,\ 2}(A_{4\text{-AP}})$ 上界相同的三维二染色。这种构造的重叠应用在图论中有时也会出现，例如[36, 33]中的一些结果。

位于 $\mathbb{F}_2^n$中的舒尔三元组。对于 $1/16$，其上界$m_{2,\ 3}(A_{\text{Schur}})$ 是通过简单的膨胀得到的，也就是说，将引理3.4 应用于以下二维三着色：



0.041258 的下界是通过对维数为 $N = 4$ 的全部 6546 种着色应用旗代数框架得到的。由于没有达到任何精确目标，且涉及的型和旗数量过多，我们不在此处复现该证书，而是请读者参阅与本文相关的代码。

中的舒尔三元组 $\mathbb{F}_3^n$。的上界 $7/81$ 对于$m_{3,\ 3}(A_{\text{Schur}})$ 可通过简单的膨胀得到，也就是说，将引理 3.4 应用于以下二维三着色：



我们注意到，还有其他二维三着色可以得到相同的值。我们认为这个上界并不紧，但并未投入大量时间和资源尝试改进这一构造。

5 总结性评述与开放问题

长期以来，人们一直将图论中的工具和技术应用于加性组合学中研究较少的问题。调整这些方法以适应略有不同的背景，不仅能加深我们对加法情形的理解，也可能拓展我们对这些工具的一般认识。本文研究了有限域上的向量空间中拉姆齐重数问题的加法类比；我们采用了膨胀型构造，并针对这一特定情形发展了旗代数方法。关键内容包括建立一种恰当的概念，用以判定有限域上的向量空间的着色何时...

是同构的，同时考虑线性系统可能具有的不变性，并定义适用于双重计数的自然解概念。

还有许多值得探索的方向，可以在这些结果的基础上进一步推进。首先，显然值得尝试获得一个与命题 1.1 中的构造性上界相匹配的下界，以及定理 1.2中的稳定性结果。除了本文研究的问题之外，还可以研究高维仿射子空间的重数，因为 q-AP 在 $\mathbb{F}_q^n$ 中构成一维仿射子空间。为网格 $[q]^n$ 开发不同但相关的态射概念，也可能使我们能够将这一框架应用于更多几何问题，以及有关超立方体顶点着色的问题。更具雄心的目标，是将旗代数框架推广到其他群中的加性结构；在这些群中，子结构不像有限域上的向量空间中的子结构那样界定清晰、性质良好。

不过，我们注意到，与图论中的类似问题相比，基于半正定规划的旗代数方法面临的障碍要大得多：由于底层对象的数量呈指数级增长，而非多项式级增长（分别相对于维数和阶数而言），很快就会遇到严重的计算限制。与此同时，这也使得本文给出的证书足够紧凑（就变量数量而言，而非约束数量而言），可以用书面形式呈现。对半正定规划求解器的结果进行舍入——这通常是这类证明中最大的技术难点之一——也因此相对直接，即使当时尚无匹配的上界。尽管如此，我们仍认为，继续发展这一框架并将其用于图论之外的问题是值得的。

致谢。我们感谢 Oriol Serra 就加法情形中的已有结果进行有益讨论，也感谢 Pascal Schweitzer 就同构问题提供宝贵意见。本研究部分由德国研究基金会（DFG）通过德国卓越战略——柏林数学研究中心 MATH+ (EXC-2046/1，项目编号：390685689)，以及资助项目 MTM2017-82166-P、PID2020-113082GBI00 和研发卓越中心与单位 Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 计划（CEX2020-001084-M）提供资金支持。

参考文献

[1] R. Baber 和 J. Talbot。《超图会跃迁》。《组合学、概率与计算》，20(2):161–171，2011。[2]J. Balogh、F. C. Clemen 和 B. Lidick`y。《无三角形图的谱》。arXiv:2204.00093，2022。[3] J. Balogh、P. Hu、B. Lidick`y、F. Pfender、J. Volec 和 M. Young。《三色图中的彩虹三角形》。《组合理论杂志》B辑，126:83–113，2017。

[4] B. Borchers。《用于半定规划的 CSDP、AC 库》。《优化方法与软件》，11(1-4):613–623，1999。[5] P. J. Cameron、J. Cilleruelo 和 O. Serra。《群中方程的单色解》。《伊比利亚美洲数学杂志》，23(1):385–395，2007。[6]D. Conlon。《完全图的 Ramsey 重数》。arXiv 预印本 arXiv:0711.4999，2007。[7] J. Cummings、D. Kr´al'、F. Pfender、K. Sperfeld、A. Treglown 和 M. Young。《三色图中的单色三角形》。《组合理论杂志》B 辑，103(4):489–503，2013。[8] S. Das、H. Huang、J. Ma、H. Naves 和 B. Sudakov。《Erd˝os 关于最少 k 个团的问题》。《组合理论杂志》B辑，103(3):344–373，2013。[9] B. A. Datskovsky。《单色舒尔三元组的数量》。《应用数学进展》，31(1):193–198，2003。[10] M. K. de Carli Silva、F. M. de Oliveira Filho 和 C. M. Sato。《旗代数：初探》。arXiv 预印本 arXiv:1607.04741，2016。[11] P. Erd˝os。《某些图中包含的完全子图数量》。《匈牙利科学院数学研究所公报》，7(3):459–464，1962。[12] C. Even-Zohar 和 N. Linial。《关于四顶点图可诱导性的一则注记》。《图与组合学》，31(5):1367–1380，2015。[13] V. Falgas-Ravry 和 E. R. Vaughan。《半定方法在三元图 Tur´án 密度问题中的应用》。《组合学、概率与计算》，22(1):21–54，2013。[14] J. Fox、H. T. Pham 和 Y. Zhao。《公共线性方程与 Sidorenko 线性方程》。《数学季刊》，72(4):1223–1234，2021。[15] F. Franek 和 V. R¨odl。《单色子图数量较少的完全图二染色》。《离散数学》，114(1-3):199–203，1993。[16] G. Gamrath、D. Anderson、K. Bestuzheva、W.-K. Chen、L. Eifler、M. Gasse、P. Gemander、A. Gleixner、L. Gottwald、K. Halbig、G. Hendel、C. Hojny、T. Koch、P. L. Bodic、S. J. Maher、F. Matter、M. Miltenberger、E. M¨uhmer、B. M¨uller、M. Pfetsch、F. Schl¨osser、F. Serrano、Y. Shinano、C. Tawfik、S. Vigerske、F. Wegscheider、D. Weninger 和 J. Witzig。《SCIP 优化套件 7.0》。技术报告 20-10，ZIB，Takustr. 7，14195 柏林，2020。[17] G. Giraud。《关于 Goodman 四边形问题及 Ramsey 数上界》。《组合理论杂志》B辑，27(3):237–253，1979。

[18] A. Gleixner、D. Steffy 和 K. Wolter。《线性规划的迭代细化》。技术报告 15-15，ZIB，Takustr. 7，14195 柏林，2015。[19] A. W. Goodman。《关于聚会中熟人与陌生人集合》。《美国数学月刊》 66(9):778–783，1959。[20] R. Graham 、 V. R¨odl 和 A. Ruci´nski。《整数随机子集的舒尔性质》。《数论杂志》61(2):388–408，1996。[21] A. Grzesik。《无三角形图中五圈的最大数量》。《组合理论杂志》B辑，102(5):1061–1066，2012。[22] A. Grzesik、J. Lee、B. Lidick`y 和 J. Volec。《关于三部公共图》。arXiv 预印本 arXiv:2012.02057，2020。[23] N. Kamcev、A. Liebenau 和 N. Morrison。《关于非公共方程组》。arXiv 预印本 arXiv:2106.08986，2021。[24] N. Kam˘cev、A. Liebenau 和 N. Morrison。《迈向 Sidorenko 系统的刻画》。arXiv 预印本 arXiv:2107.14413，2021。[25] A. Lamaison、P. P. Pach 等。《二元域上的二元公共方程组》。载于《2022离散数学日》，第169–173页。坎塔布里亚大学出版社，2022。[26] B. Lidicky 和 F. Pfender。《半定规划与 Ramsey 数》。SIAM离散数学杂志，35(4):2328–2344，2021。[27] L. Lu 和 X. Peng。《 $\mathbb{Z}_n$ 的二染色中的单色四项等差数列》。《组合理论杂志》A辑，119(5):1048–1065，2012。[28] B. D. McKay。《实用图同构》。《数论大会》30:45–87，1981。[29] B. D. McKay。《无同构重复的穷举生成》。《算法杂志》26(2):306–324，1998。[30] B. D. McKay 和 A. Piperno。《实用图同构，第二部分》。《符号计算杂志》60:94–112，2014。[31] S. Nieß。《计数 K_4的单色副本：拉姆齐重数问题的一个新下界》。arXiv:1207.4714，2012。[32] V. Nikiforov。《独立数受限的图中 k-团的最小数量》。《组合学、概率与计算》10(4):361–366，2001。[33] O. Parczyk、S. Pokutta、C. Spiegel 和 T. Szab´o。《新的拉姆齐重数界与搜索启发式》。2022离散数学日，263:224，2022。

[34] P. A. Parrilo、A. Robertson 和 D. Saracino。《单色三项等差数列渐近最小数量》。《组合理论杂志》A辑，115(1):185–192，2008。[35]P. A. Parrilo 和 B. Sturmfels。《多项式函数的最小化》。载于 S. Basu 和 L. Gonz´alez-Vega（编），《算法与定量实代数几何》，第60卷，DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书，普罗维登斯（罗得岛州），2003。美国数学学会。[36] O. Pikhurko 和 E. R. Vaughan。《独立数有界的图中 k-团的最小数量》。《组合学、概率与计算》22(6):910–934，2013。[37] R. Rado。《组合学研究》。数学杂志，36:424—-470，1933。[38] A. A. Razborov。《旗代数》。符号逻辑杂志，72(4):1239–1282，2007。[39] A. A. Razborov。《禁4顶点构型的3-超图》。SIAM离散数学杂志，24(3):946–963，2010。[40] A. Robertson 和 D. Zeilberger。《 $[1, n]$ 的二染色可以包含 $(1/22)n^2 + o(n)$ 个单色舒尔三元组，但不能更少！》电子组合学杂志，5(1):R19，1998。[41] A. Saad 和 J. Wolf。《某些有限阿贝尔群中线性模式的拉姆齐重数》。数学季刊，68(1):125–140，2017。[42] T. Schoen。《单色舒尔三元组的数量》。欧洲组合学杂志，20(8):855–866，1999。[43] K. Sperfeld。《关于最小单色 K_4-密度》。arXiv 预印本 arXiv:1106.1030，2011。[44] A. Thomason。《驳斥 Erd˝os 在拉姆齐理论中的一个猜想》。伦敦数学学会杂志，2(2):246–255，1989。[45]A. Thomason。《图乘积与单色重数》。组合学，17(1):125–134，1997。[46] J. Wolf。《 $\mathbb{Z}_p$中单色四项等差数列的最小数量》。组合学杂志，1(1):53–68，2010。