关于智能电网运行中基于临界区域探索的分布式优化之多参数规划退化问题

Haitian Liu，学生会员，*IEEE*，Ye Guo，高级会员，*IEEE*，Hao Liu，学生会员，*IEEE*

arXiv:2304.00435v2 [eess.SY] 2 Sep 2023

摘要——**提高可再生能源资源利用效率对于减少碳排放至关重要，而多参数规划为在智能电网运行中围绕这一目标开展分析与优化提供了系统化视角。本文聚焦于多参数线性/二次规划（mpLP/QP）相关的两个方面。首先，我们研究 mpLP/QP 的退化问题，并提出一种处理退化情况的新方法，以找出包含给定参数的所有临界区域。该方法利用多参数线性互补问题的性质、顶点搜索技术和互补基枚举。其次，本文针对基于一般 mpLP/QP 的表述，提出一种求解分布式线性规划/二次规划的改进临界区域探索（CRE）方法。该方法纳入了所提出的退化处理方法，并结合割平面更新和自适应步长方案，以加快不同问题设置下的收敛速度。通过采用各种测试基准和初始状态的多区域联络线调度问题，验证了该方法的计算效率。**

索引词—**退化、多参数规划、分布式优化、联络线调度**

I. 引言

多参数规划（mpP）系统地研究一组感兴趣参数变化时最优解的变化。多参数线性规划/二次规划可应用于许多实际问题，例如显式模型预测控制 [1], [2] 和过程系统工程 [3], [4]。现代电力系统正持续提高可再生能源资源（RESs）的渗透率，以实现更清洁的发电。尽管可再生能源资源的碳足迹近乎为零，但其地理分布极不均衡。深化基于多参数规划的技术与可再生能源资源利用的结合，对于提升智能电网运行的整体效率至关重要。在电力系统领域，多参数线性规划/二次规划的参数化解已用于开展拥塞管理 [5], 、估算主动配电网中分布式能源资源（DERs）的承载能力 [6]，以及促进相应的点对点能源共享机制 [7]，并解决大规模互联电力网络中的联络线调度问题 [8], [9]。由于拓扑结构和组成部件的复杂性，在尝试刻画电力系统中的参数关系时，退化现象普遍存在。这一问题潜藏着风险，可能导致现有的多参数线性规划/二次规划算法无法正常运行。

Haitian Liu、YeGuo 就职于清华-伯克利深圳学院（TBSI），清华大学，广东省深圳市 518055，中国。Hao Liu 就职于中国电力规划设计协会，北京市 100120，中国。本研究部分受国家自然科学基金委员会资助，项目编号 51977115。通讯作者：Ye Guo，电子邮箱：guo-ye@sz.tsinghua.edu.cn。

多区域联络线调度问题中，退化的直接表现是发电计划不唯一或节点边际电价不唯一。从理论上讲，多参数线性规划/二次规划中的退化意味着给定参数下的最优解不唯一，或违反严格互补松弛条件。在当前最先进的研究中，多参数线性规划/二次规划可采用几何方法[10] 和基于组合的方法 [11]求解。两种方法都基于有效集方法的思想，即将约束集合划分为有效集和非有效集。因此，参数空间被划分为一组多面体临界区域（CR）。每个临界区域对应一段参数范围，在该范围内有效约束索引保持不变。几何方法通过临界区域之间的图形邻接关系，显式探索参数空间。相比之下，组合方法通过枚举约束索引的有效集候选列表 [12]，隐式划分参数空间。前者易受退化影响，但在大规模系统中具有良好的可扩展性。后者较不易受退化影响，但随着变量和约束数量增加，穷举枚举使其可扩展性不尽如人意。

基于几何的方法的一般流程包括两个基本步骤 [11]: (a) 对于给定参数，确定其在特定临界区域内有效的参数相关函数形式的最优解。(b) 通过搜索当前临界区域的所有相邻临界区域，探索剩余参数空间。步骤 (a) 中可能发生退化。发生退化时，包含给定参数的临界区域可能不是满维的，也可能无法唯一确定。在这种情况下，很难识别相邻临界区域，步骤 (b) 因而无法正常进行。

为解决退化问题，现有研究采用了三种策略：一种方法是在步骤 (a) 中对给定参数进行随机扰动，以查看其邻域内是否存在非退化参数相关函数 [10]。这种方法的优点是可以直接避开某些退化情形，尤其是在必须刻画当前参数的灵敏度时。缺点是，如果给定参数位于满维临界区域内，那么任何扰动都无法消除退化。另一种方法是在发生退化时，对给定参数应用广义逆 [1, Sec. 6.2.2, 6.3.2] [4] 或正交投影技术 [13], [14]。然而，由此得到的临界区域通常是低维的，甚至会缩减为单点集。此外，投影操作的成本可能过高，而且关于最优成本变化的灵敏度可能只是低估值。最后一种方法是求解辅助问题 [4], [15], [16] 或应用预定义规则来扰动原问题 [17]。通过这种方式，在发生退化时，可以根据实践者的设定得到某些最优解。这种方法的优点是，我们可能获得一个

满维临界区域，以及定义在其上的参数关系。尽管这类方法只能揭示给定参数灵敏度的部分特征，但通常足以探索参数空间的其余部分。然而，其缺点是，对于不同的问题和退化类型，可能需要设计不同的辅助目标或规则，这可能会比较复杂。

尽管文献中提出的基于组合的方法[12]和 [18]展示了一些可通过枚举解决退化问题的可能方案，但目前对这类方案的讨论仍局限于规模相对较小的严格凸多参数二次规划问题中的原始退化。无论在工程实践还是算法开发中，仍然需要一种能够处理一般多参数线性规划/二次规划退化问题的稳健高效方法。

值得注意的是，多参数线性互补问题（mpLCP）近年来受到研究者关注，它可视为多参数线性规划/二次规划的一种广义形式。沿着相同的思路，也出现了几何 [19], [20] 和基于组合 [21] 的多参数线性互补问题方法。值得注意的是，多参数线性规划/二次规划中的所有变量在多参数线性互补问题中都被转换为互补解对。因此，无需区分问题形式或退化类型。然而，当多参数线性互补问题中存在退化时，现有研究仍采用上述讨论的多参数线性规划/二次规划技术来解决。存在退化时，这些方案使当前基于多参数线性互补问题的算法仍面临相同的局限。针对这一问题，我们提出了一种新颖的退化处理方法，结合几何方法与基于组合的方法的特点，以统一的方式解决各种退化情形。所提方案能够利用多参数线性互补问题的特性，并高效求得包含给定退化参数的所有临界区域。因此，该方法适用于对计算速度要求较高的大规模电力系统稳健运行场景。

出于隐私考虑和计算能力限制，智能电网也倾向于采用分布式求解技术，以提高可再生能源的运行效率。此类方法通过优化本地调度并迭代更新系统边界状态，直至收敛来求解问题。分布式优化技术在多种电力系统应用中至关重要。目前，关于联络线调度问题的研究主要聚焦于基于对偶分解的技术；众所周知，随着系统规模扩大，这类技术会出现收敛问题，参见近期综述 [22]。基于原始分解的临界区域探索（CRE） [8], [9] 方法在许多联络线调度问题中展现出快速有限收敛的特性。然而，要实现这一高效方案，必须推导本地经济调度问题与边界相角之间的参数关系。当多个发电机的发电成本相近或系统拓扑变得复杂时，退化可能不可避免。这种潜在风险阻碍了 CRE 的进一步应用。在通过云计算平台 [23], 协调输电与有源配电网一体化经济调度 [24] 、以获取相关参数关系时，也会遇到类似的实施挑战。因此，本文提出的退化处理方案能够很好地补充基于 mpP 的分布式技术，例如 CRE。此外，改进类似 CRE 的方案，可使系统运营商能够高效协调各种电网优化示例。

本文其余部分安排如下。第II 节介绍一种处理退化问题的新型搜索技术，第III 节将所提出的方法纳入 CRE，并设计一种改进方案。第IV 节在各种联络线调度测试系统中验证了我们的改进。最后，第V 节总结全文。

II. 采用多参数线性互补问题处理退化问题

A. 多参数线性/二次规划问题

考虑一个变量为 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 、参数为 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ [21，的一般凸多参数二次规划问题，见式 (6)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) := \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \ & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^\intercal \boldsymbol{x}, && \text{(1a)} \\ \text{subject to } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\theta}, \quad : \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m. && \text{(1b)} \end{aligned}$$

这里，目标函数（1a）是凸函数，且满足 $\boldsymbol{H} \succeq 0$。变量 $\boldsymbol{x}$ 受约束条件（1b）的限制，其中（1b）的右端项关于 $\boldsymbol{\theta}$呈线性参数化。与（1b）对应的对偶变量记为 $\boldsymbol{\lambda}$。记号$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 表示问题（1）的值函数，用以描述最优成本如何随参数 $\boldsymbol{\theta}$变化。我们的工作还涉及两种本质上特殊的多参数公式：即，当 $\boldsymbol{H} = 0$ [10, 式 (1)], 时为多参数线性规划，当 $\boldsymbol{H} \succ 0$ [11, 式 (2)]时为严格凸多参数二次规划。

令 $\boldsymbol{\theta}$ 为给定参数，($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta})$ $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) 是（1）的一个最优解对。则相应的最优有效集和非有效集 $\mathcal{A}$， $\mathcal{I}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{j \in \mathcal{M} \mid \boldsymbol{A}^j\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - b^j - \boldsymbol{C}^j\tilde{\boldsymbol{\theta}} = 0\}, \\ \mathcal{I} &:= \{j \in \mathcal{M} \mid \boldsymbol{A}^j\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - b^j - \boldsymbol{C}^j\tilde{\boldsymbol{\theta}} < 0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中， $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m\}$ 是约束（1b）的指标集。在 $\mathcal{A}$， $\mathcal{I}$ 下，Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件表明

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^{\mathcal{A},\intercal} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{A}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ b^{\mathcal{A}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}^{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - b^{\mathcal{I}} - \boldsymbol{C}^{\mathcal{I}} < \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{A}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \ge \mathbf{0}. \tag{3b}$$

当问题（1）在 $\boldsymbol{\theta}$下非退化时，（3a）左侧的系数矩阵可逆。原始—对偶解对的参数映射可写为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^{\mathcal{A},\intercal} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathcal{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ b^{\mathcal{A}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}^{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \right) \\ &:= \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_x \\ \boldsymbol{T}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_x \\ \boldsymbol{k}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) := \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4}$$

方程（4）由（3a）推导得出，同时基于非有效约束的对偶变量等于零这一事实。每个临界区域刻画了有效/非有效约束索引集的一个最优划分（1b）。其推导过程为

将（4）代入（3b），从而确定 $\boldsymbol{\theta}$ 中划分 $\{\mathcal{A},\mathcal{I}\}$ 保持不变的区域。

$$\mathrm{CR}[\tilde{\boldsymbol{\theta}}] := \{\boldsymbol{\theta} \mid \hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\theta} \leq \hat{\boldsymbol{r}}\},$$
$$\hat{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{T}_x - \boldsymbol{C}^{\mathcal{I}} \\ -\boldsymbol{T}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^{\mathcal{I}} - \boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}\boldsymbol{k}_x \\ \boldsymbol{k}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

将（4）代入（1a），定义在˜ ˜$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta})$ 上的值函数分段临界区域[$\boldsymbol{\theta}$] 为

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta},\tilde{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^\intercal \hat{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\theta} + \hat{\boldsymbol{f}}^\intercal\boldsymbol{\theta} + \hat{c},$$
$$\hat{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{T}_x^\intercal \boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_x, \quad \hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{T}_x^\intercal \boldsymbol{H}^\intercal \boldsymbol{k}_x + \boldsymbol{T}_x^\intercal \boldsymbol{f}, \tag{6}$$
$$\hat{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_x^\intercal \boldsymbol{H}\boldsymbol{k}_x + \boldsymbol{f}^\intercal \boldsymbol{k}_x.$$

B. 不同类型退化的表征

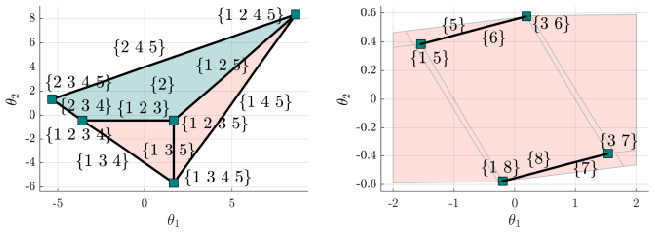
若多参数线性规划/二次规划在给定参数下可行，则至少存在一个满足 KKT 条件的解。若满足以下条件，则称所得解为非退化解:

- 线性无关约束资格条件（LICQ），
- 二阶充分条件（SOSC），
- 严格互补松弛条件（SCS），

均满足 [25, 定理 3.1]。违反上述任一条件都可能导致两种异常情况。

1) 式（2）中的约束分区可能导致式（3a）左侧的系数矩阵奇异。这适用于违反 LICQ 或 SOSC 的情况；2) 系数矩阵非奇异。然而，式（4）中与有效约束相关的某些对偶变量为零。这适用于违反严格互补条件的情况。

第一种情况如图1a所示，数据取自 [1,式（6.32）—（6.33）]。第二种情况的示例如图 [26] 所示，取自1b。



(a) (b)

图1。违反条件的示意图：（a）LICQ/SOSC；（b）严格互补条件。图中的索引表示有效约束集，退化区域以绿色阴影区域、粗线和点表示。红色阴影区域表示问题的非退化区域。由于奇异性，退化空间通过将变量空间直接投影到参数空间来绘制。

当前的退化类型可分为原始退化和对偶退化。前者意味着 LICQ 不满足，并且在给定参数下存在多个对偶最优解。后者违反 SOSC，并且存在多个原始最优解。违反严格互补条件可视为几何上相邻的满维临界区域之间的一种过渡状态。此外，同一临界区域可能无法被唯一定义，如图1b所示。当原始退化和对偶退化同时存在时，现有方法难以识别和处理，导致基于多参数线性规划/二次规划的算法无法高效运行。

C. 查找包含给定参数的所有临界区域

˜给定参数 $\boldsymbol{\theta}$ 若属于图1所示的退化区域，则可能导致退化。在下文中，我们将提出一种处理退化问题的统一方法。该方法主要受到以往工作的启发 [21], [27], [28]。这些工作的贡献以及我们的贡献如下所列。

1) Paris 等。 [27] 提供了一个框架，可在 [28] 通过线性互补问题识别二次规划的非唯一性，并在重新表述后找到所有解。我们的工作将这一情形从二次规划扩展到多参数二次规划，并分析多参数线性互补问题下的退化参数关系。

2) Herceg 等人 [21]提出了一种基于组合的方法，通过穷举枚举求解多参数规划问题。我们的工作采用高效的部分枚举策略，以解决特定感兴趣参数下的退化问题。

该过程由以下列出的步骤组成。这些步骤之间的逻辑关系已在算法中综合表示。1。

(1) 将多参数线性规划/二次规划（1）转换为多参数线性互补问题（10），˜（2）在 $\boldsymbol{\theta}$下求解多参数线性互补问题（10），（3）验证多参数线性互补问题（10）解的唯一性，（3-1）若唯一，则保存当前互补解；（3-2）若不唯一，则保存多参数线性互补问题（10）解集的顶点，（4）枚举该解集所有顶点对应的互补基，˜（5）使用所有互补基获得包含 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有临界区域。

步骤（1）：将多参数线性规划/二次规划（1）转化为多参数线性互补问题（10）。首先，我们将原始多参数线性规划/二次规划（1）稍作改写，得到以下等价形式

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) := \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \ \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^\intercal \boldsymbol{x}, \tag{7a}$$
$$\text{subject to } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\theta}, : \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \tag{7b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad : \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n. \tag{7c}$$

这里，我们稍微放宽了记号和维度的用法，以保持描述的一致性。记号 $\boldsymbol{\lambda}$ 和$\boldsymbol{\mu}$ 是约束（7b）-（7c）的对偶变量。（7）的 KKT 条件可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{A}^\intercal\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{0}, \\ \mu_j x_j = 0,\ \forall\ j = 1,\ldots,n, \\ \lambda_j s_j = 0,\ \forall\ j = 1,\ldots,m, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{s},\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

通过重新排列上述各项，我们得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^\intercal \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}, \tag{8a}$$
$$\boldsymbol{s}^\intercal\boldsymbol{\lambda} = 0,\ \boldsymbol{\mu}^\intercal\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \tag{8b}$$

定义

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{A}^\intercal \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix}, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^\intercal & \boldsymbol{s}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal, \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^\intercal & \boldsymbol{\lambda}^\intercal \end{bmatrix}^\intercal.$$

多参数线性互补问题可写为

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}, && \text{(10a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{w} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\theta}, && \text{(10b)} \\ & \boldsymbol{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} = 0, \quad \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}, && \text{(10c)} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^p$, 且 p 称为 mpLCP 的阶数。根据（9），可知 $p = n + m$。由于（10b）-（10c）表示（7）的 KKT 条件，因此 mpLCP（10）的任一可行解都是 mpLP/QP（7）的最优解。

令 [21], 设 $\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{M}]$, $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{w}^\mathsf{T}, \boldsymbol{z}^\mathsf{T}]^\mathsf{T}$, 即可将（10）写成更紧凑的形式：

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \boldsymbol{y}, && \text{(11a)} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}}\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\theta}, && \text{(11b)} \\ & \boldsymbol{y}_{\mathcal{B}} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}} = \boldsymbol{0}, && \text{(11c)} \end{aligned}$$

其中，指标集 $\mathcal{B} \subset \{1, 2, \ldots, 2p\}$ 称为（10）中 mpLCP 的互补基。$\mathcal{B}$ 的基数记为 $|\mathcal{B}|$。$\mathcal{B}$ 的补集为 $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, 2p\} \setminus \mathcal{B}$。矩阵 $\boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{p \times |\mathcal{B}|}$ 由 $\boldsymbol{Y}$ 中以 $\mathcal{B}$ 为指标的所有行和列构成。对于分区 $\mathcal{B}$、$\mathcal{N}$, $\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}}$ 和 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{N}}$ 分别称为基变量和非基变量。为确保任意满足紧凑形式（11）的 $\boldsymbol{y}$ 都是（10）的可行解，与 $\mathcal{B}$ 相关的一个充分条件是满足以下所有要求 [21]:

- 集合 $\mathcal{B}$ 的基数满足 $|\mathcal{B}| = p$,
- 矩阵 $\boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}}$ 的秩满足 $\boldsymbol{秩}(\boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}}) = p$,
- 索引对 $(i, p+i)$ 中恰有一个元素（$\forall\, i = 1, \ldots, p$）属于集合 $\mathcal{B}$。

公式（11）的重要性在于，不再需要互补条件 $\boldsymbol{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} = 0$。相反，互补条件已通过基的选择 $\mathcal{B}$编码。对于任意给定的 $\boldsymbol{\theta}$，如果存在唯一的基 $\mathcal{B}$ 满足（11），则表明（10）在 $\boldsymbol{\theta}$下存在唯一可行解。因此，现在可以将求解（10）视为基选择过程。识别可行基的一个关键步骤是基候选枚举。对于阶数为 2^p的 mpLCP，可能的 $\mathcal{B}$ 组合共有 p种。我们可以按升序选择基变量，枚举所有可能的互补基。这会形成一个树结构，如图 2所示。对于阶数为 p 的 mpLCP，所有基都可以在第 p 层获得。

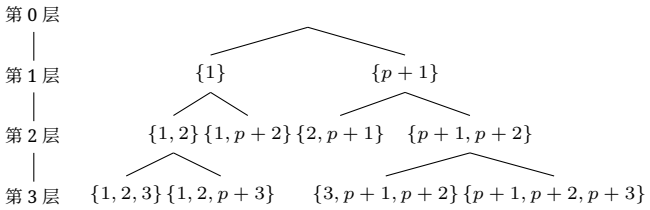


图2. 生成基候选项的示意过程 [21, 图 1]。当 $p = 3$ 时，所有可能的候选项都列在第 3 层中。

需要指出的是，我们的重点是处理某些特定参数下的退化问题。因此，无需找出所有可行基。相反，我们只需搜索部分能够生成包含给定$\boldsymbol{\theta}$的临界区域的基。这样，无论是否存在退化，我们都能刻画任意 $\boldsymbol{\theta}$ 邻域内的灵敏度。请注意，

现有基于组合方法的多参数二次规划 [11], 和多参数线性互补问题 [21] 算法均未考虑利用给定的 $\boldsymbol{\theta}$。

步骤（2）：在给定参数下求解多参数线性互补问题（10）。给定 $\boldsymbol{\theta}$ 后，多参数线性互补问题（10）可化简为线性互补问题（线性互补问题）。这种线性互补问题可通过一种成熟的互补主元算法 Lemke方法 求解 [29, 第 2]。将 $\mathcal{B}$ 记为由 Lemke方法 得到的基，并令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}}$ 为相应的基矩阵。Lemke 方法的最终单纯形表中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{Q}$ 的变换记为 $\bar{\boldsymbol{M}}$、$\bar{\boldsymbol{q}}$、$\bar{\boldsymbol{Q}}$，可计算如下

$$\bar{\boldsymbol{M}} = \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{M}, \ \bar{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{q}, \ \bar{\boldsymbol{Q}} = \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{Q}, \qquad (12)$$

令 $\bar{\mathcal{N}}$ 为 $\bar{\mathcal{B}}$的补集，则该 LCP 的解可表示为

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{\bar{\mathcal{B}}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \ \bar{\boldsymbol{y}}_{\bar{\mathcal{N}}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{0}, \qquad (13)$$

和 $\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})$、$\bar{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta})$ 可通过重新排列 $\bar{\boldsymbol{y}}_{\bar{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{\theta})$、$\bar{\boldsymbol{y}}_{\bar{\mathcal{N}}}(\boldsymbol{\theta})$ 中的 元素直接获得。注意，$\mathcal{B}$ 是根据互补主元规则选择的。因此，$\boldsymbol{B}$ 必须是秩为 p[1]的可逆方阵。

步骤 (3)：验证多参数线性互补问题 (10) 解的唯一性。

令 $\mathcal{D}$ 表示满足 $\bar{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}) = \bar{\boldsymbol{z}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$的指标集合。记 $\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathcal{D},\mathcal{D}}$ 为 $\boldsymbol{M}$的一个子矩阵，其行和列均由 $\mathcal{D}$索引。可以通过以下变量为 $\boldsymbol{u}$ [28, 的辅助 LCP, 判断 $(\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta}), \bar{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta}))$ 是否为 $\boldsymbol{\theta}$ 下多参数线性互补问题 (10) 的唯一解：方程 (2)]

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}^\mathsf{T}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}) = 0, \ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}, \\ & \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{M}}_{\mathcal{D},\mathcal{D}} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1}^\mathsf{T} & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (14)$$

令 $\boldsymbol{u}^\star$ 为方程（14）的解，$u^\star_{-1}$ 为 $\boldsymbol{u}^\star$的最后一个元素，且$z^\star_0$ 为 Lemke方法通过 [29, 式（2.3）]引入的辅助变量。解 $(\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})\ \bar{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta}))$ 是以下条件之一成立时 多参数线性互补问题（10）在 $\boldsymbol{\theta}$ 下的唯一解:

a) the auxiliary LCP (14) is infeasible, *i.e.*, $z^\star_0 > 0$,
b) the auxiliary LCP (14) is feasible, but $u^\star_{-1} = 0$.

否则，当 $u^\star_{-1} > 0$ 且$z^\star_0 = 0$ [28]时，存在无穷多个解。可以看出，当 $\mathcal{D}$ 为空时，辅助 线性互补问题（14）可化简为 $u = 0$。这表明 $(\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})\ \bar{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta}))$ 是多参数线性互补问题（10）的唯一解。

如果解不唯一，则跳转到步骤（3-2）：搜索 多参数线性互补问题（10）在 $\boldsymbol{\theta}$下解集的所有顶点。具体而言，如果 $(\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})\ \bar{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\theta}))$ 不唯一，则根据 [28, 式（3）], 可将 $\mathcal{D}$ 在$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\theta})$中所索引元素对应的可行解集写为

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\mathcal{D}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) := \{ & \boldsymbol{z}_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{D}|} \mid \bar{\boldsymbol{M}}_{\cdot,\mathcal{D}}\boldsymbol{z}_{\mathcal{D}} \geq \boldsymbol{0}, \\ & (\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathcal{D},\mathcal{D}} + \bar{\boldsymbol{M}}_{\mathcal{D},\mathcal{D}}^\mathsf{T})\boldsymbol{z}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{0}\}. \end{aligned} \qquad (15)$$

注意，可行集 $\mathbb{Z}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\theta})$ 是多面体。将此类多面体的 顶点记为 $\mathrm{V}[\mathbb{Z}_{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\theta}]$。由于 $|\mathcal{D}|$ 至多为 p，且通常远小于 p，生成

[1]人们可能更倾向于在固定 $\boldsymbol{\theta}$ 的情况下，直接将（1）作为线性/二次规划（LP/QP）问题求解，这类问题可由最先进的求解器轻松处理。若使用LP/QP求解器而非Lemke方法，则应采用额外技术来恢复一个基。附录A介绍了针对这类情况的专门处理方法。

在V[$\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{D}}}, \boldsymbol{\theta}$]的顶点可通过现有的顶点搜索技术轻松完成。令$\mathbb{Y}(\boldsymbol{\theta})$表示在$\boldsymbol{\theta}$下多参数线性互补问题（mpLCP）（10）的解集。随后，可以得到$\mathbb{Y}(\boldsymbol{\theta})$的顶点，即也就是，V[$\mathbb{Y}(\boldsymbol{\theta})$]，其结果为

$$\begin{aligned}\mathsf{V}[\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})] := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{2p}_{+} \mid \boldsymbol{y}_{\bar{\mathcal{B}}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{\boldsymbol{M}}_{\cdot,\bar{\mathcal{D}}}\boldsymbol{z}_{\bar{\mathcal{D}}} + \bar{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{\theta}},\\ \boldsymbol{y}_{\bar{\mathcal{N}}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{I}_{\cdot,\bar{\mathcal{D}}}\boldsymbol{z}_{\bar{\mathcal{D}}},\ \forall \boldsymbol{z}_{\bar{\mathcal{D}}} \in \mathsf{V}[\mathbb{Z}_{\bar{\mathcal{D}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}]\},\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。注意，若解唯一，则在 $\boldsymbol{\theta}$ 下的完整互补解集，即 $\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})$，退化为单点集。因此，$\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$，中只有一个顶点，且它恰好是我们通过式（13）得到的解。因此，如步骤（3-1）所示，不再需要执行式（15）-（16）中的过程，可直接将式（13）保存为 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$。

步骤（4）：枚举给定参数下 mpLCP 解集各顶点的互补基。回顾 $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$，对于 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 中的每个顶点 $\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\theta})$，令 $\hat{\mathcal{D}}$ 为满足 $\hat{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{D}} = \hat{\boldsymbol{z}}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ 的 $\hat{\boldsymbol{y}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ 的指标集合。根据 [29, p64, 定义], $\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\theta})$：若 $\mathcal{D}$ 非空，则称其为退化的。与单纯形法类似，退化顶点解具有不唯一的基。在 LCP 中，退化顶点的互补基也不唯一。我们采用部分枚举策略，求出 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 下 mpLCP（10）的所有基。具体而言，对于 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]$，中的 j^{th} 顶点 $\boldsymbol{y}_j(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$，令一个互不重叠的分区为

$$\mathcal{W}_j \cup \mathcal{Z}_j \cup \mathcal{D}_j = \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{17}$$

其中我们要求

$$\begin{aligned} w_k > 0, z_k = 0, \quad \forall\ k \in \mathcal{W}_j,\\ w_k = 0, z_k > 0, \quad \forall\ k \in \mathcal{Z}_j,\\ w_k = z_k = 0, \quad \forall\ k \in \mathcal{D}_j. \end{aligned} \tag{18}$$

索引集合 $\mathcal{W}_j$，$\mathcal{Z}_j$ 可以帮助我们确定从图2中哪个索引开始枚举，即索引 $\{\mathcal{W}_j, \mathcal{Z}_j+p\}$位于第 $|\mathcal{W}_j|+|\mathcal{Z}_j|$层。所有的 $\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{\theta})$互补基可以表示为

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[\boldsymbol{y}_j(\tilde{\boldsymbol{\theta}})] := \{\mathcal{W}_j, \mathcal{Z}_j + p, \mathcal{S}_j\},\\ \mathcal{S}_j := \{k, l \mid \forall k, l,\ k \in \mathcal{D}_j \wedge l \in \mathcal{D}_j + p,\\ k \neq l + p,\ |\mathcal{S}_j| = |\mathcal{D}_j|\},\end{aligned} \tag{19}$$

总共有 $2^{|\mathcal{D}_j|}$ 个候选项。$\boldsymbol{y}_j(\boldsymbol{\theta})$ 的所有可行互补基可以表示为

$$\mathsf{B}[\boldsymbol{y}_j(\tilde{\boldsymbol{\theta}})] := \{\mathcal{B}_j \mid \mathbf{rank}\, \boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}_j} = p,\ \forall \mathcal{B}_j \in \mathsf{P}[\boldsymbol{y}_j(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]\}. \tag{20}$$

秩检验用于确保所有基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，从而在 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Y}_{\cdot,\mathcal{B}_j}$ 时生成式（12）中的系数。将 $\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 记为从 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$, 中的每个顶点枚举得到的互补基集合，我们有

$$\mathsf{B}[\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})] := \{\mathsf{B}[\boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})] \mid \forall \boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathsf{V}[\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]\}. \tag{21}$$

为便于说明，设 $p = 3$，索引分区对应于 j^{th} 中的顶点 $\mathsf{V}[\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]$ 分别为 $\mathcal{W}_j = 1$、$\mathcal{Z}_j = 2$和$\mathcal{D}_j = 3$。如图 3所示，显然，j^{th} 顶点的候选基为 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{1, 5, 6\}$。它们是索引 $\{\mathcal{W}_j, \mathcal{Z}_j + p\} = \{1, 5\}$ 的超集，而该索引位于第 $|\mathcal{W}_j| + |\mathcal{Z}_j| = 2$层。可以看出，在第 $p = 3$。候选项 $\mathcal{B}_j$，即 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{1, 5, 6\}$，可利用式（20）进一步剪枝。我们承认，当矩阵较大时，计算秩的成本可能较高。尽管如此，现代计算机能够相当高效地执行此类计算。关于加速秩计算的方法，例如采用稀疏技术，不在本文讨论范围之内。我们将更快的实用实现留待感兴趣的读者探索。

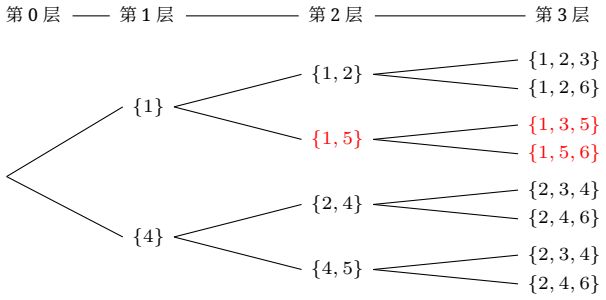


图3. 当 $p = 3$、$\mathcal{W}_j = 1$、$\mathcal{Z}_j = 2$ $\mathcal{D}_j = 3$ 时，基候选项的生成与选择。

步骤 (5)：使用所有互补基，求出包含 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有临界区域。令 $\mathcal{B}_k$ 为 $\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]$，中的 k^{th} 基，根据 [21,公式 (4)-(5)]，将基变量和非基变量写成参数形式，可得以下形式

$$\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}_k}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) := \bar{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{y}_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) := \mathbf{0}, \tag{22}$$

其中，的计算 $\bar{\boldsymbol{q}}$，$\boldsymbol{Q}$ 可参见（12），令 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k$。满足以下条件的参数集合 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{B}_k}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) \geq \mathbf{0}$ 构成临界区域临界区域 $[\mathcal{B}_k]$，即，

$$\mathsf{CR}\,[\mathcal{B}_k] := \{\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}_{\mathcal{B}_k}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) \geq \mathbf{0}\}, \tag{23}$$

值函数 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta},\ \mathcal{B}_k)$ 在临界区域$[\mathcal{B}_k]$ 上定义为

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) := \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k) + \boldsymbol{f}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k), \tag{24}$$

其中，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k)$是通过取 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\theta}; \mathcal{B}_k)$中的相应行得到的。对于 $\boldsymbol{\theta}$下的多参数线性互补问题 (10)，$\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 描述了 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 中基本解对应的所有 基。$\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 中的每个基 $\mathcal{B}_k$ 都与一个临界区域 $\mathsf{CR}\,[\mathcal{B}_k]$一一对应。因此，由 $\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$生成的临界区域 CR的并集完全分区了在 $\boldsymbol{\theta}$邻域内的参数空间。

搜索包含 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有临界区域的完整过程总结于算法1中。算法首先在步骤1中将多参数线性规划/二次规划重构为多参数线性互补问题。对于 $\boldsymbol{\theta}$下的多参数线性互补问题(10)，可将其简化为线性互补问题，并通过Lemke方法求解。在步骤3-5中，得到基 $\mathcal{B}$、基本互补解 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\theta})$ 以及系数 $\boldsymbol{M}$、$\bar{\boldsymbol{q}}$、$\boldsymbol{Q}$。如果步骤6中的零指标 $\mathcal{D}$ 为空，则在步骤7-8中返回唯一顶点和基。否则，我们将在步骤10中验证 $\boldsymbol{\theta}$ 下多参数线性互补问题(10)解的唯一性。随后，在步骤11-14中得到解集的顶点，即 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$,。在步骤15中，枚举 $\mathsf{V}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$ 中每个基本互补解对应的基，并将基集记为 $\mathsf{B}[\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})]$。最后，在步骤16中，将所有包含 $\boldsymbol{\theta}$ 的临界区域及其上定义的相应值函数记为 $\mathsf{CR}[\boldsymbol{\theta}]$、$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta})$。这些临界区域和值函数由基于[B $\mathcal{B}_k$ $\mathsf{Y}(\boldsymbol{\theta})$]中的每个基，通过式(23)-(24)生成。

算法1： 搜索所有包含 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$.

设定 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, B[Y($\tilde{\boldsymbol{\theta}}$)] $\leftarrow \emptyset$, V[Y($\tilde{\boldsymbol{\theta}}$)] $\leftarrow \emptyset$。
多参数线性互补问题($\boldsymbol{M}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}$) $\leftarrow$ 多参数线性规划/二次规划的重构（7）
$\mathcal{B} \leftarrow$ Lemke互补枢轴规则所得的基
$\bar{\boldsymbol{y}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \leftarrow$ 在.....条件下的互补解 $\bar{\mathcal{B}}$
$\bar{\boldsymbol{M}}, \bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{Q}} \leftarrow$ Lemke方法中的最终系数
$\mathcal{D} \leftarrow$ 满足 $\bar{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{D}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{z}_{\mathcal{D}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$
if $\mathcal{D} = \emptyset$ **则**
  V[$\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$] $\leftarrow \bar{\boldsymbol{y}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ 和 B[Y($\tilde{\boldsymbol{\theta}}$)] $\leftarrow \bar{\mathcal{B}}$
否则
  $z_0^\star, u_{-1}^\star$ 辅助 LCP 的解（14）
  如果 $z_0^\star > 0$ 且 $u_{-1}^\star = 0$ **则**
    V[$\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$] $\leftarrow \bar{\boldsymbol{y}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$
  else
    V[$\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$] $\leftarrow$ 对（15）-（16）进行顶点搜索
  B[$\mathbb{Y}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$] $\leftarrow$ 通过（21）进行基枚举
返回CR[$\tilde{\boldsymbol{\theta}}$], $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \leftarrow$ 所有CR和价值函数由每个 $\mathcal{B}_k \in$B[Y(生成 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$)] 使用 (23)-(24)

III. 改进的临界区域探索

A. 分布式问题设置

为展示所提出的退化处理方法的有效性和实际应用，我们将算法1 整合到 CRE 方法中 [9]。结合另外两项对 CRE 的重要改进，我们应用改进的 CRE 来求解联络线调度问题。

我们首先考虑多智能体系统[2]中的分布式凸优化一般模型。智能体具有局部决策变量 $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, N$，并通过变量 $\boldsymbol{\theta}$相互耦合。该优化模型可表述为一个线性约束二次规划问题。

$$\underset{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{x}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{f}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i \right), \tag{25a}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{\theta}, \ \forall\, i = 1, \ldots, N, \tag{25b}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_i := \{ \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{r}_i \}, \ \forall\, i = 1, \ldots, N. \tag{25c}$$

目标函数（25a）是关于 $\boldsymbol{H}_i \succeq 0$的凸函数。变量 $\boldsymbol{x}_i$ 受约束（25b）限制。约束（25c）对耦合变量 $\boldsymbol{\theta}$进行了限定。为方便记述，我们将（25b）-（25c）中的所有等式约束替换为不等式。将 $\boldsymbol{x}_i$ 投影到 $\boldsymbol{\theta}$ 空间后，问题（25）可等价地改写为

$$\underset{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d}{\text{minimize}} \quad \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) := \textstyle\sum_{i=1}^{N} \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}), \tag{26a}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}^\star := \cap_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Theta}_i^\star, \tag{26b}$$

$$\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} := \cap_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Theta}_i, \tag{26c}$$

其中，对每个 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$，定义为

$$\boldsymbol{\Theta}_i^\star := \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d \mid \exists\, \boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{\theta} \}, \tag{27}$$

[2]我们使用“ [分布式] ”一词来涵盖多智能体系统中的协调式/分层式结构和完全去中心化结构。前者设有中央协调器，而后者没有。

且$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$定义为

$$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}) := \underset{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}}{\text{minimize}} \ \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{f}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{x}_i, \tag{28a}$$

$$\text{subject to} \ \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leq \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{\theta}, \tag{28b}$$

当将 $\boldsymbol{\theta}$视为参数时，这恰好是一般多参数二次规划形式（1）。值函数$\mathbf{J}_i$（$\boldsymbol{\theta}$）的性质总结如下引理所述。

引理 1. （参见 *[1, 定理 6.5、6.7]*）：考虑一般凸多参数二次规划 (28)，可行参数集 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$ 是多面体的，且 $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$ 在 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$ 上是凸的分段线性 / 二次函数。

由于 $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$ 是分段函数，$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$的每个分段都对应可行域 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$的一个子集。特别地，这样的子集对应于我们已在（5）中定义的临界区域。以下两个推论自然成立。

推论1。 总体值函数 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 是凸的，且为分段线性/二次的。$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 的各段定义在一组多面体的临界区域上。每个临界区域 $= \boldsymbol{\Theta} \cap_{i=1}^{N}$临界区域$_i$ 都是局部临界区域与初始可行域$\boldsymbol{\Theta}$的交集。

推论2。 若将一般凸多参数二次规划 (28) 重构为多参数线性互补问题 (10)，引理 *1* 和推论 *1* 对于通过(23)-(24)得到的临界区域和值函数仍然成立。

B. 一般临界区域探索过程 *ss*

CRE采用双层结构。如图4所示，上层设有一个中央协调器，用于优化所有智能体的边界状态 $\boldsymbol{\theta}$。与现有的基于原始分解的方法类似，其中局部变量 $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \ldots, N$以及耦合变量 $\boldsymbol{\theta}$均通过迭代更新。CRE协调的优势在于，它能找到值函数和关于临界区域 的 $\boldsymbol{\theta}$，从而加快 $\boldsymbol{\theta}$的更新。

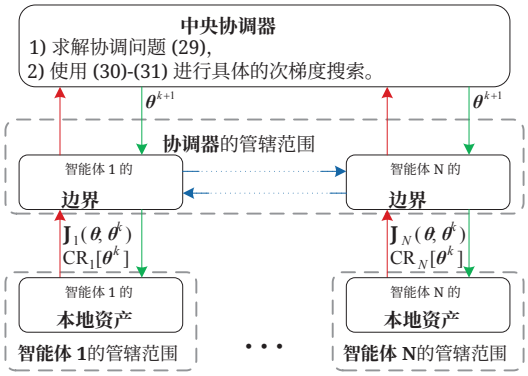


图 4. CRE 的架构。红色/绿色箭头表示向上/向下的通信链路，蓝色箭头表示物理连接。

根据引理1 以及图4的结构，CRE 通过以下两个步骤递归求解问题（25）。
1) 局部求值：给定 $\boldsymbol{\theta}^k$，每个智能体求解问题（28）以获得 $\mathbf{J}_i$（$\boldsymbol{\theta}$; $\boldsymbol{\theta}^k$），临界区域$_i[\boldsymbol{\theta}^k]$ （5）-（6）。
2）协调更新：首先，求解以下问题。

$$\text{minimize}_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} \ \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^k) := \textstyle\sum_{i=1}^{N} \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^k), \tag{29a}$$

$$\text{subject to} \quad \mathrm{CR}\left[\boldsymbol{\theta}^k\right] := \cap_{i=1}^{N} \mathrm{CR}_i\left[\boldsymbol{\theta}^k\right], \tag{29b}$$

以获得当前临界区域 $\mathrm{CR}[\boldsymbol{\theta}^k]$ 中的最优解对（$\boldsymbol{\theta}^\star$，$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star)$）。随后通过投影次梯度搜索更新 $\boldsymbol{\theta}^\star$

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} := \boldsymbol{\theta}^\star - \varepsilon \boldsymbol{v}^\star, \tag{30}$$

其中，ε 是一个较小的步长，$\boldsymbol{v}^\star$ 是来自

$$\begin{aligned} &\text{minimize}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}} \ \|\boldsymbol{v}\|^2, && \text{(31a)}\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{v} = (\partial \mathbf{J}^\star)\boldsymbol{\eta} + (\mathsf{N}[\boldsymbol{\theta}^\star; \boldsymbol{\Theta}])\boldsymbol{\zeta}, && \text{(31b)}\\ &\qquad\quad \mathbb{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{\eta} = 1, \ \boldsymbol{\eta} \geq \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\zeta} \geq \mathbf{0}. && \text{(31c)} \end{aligned}$$

这里，用 $\mathbf{1}$ 表示全一向量。记号 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 是次微分集 $\partial \mathbf{J}^\star$ 和法锥 $\mathsf{N}[\boldsymbol{\theta}^\star$ 的权重变量；$\boldsymbol{\Theta}]$。在 $\boldsymbol{\theta}^\star$ 处的真实次微分集 $\partial \mathbf{J}[\boldsymbol{\theta}^\star]$ 是未知的，因此以过去迭代得到的次微分集替代，即 $\partial \mathbf{J}^\star = \cup_{t=1}^k \partial \mathbf{J}[\boldsymbol{\theta}^\star$；临界区域 $[\boldsymbol{\theta}^t]]$。我们指出，若 $\boldsymbol{\theta}^\star \notin \mathrm{CR}[\boldsymbol{\theta}^t]$，则 $\partial \mathbf{J}[\boldsymbol{\theta}^\star$；临界区域 $[\boldsymbol{\theta}^t]] = \emptyset$。因此，这类临界区域 $[\boldsymbol{\theta}^t]$ 将在迭代过程中被舍弃。当 $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ 时，CRE 经过有限次迭代后收敛到（25）的精确最优解；详细证明可参考 [9]。在最优边界状态 $\boldsymbol{\theta}^\star$ 处计算得到的（25）的最优解为 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star)$。

C. 改进的方案

通过利用 mpLCP 公式处理退化问题，CRE 能够在复杂的退化情形下继续执行。算法2详细介绍了改进的 CRE 流程。算法以起点 $\boldsymbol{\theta}^0 \in \boldsymbol{\theta}$ 初始化，并将默认步长设为 $\varepsilon = 10^{-2}$。我们重点介绍算法2中 CRE 流程的三项改进。首先，我们将算法1纳入 CRE。在步骤3–5中，我们将局部问题 (28) 转换为 mpLCP，并在 $\boldsymbol{\theta}^k$ 下求解。采用这种方案后，CRE 无需依赖方程 (5)–(6) 来生成临界区域和值函数，而是对任意 $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$ 采用方程 (23)–(24)。在步骤 11–12中，发生退化时可能会生成多个临界区域。因此，在每个临界区域下，步骤13中也可能需要多次求解问题 (13)。协调问题 (13) 的最优解记为 $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}))$。这样，CRE 在遇到退化情形时也能继续执行。

其次，我们加入一个割平面方案，以确保 $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$ 在有限次迭代后对局部多参数线性规划/二次规划 (28)（或等价地，对 (10) 中的局部多参数线性互补问题）可行。回想一下，$\boldsymbol{\Theta}$ 是所有耦合约束 (25c) 的交集。根据方程 (27)，$\boldsymbol{\Theta}^\star$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的区域，在该区域内，局部问题 (28) 存在可行解。出于隐私和计算效率方面的考虑，协调器不知道真实的 $\boldsymbol{\Theta}^\star$。因此，在 [30, 第 5.1b 节]根据问题 (28) 推导出的以下可行性问题会在 $\boldsymbol{\theta}^{k+1} \notin \boldsymbol{\Theta}^\star$ 次梯度更新后求解。

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{s}_i}{\text{minimize}} \ \mathbb{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{s}_i, && \text{(32a)}\\ &\text{subject to } \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{s}_i \leq \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\theta}^{k+1}, : \boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i} && \text{(32b)}\\ &\qquad\quad \boldsymbol{s}_i \geq \mathbf{0}. && \text{(32c)} \end{aligned}$$

将32的最优解记为 $\boldsymbol{x}_i^\star$，将32b的最优乘子记为 $\boldsymbol{\lambda}_i^\star$。每个智能体在 $\boldsymbol{\theta}$ 处 $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$ 生成可行性割

$$\mathrm{FC}_i[\boldsymbol{\theta}^{k+1}] := \{\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\lambda}_i^{\star,\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i^\star - \boldsymbol{b}_i) \leq \boldsymbol{\lambda}_i^{\star,\mathsf{T}}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\theta}\}. \tag{33}$$

Algorithm 2: An improved CRE process.

1 Set $\boldsymbol{\theta}^\star \in \boldsymbol{\Theta}$, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star) \leftarrow 10^8$, $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\theta}^k \leftarrow \boldsymbol{\theta}^\star$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\epsilon = 10^{-4}$, α, β are pre-defined coefficients.
2 **for** $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
3 **for** $i = 1, \ldots, N$ **do**
4 $\bar{\boldsymbol{y}}_i(\boldsymbol{\theta}^k)$, $z_{0,i}^\star \leftarrow$ solution to (10) under $\boldsymbol{\theta}^k$
5 **if** $|z_{0,i}^\star| > 0$ **then** $\boldsymbol{\theta}^k$ is infeasible ;
6 **if** $\boldsymbol{\theta}^k$ *is infeasible* **then**
7 **for** $i = 1, \ldots, N$ **do**
8 $\mathrm{FC}_i[\boldsymbol{\theta}^k] \leftarrow$ cutting plane from (32)-(33)
9 $\boldsymbol{\Theta} \leftarrow \boldsymbol{\Theta} \cap_{i=1}^N \mathrm{FC}_i[\boldsymbol{\theta}^k]$, $\boldsymbol{\theta}^{k+1} \leftarrow \bar{\boldsymbol{\theta}}$ from (34)
10 **else**
11 **for** $i = 1, \ldots, N$ **do**
12 $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^k)$, $\mathrm{CR}_i[\boldsymbol{\theta}^k] \leftarrow$ value functions and critical regions by conducting Algo. 1
13 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \leftarrow$ optimal solution of (29)
14 **if** $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star) - \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \epsilon$ **then**
15 $\varepsilon_k \leftarrow \varepsilon$, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star) \leftarrow \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\boldsymbol{\theta}^\star \leftarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\partial \mathbf{J}^\star \leftarrow \partial \mathbf{J}[\boldsymbol{\theta}^\star, \mathrm{CR}[\boldsymbol{\theta}^k]]$
16 **else if** $-\epsilon \leq \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star) - \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) < \epsilon$ **then**
17 $\varepsilon_k \leftarrow \min(\alpha\varepsilon_{k-1}, \varepsilon)$, $\partial \mathbf{J}^\star \leftarrow \partial \mathbf{J}^\star \cup \partial \mathbf{J}[\boldsymbol{\theta}^\star, \mathrm{CR}[\boldsymbol{\theta}^k]]$
18 **else**
19 $\varepsilon_k \leftarrow \max(\beta\varepsilon_{k-1}, 10^{-5})$
20 $\mathsf{N}[\boldsymbol{\theta}^\star; \boldsymbol{\Theta}] \leftarrow$ updated normal cone
21 $\boldsymbol{v}^\star \leftarrow$ projected subgradient of (31)
22 **if** $\|\boldsymbol{v}^\star\| = 0$ **then**
23 **break**
24 **else**
25 $\boldsymbol{\theta}^{k+1} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^\star - \varepsilon_k \boldsymbol{v}^\star$
26 **返回** $\boldsymbol{\theta}^\star$，$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star)$

协调器现在可以通过以下方式更新 $\boldsymbol{\Theta}$：$\tilde{\boldsymbol{\Theta}} := \boldsymbol{\Theta} \cap_{i=1}^N \mathrm{FC}_i[\boldsymbol{\theta}^{k+1}]$。然后，通过将 $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$ 投影到新的参数空间 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}$上，可以得到一个新的参数，即

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} := \{\mathrm{argmin}_{\boldsymbol{\theta}} \ \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{k+1}\| \mid \boldsymbol{\theta} \in \tilde{\boldsymbol{\Theta}}\}. \tag{34}$$

可行性割在步骤 6-9中生成。我们还利用辅助变量，通过 Lemke方法认证不可行性 [29, 方程 (2.3)]。当新的 $\boldsymbol{\theta}^k$ 变为可行后，每个代理都会利用算法 1 来获取值函数$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}$；$\boldsymbol{\theta}^k)$ 以及临界区域 临界区域$_i[\boldsymbol{\theta}^k]$，这些操作在步骤 11-12中完成。

最后，我们设计了对（30）中的步长进行自适应调整的方法，以搜索相邻的临界区域。探索参数空间的要求是 ε 应足够大，以便进入相邻的 ε 临界区域，但不能越过它。因此，选择ε 颇为棘手，因为某些临界区域可能很小或很平坦。不恰当的步长可能导致 CRE 循环，从而遗漏一些重要的临界区域。在算法 2中，协调器在第 14-19 步调整步长，同时更新当前最优解。我们区分以下三种情况：

1) 如果新解更优（步骤 14-15），我们将像经典临界区域探索一样更新最优解（$\boldsymbol{\theta}^\star$，$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star)$）。

区别在于：(a) ε_k 重置为初始值；(b) 近似次微分 $\partial \mathbf{J}^\star$ 通过次微分 $\partial \mathbf{J}\left[\boldsymbol{\theta}^\star, \mathrm{CR}\left[\boldsymbol{\theta}^k\right]\right]$ 进行初始化，因为在存在退化情形时可以计算出多个次梯度，

2）如果新解与当前解相同（步骤16-17），这表明我们至少探索了一个新的临界区域，但其表现并不优于当前区域。随后，我们将按照预定义的系数调整步长，并添加新探索到的次微分。3）如果新解劣于当前解（步骤18-19），我们可能会跨过一些关键的临界区域。因此，我们只会减小步长，而不对当前内容作任何更改 $\boldsymbol{\theta}^\star$。

完成上述过程后，我们检查法锥N $[\boldsymbol{\theta}^\star; \boldsymbol{\Theta}]$是否有更新。然后，我们在步骤21 和25中应用投影次梯度搜索。如步骤22-23所示，当梯度范数 $\|\boldsymbol{v}^\star\|$ 小于阈值时，所提出的方案也会终止并得到精确解。步骤26将返回最优解。上述改进使 CRE 在实际应用中具有更好的性能和收敛性。

D. 多区域联络线调度的应用

问题（25）可适用于多种建模形式。本文考虑多区域联络线调度的应用场景。为构建多区域联络线调度问题，我们为每个系统运营商的输电网络采用直流潮流模型 [31, 式（6.40）-（6.41）]，该模型已被证明是一种良好的线性近似。将直流近似下的节点导纳矩阵和支路导纳矩阵分别记为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$。矩阵的下标反映了根据地理特征对母线和输电线路进行的划分。多N区域联络线调度问题可表述为

$$\underset{\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_{\bar{i}}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{g}_i^\intercal \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{g}_i + \boldsymbol{c}_i^\intercal \boldsymbol{g}_i \right), \tag{35a}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{B}_{i,i}\boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{B}_{i,\bar{i}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{i}} = \boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{d}_i, \tag{35b}$$

$$\boldsymbol{B}_{\bar{i},i}\boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{B}_{\bar{i},\bar{i}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{i}} + \sum_{j \in \mathsf{nbd}(i)} \boldsymbol{B}_{\bar{i},\bar{j}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{j}} = -\boldsymbol{d}_{\bar{i}}, \tag{35c}$$

$$-\boldsymbol{f}_i \le \boldsymbol{H}_{i,i}\boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{H}_{i,\bar{i}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{i}} \le \boldsymbol{f}_i, \tag{35d}$$

$$-\boldsymbol{f}_{\bar{i}} \le \boldsymbol{H}_{\bar{i},\bar{i}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{i}} + \sum_{j \in \mathsf{nbd}(i)} \boldsymbol{H}_{\bar{i},\bar{j}}\boldsymbol{\delta}_{\bar{j}} \le \boldsymbol{f}_{\bar{i}}, \tag{35e}$$

$$\underline{\boldsymbol{g}}_i \le \boldsymbol{g}_i \le \overline{\boldsymbol{g}}_i, \tag{35f}$$

$$\delta^{\mathrm{ref}} = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N, \tag{35g}$$

其中，如图 5 所示，决策变量包括区域 i 的发电量 $\boldsymbol{g}_i$、内部相角和边界相角 $\boldsymbol{\delta}_i$,$\boldsymbol{\delta}_{\bar{i}}$。负荷 $\boldsymbol{d}_i$ 和 $\boldsymbol{d}_{\bar{i}}$ 均为常数。目标函数 (35a) 是通过系数 $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{c}_i$ 最小化所有区域发电成本之和。直流模型的节点功率平衡分为 (35b)-(35c)。符号 nbd(i) 表示区域 i 的所有相邻 ¯ ¯区域。下标 i、i 和 j 表示母线分区。约束 (35d)-(35e) 限制内部支路和联络线支路

潮流小于 $\boldsymbol{f}_i$ 且 $\boldsymbol{f}_{\bar{i}}$。这里，我们略微滥用了符号¯，令行索引 i, i 分别表示区域_ _i的内部母线和联络线。列索引 i, i, j 仍表示 $\boldsymbol{H}$ 的母线分区。发电容量的下界和上界 $\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{g}_i$汇总于(35f)中。我们假设区域边界上没有发电机 ¯

。这样，协调器便无权直接管辖各区域的发电机。这一假设并不构成限制。即使存在边界发电机，也总能推导出图 5 中的等效电力网络，参见， [8] 以了解相关处理。约束 (35g)人为指定了一个参考相角。

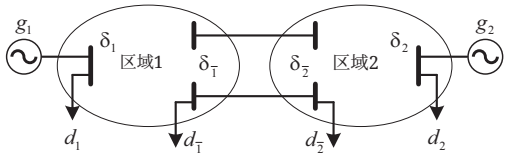


图5. 多区域电力系统示意图。

IV. 算例研究

A. 基准测试与仿真设置

网络数据取自 MATPOWER 7。1 [32]我们设计了八个多区域系统．如表I所示。符号`3area14+30×2` 表示该系统由二个区域连接而成。各区域的网络取自 MATPOWER 7.1 的标准算例文件，即，`case14.m`、 和 依次 络的拓扑结构和设置详见附录B

B. 冷启动下的计算时间比较

我们的第一组仿真比较了采用所提出的退化处理方法时 CRE 的收敛性。具体实现详见算法 1-2，其中数值容差在算法 2中定义。采用冷启动（即， $\boldsymbol{\theta}^0 = \mathbf{0}$）进行所有基准测试。此外，所有发电机均采用线性发电成本。我们将该改进的 CRE 与另外两种经典的分布式算法进行比较，即，来自 [22,算法 2],的 ADMM，以及来自 [30,第 5 节的 Benders 分解。1], 同样采用冷启动。平均结果基于运行十次所得，如图 6所示。详细的仿真设置和其他收敛曲线见附录C。在非退化情形下，CRE 相较于现有方法的收敛优势已在[8]，[9]中得到验证。借助所提出的技术，改进的 CRE 方法能够确保收敛，并且即使存在退化，其总计算时间成本也与当前最先进的技术相当。系统规模越大，这一现象就越明显。这是因为与其他方法相比，CRE 只需更少的迭代次数即可收敛到精确最优解。

C. 各基准测试的退化处理分析

为进一步分析退化处理导致的每次迭代时间开销，依据以下规则，将算法2 中的改进的 CRE 拆分为 CRE求解和退化处理模块。

1) *CRE*求解：算法 2 的总耗时（不包括算法 1-12 中调用算法 2 1 的步骤）为；2) 退化处理：记录算法 1-15 中调用算法 1 步骤 16 所引入的额外耗时，其中包括非唯一基带来的额外耗时；此外，还计入了算法 1的步骤 13 和算法 2 的耗时。

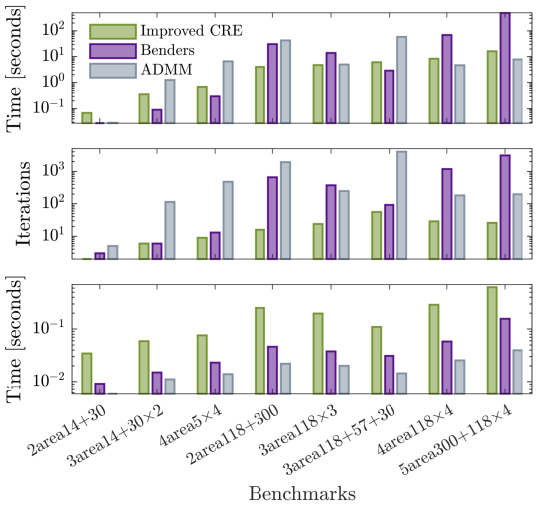


图 6. CRE、Benders 和交替方向乘子法的总时间（上）、迭代次数（中）及每次迭代时间（下，[总时间] / [总迭代次数]）比较。

如图 7所示，退化处理约占整个求解过程总耗时的 65%–70%。无论系统复杂度如何，这种处理都能稳健地确保改进的 CRE 在有限时间内收敛。退化处理的主要耗时来自对退化顶点的候选基进行枚举。需要指出的是，大多数候选项无效，因为它们不满足秩检验（20）。

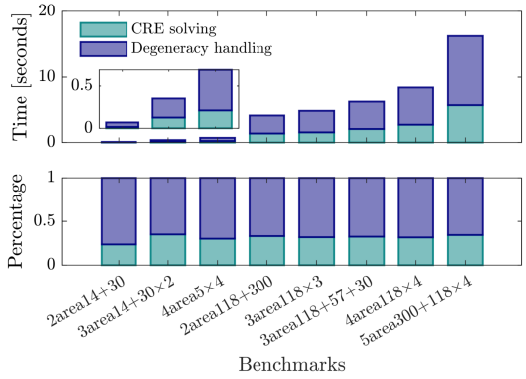


图 7. CRE求解与退化处理的时间比较。“百分比”子图表示 CRE求解和退化处理所用时间占总计算时间的百分比。

更具体地说，我们记录以下三个指标，以反映各情形下的退化程度：指标 [顶点]记录局部问题存在多个顶点时的最大顶点数和总迭代次数，见步骤12 和14。类似地， [基] 记录局部问题存在多个基时的最大基数和总迭代次数，可从步骤15中获得。此外， [迭代次数]表示在步骤22-23 的算法2中达到精确收敛所需的总迭代次数。结果见表I。在我们的仿真中，顶点数等于基数，但情况未必总是如此。通过枚举退化分量的索引，可能会识别出一个顶点对应多个基。对于 `2area14+30` 和`3area14+30×2` 这两种情形，在整个迭代过程中，顶点和基都是唯一的。这表明临界区域唯一，且无论是否存在退化，都很容易求得。

在这些情形下，所提出的退化处理过程可能效率较低。文献 [17] 中提出的字典序选择规则或许是更好的选择。然而，在其余情形中，随着系统复杂度的增加，所提出方法的优势便逐渐显现。迭代过程中会识别出多个退化顶点/基，其中每个基都能为协调优化生成一个临界区域（29）。因此，所提出的退化处理方法确保了改进的 CRE 方法具有稳定、快速且有限收敛的特性，并保证了整体效率。

表 I 退化处理方法下 CRE 的收敛性。

网络	顶点	基	迭代。
2区域14+30	2/0	2/0	2
3区域14+30×2	3/0	3/0	6
4区域5×4	5/1	5/1	9
2区域118+300	3/14	3/14	16
3区域118×3	4/1	4/1	24
3区域118+57+30	13/7	13/7	56
4区域118×4	5/4	5/4	29
5区域300+118×4	9/23	9/23	26

D. 随机初始系统状态下的基准测试

最后，在各种初始状态下验证了改进的 CRE 的基准测试性能。具体而言，对于每个基准测试，我们从均匀分布中随机抽取十个初始起点$\mathcal{U}(-\boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\pi})$ 。从图 8可以看出，对于每种情况的随机初始状态，总求解时间的波动范围都很小。这表明每个基准测试的总迭代次数也相近。此外，所提出的退化处理方法仅需额外花费合理的时间来处理退化，从而确保改进的 CRE 性能稳定。通常，触发联络线调度系统退化的条件主要有两类：

1) 非唯一发电计划（对偶退化）：在特定的联络线计划下，一组发电机具有相同的边际成本，因而导致该问题，

2) 节点边际电价（LMP）不唯一（原始退化）：固定的联络线计划可在迭代过程中视为灵活负荷。由于 LMP 是分段曲线，不同负荷水平下曲线段之间的切换意味着边际发电机发生变化。在过渡状态下，LMP 可能不连续且价格不唯一，这是退化的一个标志。

如图 8所示，通过整合所提出的退化处理流程，改进的 CRE 方法可平稳地应用于各种系统拓扑和初始状态。这表明，改进的 CRE 在适应广泛的实际问题方面具有巨大潜力，例如分布式能源资源的协调 [23]或输配电联合网络[24]。此外，在给定参数下全面处理退化，也有助于提升现有基于几何的 mpLP/QP 算法的性能 [10] ，或在拉格朗日乘子不唯一时指导现货定价 [33]。

V. 结论

本文提出一种退化处理方法，利用 mpLCP 公式以统一的视角识别并分析退化情形。该方法

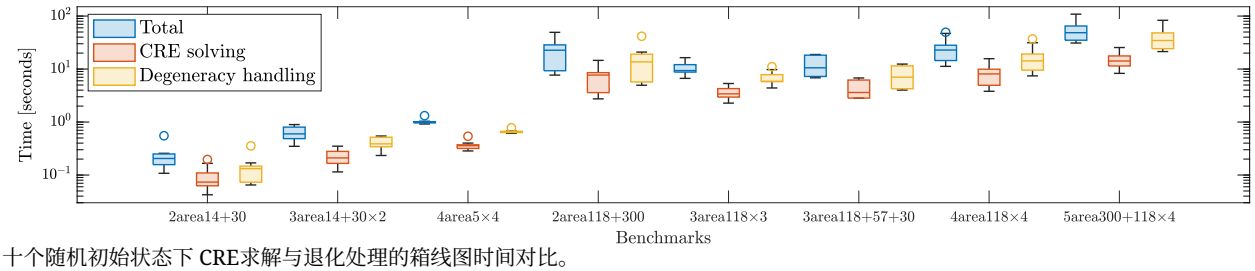


图 8. 十个随机初始状态下 CRE求解与退化处理的箱线图时间对比。

能够找出包含给定参数的所有满维临界区域。为此，本文高效枚举互补解集顶点的基。本文还阐述了一般的 CRE 协调流程，以展示如何求解分布式优化问题。本文设计了一种改进的 CRE，将所提出的退化处理方法融入其中，采用自适应步长探索相邻临界区域，并通过结合投影的割平面更新恢复可行性。在八个联络线调度基准测试中，改进的 CRE 与现有先进方法表现相当，并且在系统规模扩大时表现更优。此外，借助所提出的退化处理技术，CRE 能够在各种系统条件下实现快速有限收敛。这种高效性表明，将改进的 CRE 应用于多种电力系统应用具有良好前景。所提出的退化处理方法也展现出分析实际退化问题并完善多参数规划算法设计的潜力。

致谢

作者感谢伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校的 Subhonmesh Bose 教授与我们进行的建设性讨论。

参考文献

[1] F. Borrelli、A. Bemporad 和 M. Morari，《线性与混合系统预测控制》。剑桥：剑桥大学出版社，2017 年。[2] B. Novoselnik、V. Spudi´c 和 M. Baoti´c，“具有仿射协调约束的系统之系统的基于参数优化的模型预测控制”，*IEEE* 自动控制汇刊，第 65 卷，第 2 期，第 649–663 页，2020 年 2 月。[3] I. Pappas、D. Kenefake、B. Burnak、S. Avraamidou、H. S. Ganesh、J. Katz、N. A. Diangelakis 和 E. N. Pistikopoulos，“过程系统工程中的多参数规划：近期进展与未来方向”，*Front. Chem. Eng.*，第 2 卷，第 620168 页，2021 年 1 月。[4] A. Akbari 和 P. I. Barton，“一种用于代谢网络通量平衡分析的改进多参数规划算法”，优化理论与应用杂志，第 178 卷，第 2 期，第 502–537 页，2018 年 8 月。[5] Y. Ji、R. J. Thomas 和 L. Tong，“实时节点边际电价与网络拥塞的概率预测”，*IEEE Trans. Power Syst.*，第 32 卷，第 2 期，第 831–841 页，2017 年 3 月。[6] S. Taheri、M. Jalali、V. Kekatos 和 L. Tong，“有源配电系统的快速概率承载能力分析”，*IEEE* 智能电网汇刊，第 12 卷，第 3 期，第 2000–2012 页，2021 年 5 月。[7] Y. Chen、W. Wei、M. Li、L. Chen 和 J. P. S. Catal˜ao，“通过点对点能源共享跟踪可再生能源功率波动时的灵活性需求”，*IEEE* 智能电网汇刊，第 13 卷，第 2 期，第 1113–1125 页，2022 年 3 月。[8] Y. Guo、L. Tong、W. Wu、B. Zhang 和 H. Sun，“通过临界区域投影进行多区域协调经济调度”，*IEEE Trans. Power Syst.*，第 32 卷，第 5 期，第 3736–3746 页，2017 年 9 月。[9] Y. Guo、S. Bose 和 L. Tong，“多区域电力系统的鲁棒联络线调度”，*IEEE Trans. Power Syst.*，第 33 卷，第 4 期，第 4144–4154 页，2018 年 7 月。[10] F. Borrelli、A. Bemporad 和 M. Morari，“多参数线性规划的几何算法”，优化理论与应用杂志，第 118 卷，第 3 期，第 515–540 页，2003 年 9 月。

[11] A. Gupta、S. Bhartiya 和 P. S. V. Nataraj，“多参数二次规划的一种新方法”，Automatica，第47卷，第9期，第2112–2117页，2011年9月。[12] P. Ahmadi-Moshkenani、T. A. Johansen 和 S. Olaru，“基于相邻临界区域特征的多参数二次规划组合方法”，IEEE 自动控制汇刊，第63卷，第10期，第3221–3231页，2018年10月。[13] P. Tøndel、T. A. Johansen 和 A. Bemporad，“多参数二次规划的进一步结果”，载于第42届 IEEE 决策与控制会议论文集，第3卷。IEEE，2003年12月，第3173–3178页，第3卷。[14] C. N. Jones、E. C. Kerrigan 和 J. M. Maciejowski，“关于多面体投影与参数规划”，优化理论与应用杂志，第138卷，第2期，第207–220页，2008年8月。[15] J. Spjøtvold、P. Tøndel 和 T. A. Johansen，“一种获得多参数线性规划连续解的方法”，IFAC 会议论文集，第38卷，第1期，第253–258页，2005年。[16] ——，“凸参数二次规划解的连续选择与唯一多面体表示”，优化理论与应用杂志，第134卷，第2期，第177–189页，2007年8月。[17] C. N. Jones、E. C. Kerrigan 和 J. M. Maciejowski，“用于多参数线性规划的字典序扰动及其在控制中的应用”，Automatica，第43卷，第10期，第1808–1816页，2007年10月。[18] R. Oberdieck、N. A. Diangelakis 和 E. N. Pistikopoulos，“显式模型预测控制：一种连通图方法”，Automatica，第76卷，第103–112页，2017年2月。[19] C. N. Jones 和 M. Morrari，“ 多参数线性互补问题 ”，载于第 45 届 IEEE 决策与控制会议论文集。美国加利福尼亚州圣迭戈：IEEE，2006年，第5687–5692页。[20] N. Adelgren 和 M. M. Wiecek，“求解多参数线性互补问题的两阶段算法”，欧洲运筹学杂志，第254卷，第3期，第715–738页，2016年11月。[21] M. Herceg、C. N. Jones、M. Kvasnica 和 M. Morari，“求解参数线性互补问题的枚举方法”，Automatica，第62卷，第243–248页，2015年12月。[22] A. Kargarian、J. Mohammadi、J. Guo、S. Chakrabarti、M. Barati、G. Hug、S. Kar 和 R. Baldick，“面向未来电力系统中分布式/去中心化直流最优潮流的实现”，IEEE 智能电网汇刊，第9卷，第4期，第2574–2594页，2018年7月。[23] S. Wang、X. Wang 和 W. Wu，“云计算与基于本地芯片的微电网动态经济调度”，IEEE 智能电网汇刊，第11卷，第5期，第3774–3784页，2020年9月。[24] C. Lin、W. Wu、X. Chen 和 W. Zheng，“采用多参数规划的输电与有源配电网去中心化动态经济调度”，IEEE 智能电网汇刊，第9卷，第5期，第4983–4993页，2018年9月。[25] A. V. Fiacco 和 J. Liu，“ 非线性规划中的退化及其影响所促成的研究成果 ”，《运筹学年鉴》，第46–47卷，第1期，第61–80页，1993年3月。[26] P. Tøndel、T. A. Johansen 和 A. Bemporad，“多参数二次规划算法与显式模型预测控制解”，Automatica，第39卷，第3期，第489–497页，2003年3月。[27] Q. Paris，“二次规划模型中的多个最优解”，《西部农业经济学杂志》，第15页，1983年。[28] I. Kaneko，“一类线性互补问题的解的数量”，数学规划，第17卷，第1期，第104–105页，1979年12月。[29] K. G. Murty，《线性互补、线性与非线性规划》。德国柏林：Heldermann 出版社，1988年。[30] J. R. Birge 和 F. Louveaux，《随机规划导论》，施普林格运筹学与金融工程系列。纽约：Springer New York，2011年。[31] A. J. Wood、B. F. Wollenberg 和 G. B. Sheble，《电力生产、运行与控制》，第3版。纽约：Wiley-Interscience，2013年。[32] R. Zimmerman、C. Murillo-S´anchez 和 R. Thomas，“MATPOWER：S

eady-State Operations, Planning, an d Analysis Tools for Power Sys-

tems Research and Education," *IEEE* 电力系统汇刊，第26卷，第12–19页，2011年，https://doi.org/10.5281/zenodo.4074135。[33] D. Feng、Z. Xu、J. Zhong 和 J. Ostergaard，"拉格朗日乘子不唯一时的现货定价"，*IEEE* 电力系统汇刊，第27卷，第1期，第314–322页，2012年2月。[34] M. Herceg、M. Kvasnica、C. N. Jones 和 M. Morari，"多参数工具箱 3.0"，载于欧洲控制会议论文集 苏¨黎世，瑞士：IEEE，2013年7月17–19日，第502–510页。

附录

A. 从商业求解器恢复线性互补问题的解

Lemke方法并非十分高效的算法。人们可能更愿意使用商业求解器（Cplex、Mosek、Gurobi、等等。）高效地求解大规模问题。现代求解器主要采用两类算法：一类是用于线性规划问题的单纯形法（$\boldsymbol{H}=0$），另一类是用于其他一般凸问题的内点法（IPM）。

我们的目标是从问题（7）的最优原始-对偶集中获得一个顶点解。对于单纯形法，收敛时已经得到一个最优顶点解。设 $\{\mathcal{B}_x,\mathcal{N}_x\}$、$\{\mathcal{B}_s,\mathcal{N}_s\}$ 分别为最后一次迭代时原始变量和松弛变量 $[\boldsymbol{x}^\intercal,\boldsymbol{s}^\intercal]^\intercal$ 的基变量和非基变量索引。那么，当 $\boldsymbol{H}=\mathbf{0}$ 时，KKT 条件（8）可改写为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{B}_x}\\ \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{N}_x}\\ \boldsymbol{s}_{\mathcal{B}_s}\\ \boldsymbol{s}_{\mathcal{N}_s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{\mathcal{B}_s,\mathcal{B}_x}^\intercal & \boldsymbol{A}_{\mathcal{N}_s,\mathcal{B}_x}^\intercal\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{\mathcal{B}_s,\mathcal{N}_x}^\intercal & \boldsymbol{A}_{\mathcal{N}_s,\mathcal{N}_x}^\intercal\\ -\boldsymbol{A}_{\mathcal{B}_s,\mathcal{B}_x} & -\boldsymbol{A}_{\mathcal{B}_s,\mathcal{N}_x} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{A}_{\mathcal{N}_s,\mathcal{B}_x} & -\boldsymbol{A}_{\mathcal{N}_s,\mathcal{N}_x} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_x}\\ \boldsymbol{x}_{\mathcal{N}_x}\\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{B}_s}\\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{N}_s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{\mathcal{B}_x}\\ \boldsymbol{f}_{\mathcal{N}_x}\\ \boldsymbol{b}_{\mathcal{B}_s}\\ \boldsymbol{b}_{\mathcal{N}_s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{C}_{\mathcal{B}_s}\\ \boldsymbol{C}_{\mathcal{N}_s}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}. \tag{36}$$

根据（36），我们可以直接得知，mpLCP 的一个基变量是 $\boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{B}}}=[\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_x}^\intercal,\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{B}_s}^\intercal,\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{N}_x}^\intercal,\boldsymbol{s}_{\mathcal{N}_s}^\intercal]^\intercal$。这是因为：(i) 单纯形法的基变量 $[\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}_x}^\intercal,\boldsymbol{s}_{\mathcal{B}_s}^\intercal]\geq\mathbf{0}$ 位于基中；(ii) mpLCP 的互补规则意味着 $[\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{B}_x}^\intercal,\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{B}_s}^\intercal]$ 不在基中。注意，根据单纯形法的解恢复得到的基 $\hat{\mathcal{B}}$ 可能与 Lemke方法得到的基 $\bar{}$ 不同，因为两者可能采用不同的主元规则。尽管如此，它们都能到达最优集的一个顶点。$\hat{}$ $\bar{}$当不存在退化时，$\mathcal{B}=\mathcal{B}$ 必须始终成立。

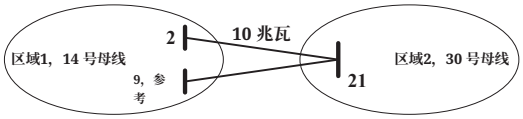
对于内点法而言，恢复基并非直接可行，因为它可能收敛于最优集的内部解。内点法遍历可行域的内部，而不是采用主元操作。设 $(\boldsymbol{x}^\star,\ \boldsymbol{\mu}^\star,\ \boldsymbol{s}^\star,\ \boldsymbol{\lambda}^\star)$ 为内点法求得的（7）的最优解对。这里，我们根据互补性质进行简单检查，以恢复一个基解，具体如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{B}}}^\star&=[\max(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{\mu}^\star)^\intercal,\ \max(\boldsymbol{s}^\star,\boldsymbol{\lambda}^\star)^\intercal]^\intercal,\\ \boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{N}}}^\star&=[\min(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{\mu}^\star)^\intercal,\ \min(\boldsymbol{s}^\star,\boldsymbol{\lambda}^\star)^\intercal]^\intercal,\end{aligned} \tag{37}$$

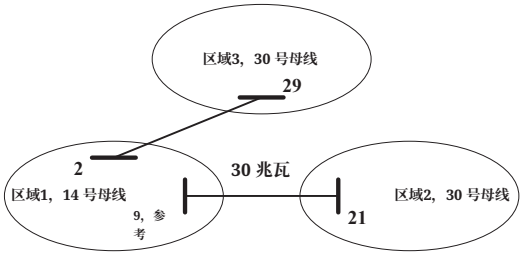
其中的max、min 表示逐分量最大值/最小值。并且 $(\boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{B}}}^\star,\ \boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{N}}}^\star)$ 表示解分区。在非退化条件下，我们有 $\boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{B}}}^\star>0$，$\boldsymbol{y}_{\hat{\mathcal{N}}}^\star=0$ $x_i^\star=\mu_i^\star=0$ 。当存在元素或因退化而产生 $s_i^\star=\lambda_i^\star=0$ 时，我们随机选择一个作为基变量。如果求解器未返回任何基信息，也可以应用单纯形法的结果 (37) 来恢复基解。请注意，如果我们应用单纯形 $\hat{}$方法或内点法，则 (12) 中的系数是未知的。我们需要在 $\mathcal{B}$ 下求逆以生成这些系数。

B. 测试基准测试拓扑

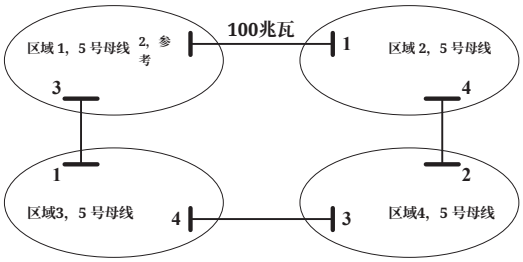
除非另有说明，所有内部线路均采用 MATPOWER 7.1 中的默认容量。若未给出容量，则设为 800 兆瓦。



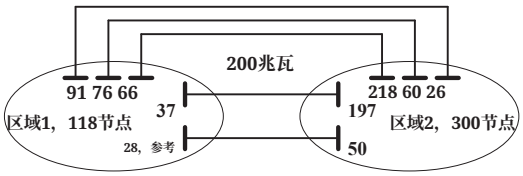
(a) 两区域 14+30网络



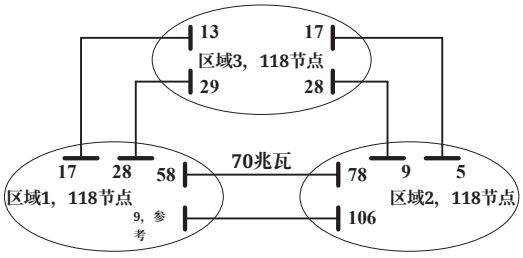
(b) 三区域 14+30×2网络



(c) 四区域 5×4 网络

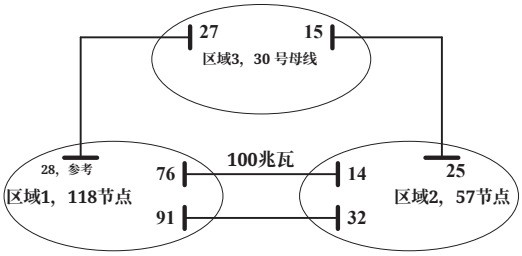


(d) 双区域 118+300 网络

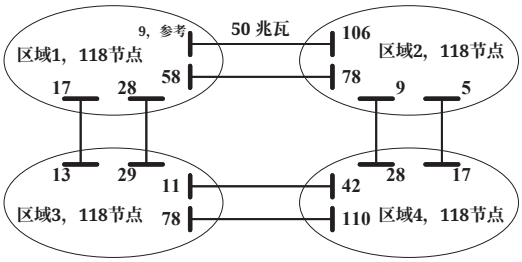


(e) 三区域 118×3 网络

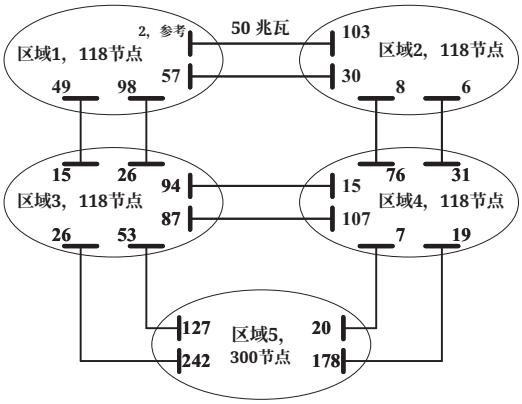
图9. 多区域网络系统的基准测试。



(a) 三区域 118+57+30 网络



(b) 四区域 118×4 网络



(c) 五区域 300+118×4 网络

图10. 多区域网络系统的测试基准，续。

C. 仿真设置与补充结果

我们使用 MATLAB 2021a 和 Gurobi v9.5.2 在笔记本电脑上完成了所有仿真。对于改进后的 CRE，问题（29）、（31）和（32）由 Gurobi 求解。此外，我们还使用 Gurobi 在 $\boldsymbol{\theta}^k$ 下优化（7），而不是直接求解大规模 mpLCP（10）。Lemke方法结合字典序最小行选择技术求解辅助 LCP（14）。此外，采用 MPT 3。0 [34]的 算法 14的第 1 步中搜索最小最优顶点。通常，将边界相角的 $\boldsymbol{\Theta}^\star$ 划分为 临界区域 会产生许多很小的临界区域。为部分缓解这一现象，我们通过缩放（25b）-（25c）中的参数系数，等效地扩大了所有的临界区域，具体如下：

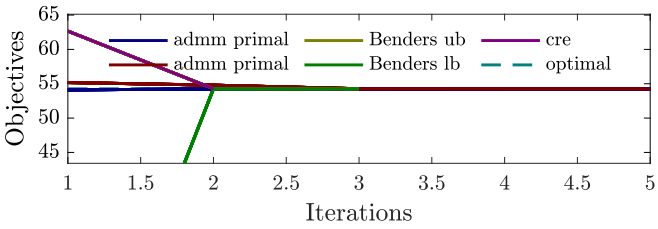
$$\tilde{\boldsymbol{C}}_i = 0.01\boldsymbol{C}_i,\ \tilde{\boldsymbol{D}}_i = 0.01\boldsymbol{D}_i,\ i = 1,\ldots,N, \qquad (38)$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{C}}_i$ 和 $\tilde{\boldsymbol{D}}_i$ 已代入原问题。请注意，最优值 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^\star)$ 不会改变，而$\boldsymbol{\theta}^\star$ 和临界区域会相应扩大。

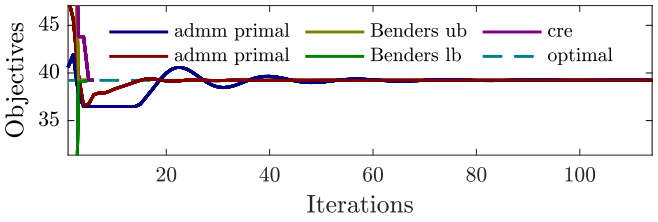
我们使用梯度范数作为 CRE 的收敛度量，即，$\|\boldsymbol{v}^\star\| \le 10^{-2}$，其中 $\boldsymbol{v}^\star$ 由式（31）计算得出。对于交替方向乘子法，我们将惩罚因子设为0。1。相对最优性间隙指标定义为

$$|f_{\mathcal{P}}^k - f_{\mathcal{D}}^k| + \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}\|_1 \le 10^{-3}, \qquad (39)$$

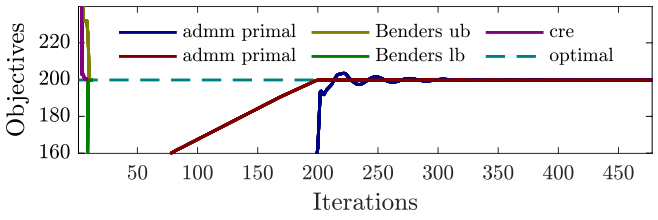
其中，$f_{\mathcal{P}}^k$，$f_{\mathcal{D}}^k$表示k^{th} 迭代时的原始和对偶目标值。第二项衡量引入全局共识边界状态 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的副本 $\boldsymbol{\theta}$后产生的约束违反。对于 Benders 分解，我们将目标函数的下界和上界分别初始化为 $f_{\mathcal{L}}^0 = 0$，$f_{\mathcal{U}}^0 = 10^5$。用于终止的相对最优性间隙指标定义为 $f_{\mathcal{U}}^k - f_{\mathcal{L}}^k \le 10^{-3}$。对于图9-10所示的八种情况，冷启动下的迭代收敛情况见图11-12。



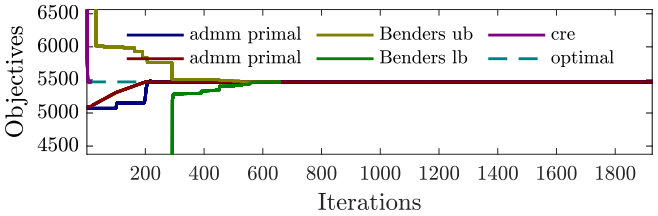
(a) 双区域 14+30网络



(b) 三区域 14+30×2网络

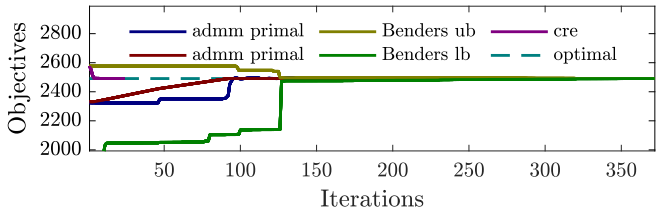


(c) 四区域 5×4 网络

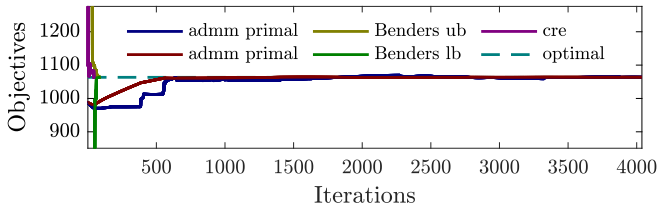


(d) 双区域 118+300 网络

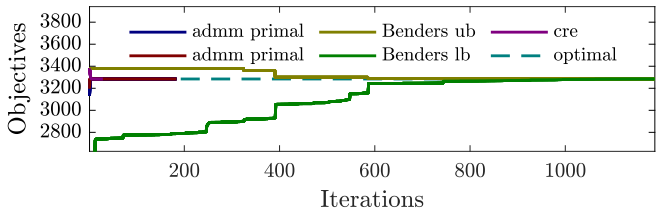
图11. 测试基准上的冷启动比较。



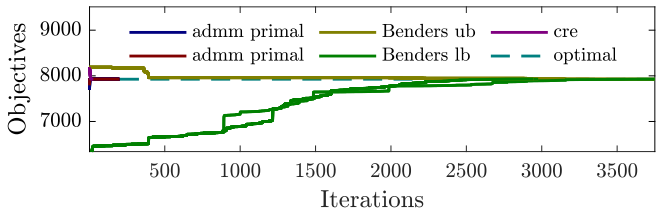
(a) 三区域 118×3 网络



(b) 三区域 118+57+30 网络



(c) 四区域 118×4 网络



(d) 五区域 300+118×4网络

图12. 测试基准上的冷启动比较，续。

如图12d所示，Benders 方法在重复试验中对大规模问题的收敛表现不稳定。这主要是由于求解器的解精度会影响割平面生成的质量。对于精度要求更高的 ADMM，收敛则困难得多，因为接近最优解时，对偶梯度几乎趋于零。尽管如此，改进后的 CRE 始终能够确保在上述基准测试中快速且稳定地收敛。