arXiv:2304.00430v1 [math.CO] 2 Apr 2023

强余可比图的 Gallai 式刻画

Jing Huang*

摘要

强余可比图是这样一类自反图：其邻接矩阵经过同时进行的行列置换后，不含行分别为 01 、 10 的子矩阵。强余可比图是余可比图（即可比图的补图）的一个子类，并且可以在多项式时间内识别。在 Gallai 的开创性论文中，他用一种称为星体的禁结构刻画了余可比图。Gallai 证明，余可比图恰好是不含星体的自反图。

本文给出了强余可比图的一种刻画，类似于 Gallai 对余可比图的刻画。我们证明，强余可比图恰好是不含弱边星体（星体的一种较弱形式）的自反图。我们的刻画还带来了一个可在多项式时间内识别强余可比图的算法。

关键词：可比图、余可比图、强余可比图、小行星、边小行星、弱边小行星、Gallai 式刻画、多项式时间识别算法。

1 引言

可比图是一类广受关注且被深入研究的图 [10, 11, 12, 13, 14, 16,17, 25]。它们表示偏序的可比较关系 [26] ，并已用于研究化合物 [3]结构—活性相关性的优化复合样本。

具体而言，若图 G 具有传递定向，则称其为可比图；也就是说，可以对 G 的边进行定向，使得在所得的有向图中，对于任意三个顶点 x、y、z，若 xy、yz 是弧，则 xz 也必为弧。可比图的补图称为余可比图，参见 [14]。

余可比图具有一种特征性的排序性质：一个图是余可比图，当且仅当它存在一个顶点序 $\prec$，使得对于任意三个顶点$x \prec y \prec z$，如果 xz 是一条边，那么 xy和 yz 中至少有一个是该图的一条边。这样的顶点序称为余可比序。

*维多利亚大学数学与统计系，维多利亚，不列颠哥伦比亚省，加拿大 V8W 2Y2；huangj@uvic.ca

通常，余可比图被视为自反的（即每个顶点都与自身相邻）。因此，余可比图的邻接矩阵主对角线上的元素均为 1。余可比图也可以等价地定义为：其邻接矩阵存在对称排序，且在指定位置上不包含单个矩阵。

设 M 是一个主对角线上全为 1 的对称 0-1 矩阵。对 M 进行对称排序，所得矩阵是通过同时置换 M 的行和列得到的矩阵。显然，对称矩阵经过对称排序后仍为对称矩阵。假设 M 是图 G 的邻接矩阵。由于 M 的主对角线上全为 1，因此 G 是自反的。对 G 的任意顶点排序，都对应于对 M 进行对称排序，即按照图 G 的顶点排序置换 M 的行和列。特别地，对 G 的余可比序对应于对 M 进行对称排序，所得矩阵不含以 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 为子矩阵且其中任一 1 位于主对角线上的情形。事实上，余可比图恰好是邻接矩阵具有此类排序的自反图。

如果一个自反图的邻接矩阵存在一种对称排序，使其不含 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 作为子矩阵 [18]，则称该图为强余可比图。根据定义，每个强余可比图都是余可比图。余可比图和强余可比图都与区间图有关。根据 Gilmore 和 Hoffman [12], ，一个图是区间图，当且仅当它既是弦图又是余可比图。文献 [18] 证明，一个图是区间图，当且仅当它既是强弦图又是强余可比图。

按照 [18, 19], ，我们称矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 为 $Slash$ 矩阵。不含以 $Slash$ 矩阵为子矩阵的 M 对称排序，称为 M的 $Slash$-自由对称排序。因此，自反图是强余可比图，当且仅当其邻接矩阵具有一个对称的 $Slash$-自由排序。与自反图的邻接矩阵的对称 $Slash$-自由排序相对应的顶点序，称为该图的强余比较排序。

Gallai [10]给出了余可比图的一个优雅刻画。图中的一个小行星是由顶点 $x_0, x_1, \ldots, x_{2k}$ 组成的集合，使得对于每个 $i = 0$（$1, \ldots, 2k$），都存在一条连接 x_{i+k} 和 x_{i+k+1} 的游走，且不包含 x_i 的任何邻点（下标按模 $2k + 1$计算）。Gallai [10] 证明了以下结论：

定理1. *[10]* 自反图是共比较图，当且仅当它不包含小行星。

□

由三个顶点组成的小行星称为小行星三元组。Lekkerkerker 和 Boland[22] 证明，一个图是区间图，当且仅当它是一个不包含小行星三元组的弦图。不包含小行星三元组的图在 [2, 4, 5, 6, 7]中进行了研究。

[9]中还定义了星体的边版本。在图中，边小行星是一组边 $x_0y_0, x_1y_1, \ldots, x_{2k}y_{2k}$，满足对于每个 $i = 0$（$1, \ldots, 2k$），都存在一条游走，其起始边为 $x_{i+k}y_{i+k}$、结束边为 $x_{i+k+1}y_{i+k+1}$，且 x_i 和 y_i 均不与游走中的任何顶点相邻（下标按模 $2k + 1$计算）。不含边小行星的二部图称为余可比二部图，并在 [19]中进行了研究。 [9] 证明了

二部图是区间包含二部图，当且仅当它既是弦二分图又是余可比图，另见 [21]。请注意，星体是一种特殊的边小行星，其中每条边都是自环（即，对每个 $i = 0$（$1, \ldots, 2k$），都有 $x_i = y_i$）。

本文引入弱边小行星的概念（定义见第 2 节）。弱边小行星是边小行星的弱化版本，因为每个边小行星（从而每个小行星）都是弱边小行星。我们将证明以下结论：

定理 2. 一个自反图是强余可比图，当且仅当它不包含弱边小行星。

强余可比图可以在多项式时间内识别 [18]。我们将证明，定理 2 也能导出一种用于识别强余可比图的多项式时间识别算法。

2 W弱边小行星与强余可比图 hs

本节将定义弱边小行星这一概念，它源自图中所有不同顶点有序对集合上的一种“强制”关系。

设 G 是一个自反图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。注意， $E(G)$ 包含所有自环 vv，$v \in V(G)$。用 $Z(G)$ 表示由 G 中不同顶点组成的有序对 (u, v) 的集合。对于 (u, v)、$(u', v') \in Z(G)$，如果 $u = u'$ 且 $v = v'$ 或 $uu', vv' \in E(G)$ 且 $uv', vu' \notin E(G)$，我们称 (u, v) 强制 (u', v')，记作 $(u, v)\Lambda(u', v')$。显然，$(u, v)\Lambda(u', v')$ 当且仅当 $(v, u)\Lambda(v', u')$。

Pro位置 3. *[18]*设 G 为一个自反图。则以下命题成立 .

1. 若 abc 是 $\overline{G}$中的一个诱导 P_3，则 $(a, b)\Lambda(c, b)$成立。
2. 若 $abcd$ 是 G中的一个诱导 P_4，则 $(a, c)\Lambda(a, d)\Lambda(b, d)\Lambda(a, d)\Lambda(b, c)$成立。
3. 若 $abcd$ 是 G中的一个诱导 C_4，则 $(a, d)\Lambda(b, c)$成立。 □

若存在 G 中的游走 $u_1u_2 \ldots u_k$和 $v_1v_2 \ldots v_k$，使得 $(u_1, v_1) = (u, v)$ 且 $(u_k, v_k) = (u', v')$，并且对每个 $i = 1$、2、.....、$k - 1$，都有 $(u_i, v_i)\Lambda(u_{i+1}, v_{i+1})$，则称 (u, v) 蕴含 (u', v')，记作 $(u, v) \sim (u', v')$。容易验证，$\sim$是 $Z(G)$上的一个等价关系。

A G 中的可逆对是由两个不同顶点 u、v组成的一对，满足 $(u, v) \sim (v, u)$。

定理 4. *[18]* 自反图是强余可比图，当且仅当它不包含可逆对。

□

设 G 是一个自反图，uu'、vv' 是 G 的边，且 $\{u, u'\} \cap \{v, v'\} = \emptyset$。注意， G 的边包括所有自环。我们称 uu' 避开 vv'，如果满足以下条件之一：

- $u = u'$、 $v = v'$和 $uv \notin E(G)$;
- $u = u'$、 $v \neq v'$、 $uv \notin E(G)$ 和 $uv' \notin E(G)$；

- $u \neq u'$、 $v = v'$、 $uv \notin E$（G）和 $uv' \notin E$（G）；
- $u \neq u'$、 $v \neq v'$和 $\{u, u', v, v'\}$在 G中诱导出一个 $2K_2$、一个 P_4或一个 C_4。

根据定义显然，若 uu' 避开 vv'，则 vv' 避开 uu'。另请注意， uu'避开 vv' 等价于以下性质： u 和 u' 各自在 $\{v, v'\}$中都有一个非邻点，且 v 和 v' 各自在 $\{u, u'\}$中都有一个非邻点。此观察将在定理 7 的证明中使用。

我们称一条边避开 G 中的一条游走（至少含一条边），若它避开该游走的每一条边。

引理 5. 设 G是一个自反图。假设一条边 vv'避开 G中的一条游走 $u_0u_1 \dots u_t$，其中 $t \geq 1$。则以下结论成立：

1. 若 $\{u_0, u_1, v, v'\}$和 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$均不诱导出一个 C_4，则对任意 $x \in \{v, v'\}$和 $y \in \{v, v'\}$，$(u_0, x) \sim (u_t, y)$。 2. 若 $\{u_0, u_1, v, v'\}$诱导出一个 C_4，而 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$不诱导出一个 C_4，则对任意 $y \in \{v, v'\}$，$(u_0, x) \sim (u_t, y)$，其中 x是 $\{v, v'\}$中满足 $u_0x \in E(G)$的唯一顶点。 3. 若 $\{u_0, u_1, v, v'\}$和 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$各自都诱导出一个 C_4，则$(u_0, x) \sim (u_t, y)$，其中 x是 $\{v, v'\}$中满足 $u_0x \in E(G)$的唯一顶点，且 y是 $\{v, v'\}$中满足$u_ty \in E(G)$的唯一顶点。

证明：如果 $v = v'$（即 vv'是一个自环），那么 $\{u_0, u_1, v, v'\}$和 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$都不诱导出 C_4，也就是说，只有陈述 1 适用。由于 vv'避开游走中的每一条边，因此对每个 i，都有 $vu_i \notin E(G)$。根据命题 3，$(u_0, v)\Lambda(u_1, v)\Lambda \cdots \Lambda(u_t, v)$，所以 $(u_0, v) \sim (u_t, v)$，陈述 1 成立。因此，我们可以假设 $v \neq v'$。我们通过对 t进行归纳证明这些陈述成立。

首先考虑基本情况 $t = 1$。注意到 $\{u_0, u_1, v, v'\} = \{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$。如果 $u_0 = u_1$（即u_0u_1是一个自环），那么 $\{u_0, u_1, v, v'\}$不会诱导出 C_4（因此只有陈述 1 适用）。由于 vv'避开 u_0u_1，u_0v， $u_0v' \notin E(G)$。根据命题 3，$(u_0, v) \sim (u_0, v')$，因此陈述 1 成立。如果 $u_0 \neq u_1$，那么 $\{u_0, u_1, v, v'\}$会诱导出 $2K_2$、 P_4或 C_4。在 $\{u_0, u_1, v, v'\}$诱导出 $2K_2$ 或 P_4的情况下，只有陈述 1 适用。由命题 3 可知，对于任意$x \in \{v, v'\}$和 $y \in \{v, v'\}$，$(u_0, x) \sim (u_1, y)$。因此陈述 1 成立。另一方面，当$\{u_0, u_1, v, v'\}$诱导出 C_4时，只有陈述 3 适用。 $u_0u_1v'v$ 或 u_0u_1vv' 是一个诱导的C_4。根据命题 3，如果 $u_0u_1v'v$是一个诱导的 C_4，则 $(u_0, v) \sim (u_1, v')$；如果u_0u_1vv' 是一个诱导的 C_4，则 $(u_0, v') \sim (u_1, v)$。因此陈述 3 成立。由此，基本情况 $t = 1$下这些陈述成立。现在假设 $t \geq 2$，并且这些陈述对所有长度小于 t的游走都成立。

首先，假设 $\{u_0, u_1, v, v'\}$和 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$都不诱导出 C_4。若 $\{u_{t-2}, u_{t-1}, v, v'\}$诱导出 C_4，令 z为 $\{v, v'\}$中满足 $u_{t-1}z \in E(G)$的唯一顶点；否则，令 z为 $\{v, v'\}$中的任意顶点。根据归纳假设，对于任意 $x \in \{v, v'\}$，$(u_0, x) \sim (u_{t-1}, z)$。由于$\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$不诱导出 C_4，考察游走 $u_{t-1}u_t$并应用归纳假设可得，对于任意 $y \in \{v, v'\}$，$(u_{t-1}, z) \sim (u_t, y)$。因此，对于任意 $x \in \{v, v'\}$和 $y \in \{v, v'\}$，$(u_0, x) \sim (u_t, y)$。

接下来，假设 $\{u_0, u_1, v, v'\}$诱导出一个 C_4，而 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$不诱导出一个 C_4。设 x是 $\{v, v'\}$中满足 $u_0x \in E(G)$的唯一顶点。若 $\{u_{t-2}, u_{t-1}, v, v'\}$诱导出一个 C_4，则设 z为 $\{v, v'\}$中满足 $u_{t-1}z \in E(G)$的唯一顶点；否则，令 z为 $\{v, v'\}$中的任意顶点。

根据归纳假设，$(u_0, x) \sim (u_{t-1}, z)$。由于 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$ 不诱导出一个 C_4，对于任意 $y \in \{v, v'\}$，都有 $(u_{t-1}, z) \sim (u_t, y)$。因此，对于任意 $y \in \{v, v'\}$，都有 $(u_0, x) \sim (u_t, y)$。

最后，假设 $\{u_0, u_1, v, v'\}$ 和 $\{u_{t-1}, u_t, v, v'\}$ 各自诱导出一个 C_4。令 x 为 $\{v, v'\}$ 中满足 $u_0 x \in E(G)$ 的唯一顶点，令 y 为 $\{v, v'\}$ 中满足 $u_t y \in E(G)$ 的唯一顶点。令 z 为 $\{v, v'\}$ 中不同于 y 的顶点。注意，$u_{t-1} z \in E(G)$；特别地，若 $\{u_{t-2}, u_{t-1}, v, v'\}$ 诱导出一个 C_4，则 z 是 $\{v, v'\}$ 中满足 $u_{t-1} z \in E(G)$ 的唯一顶点。根据归纳假设，$(u_0, x) \sim (u_{t-1}, z)$，且 $(u_{t-1}, z) \sim (u_t, y)$。因此，$(u_0, x) \sim (u_t, y)$。

□

图 G 中的弱边小行星是边 $x_0y_0, x_1y_1, \ldots, x_{2k}y_{2k}$ 构成的集合，满足对于每个 $i = 0, 1, \ldots, 2k$，x_iy_i 避开一条以 $x_{i+k}y_{i+k}$ 开头、以 $x_{i+k+1}y_{i+k+1}$ 结尾的游走（下标按模 $2k+1$ 计算）。

定理 6. 自反图 G 包含可逆对当且仅当它包含弱边小行星。

证明：假设 $x_0y_0, x_1y_1, \ldots, x_{2k}y_{2k}$ 在 G 中构成一个弱边小行星（如上所定义）。对于每个 $i = 0, 1, \ldots, 2k$，任意选取 $u_i \in \{x_i, y_i\}$ 和 $v_{i+k} \in \{x_{i+k}, y_{i+k}\}$，但当 $\{x_i, y_i, x_{i+k}, y_{i+k}\}$ 诱导出一个 C_4 时，u_iv_{i+k} 是诱导子图 C_4 中的一条边。我们不失一般性地假设，在弱边小行星的定义中，以 $x_{i+k}y_{i+k}$ 开始、以 $x_{i+k+1}y_{i+k+1}$ 结束的游走，其第一个顶点为 v_{i+k}，最后一个顶点为 u_{i+k+1}。如有必要，可在游走开头添加 v_{i+k}，并在末尾添加 u_{i+k+1}，从而实现这一点。因此，由引理 5，对于每个 $i = 0, 1, \ldots, 2k$，有 $(u_i, v_{i+k}) \sim (v_i, u_{i+k+1}) \sim (u_{i+1}, v_{i+k+1})$。因此

$$(u_0, v_k) \sim (v_0, u_{k+1}) \sim (u_1, v_{k+1}) \sim (v_1, u_{k+2}) \sim (u_2, v_{k+2}) \sim \cdots \sim (u_k, v_{2k}) \sim (v_k, u_0)$$

这意味着 u_0, v_k 是 G 中的可逆对。

反过来，假设 u, v 是 G 中由序列证明的可逆对

$$(u, v) = (u_0, u_t)\Lambda(u_1, u_{t+1})\Lambda \cdots \Lambda(u_{t-1}, u_{2t-1})\Lambda(v, u).$$

当 t 为奇数时，对于每个 $0 \leq i \leq t-1$（下标模 $2t$），$u_{2i}u_{2i+1}$ 都避开游走 $u_{2i+t-1}u_{2i+t}u_{2i+t+1}u_{2i+t+2}$ 中的每一条边。因此，边 $u_{2i}u_{2i+1}, 0 \leq i \leq t-1$ 在 G 中构成一个弱边小行星。当 t 为偶数时，对于每个 $0 \leq i \leq t-2$，u_iu_{i+1} 都避开游走 $u_{i+t-1}u_{i+t}u_{i+t+1}$ 中的每一条边；$u_{t-1}u_t$ 避开游走 $u_{2t-2}u_{2t-1}u_0u_1$ 中的每一条边；并且对于每个 $t \leq i \leq 2t-2$，u_iu_{i+1} 都避开游走 $u_{i-t}u_{i-t+1}u_{i-t+2}$ 中的每一条边。因此，边 $u_iu_{i+1}, 0 \leq i \leq 2t-2$ 在 G 中构成一个弱边小行星。

□

定理 2 现在可由定理4和定理6立即推出。

作为一个附带结果，我们证明定理 2 可导出一种用于强余可比图的多项式时间识别算法。

设 G 是一个自反图。定义 G 的避让图 G^* 如下：G^* 的顶点集为 $E(G)$，且当 e、f 在 G^* 中彼此避开时，这两个顶点相邻。

定理 7。设 G 是一个自反图。当且仅当 G^* 是一个可比较图时，G 是一个强余可比图。

证明：根据定理 1 和定理 2，只需证明 G 有弱边小行星，当且仅当 $\overline{G^*}$ 的补图 G^* 有小行星。

首先，假设 G 有一个由边 $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 组成的弱边小行星。我们声称， $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 在 $\overline{G^*}$ 中构成一个小行星。由于 $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 在 G 中构成弱边小行星，因此它避开了对于每个 $i = 0, 1, \ldots, 2k$，从 e_{i+k} 开始并以 e_{i+k+1} 结束的游走 W_i。对于 W_i 中的任意边 f，由于 e_i 避开 G 中的 f，因此 e_i 与 $\overline{G^*}$ 中的 f 不相邻。对于 W_i 中的任意一对连续边 f, f'，由于 f, f' 在 G 中共享一个顶点，根据定义它们不会互相避开，因此它们在 $\overline{G^*}$ 中相邻。因此， W_i 的边构成 $\overline{G^*}$ 中的一条游走，连接 e_{i+k} 和 e_{i+k+1}，且不包含 e_i 的任何邻点。因此， $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 在 $\overline{G^*}$ 中构成一个小行星。

反之，假设 $\overline{G^*}$ 有一个由顶点 $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 组成的小行星。对每个 $i = 0, 1, \ldots, 2k$，且 x_i, y_i 是 G 中的顶点。由于 $e_0, e_1, \ldots, e_{2k}$ 在 $\overline{G^*}$ 中构成一个小行星，因此存在一条游走 W_i'，连接 e_{i+k} 和 e_{i+k+1} 于 $\overline{G^*}$ 中，并且对每个 $i = 0$（$1, \ldots, 2k$）都不包含 e_i 的任何邻点。我们证明，可以将 W_i' 修改为 G 中的一条游走，使其以 $x_{i+k}y_{i+k}$ 开始、以 $x_{i+k+1}y_{i+k+1}$ 结束，并被 x_iy_i 避开。考虑 W_i' 中一对连续顶点 e, f。记 $e = uu'$ 和 $f = vv'$，其中 u, u', v, v' 是 G 中的顶点。由于 e 和 f 在 $\overline{G^*}$ 中相邻，因此它们在 G 中不会互相避开。因此， $\{u, u'\}$ 中有某个顶点与 v, v' 均相邻，或者 $\{v, v'\}$ 中有某个顶点在 G 中与 u, u' 均相邻。不失一般性，假设 v 在 G 中与 u, u' 均相邻。我们断言， $uv, u'v$ 中至少有一个避开 x_iy_i。由于根据小行星的定义， $e_i = x_iy_i$ 在 $\overline{G^*}$ 中与 $e = uu'$ 或 $f = vv'$ 均不相邻，因此 x_iy_i 在 G 中同时避开 uu' 和 vv'。所以， u, u', v 中没有任何一个在 G 中同时与 x_i, y_i 相邻。若 x_iy_i 既不避开 uv，也不避开 $u'v$，则 G 中存在某个顶点 $a \in \{x_i, y_i\}$ 与 u, v 均相邻，且存在某个顶点 $b \in \{x_i, y_i\}$ 与 u', v 均相邻。当 $a = b$, a 与 u, u' 均相邻时，这与 x_iy_i 避开 uu' 这一事实矛盾；当 $a \neq b$, v 与 x_i, y_i 均相邻时，这与 x_iy_i 避开 vv' 这一事实矛盾。因此，在 G 中， x_iy_i 必定至少避开 $uv, u'v$ 之一。也就是说，始终存在一条边 g，其一个端点在 $\{u, u'\}$ 中，另一个端点在 $\{v, v'\}$ 中，并且该边在 G 中避开 x_iy_i。为修改游走 W_i'，我们在 W_i' 中的任意一对连续边 e, f 之间加入这样一条边 g；必要时重复 e 或 f，以确保得到 G 中的一条游走。修改后的游走仍以 $x_{i+k}y_{i+k}$ 开始、以 $x_{i+k+1}y_{i+k+1}$ 结束，且其中每条边都避开 x_iy_i。这说明 $x_0y_0, x_1y_1, \ldots, x_{2k}y_{2k}$ 在 G 中构成一个弱边小行星。

□

可以在多项式时间内构造回避图，并检查它们是否为可比图 [24]。因此，定理 7 给出了强余可比图的多项式识别算法。

推论 8. *[18]* 强余可比图可以在多项式时间内识别 . □

3 更多评述

对于图 G，令 $B(G)$ 为顶点集为 $\{v', v'' : v \in V(G)\}$、边集为 $\{u'v'', u''v' : uv \in E(G)\}$ 的二部图。注意，当 G 自反时，对于 G 的每个顶点 v， $v'v''$ 都是 $B(G)$ 的一条边。

蹦床是一个包含 k 个顶点 $u_1, u_2, \ldots, u_k$ 的完全图，其中有 $k \geq 3$；它还包含一个由 k 个顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 构成的独立集，使得每个 v_i 都与 u_i 和 u_{i+1} 相邻（与其他顶点均不相邻）。如果一个弦图不含作为诱导子图的蹦床 [8]，则称其为强弦图。

定理 9. *[8]* 自反图 G 是强弦图，当且仅当 $B(G)$ 是弦二分图。

□

就矩阵排序而言，强弦图与强可比图之间存在一个很好的对比；类似地，弦二分图与余可比图之间也存在这样的对比（详情请参见 [18] ）。强弦图是其邻接矩阵允许对称 Γ-自由排序 [8]的自反图。弦二分图是其二部邻接矩阵允许 Γ-自由排序 [1, 20, 23], 的二分图，而余可比二分图则是其二部邻接矩阵具有 $Slash$-自由排序 [19]的二分图。然而，强余可比图并不满足与定理 9 类似的等价关系。

命题 10。若 G 是强余可比图，则 $B(G)$ 是余可比二部图。

证明：设 M 为 G 的邻接矩阵。则 M 为 $B(G)$ 的双邻接矩阵。若 G 是强余可比图，则 M 存在一个对称的无 $Slash$ 排序。因此，$B(G)$ 是余可比二部图。

□

然而，命题 10 的逆命题并不成立。例如，$K_{3,\ 3}$ 不是强余可比图，因为它包含一个弱边小行星。另一方面， $B(K_{3,\ 3})$ 不包含边小行星，因此它是余可比二部图。

Farber [8] 还建立了强弦图与弦二分图之间的另一种关系。对于一个二分图 H，令 H^+ 为由 H 得到的自反图：将 H 的一个颜色类补全为一个团，并在每个顶点上添加一个自环。

定理 11. *[8]* 是弦二分图，当且仅当 H^+ 是强弦图。

□

下面的定理总结了强余可比图与余可比二分图之间类似的关系。对于二分图 H，令 H^{++} 为由 H 得到的自反图：将 H 的两个颜色类分别补全为团，并在每个顶点上添加一个自环。

定理 12. 二分图 H 是余可比二分图，当且仅当 H^{++} 是强余可比图。

证明：假设 H 是余可比二分图。则 H 的二部邻接矩阵存在一个 $Slash$-自由的排列 N。矩阵 $\begin{bmatrix} \mathrm{J} & N^T \\ N & \mathrm{J} \end{bmatrix}$（其中 J 是全 1 矩阵）是 H^{++} 的邻接矩阵，且不含作为子矩阵的 $Slash$ 矩阵。因此， H^{++} 是强余可比图。

反过来，假设 H^{++} 是一个强余可比图。那么，邻接矩阵具有一个对称的 $Slash$-自由排序 M。删除对应于一个颜色类中顶点的行，以及对应于另一个颜色类中顶点的列后，我们得到 H 的二部邻接矩阵，它不含以子矩阵形式出现的 $Slash$ 矩阵。因此，H 是一个余可比二部图。

□

参考文献

[1] R.P. Anstee 和 M. Farber，完全平衡矩阵的刻画，《算法杂志》5 (1984) 215 - 230.

[2] J. Beisegel，使用广度优先搜索刻画 AT-自由图，载于：A. Brandst¨adt、E. K¨ohler、K. Meer（编）《计算机科学中的图论概念》。WG 2018。《计算机科学讲义》第 11159 卷。[3] D. Bonchev、V. Kamenska 和 O. Mekenyan，可比图与分子性质：IV. 推广与应用，《数学化学杂志》5 (1990) 43 - 72。[4] D.G. Corneil、S. Olariu 和 L. Stewart，无小行星三元组图，《SIAM 离散数学杂志》10 (1997) 399 – 430。[5] D.G. Corneil、S. Olariu 和 L. Stewart，无小行星三元组图中支配对的线性时间算法，《SIAM 计算杂志》28 (1999) 1284 – 1297。[6] D.G. Corneil 和 J. Stacho，有界小行星数图的顶点排序刻画，《图论杂志》78 (2015) 61 – 79。[7] G. Ducoffe，AT-自由图的直径，《图论杂志》99 (2022) 594 - 614。[8] M. Farber，强弦图的刻画，《离散数学》43 (1983) 173 - 189。[9] T. Feder、P. Hell 和 J. Huang，列表同态与圆弧图，《组合学》19 (1999) 487 - 505。[10] T. Gallai，可传递定向图，《匈牙利科学院数学学报》18 (1967) 25 - 66。[11] A. Ghouila-Houri，不可定向图的刻画：其边可以定向，使之成为偏序关系的图，《法国科学院报告》254 (1962) 1370 – 1371。[12] P.C. Gilmore 和 A.J. Hoffman，可比图和区间图的一种刻画，《加拿大数学杂志》16 (1962) 539 - 548。[13] M.C. Golumbic，可比图识别与着色的复杂性，《计算》18 (1977) 199 - 208。[14] M.C. Golumbic，《算法图论与完美图》，学术出版社 (1980)。[15] M.C. Golumbic 和 C.F. Goss，完美消去与弦二部图，《图论杂志》2 (1978) 155 - 163。[16] M.C. Golumbic、D. Rotem 和 J. Urrutia (1983)，可比图与交图，《离散数学》43 (1983) 37 – 46。[17] P. Hell 和 J. Huang，可比图、真圆弧图和真区间图的字典序定向与表示算法，《图论杂志》20 (1995) 361 - 374。[18] P. Hell、J. Huang 和 J.C.-H. Lin，强余可比图与矩阵的无斜线排序，arXiv:2210.16714，2022。[19] P. Hell、J. Huang、J.C.-H. Lin 和 R.M. McConnell，可比图与余可比图的二部类比图，《SIAM 离散数学杂志》34 (2020) 1969 - 1983。

[20] A.J. Hoffman、M. Sakarovich 和 A. Kolen，《完全平衡矩阵与贪心矩阵》，《SIAM代数离散方法杂志》6（1985）721 - 730。[21] J. Huang，《弦二部图的表示刻画》，《组合学理论B辑》96（2006）673 - 683。[22] C.G. Lekkerkerker 和 J.Ch. Boland，《用实直线上的区间集表示有限图》，《数学基础》51（1962）45 - 64。[23] A. Lubiw，《矩阵的双重字典序》，《SIAM计算杂志》16（1987）854 - 879。[24] R.M. McConnell、J. Spinrad，《线性时间传递定向》，第8届ACM-SIAM离散算法研讨会（1997）第19–25页。[25] R.H. M¨ohring，《可比图和区间图的算法方面》，载于《图与序》，D. Reidel出版公司（1985）第41 - 101页。[26] W.T. Trotter，《组合学与偏序集——维数理论》，约翰斯·霍普金斯大学出版社，1992年。