arXiv:2304.00417v1 [math.PR] 2 Apr 2023

关于紧阿贝尔群的紧开子群上 Haar 分布平移的刻画

G.M. Feldman

摘要。 设 X 是一个紧阿贝尔群。本文通过以下对称性，刻画群 X 的紧开子群上的 Haar 分布的平移：给定另一个线性形式后，一个取值于 X 的独立随机变量所构成的线性形式的条件分布具有对称性。这些线性形式的系数是群 X 的拓扑自同构。对于紧阿贝尔群而言，这一结果可视为著名 Heyde 定理的类似结论；该定理指出，在实数直线上，给定另一个线性形式后，一个独立随机变量所构成的线性形式的条件分布具有对称性，当且仅当其分布为高斯分布。

关键词。 紧阿贝尔群、条件分布、Haar 分布

数学主题分类。 43A35, 60B15,62E10

1. 引言

设 X 是一个紧阿贝尔群。本文旨在通过如下对称性刻画该群 X 的紧开子群上的 Haar 分布的平移: 取值于 X 的独立随机变量中，一个线性形式在给定另一个线性形式时的条件分布具有对称性。所考虑的线性形式的系数是群 X 的拓扑自同构。对于紧阿贝尔群，这一结果可视为著名 Heyde 定理（[16],另见 [17, 定理 13.4.1]）的一个类似结果；该定理通过实直线上独立实值随机变量的一个线性形式在给定另一个线性形式时的条件分布的对称性，刻画高斯分布。关于 Heyde 定理在不同类别的局部紧阿贝尔群上的其他类似结果，参见例如 [2–4,6–11,19,20]。值得注意的是，此前关于群上的刻画定理并未涉及紧阿贝尔群 X 的紧开子群上的 Haar 分布的平移。

本文使用抽象调和分析中的标准结果，特别是局部紧阿贝尔群的对偶理论（见 [15]）。约定以下记号。设 X 是一个第二可数的局部紧阿贝尔群。除非特别说明，我们只考虑这类群。用 Y 表示群 X 的特征群，用 (x,y) 表示特征 $y\in Y$ 在元素 $x\in X$ 处的值。若 K 是 X 的闭子群，则用 $A(Y,K)=\{y\in Y\colon (x,y)=1 \text{ 对所有 } x\in K\}$ 表示其湮没子群。用 $\mathrm{Aut}(X)$ 表示群 X 的所有拓扑自同构所成的群。设 $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$。伴随自同构 $\tilde{\alpha}\in\mathrm{Aut}(Y)$ 由公式 $(\alpha x,y)=(x,\tilde{\alpha}y)$ 定义，其中对所有 $x\in X$, $y\in Y$ 成立。用 I 表示恒等自同构。用 c_X 表示群 X 的零元的连通分支，用 b_Y 表示群 Y 的所有紧元素组成的子群。于是 $b_Y=A(Y,c_X)$。设 $\{K_\iota\colon \iota\in\mathcal{I}\}$ 是一个非空的紧阿贝尔群集合。用 $\mathrm{P}_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota$ 表示群 K_ι 的直积。除非另有说明，我们将在乘积拓扑下考虑群 $\mathrm{P}_{\iota\in\mathcal{I}} K_\iota$。设 $\{L_\iota\colon \iota\in\mathcal{I}\}$ 是一个非空的离散阿贝尔群集合。用 $\mathrm{P}^{*}_{\iota\in\mathcal{I}} L_\iota$ 表示群 L_ι 的弱直积，并赋予离散拓扑。A p-群定义为其元素的阶等于 p 的非负次幂的群。用 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$ 表示圆群（一维环面），用 $\mathbb{Z}$ 表示整数群，用 $\mathbb{Z}(n)=\{0,1,\dots,n-1\}$ 表示模 n 的剩余类群，用 $\mathbb{Q}$ 表示赋予离散拓扑的有理数群。用 $\mathcal{P}$ 表示素数集合，并且

p_n 个素数。设 $p \in \mathcal{P}$，并令 Δ_p 为 p-进整数群。用 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 表示形如 $\{k/p^n : k = 0,1,\dots,p^n-1, n = 0,1,\dots\}$ 的有理数集合。若将 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 中的运算定义为模 1 加法，则 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 变为一个阿贝尔群，并赋予离散拓扑。显然，该群与 p^n 次单位根的乘法群同构，并赋予离散拓扑，其中 n 遍历非负整数。群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 与群 Δ_p ([15, (25.2)]) 的特征群拓扑同构。

记 $\mathrm{M}^1(X)$ 为群 X 上概率分布的卷积半群。令$\mu \in \mathrm{M}^1(X)$。记

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x,y)d\mu(x)$$

分布 μ 的特征函数（傅里叶变换），并以 $\sigma(\mu)$ 表示 μ 的支集。按公式 $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$ 定义分布 $\bar{\mu} \in \mathrm{M}^1(X)$，其中 B 是群X的任意博雷尔子集。于是 $\hat{\ } \bar{\mu}(y) = \hat{\ }\mu(y)$。

定义 1.1 ([21, 第 IV 章，§6]). 分布 $\gamma \in \mathrm{M}^1(X)$ 称为高斯分布，如果其特征函数可表示为

$$\hat{\gamma}(y) = (x,y)\exp\{-\varphi(y)\},$$

其中 $x \in X$，且 $\varphi(y)$ 是群 Y 上的连续非负函数，满足方程

$$\varphi(u+v) + \varphi(u-v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u,v \in Y.$$

记 E_x 为集中在元素 $x \in X$ 处的退化分布。记 m_X 为群 X 上的哈尔测度。若 X 是紧群，我们假设 m_X 是一个分布。若 K 是群 X 的紧子群，则分布 m_K 的特征函数具有如下形式

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \in A(Y,K), \\ 0, & \text{if } y \notin A(Y,K). \end{cases} \tag{1}$$

2. 主定理

设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于局部紧阿贝尔群 X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。设 $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$。假设在线性形式 $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ 给定 $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ 的条件分布是对称的。显然，如果我们关心的是对 μ_j的描述，那么不失一般性，可以假设 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 和 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$，其中 $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$。

设 X 是一个非离散的局部紧阿贝尔群， μ 是 X上的一个分布。那么 μ可表示为以下各项之和

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s + \mu_d,$$

其中， μ_{ac} 是关于 m_X的绝对连续测度， μ_s 是关于 m_X的奇异测度，而 μ_d 是离散测度。测度 μ_{ac} 称为分布 μ 关于 m_X的绝对连续分量。

本文的主要结果是以下定理，可将其视为著名的 Heyde 定理在紧阿贝尔群上的类比。

定理 2.1. 设 X 为非离散紧阿贝尔群， α 为X的拓扑自同构，且 ξ_1 和 ξ_2 为取值于 X 、分布分别为 μ_1 和 μ_2的独立随机变量。假设满足以下条件：

(i) 商群 X/c_X 与以下形式的群拓扑同构

$$\mathop{\mathbf{P}}_{p\in\mathcal{P},\ p>2} X_p, \tag{2}$$

其中 $X_p=\Delta_p^{n_p}\times F_p$, n_p 是非负整数，且 F_p 是有限阿贝尔 p群 p;

(ii) $I\pm\alpha\in$ 自同构群(X);

(iii) 至少有一个分布μ_j 相对于 m_X具有非零绝对连续分量。

若线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时的条件分布是对称的，则$\mu_j=m_G*E_{x_j}$，其中 G 是 X的一个紧开子群， $x_j\in X$, $j=1$, 2。此外， $\alpha(G)=G$。

为证明定理 2.1，我们需要以下引理。

引理 2.2 ([5, 引理 16.1]). 设 X 是一个局部紧阿贝尔群， α 是 X 的一个拓扑自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时，线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 的条件分布对称，当且仅当特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u+\tilde{\alpha}v)=\hat{\mu}_1(u-v)\hat{\mu}_2(u-\tilde{\alpha}v),\quad u,v\in Y. \tag{3}$$

对我们来说， 将以下众所周知的命题表述为一个引理很方便。

引理 2.3. 设 X 是一个局部紧阿贝尔群， K 是 X 的一个闭子群。设 α 是群 X 的一个拓扑自同构。则以下命题成立:

(i) $\alpha(K)=K$ 当且仅当 $\tilde{\alpha}(A(Y,K))=A(Y,K)$。

(ii) 若 $\alpha(K)=K$，则 α 通过公式 $\hat{}\alpha[x]=[\alpha x]$, $[x]\in X/K$ 在商群 X/K 上诱导出一个拓扑自同构 $\hat{}\alpha$ 。$\hat{}\alpha$ 的伴随自同构是 $\tilde{\alpha}$ 在 $A(Y,K)$ 上的限制。

(iii) 设 $\alpha(K)=K$ ，并设 $\mu\in\mathrm{M}^1(X)$。特征函数 $\hat{}\mu(y)$ 在子群 $A(Y,K)$ 上的限制，是商群 X/K 上某个分布的特征函数。它是 μ 在自然同态 $X\to X/K$ 下的像。

下面的引理可由 [5] 中的推论 17.2 和注 17.5 的一个特殊情形得到。

引理 *2.4.* 设 X 是一个不含二阶元素的有限阿贝尔群。设 α 是群 X 的一个自同构，并满足条件 $I+\alpha\in$ ***Aut(X)***。假设 μ_1 和 μ_2 是 X 上的分布，且特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 非负并满足方程 (*3*) 。那么，对所有 $y\in Y$，均有 $\hat{}\mu_1(y)=\hat{}\mu_2(y)$，且 $\hat{}\mu_j(y)$ 只取 *0* 和 *1* 两个值。此外， $\tilde{\alpha}(E)=E$，其中 $E=\{y\in Y\colon \hat{}\mu_1(y)=\hat{}\mu_2(y)=1\}$。

引理 *2.5.* 设 X 是一个紧致全不连通阿贝尔群，且与形式为 *(2)* 的群拓扑同构。设 α 是群 X 的一个拓扑自同构，满足条件 $I+\alpha\in$ ***Aut(X)***。假设 μ_1 和 μ_2 是定义在 X 上的分布，其特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 非负且满足方程 (*3*) 。那么对所有 $y\in Y$，$\hat{}\mu_1(y)=\hat{}\mu_2(y)$，并且 $\hat{}\mu_j(y)$ 只取 *0* 和 *1* 两个值。此外， $\tilde{\alpha}(E)=E$，其中 $E=\{y\in Y\colon \hat{}\mu_1(y)=\hat{}\mu_2(y)=1\}$。

证明。由于群 X 是紧群，且与形式为 (2) 的群拓扑同构，因此群 Y 是离散的，并且与形式为

$$\mathop{\mathbf{P}^*}_{p\in\mathcal{P},\ p>2} Y_p, \tag{4}$$

其中 $Y_p = (\mathbb{Z}(p^\infty))^{n_p} \times H_p$，且 H_p 是群 F_p的特征群。令

$$Y_{m,n} = \{y \in Y : (p_2 p_3 \cdots p_n)^m y = 0,\ m = 1, 2, \ldots, n = 2, 3, \ldots, \}.$$

于是 $Y_{n,m}$ 是群 Y的有限子群。此外，由（4）可得

$$Y = \bigcup_{m\geq 1,\ n\geq 2} Y_{m,n}.$$

显然，子群 $Y_{m,n}$ 中的每一个在群 Y的每个自同构作用下都映入自身。我们有

$$\tilde{\alpha}(Y_{m,n}) = Y_{m,n}. \tag{5}$$

由 $I + \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ 可得 $I + \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$。因此，

$$(I + \tilde{\alpha})(Y_{m,n}) = Y_{m,n}. \tag{6}$$

由于 $Y_{m,n}$ 是有限群，因而也是紧群，其湮没子群 $A(X, Y_{m,n})$ 是X的开子群。这意味着商群 $X/A(X, Y_{m,n})$ 是离散群，因而是有限群。群 $Y_{m,n}$ 与商群 $X/A(X, Y_{m,n})$ 的特征群同构。显然，群 $X/A(X, Y_{m,n})$ 不含二阶元素。根据引理 2.2，给定 L_1 时，线性形式 L_2 的条件分布具有对称性，这意味着特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程（3）。鉴于（5），我们可以将方程（3）限制在子群 $Y_{m,n}$上。结合（5）和（6），由引理 2.3 可知，我们可以对有限阿贝尔群 $X/A(X, Y_{m,n})$ 及其诱导自同构 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Aut}(X/A(X, Y_{m,n}))$ 应用引理 2.4。根据引理 2.4，对于所有 $y \in Y_{m,n}$，有 $\hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y)$，且特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 在 $Y_{m,n}$上只取 0 和 1。由此可得，对于所有 $y \in Y$，有 $\hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y)$，且函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 在 Y 上只取 0 和 1。令 $E = \{y \in Y : \hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y) = 1\}$，且 $E_{m,n} = E \cap Y_{m,n}$。根据引理 2.4，我们有$\tilde{\alpha}(E_{m,n}) = E_{m,n}$。这意味着 $\tilde{\alpha}(E) = E$。□

以下命题众所周知。其证明可参见例如（[5, 命题 2.13]）。

引理 2.6. 设 X 是一个局部紧阿贝尔群，μ 是定义在 X 上的一个分布。令 $E = \{y \in Y : \hat{}\mu(y) = 1\}$。则 E 是群 Y 的一个闭子群。令 $G = A(X, E)$。则 $\sigma(\mu) \subset G$，并且若将 μ 视为群 G 上的一个分布，则其特征函数仅在群 G 的特征群的零元处取值为 1 。

定理 2.1 的证明. 根据引理 2.2，给定 L_1 时，线性形式L_2 的条件分布的对称性意味着特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程（3）。令 $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$。则 $\hat{}\nu_j(y) = |\hat{}\mu_j(y)|^2 \geq 0$ 且 $\hat{}\nu_j(-y) = \hat{}\nu_j(y)$，$y \in Y$。特征函数 $\hat{}\nu_j(y)$ 也满足方程（3）。由（1）可知，若证明 $\nu_1 = \nu_2 = m_K$，其中 K 是群 X 的一个紧开子群，则分布 μ_j 所需的表示即可由此得出。因此，不失一般性，我们可以在以下假设下证明该定理：

$$\hat{\mu}_j(y) \geq 0, \quad \hat{\mu}_j(-y) = \hat{\mu}_j(y), \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

由于 X 是一个紧群， Y 是一个离散群。因此，子群 b_Y 由群 Y 的有限阶元素组成。显然，子群 b_Y 在群 Y的每个自同构作用下都映射到自身。我们有

$$\tilde{\alpha}(b_Y) = b_Y. \tag{8}$$

由 $I + \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ 可得 $I + \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$。因此,

$$(I + \tilde{\alpha})(b_Y) = b_Y. \tag{9}$$

由于 $c_X = A(X, b_Y)$，群 b_Y 在拓扑上同构于因子群 X/c_X 的特征群。根据（8），我们可以将方程（3）限制到子群 b_Y 上。考虑到（8）和（9），由引理 2.3 可知，我们可以将引理 2.5 应用于紧致全不连通阿贝尔群 X/c_X 及其诱导的拓扑自同构 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Aut}(X/c_X)$。引理 2.5 意味着，特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 在子群 b_Y 上的限制只取值 0 和 1。此外,

$$\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) \ \text{ for all } \ y \in b_Y. \tag{10}$$

记 G_j 为群 X 的最小闭子群，该子群包含支集 $\sigma(\mu_j)$， j =1, 2。根据定理的条件，分布 μ_j 中至少有一个关于 m_X 的非零绝对连续分量。为明确起见，假设它是 μ_1。因此， $m_X(\sigma(\mu_1))$ >0。这意味着差集 $D_1 = \{x = x_1 - x_2 : x_i \in \sigma(\mu_1)\}$ 包含群 X 的一个零邻域。由 $D_1 \subset G_1$ 可知， G_1 是一个开子群。因此，其湮没子群 $H_1 = A(Y, G_1)$ 是群 Y 的一个紧子群。由于 Y 是离散群， H_1 是有限群，因此 $H_1 \subset b_Y$。

令 $E_j = \{y \in Y : \hat{}\mu_j(y) = 1\}$, $j = 1, 2$。于是由引理 2.6，集合 E_j 是群 Y的闭子群，且 $\sigma(\mu_j) \subset A(X, E_j)$。因此 $G_j \subset A(X, E_j)$，从而 $E_1 \subset H_1 \subset b_Y$。由此可得，对所有 $y \notin b_Y$， $\hat{}\mu_1(y) < 1$ 。由于 $E_1 \subset b_Y$，我们有 $E_1 = \{y \in b_Y : \hat{}\mu_1(y) = 1\}$。因此，结合（10），我们有 $E_1 = \{y \in b_Y : \hat{}\mu_2(y) = 1\} \subset E_2$。考虑到这一点，令

$$E = \{y \in b_Y : \mu_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = 1\}, \quad G = A(X, E).$$

因此，独立随机变量 ξ_1 和 ξ_2 取值于群 G。若将 ξ_1 和ξ_2 视为取值于 G的独立随机变量，则由引理 2.6，特征函数 $\hat{}\mu_1(y)$仅在群 G的特征群的零元处取值为 1。因此， G是包含分布 μ_j支集的群 X 的最小闭子群。将引理 2.5 应用于紧致全不连通阿贝尔群 X/c_X，可得 $\tilde{\alpha}(E) = E$。由引理 2.3 可知，由此可得 $\alpha(G) = G$。因此， α 在 G 上的限制是群 G的拓扑自同构。注意到 E 是有限群，因此 E 是紧群。由于子群 G 是 E的湮没子群，这意味着 G 是群 X的开群。

让我们验证：若考虑子群 G 而非群 X，定理的条件 (i)–(iii) 是否成立。

注意到 $c_X \subset G$。因此 $c_G = c_X$，且商群 $G/c_G = G/c_X$ 拓扑同构于商群 X/c_X的一个闭子群。但与具有形式 (2) 的群拓扑同构的群的每个闭子群，也拓扑同构于具有形式 (2) 的群。因此，群 G 满足条件 (i)。

根据定理的条件 $I \pm \alpha \in$ 自同构群(X)。这意味着 $I \pm \tilde{\alpha} \in$ 自同构群(Y)。由于 E 是群 Y的有限子群，且 $\tilde{\alpha} \in$ 自同构群(E)，因此我们有 $I \pm \tilde{\alpha} \in$ 自同构群(E)。于是，$(I \pm \tilde{\alpha})(E) = E$。由引理 2.3可知，由此可得 $(I \pm \alpha)(G) = G$。这意味着拓扑

自同构 $I \pm \alpha$ 到 G 是群 G的拓扑自同构。因此，拓扑自同构 α 对 G 的限制满足条件 (ii)。

子群 G 在 X中是开集。这意味着，如果分布 μ_1 相对于 m_X具有非零绝对连续分量，那么 μ_1 相对于 m_G也具有非零绝对连续分量。因此，若将μ_j 视为群 G上的分布，则分布μ_j满足条件（iii）。

因此，我们证明了：若用子群G 代替群 X，则定理的条件（i）–（iii）均成立。因此，我们可以对群 G证明该定理。换言之，我们可以假设特征函数$\hat{\mu}_1(y)$满足条件

$$\{y \in Y : \hat{\mu}_1(y) = 1\} = \{0\}. \tag{11}$$

我们来证明在这种情况下 $\mu_1 = \mu_2 = m_X$。这样，定理便得证 .

将 $u = \tilde{\alpha}y$、 $v = -y$代入方程（3）。鉴于$\hat{\mu}_j(-y) = \hat{\mu}_j(y)$， $j = 1$，由2可得

$$\hat{\mu}_1((I - \tilde{\alpha})y) = \hat{\mu}_1((I + \tilde{\alpha})y)\hat{\mu}_2(2\tilde{\alpha}y), \quad y \in Y. \tag{12}$$

同样，将 $u = y$、 $v = -y$ 代入方程（3），得到

$$\hat{\mu}_2((I - \tilde{\alpha})y) = \hat{\mu}_1(2y)\hat{\mu}_2((I + \tilde{\alpha})y), \quad y \in Y. \tag{13}$$

鉴于 $I - \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$，由 (12) 和 (13) 可得

$$\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_1((I + \tilde{\alpha})(I - \tilde{\alpha})^{-1}y)\hat{\mu}_2(2\tilde{\alpha}(I - a)^{-1}y), \quad y \in Y. \tag{14}$$

$$\hat{\mu}_2(y) = \hat{\mu}_1(2(I - \tilde{\alpha})^{-1}y)\hat{\mu}_2((I + \tilde{\alpha})(I - \tilde{\alpha})^{-1}y), \quad y \in Y. \tag{15}$$

令 $b = (I + \tilde{\alpha})(I - \tilde{\alpha})^{-1}$, $c = 2\tilde{\alpha}(I - \tilde{\alpha})^{-1}$, $d = 2(I - \tilde{\alpha})^{-1}$。下面验证群 Y不含二阶元素。一方面，条件 (i) 表明，商群 X/c_X 的特征群拓扑同构于 (4) 形式的群。由于 $p > 2$，其中不含二阶元素。另一方面，注意到商群 X/c_X的特征群拓扑同构于湮没子群 $A(Y, c_X) = b_Y$。由于子群 b_Y由群 Y 的所有有限阶元素组成，群 Y 不含二阶元素。由条件 (ii) 可得 $I \pm \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$。这意味着 b, c 和 d 都是单态射。显然，单态射 b, c 和 d彼此交换。

由（14）和（15）可得这些表示

$$\hat{\mu}_1(y) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \hat{\mu}_1(z_1(n,i)y)\hat{\mu}_2(w_1(n,i)y), \quad y \in Y, \tag{16}$$

and

$$\hat{\mu}_2(y) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}} \hat{\mu}_1(z_2(n,i)y)\hat{\mu}_2(w_2(n,i)y), \quad y \in Y, \tag{17}$$

其中

$$z_j(n,i) = b^{k_j(n,i)}c^{l_j(n,i)}d^{m_j(n,i)}, \quad w_j(n,i) = b^{p_j(n,i)}c^{q_j(n,i)}d^{r_j(n,i)},$$

且 $k_j(n,i)$、 $l_j(n,i)$、$m_j(n,i)$、$p_j(n,i)$、$q_j(n,i)$、$r_j(n,i)$、 $j = 1$ 和 2 均为非负整数，这对任意自然数 n 都成立。

由于 Y 是离散群，且分布 μ_1 关于 m_X 具有非零绝对连续分量，由 (7) 和 (11) 可得

$$\sup_{y\in Y,\ y\neq 0}\hat{\mu}_1(y)=C<1. \tag{18}$$

取 $y\in Y$, $y\neq 0$。由于 b, c 和 d 都是单态射，对于任意自然数 n 和 $1\leq i\leq 2^{n-1}$，自同态 $z_1(n,i)$ 和 $z_2(n,i)$ 也都是单态射。因此，$z_j(n,i)y\neq 0$, $j=1,2$，故由 (18) 可得 $\hat{}\mu_1(z_j(n,i)y)<C$, $i=1,2,\ldots,2^{n-1}$, $j=1,2$。由此结合 (16) 和 (17) 可知

$$\hat{\mu}_1(y)\leq C^{2^{n-1}},\quad \hat{\mu}_2(y)\leq C^{2^{n-1}},\quad y\neq 0.$$

由于 n 是任意的且 $C<1$，我们得到，对于所有 $y\neq 0$，$\hat{}\mu_1(y)=\hat{}\mu_2(y)=0$。

因此，对于特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$，我们得到如下表示

$$\hat{\mu}_1(y)=\hat{\mu}_2(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y=0,\\ 0, & \text{if } y\neq 0.\end{cases}$$

由 (1) 可得 $\mu_1=\mu_2=m_X$。 □

我们注意到，形式为 (2) 的紧致全不连通阿贝尔群最初是在研究局部紧阿贝尔群上的斯基托维奇–达尔莫瓦定理时出现的（[12], 另见 [13]）。事实证明，以下命题成立。设 X 是一个紧致全不连通阿贝尔群，α 是群 X 的拓扑自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于 X 的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。线性形式 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 和 $L_2=\xi_1+\alpha_2\xi_2$ 的独立性蕴含 μ_j 是群 X 的某个紧子群上的 Haar 分布的平移，当且仅当 X 与形式为 (2) 的群拓扑同构。

我们来表述定理 2.1 的两个推论。设 X 是一个紧致连通阿贝尔群。在这种情况下，由于群 X 的唯一紧开子群就是群 X 本身，定理 2.1 的条件 (i) 成立。由定理 2.1 可得群 X 上 Haar 分布的以下刻画。

推论 2.7. 设 X 是一个紧致连通阿贝尔群，α 是群 X 的一个拓扑自同构，且满足条件 $I\pm\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。假设至少有一个分布 μ_j 关于 m_X 具有非零绝对连续分量。若线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 条件下的条件分布是对称的，则 $\mu_1=\mu_2=m_X$。

我们指出，J. H. Stapleton 在 [22] 中证明，连通紧阿贝尔群 X 上的 Haar 分布可由取值于群 X中的 n 个独立随机变量的 n 个线性形式的独立性刻画。在该结果中，线性形式的系数为整数。I. P. Mazur 在 [18]中强化了这一结果。

考虑有限维环面 $\mathbb{T}^n$。鉴于 $\mathbb{T}^n$ 是紧致连通阿贝尔群，定理 2.1 推出以下命题。

推论2.8。设 α 是群 $\mathbb{T}^n$ 的拓扑自同构，满足条件 $I\pm\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathbb{T}^n)$。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 $\mathbb{T}^n$ 中的独立随机变量，其高斯分布分别为 γ_1 和 γ_2。如果线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 的条件下的条件分布是对称的，那么分布 γ_j 相对于 $m_{\mathbb{T}^n}$ 是奇异的。

令 $X^{(2)}=\{2x:x\in X\}$, $Y_{(2)}=\{y\in Y:\ 2y=0\}$，并证明以下命题（与推论 2.7 比较）。

命题 2.9. 设 X 是一个紧阿贝尔群， α 是群 X 的一个拓扑自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群X且服从分布 m_X 的独立同分布随机变量。给定 $L_1 = \xi_1+\xi_2$ 时，线性形式 $L_2 = \xi_1+\alpha\xi_2$ 的条件分布对称，当且仅当

$$X^{(2)} \subset (I-\alpha)(X). \tag{19}$$

证明。假设线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 在给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 条件下的条件分布是对称的。根据引理 2.2，特征函数 $\hat{}m_X(y)$ 满足方程（3），其形式为

$$\hat{m}_X(u+v)\hat{m}_X(u+\tilde{\alpha}v) = \hat{m}_X(u-v)\hat{m}_X(u-\tilde{\alpha}v), \quad u,v \in Y. \tag{20}$$

考虑到（1），方程（20）的左端等于 1，当且仅当 $u+v=0$ 和 $u+\tilde{\alpha}v=0$。换言之，当且仅当 $u=-v$ 和 $v\in$ 属于核（$I-\tilde{\alpha}$）。方程（20）的右端等于 1，当且仅当 $u-v=0$ 和 $u-\tilde{\alpha}v=0$。换言之，当且仅当 $u=v$ 和 $v\in$ 属于核（$I-\tilde{\alpha}$）。显然，方程（20）的左端和右端同时等于 1，当且仅当

$$\mathrm{Ker}(I-\tilde{\alpha}) \subset Y_{(2)}. \tag{21}$$

鉴于 A（X,核（$I-\tilde{\alpha}$））$=$（$I-\alpha$）（X）以及 A（X,$Y_{(2)}$）$= X^{(2)}$，（21）蕴含（19）。

假设 (19) 成立。那么 (21) 得到满足，并且如上所述，(20) 的左边和右边同时等于 1。因此，特征函数 $\hat{}m_X(y)$ 满足方程 (20)。于是，根据引理 2.2，线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ given$L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 的条件分布是对称的。

注意，如果 $I-\alpha \in$ Aut(X)，则 (19) 成立。还应指出，命题 2.9 对紧阿贝尔群 X 和拓扑自同构 α 均未作任何限制。 □

3. 关于定理 2.1 的评述

评注 3.1。我们来验证，定理 2.1 无法通过缩小由独立随机变量的一个线性形式在给定另一个线性形式时的条件分布对称性所刻画的分布类别而得到加强。具体而言，以下命题成立。

命题 3.2。设 X 是一个紧阿贝尔群，且 K 是 X的一个紧开子群。设 α 是群 X 的一个拓扑自同构，满足条件 $I\pm\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$，并且 $\alpha(K) = K$。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 且服从分布 m_X的独立同分布随机变量。给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 时，线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$的条件分布是对称的。

证明时，我们需要以下引理（[5,命题 17.6]）。

引理 3.3。设 X 是一个局部紧阿贝尔群，且 K 是 X的一个紧子群。设α 是群 X 的一个拓扑自同构，满足条件 $I\pm\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$。设 ξ_1 和ξ_2 是取值于群 X 且服从分布m_K的独立同分布随机变量。当且仅当以下条件成立时，给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 时线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 的条件分布是对称的：

$$K \subset (I+\alpha)^{-1}(I-\alpha)(K). \tag{22}$$

命题 *3.2* 的证明。由于 X 是紧群， Y是离散群。注意到 $(I+\alpha)(K) = K$。事实上，考虑湮没子群 $A(Y,K) = L$。由于 K 是开子群， L 是紧子群。考虑到 Y是离散群， L 是有限子群。由 $I+\alpha \in$ 自同构群(X)可知

$I+\tilde{\alpha}\in$ 自同构群(Y)。由条件 $\alpha(K)=K$。根据引理 2.3，这意味着 $\tilde{\alpha}(L)=L$，从而 $(I+\tilde{\alpha})(L)\subset L$。由于 $I+\tilde{\alpha}\in$ 自同构群(Y)且 L 是有限子群，因此 $(I+\tilde{\alpha})(L)=L$，进而根据引理 2.3，$(I+\alpha)(K)=K$。类似地可得 $(I-\alpha)(K)=K$。因此，$(I\pm\alpha)(K)=K$。这意味着 $K=(I+\alpha)^{-1}(I-\alpha)(K)$。故 (22) 成立。然后根据引理 3.3，给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 的条件分布是对称的。

注意，由于 K 是开子群，分布 m_K 相对于 m_X绝对连续。

利用引理 2.2，容易验证：若 ξ_j 是取值于群 X、分布为 $\mu_j=m_K*E_{x_j}$, $j=1,2$ 的独立同分布随机变量，其中x_j是群 X的元素，且满足 $2(x_1+\alpha x_2)\in K$，则给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时，线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$的条件分布是对称的。□

注3.4。 证明：若省略条件 (i)–(ii 中的一个，定理 2.1 将不成立 i).

1. 令 $X=(\mathbb{Z}(2))^{\aleph_0}$。则 X 是一个非离散紧致全不连通阿贝尔群。显然，条件 (i) 不满足。记 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n\dots)$，其中 $x_i\in\mathbb{Z}(2)$，为群 X的元素。考虑映射 α: $X\to X$，其定义如下:

$$\alpha(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(x_2,x_1+x_2,x_4,x_3+x_4,\dots,x_{2n},x_{2n-1}+x_{2n},\dots).$$

显然，$\alpha\in$ Aut(X)。设 μ_1 和 μ_2 是群 X上的任意分布。由于对所有 $y\in Y$都有$y=-y$，特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$满足方程（3）。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X、分布分别为 μ_1 和 μ_2的独立随机变量。根据引理 2.2，给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$时线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$的条件分布是对称的。容易看出，$I\pm\alpha\in$ Aut(X)。因此，条件 (ii) 得到满足。显然，可以假设每个分布 μ_j 相对于 m_X都具有非零绝对连续分量。因此，条件 (iii) 也得到满足。这个例子表明，若省略条件 (i)，定理 2.1 不成立。

2. 设 $X=\mathbb{T}^2$。记 $x=(z,w)$，其中 z、$w\in\mathbb{T}$是群 X的元素。群 Y与群 $\mathbb{Z}^2$同构。记 $y=(m,n)$，其中 m、$n\in\mathbb{Z}$是群 Y的元素。由定义 1.1 可知，二维环面 $\mathbb{T}^2$ 上的高斯分布 γ 的特征函数具有如下形式

$$\hat{\gamma}(y)=(x,y)\exp\{-\langle Ay,y\rangle\},\quad y\in Y,$$

其中 $x\in X$和 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^2$是一个对称半正定矩阵，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 $\mathbb{R}^2$中的标量积。群 $\mathbb{T}^2$ 的每个拓扑自同构 α 都由一个整值矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$定义，使得 $|ad-bc|=1$，且 α 在 $\mathbb{T}^2$ 上的作用如下

$$\alpha(z,w)=(z^aw^c,z^bw^d),\quad (z,w)\in\mathbb{T}^2.$$

伴随自同构 $\tilde{\alpha}\in$Aut$(\mathbb{Z}^2)$ 的形式为

$$\tilde{\alpha}(m,n)=(am+bn,cm+dn),\quad (m,n)\in\mathbb{Z}^2.$$

我们将自同构 α 和 $\tilde{\alpha}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$对应起来

设 $\alpha=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}\in$ Aut(X). 令 $A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 则 A_j 是对称半正定矩阵。考虑群 X 上的高斯分布 μ_j，其特征函数为

$$\hat{\mu}_1(y)=\exp\{-\langle A_1y,y\rangle\},\quad \hat{\mu}_2(y)=\exp\{-\langle A_2y,y\rangle\},\quad y\in Y.$$

直接验证可知，特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$ 满足方程（3）。设 ξ_1 和 ξ_2 为取值于群 X 、分布分别为 μ_1 和 μ_2 的独立随机变量。根据引理 2.2，在线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 的条件下，其条件分布是对称的。由于 X 是连通阿贝尔群，条件（i）得到满足。由于 $\det A_j > 0$, $j = 1, 2$，两个分布 μ_j 关于 m_X 均绝对连续，即条件（iii）也得到满足。注意， $I + \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$，但 $I - \alpha \notin \mathrm{Aut}(X)$，即条件（ii）不满足。此例表明，若省略条件（ii），定理 2.1 将不成立。

3. 设 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 是任意一个整数序列，其中所有 $a_j > 1$。设 $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 进整数群（[15, (10.2)]）。考虑群 $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$。将群 $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$ 中形如 $B = \{(n, n\mathrm{u}) : n \in \mathbb{Z}\}$ 的子群记为 B，其中 $\mathrm{u} = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \Delta_{\boldsymbol{a}}$。商群 $\Sigma_{\boldsymbol{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}})/B$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 进索列诺。群 $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ 是紧致连通群，维数为 1（[15, (10.12), (10.13), (24.28)]）。群 $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ 的特征群拓扑同构于如下形式的离散群：

$$H_{\boldsymbol{a}} = \left\{ \frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : \ n = 0, 1, \dots; \ m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

由定义 1.1 可知，高斯分布 γ 在 $\boldsymbol{a}$ 进索列诺 $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ isof 的特征函数具有如下形式：

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y) \exp\{-\sigma y^2\}, \quad y \in H_{\boldsymbol{a}},$$

其中 $x \in \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $\sigma \geq 0$。

设 $\boldsymbol{a} = (2, 3, \dots, n, \dots)$。考虑相应的 $\boldsymbol{a}$-进索伦诺伊德群 $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$。那么群$Y$ 在拓扑上同构于赋予离散拓扑的有理数群 $\mathbb{Q}$。群 X 的每个拓扑自同构都是乘以一个非零有理数。

由于 X 是一个连通阿贝尔群，条件 (i) 得到满足。设 α 是一个满足 $\alpha \neq -1$的负有理数。那么，乘以 α 是群 X 的一个拓扑自同构，且$I \pm \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$。因此，条件 (ii) 也得到满足。

Cons考虑群 X 上的高斯分布 μ_j，其特征函数为 s

$$\hat{\mu}_1(y) = \exp\{-\sigma_1 y^2\}, \quad \hat{\mu}_2(y) = \exp\{-\sigma_2 y^2\}, \quad y \in \mathbb{Q},$$

其中 $\sigma_1 + \alpha\sigma_2 = 0$。那么，特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$ 满足方程（3）。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 且分布分别为 μ_1 和 μ_2的独立随机变量。根据引理 2.2，给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 时，线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 的条件分布是对称的。群 X 不是局部连通的。因此，正如 [1], 中所证明的（另见 [5, 命题 3.14], ），群 X 上的每个高斯分布都相对于 m_X是奇异的，即条件 (iii) 不满足。这个例子表明，如果省略条件 (iii)，定理 2.1 就不成立。

注记 3.5. 我们来对满足定理 2.1 条件 (i) 的群作如下说明。显然，这些群是紧致连通阿贝尔群、与形如 (2) 的群拓扑同构的紧致全不连通阿贝尔群，以及它们的直积。这些群并未涵盖所有满足定理 2.1 条件 (i) 的群。还存在其他紧阿贝尔群，使得条件 (i) 对 X 成立，而群 X 并不同构于一个全不连通阿贝尔群与一个连通阿贝尔群的直积。为构造一个例子，考虑群

$$L = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p \in \mathcal{P}, \ p > 3} \mathbb{Z}(p). \tag{23}$$

由于 L 是约化无界群，存在一个混合阿贝尔群，其扭子部分与 L同构，并且它不同构于其扭子部分与某个无扭阿贝尔群的直积。因此，存在一个混合阿贝尔群 Y，其扭子部分 M 与 L同构，商群 Y/M 与有理数群 $\mathbb{Q}$同构，并且它不同构于 L 与 $\mathbb{Q}$ 的直积（[14,§54]）。显然，群 Y 是可数的。考虑赋予离散拓扑的群Y。记群 Y的特征群为 X。那么 X 是紧阿贝尔群。商群 X/c_X 的特征群与群b_Y拓扑同构，而后者与 L同构。因此，商群 X/c_X 与群

$$\mathbf{P}_{p\in\mathcal{P},\ p>3}\mathbb{Z}(p),$$

即形如 (2) 的群。因此，群 X 满足定理 2.1 的条件 (i)。由于群Y 不同构于其扭子部分与一个无扭群的直积，群 X 不与一个全不连通阿贝尔群和一个连通阿贝尔群的直积拓扑同构。

记群 X中乘以 3 的运算为 α。由于 $p>3$ 属于 (23)，容易看出$\alpha\in$ 自同构群(X)且 $I\pm\alpha\in$ 自同构群(X)。因此，α 满足定理 2.1 的条件 (ii)。

4. 定理 2.1 的推广

以下命题是定理 2.1 对一大类局部紧阿贝尔群的推广。

定理 4.1. 设 $X=\mathbb{R}^n\times K\times D$，其中 K 是一个非离散紧阿贝尔群，且商群 K/c_K 拓扑同构于一个形如(2)的群；D 是一个不含 2 阶元素的离散阿贝尔群。设 α 是群 X 的一个拓扑自同构，并满足条件 $I\pm\alpha\in$ 自同构群(X)。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2，且至少有一个分布 μ_j 相对于 m_X具有非零绝对连续分量。

若线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 的条件分布是对称的，则 $\mu_j=\gamma_j*m_G*E_{x_j}$，其中 γ_j 是 $\mathbb{R}^n$ 上的高斯分布，G 是群 $K\times D$ 的紧开子群，$x_j\in K\times D$、$j=1$，2。此外 $\alpha(\mathbb{R}^n\times G)=\mathbb{R}^n\times G$。

为了证明定理 4.1，我们需要以下引理。

引理 4.2。设 $X=\mathbb{R}^n\times G$，其中 G 是一个局部紧阿贝尔群。设 $\nu=\mu*\bar{\mu}$，其中$\mu\in \mathrm{M}^1(X)$。若 $\nu=\gamma*m_K$，其中 γ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对称高斯分布，且 K 是群 G 的紧子群，则 $\mu=\lambda*m_K*E_g$，其中 λ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的高斯分布，$g\in G$。

证明。群 Y与群 $\mathbb{R}^n\times H$拓扑同构，其中 H 是群 G的特征群。记 $y=(s,h)$，其中 $s\in\mathbb{R}^n$，$h\in H$是群 Y的元素。不失一般性，可以假设 $\{s\in\mathbb{R}^n:\hat{\gamma}(s)=1\}=\{0\}$。显然，分布 ν 的支集与群 X的子群 $F=\mathbb{R}^n\times K$ 重合。容易看出，我们可以将分布 μ 替换为其平移 μ'，使得 $\sigma(\mu')\subset F$，且 $\nu=\mu'*\bar{\mu}'$。若将 ν 视为 F 上的分布，则其特征函数仅在群 F 的特征群的零元处等于 1。因此，我们可以证明该引理，并假设 $X=\mathbb{R}^n\times K$ 且$\{(s,h)\in Y:\hat{\nu}(s,h)=1\}=\{0\}$。那么特征函数 $\hat{\nu}(s,h)$ 具有如下形式

$$\hat{\nu}(s,h)=\begin{cases}\hat{\gamma}(s), & \text{if } s\in\mathbb{R}^n,\ h=0,\\ 0, & \text{if } s\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0.\end{cases}$$

引理的结论现在可由 Cramér 关于高斯分布分解的定理推出：若 γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的高斯分布，且 $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$，其中 $\gamma_j \in \mathsf{M}^1(\mathbb{R}^n)$，$j = 1, 2$，则 γ_j 是 $\mathbb{R}^n$中的高斯分布。□

引理 *4.3*（[4,定理 1]）。设 X 是一个不含二阶元素的离散阿贝尔群。设 α 是群 X 的一个自同构，满足条件 $I \pm \alpha \in \mathit{Aut}(X)$。假设 μ_1和 μ_2 是 X 上的分布，且其特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$非负并满足方程 (3)。那么，对所有 $y \in Y$，$\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y)$，且$\hat{\mu}_j(y)$只取 *0* 和 *1* 两个值。此外，$\tilde{\alpha}(E) = (I \pm \tilde{\alpha})(E) = E$，其中 $E = \{y \in Y : \hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = 1\}$。

考虑到引理 2.2，以下命题可由 [8]中的定理 1 得出。

引理 4.4。设 α 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个拓扑自同构，满足条件 $I + \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$。假设 γ_1 和 γ_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的分布，且其特征函数 $\hat{\gamma}_j(s)$ 非负并满足方程 (3)。那么 γ_j 是 $\mathbb{R}^n$中的对称高斯分布。

定理 *4.1* 的证明。群 Y与群 $\mathbb{R}^n \times L \times C$拓扑同构，其中 L是群 K的特征群，而 C 是群 D的特征群。群 L是离散的，群 C 是紧的。将分布 μ_j 换为分布 $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$ 并应用引理 4.2，可知只需在假设条件 (7) 成立的情况下证明该定理。

将定理的证明归结为 $D = \{0\}$的情形。由于商群 K/c_K 的特征群与群 L的扭子部分 b_L 拓扑同构，因此可知b_L 同构于形如 (4) 的群。令

$$(b_L)_{m,n} = \{l \in b_L : (p_2 p_3 \cdots p_n)^m l = 0,\ m = 1, 2, \ldots, n = 2, 3, \ldots, \}.$$

于是 $(b_L)_{n,\ m}$ 是群 b_L的有限子群。此外，由 (4) 可得

$$b_L = \bigcup_{m \geq 1,\ n \geq 2} (b_L)_{m,n}.$$

显然，每个子群 $(b_L)_{m,\ n}$ 在群 b_L的每个自同构作用下都保持不变。

记 (l, c) 为群 $b_L \times C$ 的元素，其中 $l \in b_L$, $c \in C$，并考虑由公式 $\pi(l, c) = l$, $l \in b_L$, $c \in C$ 定义的连续同态 $\pi : b_L \times C \to b_L$。注意到 $\tilde{\alpha}(C) \subset b_L \times C$。考虑子群 $\pi(\tilde{\alpha}(C))$。由于 C 是紧子群，而 b_L 是离散子群，因此 $\pi(\tilde{\alpha}(C))$ 是有限子群。这意味着存在有限子群 $M = (b_L)_{m,n}$，其中某些 m 和 n 使得 $\pi(\tilde{\alpha}(C)) \subset M$。容易看出，$\tilde{\alpha}(M) \subset M \times C$ 且 $\tilde{\alpha}(C) \subset M \times C$。于是有

$$\tilde{\alpha}(M \times C) \subset \tilde{\alpha}(M) + \tilde{\alpha}(C) \subset M \times C + M \times C = M \times C. \tag{24}$$

如果我们假设子群 M 还包含子群 $\pi(\tilde{\alpha}^{-1}(C))$，那么根据 $\tilde{\alpha}^{-1}(M) \subset M \times C$ 以及 $\tilde{\alpha}^{-1}(C) \subset M \times C$，可得

$$\tilde{\alpha}^{-1}(M \times C) \subset \tilde{\alpha}^{-1}(M) + \tilde{\alpha}^{-1}(C) \subset M \times C + M \times C = M \times C. \tag{25}$$

由（24）和（25）可得

$$\tilde{\alpha}(M \times C) = M \times C. \tag{26}$$

如果我们假设子群 M 也包含子群 $\pi((I \pm \tilde{\alpha})(C))$ 和 $\pi((I \pm \tilde{\alpha})^{-1}(C))$，那么用类似的方法推理可得

$$(I \pm \tilde{\alpha})(M \times C) = M \times C. \tag{27}$$

因此，我们看到，拓扑自同构 $\tilde{\alpha}$ 在子群 $M\times C$ 上的限制是群 $M\times C$ 的一个满足条件 (27) 的拓扑自同构。

注意到 $A(X, M\times C) = \mathbb{R}^n \times A(K, M)$，且群 $M\times C$ 与商群 $X/A(X, M\times C)$ 的特征群拓扑同构。由于 $X/A(X, M\times C) = (K/A(K, M)) \times D$，因此商群 $X/A(X, M\times C)$ 是离散的，并且不含二阶元素。根据引理 2.2，给定 L_1 时线性形式 L_2 的条件分布的对称性意味着，特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程（3）。鉴于（26），我们可以将方程（3）限制在子群 $M\times C$ 上。结合（26）和（27），由引理 2.3 可知，我们可以将引理 4.3 应用于离散阿贝尔群 $X/A(X, M\times C)$ 及其诱导自同构 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Aut}(X/A(X, M\times C))$。由此得到，对于所有 $y \in M\times C$，有 $\hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y)$，且 $\hat{}\mu_j(y)$ 在 $M\times C$ 上仅取 0 和 1 两个值。令

$$E = \{y \in M\times C : \hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = 1\}, \quad N = A(K\times D, E).$$

由引理 4.3，$\tilde{\alpha}(E) = (I \pm \tilde{\alpha})(E) = E$。由于 E 是群 $M\times C$的紧子群，因此 N是 $K\times D$的开子群。注意，$\{y \in M\times C : \hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y) = 0\}$ 是一个闭集。因此，E 是 $M\times C$的开子群。由于子群 N 是 E的湮没子群，这意味着 N 是 $K\times D$的紧子群。所以，N 是群$K\times D$的紧开子群。鉴于 $c_N = c_K$，容易看出商群 N/c_N 拓扑同构于形如 (2) 的群。因此，定理的条件 (i) 对群 $\mathbb{R}^n \times N$成立。

由引理 2.6，$\sigma(\mu_j) \subset A(X, E) = \mathbb{R}^n \times N$, $j = 1, 2$。由引理 2.3，根据 $\tilde{\alpha}(E) = E$和 $(I \pm \tilde{\alpha})(E) = E$ 可得 $\alpha(\mathbb{R}^n \times N) = \mathbb{R}^n \times N$，并且

$$(I \pm \alpha)(\mathbb{R}^n \times N) = \mathbb{R}^n \times N. \tag{28}$$

这意味着，α 在子群 $\mathbb{R}^n \times N$ 上的限制是群$\mathbb{R}^n \times N$的拓扑自同构；根据 (28)，这个限制满足定理的条件 (ii)。

子群 $\mathbb{R}^n\times N$ 在 X中是开集。这意味着，如果分布 μ_j 相对于 m_X具有非零绝对连续分量，那么 μ_j 相对于 $m_{\mathbb{R}^n\times N}$也具有非零绝对连续分量。因此，若将分布 μ_j 视为群 $\mathbb{R}^n \times N$上的分布，则分布 μ_j 满足定理的条件 (iii)。以上推理表明，假设 $D = \{0\}$，我们就可以证明该定理。

我们现在按照定理 2.1 的证明思路进行。为明确起见，假设分布 μ_1 相对于 m_X具有非零绝对连续分量。将该定理的证明约化到条件 (11) 成立的情形，其方法与定理 2.1 中相同。在此过程中，我们注意到 $c_X = \mathbb{R}^n \times c_K$；因此，商群 X/c_X 与形如 (2) 的群拓扑同构，而群 b_Y 由群 Y的所有有限阶元素组成。

因此，我们可以在满足条件（7）和（11）的假设下证明该定理，并将证明 $\mu_j = \gamma_j * m_K$, $j = 1, 2$，其中 γ_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称高斯分布。

记 $y = (s, l)$，其中 $s \in \mathbb{R}^n$, $l \in L$ 是群 Y 的元素。由引理 2.2，给定 L_1 时线性形式 L_2 的条件分布具有对称性，这意味着特征函数 $\hat{}\mu_j(s, l)$ 满足方程（3）。由于 $\mathbb{R}^n$ 是群 Y 的零元的连通分支，因此有$\tilde{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$，即 $\tilde{\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制是 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑自同构。将这一限制记为 $\tilde{\alpha}_{\mathbb{R}^n}$。于是，方程（3）在 $\mathbb{R}^n$ 上的限制具有如下形式

$$\hat{\mu}_1(s_1 + s_2, 0)\hat{\mu}_2(s_1 + \tilde{\alpha}_{\mathbb{R}^n} s_2, 0) = \hat{\mu}_1(s_1 - s_2, 0)\hat{\mu}_2(s_1 - \tilde{\alpha}_{\mathbb{R}^n} s_2, 0), \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

由 $I + \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ 可得 $I + \tilde{\alpha}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$。根据引理 4.4，由 (29) 可得

$$\hat{\mu}_j(s, 0) = \hat{\gamma}_j(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \tag{30}$$

其中，γ_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中的对称高斯分布。

接下来，仿照定理 2.1 的证明，我们得到 (16) 和 (17)。一般而言，(18) 并不成立。但分布 μ_1 相对于 m_X 含有非零绝对连续分量这一事实，结合 (7) 和 (11)，可推出

$$\sup_{(s,l)\in Y,\ l\neq 0} \hat{\mu}_1(s,l) = C < 1. \tag{31}$$

取满足 $l \neq 0$ 的 $y = (s,l) \in Y$。由 (16)、(17) 和 (31) 可得

$$\hat{\mu}_1(s,l) \leq C^{2^{n-1}}, \quad \hat{\mu}_2(s,l) \leq C^{2^{n-1}}, \quad s \in \mathbb{R}^n,\ l \neq 0.$$

因此，对所有 $s \in \mathbb{R}^n$、$l \neq 0$，都有 $\hat{\mu}_1(s,l) = \hat{\mu}_2(s,l) = 0$。

鉴于 (30)，由此可得特征函数 $\hat{\mu}_j(s,l)$ 的如下表示

$$\hat{\mu}_1(s,l) = \begin{cases} \hat{\gamma}_1(s), & \text{if } s \in \mathbb{R}^n,\ l = 0, \\ 0, & \text{if } s \in \mathbb{R}^n,\ l \neq 0, \end{cases} \qquad \hat{\mu}_2(s,l) = \begin{cases} \hat{\gamma}_2(s), & \text{if } s \in \mathbb{R}^n,\ l = 0, \\ 0, & \text{if } s \in \mathbb{R}^n,\ l \neq 0. \end{cases}$$

考虑到 (1)，这意味着 $\mu_j = \gamma_j * m_K$, $j = 1, 2$。 □

注记 4.5。定理 4.1 不仅对局部紧阿贝尔群 $X = \mathbb{R}^n \times K \times D$ 成立，其中 K 是一个非离散紧阿贝尔群，且商群 K/c_K 拓扑同构于形式为 (2) 的群，而 D 是一个不含二阶元素的离散阿贝尔群。仿照 [10], 中的命题 3.4，我们将给出一个非离散局部紧全不连通阿贝尔群 X 的例子，使得 X 不拓扑同构于一个非离散紧群与一个离散阿贝尔群的拓扑直积，但定理 4.1 对 X 仍然成立。

Put

$$T = \prod_{n=3}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n^2).$$

我们仅将 T 视为代数群。令 $K_n = \{0, p_n, 2p_n, \ldots, (p_n - 1)p_n\} \subset \mathbb{Z}(p_n^2)$。显然，$K_n$ 是一个子群，且 K_n 同构于 $\mathbb{Z}(p_n)$。记 Y 为 T 的一个子群，它由所有满足以下条件的元素 $y = (y_3, \ldots, y_n, \ldots)$ 组成：$y_n \in \mathbb{Z}(p_n^2)$，且 $y_n \notin K_n$ 仅对有限多个指标成立n。令

$$F = \prod_{n=3}^{\infty} K_n.$$

于是 F 是 Y的一个子群。考虑赋予乘积拓扑的群 F。于是 F 是一个紧群。在 Y 上定义一种拓扑，使得 F 是 Y的一个开子群。于是 Y 是第二可数的局部紧阿贝尔群。显然，Y 是一个非离散的局部紧全不连通阿贝尔群。记 X 为群 Y的特征群。于是 X 也是一个非离散的局部紧全不连通阿贝尔群。通过标准论证可知，群 X 不拓扑同构于一个非离散紧阿贝尔群与一个离散阿贝尔群的拓扑直积。

设 α 是群 X 的一个拓扑自同构，满足条件 $I \pm \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2，且至少有一个分布 μ_j 相对于 m_X 具有非零绝对连续分量。我们将证明：若给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 时线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 的条件分布是对称的，则 $\mu_j = m_K * E_{x_j}$，其中 K 是 X 的一个紧开子群，$x_j \in X$、$j = 1$、2。此外，$\alpha(K) = K$。

根据引理 2.2，给定 L_1 时线性形式 L_2 的条件分布的对称性意味着特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程（3）。将分布 μ_j 转换为分布 $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$，并按照定理 2.1 的证明进行推理，我们可以假设条件（7）成立。由 $I \pm \alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ 可得 $I \pm \tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$。容易看出，子群 F 在群 Y 的每个拓扑自同构下都映入自身。因此

$$\tilde{\alpha}(F) = F \tag{32}$$

and

$$(I \pm \tilde{\alpha})(F) = F. \tag{33}$$

由于 F 是一个紧子群，其湮没子群 $A(X,F)$ 是群 X 的开子群，而 $X/A(X,F)$ 是一个离散群。群 F 与商群 $X/A(X,F)$ 的特征群拓扑同构。根据（32），我们可以将方程（3）限制在子群 F 上。显然，群 $X/A(X,F)$ 不含二阶元素。结合（32）和（33），由引理 2.3 可知，我们可以将引理 4.3 应用于离散阿贝尔群 $X/A(X,F)$ 及其诱导自同构 $\hat{}\alpha \in \mathrm{Aut}(X/A(X,F))$。由引理 4.3，对所有 $y \in F$，均有 $\hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y)$，且 $\hat{}\mu_j(y)$ 在 F 上只取 0 和 1 两个值。令

$$E = \{y \in F : \hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y) = 1\}, \quad G = A(X,E).$$

注意，$\{y \in F : \hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y) = 0\}$ 是一个闭集。因此，E 是 F的一个开子群。由于 E 是一个紧开子群，因此 G也是一个紧开子群。群 G 的特征群与商群 Y/E拓扑同构。由于 E 是 Y的一个紧开子群，这意味着商群 Y/E 是离散的，并且与形式为 (4) 的群拓扑同构。因此，群 G与形式为 (2) 的群拓扑同构。

根据引理 4.3，$\tilde{\alpha}(E) = (I \pm \tilde{\alpha})(E) = E$。因此，根据引理 2.3，$\alpha(G) = (I \pm \alpha)(G) = G$。这特别意味着，拓扑自同构 α 在 G 上的限制是群 G的一个拓扑自同构。将此限制记为 α_G。由 $(I \pm \alpha)(G) = G$ 可知，$I \pm \alpha_G \in$ 属于 $\mathrm{Aut}(G)$。根据引理 2.6，$\sigma(\mu_j) \subset G$, $j = 1, 2$。由于 G 是 X 的一个开子群，因此至少有一个分布μ_j 相对于 m_G具有非零绝对连续分量。由此可知，若将 ξ_j 视为取值于群 G中的独立随机变量，则定理 2.1 的条件 (ii) 和 (iii) 得到满足。根据定理 2.1，$\mu_1 = \mu_2 = m_K$，其中 K 是群 G的一个紧开子群，且 $\alpha(K) = K$。显然，K 是群 X的一个紧开子群。

致谢

本文是在我作为访问教授于多伦多大学数学系任职期间撰写的。我非常感谢 Ilia Binder 的邀请与支持。

参考文献

[1] Feldman, G.M.：局部紧阿贝尔群上的高斯分布。《概率论及其应用》**23**，529–542（1979）

[2] Feldman, G.M.：《有限阿贝尔群上的 Heyde 定理》。理论概率杂志 **17**, 929–941 (2004)

[3] Feldman, G.M.: 《局部紧阿贝尔群上的一个刻画定理》。概率论及相关领域 **133**, 345–357 (2005)[4] Feldman, G.M.: 《离散阿贝尔群上的 Heyde 定理》。数学研究 **177**, 67–79 (2006)
[5] Feldman, G.M.: 《局部紧阿贝尔群上的函数方程与刻画问题》。欧洲数学学会数学专著丛书, **5**, 欧洲数学学会，苏黎世 (2008)[6] Feldman, G.M.: 《局部紧阿贝尔群上的 Heyde 定理》。泛函分析杂志 **258**, 3977–3987 (2010)[7] Feldman, G.M.: 《关于 p-进数群的一个刻画定理》。德布勒森数学出版物 **87**, 147–166 (2015)[8] Feldman, G.M.: 《某些局部紧阿贝尔群上的 Heyde 刻画定理》。概率论及其应用 **62**, 399–412 (2018)[9] Feldman, G.M.: 《关于连通局部紧阿贝尔群的一个刻画定理》。傅里叶分析与应用杂志 **26**:14, 1–22 (2020)[10] Feldman, G.M.: 《紧阿贝尔群上的一个刻画定理》。傅里叶分析与应用杂志**27**:86, 1–23 (2021)[11] Feldman, G.M.: 《关于含有二阶元素的局部紧阿贝尔群的一个刻画定理》。位势分析 **56**, 297-315 (2022)[12] Feldman, G.M., Graczyk, P.: 《紧阿贝尔群上的 Skitovich-Darmois 定理》，理论概率杂志 **13**, 859–869 (2000)[13] Feldman, G.M., Graczyk, P.: 《局部紧阿贝尔群上的 Skitovich-Darmois 定理》。澳大利亚数学会杂志 **88**, 339–352 (2010)[14] Fuchs, L.: 《无限阿贝尔群》。**1**, 学术出版社，纽约 (1970)[15] Hewitt, E. and Ross, K. A.: 《抽象调和分析》。**1**, 施普林格出版社，柏林 (1963)[16] Heyde, C.C.: 《由某一条件分布的对称性刻画正态律》。Sankhya **32**, A辑, 115–118 (1970)[17] Kagan, A. M., Linnik, Yu. V., Rao, C.R.: 《数理统计中的刻画问题》。威利概率与数理统计丛书，约翰·威利父子公司，纽约 (1973)[18] Mazur, I.: 《紧阿贝尔群上 Haar 分布的一种刻画》。数学物理、分析与几何杂志 **10**, 126–133 (2014)[19] Myronyuk, M.: 《离散阿贝尔群上的 Heyde 刻画定理》。J. Aust. Math. Soc.**88**, 93–102 (2010)[20] Myronyuk, M.V.: 《 $\boldsymbol{a}$-进溶胶上的 Heyde 定理》。数学讨论会 **132**, 195– 210 (2013)[21] Parthasarathy, K.R.: 《度量空间上的概率测度》。概率与数理统计 **3**, 学术出版社，纽约 (1967)

[22] Stapleton, J.H.：紧致拓扑群上均匀分布的刻画。《数理统计年刊》**34**，319–326（1963）

乌克兰国家科学院 B. Verkin低温物理与工程研究所，
Naukyave 47号，哈尔科夫，61103，乌克兰

多伦多大学数学系，圣乔治街40号，多伦多，安大略省，
M5S 2E4，加拿大
电子邮件：gennadiy_f@yahoo.co.uk