arXiv:2304.00443v1 [math.NT] 2 Apr 2023

p广义斐波那契三元组的数值半群

Takao Komatsu浙江理工大学理学院数学科学系，
杭州 310018，中国 komatsu@zstu.edu.cn

Shanta Laishram印度统计研究所理论统计
与数学部（SMU），新德里 110016，印度
shanta@isid.ac.in

Pooja PunyaniThe NorthCap
University应用科学系，古鲁格拉姆
122001，哈里亚纳邦，印度
poojapunyani@ncuindia.edu

MR主题分类：主要分类 11D07；次要分类 20M14、05A17、05A19、11D04、11B68、11P81

摘要

对于非负整数 p，我们给出了广义斐波那契数值半群的 p-Frobenius 数和 p-亏格的显式公式。这里， p-数值半群 S_p 定义为这样一个整数集合：其中给定正整数 a_1、a_2、…、a_k 的非负整数线性组合以超过 p 种方式表示。当 $p=0$、S_0 时，具有 0-Frobenius 数和 0-亏格的半群就是原数值半群，其 Frobenius 数和亏格分别为 Frobenius 数和亏格。本文研究涉及雅各布斯塔尔多项式的 p-数值半群，其中斐波那契数是其特殊情形。相应地，我们也可以研究包含卢卡斯数的雅各布斯塔尔-卢卡斯多项式。文中还提及其在 p-希尔伯特级数方面的一项应用。

关键词：弗罗贝尼乌斯问题、斐波那契数、卢卡斯数、雅各布斯塔尔多项式、阿佩里´集、表示数、希尔伯特级数

1 引言

给定正整数集 $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $(k \geq 2)$，对任意非负整数 p，令 S_p 为由给定正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 的非负整数线性组合表示方式多于 p 种的整数集合。关于表示数的相关背景，参见例如 [4, 8, 13, 35, 38]。对于非负整数集 $\mathbb{N}_0$，集合$\mathbb{N}_0\backslash S_p$ 为有限集，当且仅当 $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$。于是，$\mathbb{N}_0\backslash S_p$中存在最大整数 $g_p(A) := g(S_p)$，称为 p-Frobenius 数。 $\mathbb{N}_0\backslash S_p$ 的基数称为 p-亏格，记作$n_p(A) := n(S_p)$。 $\mathbb{N}_0\backslash S_p$ 中元素之和称为 p-西尔维斯特和，记作 $s_p(A) := s(S_p)$。这一概念是 Frobenius 著名丢番图问题（[26, 36, 37]）的推广，因为$p = 0$ 是原始 Frobenius 数 $g(A) = g_0(A)$、亏格 $n(A) = n_0(A)$以及西尔维斯特和 $s(A) = s_0(A)$得以恢复的情形。我们可以将 S_p 称为 p-数值半群。严格来说，当 $p \geq 1$时， S_p不包含 0，因为整数 0 只有一种表示方式，因此它仅满足加法封闭性，集合 $S_p \cup \{0\}$ 便成为一个数值半群。关于数值半群，参见 [2, 27, 28]。

Frobenius 数和亏格有多种扩展方式，即使是从表示数（称为 denumerant）的角度来看也是如此。例如，有些研究将 S_p^* 视为这样一个整数集合：其中每个元素都能由给定的正整数 a_1、a_2、.....、a_k 作非负整数线性组合表示，且恰好有 p 种表示方式（例如参见 [6, 11]）。那么，相应的 p-Frobenius 数 $g_p^*(A)$ 就是恰好有 p 种不同表示方式的最大整数。然而，在这种情况下，$g_p^*(A)$ 不一定会随着 p 的增加而递增。例如，当 $A := \{2, 5, 7\}$， $g_{17}^*(2, 5, 7) = 43 > g_{18}^*(2, 5, 7) = 42$。此外，对于某些 p，g_p^* 可能不存在。例如， $g_{22}^*(2, 5, 7)$ 不存在，因为不存在表示数恰好为 22 的正整数。 p-亏格也可以有不同的定义。例如， $n_p^*(A)$ 可定义为 $[\ell_p(A)\ g_p(A) + 1]\backslash S_p(A)$ 的基数，其中 $\ell_p(A)$ 是 $S_p(A)$ 的最小元素。然而，在我们将 $n_p(A)$ 定义为 $[0, g_p(A) + 1]\backslash S_p(A)$ 的基数时，可以利用由 p-Ap´ery 集得到的便捷公式来求得 $n_p(A)$。请参见下一节。

研究了由 $\{a, a + b, aF_{k-1} + bF_k\}$ 生成的 [23], 数值半群。利用 Johnson 的一种技术 [12], ，得到了

此类半群的 Frobenius 数，这是对 Marin 等人结果的推广[24]。

在本文中，对于正整数 v，我们研究 Jacobsthal 多项式 $J_n(v)$，其由递推关系 $J_n(v) = J_{n-1}(v) + vJ_{n-2}(v)$ $(n \geq 2)$ 定义，其中 $J_0(v) = 0$ 且 $J_1(v) = 1$ （例如，参见 [22, 第 44] 章）。当 $v = 1$ 时，$F_n = J_n(1)$ 是斐波那契数。当 $v = 2$ 时，$J_n = J_n(2)$ 是 Jacobsthal 数。接着，我们给出 $A := \{a, va + b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\}$ 的 p-Frobenius 数的显式公式，其中 a 和 b 是满足 $\gcd(a, b) = 1$ 且 a，$k \geq 3$ 的正整数。若 $a = J_i(v)$ 且 $b = J_{i+1}(v)$，则由 $vJ_i(v)J_{k-1}(v) + J_{i+1}(v)J_k(v) = J_{i+k}(v)$，可得 $A = \{J_i(v)\ J_{i+2}(v)\ J_{i+k}(v)\}$。因此，[18] 中的结果可作为特殊情形恢复。此外，若 $v = 1$，则 [24, 19] 中的结果也可作为特殊情形恢复。

对于 $k = 2$，即两个变量的情形，$g_0(A)$（[37]）、$n_0(A)$（[36]）以及 $s_0(A)$（[7]；其推广为 [30]）已明确给出了闭式公式。然而，对于 $k \geq 3$，Frobenius 数无法由任何一组可归约为某个有限多项式集合的闭式公式给出（[9]）。对于 $k = 3$，人们已设计出各种用于求解 Frobenius 数的算法（[10, 12, 31]）。关于三个变量情形下 Frobenius 数的一些非显式公式可见于 [40]。需要充分注意的是，即使在 $p = 0$ 的原始情形中，要为三个或更多变量的任何一般数列给出一个闭的显式公式也非常困难（例如见 [29, 31, 32, 33]）。实际上，当 $p > 0$ 时，这甚至更加困难。不过，最近我们终于成功获得了三角数 [15] 和重单位数 [16] 中的 p-Frobenius 数，以及斐波那契和 Lucas 三元组 [19] 与 Jacobsthal 三元组 [18] 中的相应结果。

2 预备知识

下面引入 Ap´ery 集（见 [1]），以便从技术上推导 $g_p(A)$、$n_p(A)$ 和 $s_p(A)$ 的公式。不失一般性，我们假设 $a_1 = \min(A)$。

定义 1. 设 p 为一个非负整数。对于一个由正整数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，若最大公约数$(A) = 1$ 且 $a_1 = \min(A)$，我们记为

$$\mathrm{Ap}_p(A) = \mathrm{Ap}_p(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \{m_0^{(p)}, m_1^{(p)}, \ldots, m_{a_1-1}^{(p)}\},$$

p-Ap´ery 集合 A，其中 $m_i^{(p)}$ 是 $S_p(A)$ 中满足 $m_i^{(p)} \equiv i \pmod{a_1}$ $(0 \leq i \leq a_1 - 1)$ 的最小正整数（即 $m_i^{(p)} \in S_p(A)$ 且 $m_i^{(p)} - a_1 \notin S_p(A)$）。注意，$m_0^{(0)}$ 定义为 0。

由此可知，对于每个 p,

$$\mathrm{Ap}_p(A) \equiv \{0, 1, \ldots, a_1 - 1\} \pmod{a_1}.$$

尽管很难找到 $g_p(A)$ 以及 $n_p(A)$ 和 $s_p(A)$ $k \geq 3$ 的显式形式，但利用 [14, 17]，中建立的便捷公式，我们可以求得某些特殊数列（$a_1, a_2, \ldots, a_k$）的这些值；一般而言，要找到 $m_j^{(p)}$ 的任何规律结构都相当困难。一个便捷公式关于幂和：

$$s_p^{(\mu)}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus S_p(A)} n^\mu$$

利用伯努利数 B_n，其由生成函数定义：

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

另一个便捷公式关于加权幂和（[20, 21]）：

$$s_{\lambda,p}^{(\mu)}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus S_p(A)} \lambda^n n^\mu$$

利用生成函数中出现的欧拉数 $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$：

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle {n \atop m} \right\rangle x^{m+1} \quad (n \geq 1)$$

其中 $0^0 = 1$ 和 $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$。这里，$\mu$ 是一个非负整数，且 $\lambda \neq 1$。由这些便捷公式可得到许多有用的表达式，作为特殊情形。以下给出其中一些有用的结果。公式 (2) 和 (3) 分别由 $s_\lambda^{(0)}$，$p(A)$ 和 $s_\lambda^{(1)}$，$p(A)$ 推得。

引理 1. 设 k、p 和 μ 为整数，且 $k \geq 2$、$p \geq 0$ 和 $\mu \geq 1$。假设 $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$。我们有

$$g_p(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \left(\max_{0 \leq j \leq a_1 - 1} m_j^{(p)} \right) - a_1, \tag{1}$$

$$n_p(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{1}{a_1} \sum_{j=0}^{a_1-1} m_j^{(p)} - \frac{a_1 - 1}{2}, \tag{2}$$

$$s_p(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{1}{2a_1} \sum_{j=0}^{a_1-1} \left(m_j^{(p)}\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{a_1-1} m_j^{(p)} + \frac{a_1^2 - 1}{12}. \tag{3}$$

备注：当 $p=0$ 时，公式 (1)、(2) 和 (3) 分别化为布劳尔和肖克利的公式 [5, 引理 3], Selmer [34, 定理], 和 Tripathi[39, 引理 1][1],:

$$
\begin{aligned}
g(a_1,a_2,\dots,a_k) &= \left(\max_{0\le j\le a_1-1} m_j\right) - a_1\,,\\
n(a_1,a_2,\dots,a_k) &= \frac{1}{a_1}\sum_{j=0}^{a_1-1} m_j - \frac{a_1-1}{2}\,,\\
s(a_1,a_2,\dots,a_k) &= \frac{1}{2a_1}\sum_{j=0}^{a_1-1} (m_j)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{a_1-1} m_j + \frac{a_1^2-1}{12}\,,
\end{aligned}
$$

其中 $m_j = m_j^{(0)}$ $(1\le j\le a_1-1)$，且 $m_0 = m_0^{(0)} = 0$。

3 主要结果

通过 $a = qJ_k(v) + r$，利用 $0\le r < J_k(v)$ 确定整数 q 和 r。函数 $\lfloor x\rfloor$表示不超过 x的最大整数。

定理 1. 设 a 和 b 为正整数，满足 $a\ge 3$ 且最大公约数$(a,b) = 1$。那么，对于正整数 $k\ge 3$，以及 $0\le p\le \lfloor a/J_k(v)\rfloor$，有

$$
\begin{aligned}
&g_p\big(a, va+b, vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)\big)\\
&= \begin{cases}
(a-1)b + a\big(v(r-1)-1\big) + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)} + p\big(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)\big)\\
\qquad\qquad \textit{if } a < J_k(v) \textit{ or } (va+b)r > va\big(J_k(v)-J_{k-1}(v)\big);\\
(a-r-1)b + va(J_k(v)-J_{k-1}(v)-1) - a + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)}\\
+p\big(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)\big) \quad \textit{if } a\ge J_k(v) \textit{ and } (va+b)r < va\big(J_k(v)-J_{k-1}(v)\big)\,,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中 $r = a - \lfloor a/J_k(v)\rfloor\, J_k(v)$。

例如，若 $k=3$ 和 $v=1$，则对于 $0\le p\le\lfloor a/2\rfloor$，有

$$
\begin{aligned}
&g_p(a, a+b, aF_2+bF_3)\\
&= \begin{cases}
(a-1)b + \dfrac{a(a-3)}{2} + p(a+2b) & \text{if } a \text{ is odd;}\\
(a-1)b + \dfrac{a(a-2)}{2} + p(a+2b) & \text{if } a \text{ is even}\,.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

[1]这里原本有一个拼写错误，但已在 [25] 中更正。

3.1 $p = 0$ 的情形

对于这个三元组 $\{a, va+b, vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)\}$，我们可以采用与 [18] 中类似的框架来构造 p-Ap´ery 集中的元素。需要特别注意的是，这种框架并非总是可行。关于不同的结构，请参见 [15] 。对于大多数其他三元组，尚未分析其结构，因此也尚未找到它们的显式公式。

考虑表达式

$$t_{y,z} := y(va+b) + z\big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)\,.$$

我们看到 $q = \lfloor a/J_k(v) \rfloor$。于是，0-Ap´ery 集中的所有元素都可表示为表 1 中的形式。

$t_{0,0}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,0}$
$t_{0,1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,1}$
$\vdots$				$\vdots$
$t_{0,q-1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,q-1}$
$t_{0,q}$	$\cdots$	$t_{r-1,q}$		

表 1：$\mathrm{Ap}_0(a, va+b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v))$

由于 $t_{i+1,\ j} - t_{i,\ j} \equiv b \pmod a$ 且 $t_{0,\ j+1} - t_{J_k(v)-1,\ j} \equiv b \pmod a$，该序列

$$t_{0,0}, t_{1,0}, \ldots, t_{J_k(v)-1,0}, t_{0,1}, t_{1,1}, \ldots, t_{J_k(v)-1,1}, \ldots$$
$$t_{0,q-1}, t_{1,q-1}, \ldots, t_{J_k(v)-1,q-1}, t_{0,q}, \ldots, t_{r-1,q}$$

等价于序列 $\{\ell b \pmod a\}_{\ell=0}^{a-1}$，且保持这一顺序不变。由于 $\gcd(a,b) = 1$（否则，$\gcd(A) > 1$），表 1 中出现的所有元素构成模$a\big(= qJ_k(v) + r\big)$的完全剩余系。

显然，$\mathrm{Ap}_0(A)$ 中的最大元素，其中 $A := \{a, va+b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\}$，是 $t_{r-1,\ q}$ 或 $t_{J_k(v)-1,\ q-1}$。如果 $a < J_k(v)$，根据 $q = 0$，最大元素为 $t_{r-1,\ q} = t_{a-1,\ q}$。否则，根据 $q > 0$，比较两个值。不等式

$$t_{r-1\ q} > t_{J_k\ v\ -1\ q-1} \qquad va + b\ r > ,\ (),\ \text{成立当且仅当}\ va\big(J_k\ v\ - J_{k-1}\ v\ \big) \qquad va + b\ r > va\big(J_k\ v\ - J_{k-1}\ v\ \big)$$

( ) ( ) ( )。因此，如果 ( ) ( ) ( )，那么根据引理 1 (1)，我们有

$$\begin{aligned} g_0(A) &= t_{r-1,q} - a \\ &= (a-1)b + a\big(v(r-1) - 1\big) + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)}\,. \end{aligned}$$

如果 $(va+b)r < va\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)$，那么我们有

$$\begin{aligned} g_0(A) &= t_{J_k(v)-1,q-1} - a \\ &= (a-r-1)b + va(J_k(v) - J_{k-1}(v) - 1) - a + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)}\,. \end{aligned}$$

注意，由于最大公约数$(a,b) = 1$，$(va+b)r \neq va\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)$。

3.2 当 $p = 1$ 时的情形

从现在起，我们假设 $a \geq J_k(v)$。如果 $a < J_k(v)$，情况会变得越来越复杂，因为需要针对$p \geq 1$进行大量逐一讨论。因此，下面的讨论不适用。

$\mathrm{Ap}_1(A)$中的所有元素都可以由$\mathrm{Ap}_0(A)$中的元素确定。只有那些模 a 的余数与$\mathrm{Ap}_0(A)$顶行元素相同的元素，才会按顺序排列，以填补同一区块下方的空隙。那些模 a 的余数与$\mathrm{Ap}_0(A)$中其他元素相同的元素，则通过行移位排列到紧邻的上方区块。见表 2。

$t_{0,0}$	$t_{1,0}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,0}$	$t_{J_k(v),0}$	$t_{J_k(v)+1,0}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{2J_k(v)-1,0}$
$t_{0,1}$	$t_{1,1}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,1}$	$t_{J_k(v),1}$	$t_{J_k(v)+1,1}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{2J_k(v)-1,1}$
$t_{0,2}$	$t_{1,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,2}$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$t_{J_k(v)\,q-2}$	$t_{J_k(v)+1,q-2}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{2J_k(v)-1,q-2}$
$t_{0,q-1}$	$t_{1,q-1}$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{J_k(v)-1,q-1}$	$t_{J_k(v)\,q-1}$	$\cdots$	$t_{J_k(v)+r-1,q-1}$		
$t_{0,q}$	$\cdots$	$t_{r-1,q}$	$t_{r,q}$	$\cdots$ $t_{J_k(v)-1,q}$					
$t_{0,q+1}$	$\cdots$	$t_{r-1,q+1}$							

表 2：$\mathrm{Ap}_1(A)$ 来自 $\mathrm{Ap}_0(A)$

这一事实由同余关系支持

$$\begin{aligned} t_{y,z} &\equiv t_{y+J_k(v),z-1} \pmod a \\ &\quad (0 \leq y \leq J_k(v)-1, 0 \leq z \leq q-1; 0 \leq y \leq r-1, z = q)\,, \\ t_{y,0} &\equiv t_{y+r,q} \pmod a \quad (0 \leq y \leq J_k(v) - r - 1)\,, \\ t_{J_k(v)-\,r+y,0} &\equiv t_{y,q+1} \pmod a \quad (0 \leq y \leq r-1)\,. \end{aligned}$$

此外，$\mathrm{Ap}_1(A)$ 中的每个元素都可以用 a、$va+b$ 和 $vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)$ 表示两次，因为

$$t_{y+J_k(v),z-1} = \big(y + J_k(v)\big)(va+b) + (z-1)\big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= v\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)a + y(va+b) + z\big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)\,,\\
t_{y+r,q} &= (y+r)(va+b) + q\big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)\\
&= \big(va+b-q\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\big)a + y(va+b)\,,\\
t_{y,q+1} &= y(va+b) + (q+1)\big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)\\
&= \big(va+b-(q+1)v^2J_{k-2}(v)\big)a + \big(y + J_k(v) - r\big)(va+b)\,.
\end{aligned}
$$

注意，$(va+b-q\big(J_k(v)-J_{k-1}(v)\big) > 0$ 和 $va+b-(q+1)v^2J_{k-2}(v) > 0$，因为 $a = qJ_k(v) + r$ 和 $J_k(v) = J_{k-1}(v) + vJ_{k-2}(v)$。

取 $\mathrm{Ap}_1(A)$ 最大值的候选项有四个:

$$
t_{r-1,q+1},\quad t_{J_k(v)-1,q},\quad t_{J_k(v)+r-1,q-1},\quad t_{2J_k(v)-1,q-2}\,.
$$

然而，由于 $2vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v) > vaJ_k(v)$，我们可以看出 $t_{r-1,q+1} > t_{J_k(v)+r-1,q-1}$ 和 $t_{J_k(v)-1,q} > t_{2J_k(v)-1,q-2}$。此外，$t_{r-1,q+1} > t_{J_k(v)-1,q}$ 当且仅当 $(va+b)r > va\big(J_k(v) - J_{k-2}(v)\big)$。因此，如果 $(va+b)r > a\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)$，那么根据引理 1 (1)，我们有

$$
\begin{aligned}
g_1(A) &= t_{r-1,q+1} - a\\
&= (a-1)b + a\big(v(r-1)-1\big) + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)} + \big(vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big)\,.
\end{aligned}
$$

如果 $(va+b)r < a\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)$，那么我们有

$$
\begin{aligned}
g_1(A) &= t_{J_k(v)-1,q} - a\\
&= (a-r-1)b + va(J_k(v) - J_{k-1}(v) - 1) - a\\
&\quad + \frac{va(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)} + (vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v))\,.
\end{aligned}
$$

3.3 $p \geq 2$ 的情形

当 $p \geq 2$ 时，以类似的方式，$\mathrm{Ap}_p(A)$ 中的每个元素由 $\mathrm{Ap}_{p-1}(A)$ 中模 a 同余的对应元素确定。在每个横向长度为 $J_k(v)$ 的区块中，$\mathrm{Ap}_{p-1}(A)$ 顶行中的元素按顺序排列，以填补 $\mathrm{Ap}_p(A)$ 中最左侧区块下方的空隙。$\mathrm{Ap}_{p-1}(A)$ 中的其他元素则直接向右移动一个区块，进入 $\mathrm{Ap}_p(A)$。

在表 3 中，$_n\bigcirc$ 表示 $\mathrm{Ap}_n(A)$ 中元素的面积。这里，每个满足 $m_j^{(n)} \equiv j \pmod{a}$ $(0 \leq j \leq a-1)$ 的 $m_j^{(n)}$，至少可以用 $n+1$ 种方式表示，但至多可以用 n 种方式表示。$\mathrm{Ap}_3(A)$ 中的每个元素存在于

第二个区块至第四个区块中，对应于 Ap2(*A*) 中存在于其紧邻左侧区块、且余数相同的元素，形式为向上移动一步。第一个区块底部两行（或一行）中 Ap3(*A*) 的 $J_k(v)$ 个元素，对应于第三个区块顶部 Ap2(*A*) 中余数相同的 $J_k(v)$ 个元素。因此，由于 Ap2(*A*) 中的所有元素构成一个完全剩余系，Ap3(*A*) 也构成一个完全剩余系。可以证明，Ap3(*A*) 中的所有元素都恰好有四种表示方式，即用 a、$va+b$ 和 $vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)$ 表示。在 Ap3(*A*) 的每个区域中，两个最左侧（左下方）的元素之一 $t_{r-1,\ q+3}$ 和 $t_{J_k(v)-1,\ q+2}$ 是最大的，因此通过比较这些元素，可以确定 Ap3(*A*) 中的最大元素。

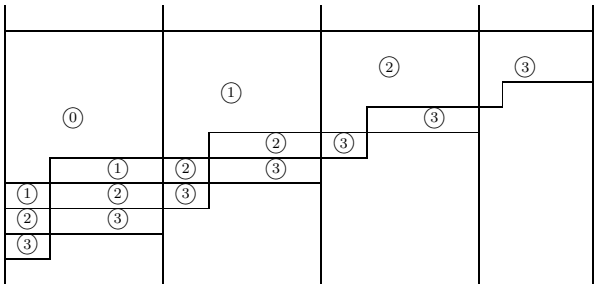

表 3：$q \geq 3$ 时的 Ap$_p$(*A*)（$p = 0, 1, 2, 3$）

只要 $p \leq \lfloor a/J_k(v) \rfloor = q$，Ap$_p$(*A*) 的这种结构就会延续下去。最终，Ap$_p$(*A*) 中的最大元素为 $t_{r-1,\ q+p}$ 或$t_{J_k(v)-1,\ q+p-1}$。然而，当 $p = \lfloor a/J_k(v) \rfloor + 1$ 时，这种规律性就会被打破。因此，即使对于 Ap$_p$(*A*) 的最大值，也无法保持规律性。由此，定理 1 得证。表4 展示了 $\lfloor a/J_k(v) \rfloor = 5$ 时的 p-Ap´ery 集（$p = 0, 1, \ldots, 5$）的排列。可以看出，6-Ap´ery 集的左下方排列会出现缺失。

有关位于所有指定区域内的元素实际上构成 p- Ap´ery 集的元素的详细说明，请参见 [18, 19] etc.。也就是说，它们构成模 a 的完全剩余系，并且每个元素至少可以用 $a, va+b, vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)$ 表示 $p+1$ 种方式。其大致结构与 [18, 19]，中的类似，不过其他情况下的 p-Ap´ery 集的结构未必相似，或者目前尚不清楚。

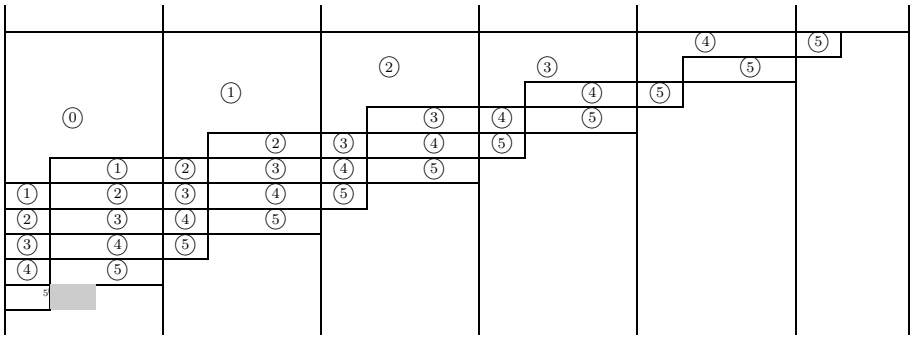

表4：$\mathrm{Ap}^p(A)$ $(p = \lfloor a/J_k(v) \rfloor)$

4 p亏格

位于 $2p$ 阶梯部分面积内的 $\mathrm{Ap}^p(A)$ 的元素为

$t_{0,q+p},\ldots,t_{r-1,q+p},\quad t_{r,q+p-1},\ldots,t_{J_k(v)-1,q+p-1},t_{J_k(v)\,q+p-2},\ldots,t_{J_k(v)+r-1,q+p-2},\quad t_{J_k(v)+r,q+p-3},\ldots,t_{2J_k(v)-1,q+p-3},t_{2J_k(v)\,q+p-4},\ldots,t_{2J_k(v)+r-1,q+p-4},\quad t_{2J_k(v)+r,q+p-5},\ldots,t_{3J_k(v)-1,q+p-5},\ldots t_{(p-1)J_k(v)\,q-p+2},\ldots,t_{(p-1)J_k(v)+r-1,q-p+2},\quad t_{(p-1)J_k(v)+r,q-p+1},\ldots,t_{pJ_k(v)-1,q-p+1}$

按从左下方开始的顺序排列，而右侧最末主面积域中的 $\mathrm{Ap}^p(A)$ 元素为

$$
\begin{aligned}
&t_{pJ_k(v),0},\ldots,t_{pJ_k(v)+r-1,0},\quad t_{pJ_k(v)+r,0},\ldots,t_{(p+1)J_k(v)-1,0},\\
&t_{pJ_k(v),1},\ldots,t_{pJ_k(v)+r-1,1},\quad t_{pJ_k(v)+r,1},\ldots,t_{(p+1)J_k(v)-1,1},\\
&\cdots\\
&t_{pJ_k(v),q-p-1},\ldots,t_{pJ_k(v)+r-1,q-p-1},\quad t_{pJ_k(v)+r,q-p-1},\ldots,t_{(p+1)J_k(v)-1,q-p-1},\\
&t_{pJ_k(v),q-p},\ldots,t_{pJ_k(v)+r-1,q-p}\,.
\end{aligned}
$$

因此，根据 $a = qJ_k(v) + r$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w\in \mathrm{Ap}_p(A)} w\\
&=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{r-1} t_{iJ_k(v)+j,q+p-2i}+\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{J_k(v)-r-1} t_{iJ_k(v)+r+j,q+p-2i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i=0}^{J_k(v)-1} \sum_{j=0}^{q-p-1} t_{pJ_k(v)+i,j} + \sum_{i=0}^{r-1} t_{pJ_k(v)+i,q-p} \\
&= \frac{a}{2}\big(-v(a-r^2) + b(a-1) + v\big((a+r)q - a + r\big)J_{k-1}(v) + v(a-r)J_k(v)\big) \\
&\quad + \frac{p}{2}aJ_k(v)\big(2(va+b) - v(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big) - \frac{p^2}{2}avJ_k(v)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

因此，根据引理 1 (2)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&n_p(a, va+b, aJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)) \\
&= \frac{1}{a} \sum_{w \in \mathrm{Ap}_p(A)} w - \frac{a-1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\big(-v(a-r^2) + b(a-1) + v\big((a+r)q - a + r\big)J_{k-1}(v) + v(a-r)J_k(v)\big) \\
&\quad + \frac{p}{2}aJ_k(v)\big(2(va+b) - v(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big) \\
&\quad - \frac{p^2}{2}avJ_k(v)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big) - \frac{a-1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(-v(a-r^2) + (a-1)(b-1) + \frac{v(a+r)(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)} \\
&\qquad + v(a-r)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\Bigg) \\
&\quad + \frac{p}{2}aJ_k(v)\big(2(va+b) - v(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big) - \frac{p^2}{2}avJ_k(v)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\,.
\end{aligned}
$$

定理2. 设 a 和 b 是互素整数。那么，对于正整数$k \geq 3$，以及 $0 \leq p \leq \lfloor a/J_k(v) \rfloor$，我们有

$$
\begin{aligned}
&n_p\big(a, a+b, aJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(-v(a-r^2) + (a-1)(b-1) + \frac{v(a+r)(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)} \\
&\qquad + v(a-r)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\Bigg) \\
&\quad + \frac{p}{2}aJ_k(v)\big(2(va+b) - v(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big) - \frac{p^2}{2}avJ_k(v)\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)\,,
\end{aligned}
$$

其中 $r = a - \lfloor a/J_k(v) \rfloor J_k(v)$。

4.1 p-西尔维斯特和

在本小节中，我们将给出西尔维斯特和的闭式公式。由$a = qJ_k(v) + r$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w\in \mathrm{Ap}_p(A)} w^2 \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{r-1}(t_{iJ_k(v)+j,q+p-2i})^2 + \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{J_k(v)-r-1}(t_{iJ_k(v)+r+j,q+p-2i-1})^2 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{J_k(v)-1}\sum_{j=0}^{q-p-1}(t_{pJ_k(v)+i,j})^2 + \sum_{i=0}^{r-1}(t_{pJ_k(v)+i,q-p})^2 \\
&= \frac{a}{6}\Big((va+b)^2 + (va+b)(2vr^2-3ab-3vr^2) + 2ab(ab+3vr^2) \\
&\qquad + v^2a\big(2q^2(a+2r) - (a-r)(3q-1)\big)J_{k-1}(v)^2 \\
&\qquad - 3v(a-r)(va+b-b(a-r)\big)J_k(v) + v(a-r)(2va+b)J_k(v)^2 \\
&\qquad + v\big(3(a-r)((a-r)(va-b)+va+b) + q(a+r)(4ab-3(va+b)) \\
&\qquad + 2qr^2(3va-b) - (a-r)(3va+b)J_k(v)\big)J_{k-1}(v)\Big) \\
&\quad + \frac{ap}{6}\Big(6\big((va+b)(ab+vr^2) - (va+b)^2 - b^2\big)J_k(v) \\
&\qquad + 3v\big((va+b)(2r+1) + 2va^2\big)J_k(v)^2 - v(2va-b)J_k(v)^3 \\
&\qquad + v\big(6(a^2-r^2)(av+b) + 3((va+b)(2r-1) - 4va^2)J_k(v) \\
&\qquad + (5va-b)J_k(v)^2\big)J_{k-1}(v) + 3v^2a\big(2a - J_k(v)\big)J_{k-1}(v)^2\Big) \\
&\quad + \frac{ap^2}{2}\Big(\big(v(va+b)(2a+1) + 2b^2 - v(2va+b)J_k(v)\big)J_k(v)^2 \\
&\qquad - v\big(2a(va-b) + av + b\big)J_{k-1}(v)J_k(v) + v^2aJ_{k-1}(v)^2(2a - J_k(v)^2)\Big) \\
&\quad - \frac{2av(va+b)p^3}{3}\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)(J_k(v))^2 .
\end{aligned}
$$

因此，由引理 1 (3) 以及式 (4) 中的 $\sum_{w\in \mathrm{Ap}^p(A)} w$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&s_p\big(a, va+b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\big) \\
&= \frac{1}{2a}\sum_{w\in \mathrm{Ap}_p(A)} w^2 - \frac{1}{2}\sum_{w\in \mathrm{Ap}_p(A)} w + \frac{a^2-1}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}\Bigg((a-r)v(2av+b)J_k(v)^2 - (a-r)v\big(3(va+b-b(a-r)+a) \\
&\quad + (3va+b)J_{k-1}(v)\big)J_k(v) + v^2a(a-r)J_{k-1}(v)^2 \\
&\quad + 3(a-r)v\big(va+b+(a-r)(va-b)+a\big)J_{k-1}(v) \\
&\quad + 3\big(vr^2(va+b) + var^2(2b-1) - va^2(b-1) - ab(a+b-1)\big) \\
&\quad + (va+b)^2 + (a^2-1) + 2\big(vr^3(va-b) + a^2b^2\big) \\
&\quad + \frac{2v^2a(a-r)(a^2+ar-2r^2)J_{k-1}(v)^2}{J_k(v)^2} - \frac{3v^2a(a-r)^2J_{k-1}(v)^2}{J_k(v)} \\
&\quad + \frac{v(a-r)J_{k-1}(v)}{J_k(v)}\big(4ab(2a+3r) + 2r^2(3v-b) \\
&\qquad - 3(a^2+r(v+b+1)) - 3a(va+b)\big)\Bigg) \\
&\quad + \frac{p}{12}\Bigg(-v(2va-b)J_k(v)^3 + 3v\big(-(2r-1)(va+b) + a(2va+1)\big)J_k(v)^2 \\
&\quad + 6(va+b)\big(vr^2 - (va+b) + a(b-1)\big)J_k(v) \\
&\quad + v(5va-b)J_{k-1}(v)J_k(v)^2 \\
&\quad + 3v\big(-(2r-1)(va+b) + a(4va+1)\big)J_{k-1}(v)J_k(v) \\
&\quad + 6v(a^2-r^2)(va+b)J_{k-1}(v) + 3v^2a\big(2a - J_k(v)\big)J_{k-1}(v)^2\Bigg) \\
&\quad + \frac{p^2}{4}\Bigg(v\big(a(2va-2b+1) + va + b - (3va+b)J_k(v)\big)J_{k-1}(v)J_k(v) \\
&\quad + \big(v(2a+1)(va+b) + va + 2b^2 - v(2va+b)J_k(v)\big)J_k(v)^2 \\
&\quad + v^2aJ_{k-1}(v)^2J_k(v)^2\Bigg) \\
&\quad - \frac{v(va+b)p^3}{3}\big(J_k(v) - J_{k-1}(v)\big)J_k(v)^2\,.
\end{aligned}
$$

这里，同样有 $q = \lfloor a/J_k(v) \rfloor$ 和 $r = a - qJ_k(v)$。

5 雅各布斯塔尔-卢卡斯多项式

与雅各布斯塔尔多项式相同的讨论也可直接应用于雅各布斯塔尔-卢卡斯多项式 $j_n(v)$。这里，$j_n(v) = j_{n-1}(v) + j_{n-2}(v)$ $(n \geq 2)$，其中 $j_0(v) = 2$ 且 $j_1(v) = 1$（例如，参见 [22, 第 44] 章）。当 $v = 1$ 时，$L_n = j_n(1)$ 是卢卡斯数。当 $v = 2$ 时，$j_n = j_n(2)$ 是雅各布斯塔尔-卢卡斯数。类似地，通过 $a = qj_k(v) + r$ 确定整数 q 和 r，其中

$0 \le r < j_k(v)$。若 $a = j_i(v)$ 且 $b = j_{i+1}(v)$，则 [18] 中的数值半群$\langle j_i(v)\ j_{i+2}(v)\ j_{i+k}(v)\rangle$ 可作为特例化简。

定理3. 设 a 和 b 为正整数，且 $\gcd(a,b) = 1$ 和 $a \ge 3$。那么，对于正整数 $k \ge 3$，以及 $0 \le p \le \lfloor a/j_k(v) \rfloor$，我们有

$$
\begin{aligned}
&g_p\big(a, va+b, vaj_{k-1}(v) + bj_k(v)\big) \\
&= \begin{cases}
(a-1)b + a\big(v(r-1)-1\big) + \frac{va(a-r)j_{k-1}(v)}{j_k(v)} + p\big(vaj_{k-1}(v) + bj_k(v)\big) \\
\qquad\qquad \text{if } a < j_k(v) \text{ or } (va+b)r > va\big(j_k(v) - j_{k-1}(v)\big); \\
(a-r-1)b + va(j_k(v) - j_{k-1}(v) - 1) - a + \frac{va(a-r)j_{k-1}(v)}{j_k(v)} \\
+p\big(vaj_{k-1}(v) + bj_k(v)\big) \\
\qquad\qquad \text{if } a \ge j_k(v) \text{ and } (va+b)r < va\big(j_k(v) - j_{k-1}(v)\big)\,,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中 $r = a - \lfloor a/j_k(v) \rfloor\, j_k(v)$。

定理4. 设 a 和 b 为互素整数。那么，对于正整数$k \ge 3$，以及 $0 \le p \le \lfloor a/j_k(v) \rfloor$，我们有

$$
\begin{aligned}
&n_p\big(a, a+b, aj_{k-1}(v) + bj_k(v)\big) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(-v(a-r^2) + (a-1)(b-1) + \frac{v(a+r)(a-r)j_{k-1}(v)}{j_k(v)} \\
&\qquad + v(a-r)\big(j_k(v) - j_{k-1}(v)\big)\bigg) \\
&\quad + \frac{p}{2}aj_k(v)\big(2(va+b) - v(j_k(v) - j_{k-1}(v)\big) - \frac{p^2}{2}avj_k(v)\big(j_k(v) - j_{k-1}(v)\big)\,,
\end{aligned}
$$

其中 $r = a - \lfloor a/j_k(v) \rfloor\, j_k(v)$。

6 p-希尔伯特级数

由于 p-Ap´ery 集，存在一些应用。其中之一涉及 $S_p(A)$ 的 p-希尔伯特级数（[17]），其定义为

$$H_p(A;x) := H(S_p;x) = \sum_{s \in S_p(A)} x^s\,.$$

当 $p = 0$ 时，0-希尔伯特级数就是原始希尔伯特级数，它在数值半群中发挥着重要作用（例如参见 [2]）。此外，p-空隙生成函数定义为

$$\Psi_p(A;x) = \sum_{s \in \mathbb{N}_0 \setminus S_p(A)} x^s\,,$$

满足 $H_p(A;x) + \Psi_p(A;x) = 1/(1-x)$ $(|x|<1)$。此外，按照 [2]，第 5 章中相同的论证，我们可以将 p-希尔伯特级数表示为

$$H_p(A;x) = \frac{1}{1-x^a} \sum_{w \in \mathrm{Ap}_p(A;a)} x^w , \tag{5}$$

其中 $a = \min\{A\}$。

当 $A = \{a, va+b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v)\}$ 时，与（4）类似，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{w \in \mathrm{Ap}_p(A)} x^w \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{r-1} x^{t_{iJ_k(v)+j, q+p-2i}} + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{J_k(v)-r-1} x^{t_{iJ_k(v)+r+j, q+p-2i-1}} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{J_k(v)-1} \sum_{j=0}^{q-p-1} x^{t_{pJ_k(v)+i,j}} + \sum_{i=0}^{r-1} x^{t_{pJ_k(v)+i, q-p}} \\
&= \frac{(1-x^{r(va+b)})(x^{2p(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{p(va+b)J_k(v)})}{x^{(p-q-2)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))}(1-x^{va+b})(x^{2(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{(va+b)J_k(v)})} \\
&\quad + \frac{(x^{r(va+b)} - x^{(va+b)J_k(v)})(x^{2p(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{p(va+b)J_k(v)})}{x^{(p-q-1)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))}(1-x^{va+b})(x^{2(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{(va+b)J_k(v)})} \\
&\quad + \frac{(x^{p(va+b)J_k(v)} - x^{(p+1)(va+b)J_k(v)})(1-x^{(q-p)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))})}{(1-x^{va+b})(1-x^{vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)})} \\
&\quad + \frac{x^{pva(J_k(v)-J_{k-1}(v))+q(vaJ_{k-1}+bJ_k(v))}(1-x^{r(va+b)})}{1-x^{va+b}} .
\end{aligned}$$

因此，由式（5）

$$\begin{aligned}
&H_p\big(a, va+b, vaJ_{k-1}(v) + bJ_k(v); x\big) \\
&= \frac{1}{1-x^a}\Bigg(\frac{(1-x^{r(va+b)})(x^{2p(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{p(va+b)J_k(v)})}{x^{(p-q-2)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))}(1-x^{va+b})(x^{2(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{(va+b)J_k(v)})} \\
&\quad + \frac{(x^{r(va+b)} - x^{(va+b)J_k(v)})(x^{2p(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{p(va+b)J_k(v)})}{x^{(p-q-1)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))}(1-x^{va+b})(x^{2(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))} - x^{(va+b)J_k(v)})} \\
&\quad + \frac{(x^{p(va+b)J_k(v)} - x^{(p+1)(va+b)J_k(v)})(1-x^{(q-p)(vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v))})}{(1-x^{va+b})(1-x^{vaJ_{k-1}(v)+bJ_k(v)})} \\
&\quad + \frac{x^{pva(J_k(v)-J_{k-1}(v))+q(vaJ_{k-1}+bJ_k(v))}(1-x^{r(va+b)})}{1-x^{va+b}} \Bigg) .
\end{aligned}$$

致谢

这篇论文的大部分内容是在第一作者于2023年2月留居德里期间完成的。他感谢第二和第三作者与他进行的讨论，并感谢他们的款待。

参考文献

[1] R. Ap´ery，《代数曲线的超线性分支》，《数学报告》巴黎科学院 222 (1946), 1198–1200.[2] A. Assi, M. D'Anna 和 P. A. Garcia-Sanchez，《数值半群及其应用》，第2版，扩充修订版，RSME Springer 系列 3. 沙姆：Springer (2020).[3] S. S. Batra, N. Kumar 和 A. Tripathi，关于一个涉及斐波那契数列和卢卡斯数列的线性丢番图问题，Integers 15 (2015), 论文编号 A26，共12页.[4] D. S. Binner，$ax + by + cz = n$ 的解的个数及其与二次剩余的关系，《J. Integer Seq.》23 (2020), 第6期，文章编号 20.6.5，共19页.[5] A. Brauer 和 B. M. Shockley，关于弗罗贝尼乌斯问题，《J. Reine. Angew. Math.》211 (1962), 215–220.[6] A. Brown, E. Dannenberg, J. Fox, J. Hanna, K. Keck, A. Moore, Z. Robbins, B. Samples 和 J. Stankewicz，关于弗罗贝尼乌斯数的一种推广，arXiv:1001.0207 (2010).[7] T. C. Brown 和 P. J. Shiue，关于弗罗贝尼乌斯问题的一点注记，Fibonacci Quart. 31 (1993), 32–36.[8] A. Cayley，关于双重划分问题，《Philos. Mag.》XX (1860), 337–341.[9] F. Curtis，关于数值半群的弗罗贝尼乌斯数公式，《Math. Scand.》67 (1990), 190–192.[10] L. G. Fel，半群 $S(d_1, d_2, d_3)$的弗罗贝尼乌斯问题，《Funct. Anal. Other Math.》1 (2006), 第2期，119–157.[11] L. Fukshansky 和 A. Schurmann，广义弗罗贝尼乌斯数的界，《Eur. J. Comb.》32 (2011), 第3期，361–368.

[12] S. M. Johnson，线性丢番图问题，《加拿大数学杂志》12 (1960), 390–398.[13] T. Komatsu，关于弗罗贝尼乌斯–一般情形丢番图方程的解的个数，《数学通讯》8 (2003), 195–206.[14] T. Komatsu，等差数列中弗罗贝尼乌斯集上的 Sylvester 幂与加权和，《离散应用数学》315 (2022), 110–126.[15] T. Komatsu，关于与解的个数相关的三角数序列的弗罗贝尼乌斯数，《组合年刊》26 (2022) 757–779.[16] T. Komatsu，关于与重复数序列表示数目相关的弗罗贝尼乌斯数，《数学报告》巴黎科学院 361 (2023), 73–89. https://doi.org/10.5802/crmath.394[17] T. Komatsu，关于 p-弗罗贝尼乌斯数及由 p-Ap ´ery 集导出的相关数，arXiv:2111.11021v3 (2023).[18] T. Komatsu 和 C. Pita-Ruiz，关于与解的个数相关的 Jacobsthal 三元组的弗罗贝尼乌斯数，《公理》12 (2023), 文章编号98，共18页. https://doi.org/10.3390/axioms12020098[19] T. Komatsu 和 H. Ying，斐波那契三元组和 Lucas 三元组的 p-弗罗贝尼乌斯数与 p-Sylvester 数，《数学、生物学与工程》20 (2023), 第2期，3455–3481. doi:10.3934/mbe.2023162[20] T. Komatsu 和 Y. Zhang，弗罗贝尼乌斯集上的加权西尔维斯特和，《爱尔兰数学学会通报》87 (2021), 21–29.[21] T. Komatsu 和 Y. Zhang，更多变量情形下弗罗贝尼乌斯集上的加权西尔维斯特和，Kyushu J. Math. 76 (2022), 163–175.[22] Koshy, T.《斐波那契数与卢卡斯数及其应用》；纯数学与应用数学（霍博肯）；John Wiley & Sons, Inc.：霍博肯，美国新泽西州，2019；第2卷.[23]G. L. Matthews，广义斐波那契数值半群的弗罗贝尼乌斯数，载于 Landman, Bruce（编）等，《组合数论》。第3届“2007年 Integers 会议”论文集，美国佐治亚州卡罗尔顿，2007年10月24–27日。柏林：Walter de Gruyter (ISBN 978-3-11-020221-2/hbk), Integers 9 Suppl., 文章编号 A9, 117–124 (2009)。

[24] J. M. Marin、J. L. Ramirez Alfonsin 和 M. P. Revuelta，关于斐波那契数值半群的 Frobenius 数，Integers 7（2007年），A14，共 7 页。[25] P. Punyani 和 A. Tripathi，关于 Frobenius 数与 Sylvester 数的变化，Integers 18B（2018年），论文编号 A8，共 12 页。[26] J. L. Ramirez Alfonsin，《丢番图 Frobenius 问题》，牛津数学及其应用讲义系列，第 30 卷。牛津大学出版社，牛津，2005 年。[27] J. C. Rosales 和 P. A. Garcia-Sanchez，《有限生成交换幺半群》，Nova Science 出版社，Inc.，纽约州 Commack，1999 年。[28] J. C. Rosales 和 P. A. Garcia-Sanchez，《数值半群》，数学进展丛书，第 20 卷。Springer，纽约，2009 年。[29] A. M. Robles-P´erez 和 J. C. Rosales，关于三角数与四面体数序列的 Frobenius 数，J. Number Theory 186（2018年），473–492。[30] Ø. J. Rødseth，关于 Brown 和 Shiue 讨论 Frobenius 问题相关评论的论文的一则注记，Fibonacci Quart. 32（1994），407–408。[31] J. C. Rosales 和 P. A. Garcia-Sanchez，《嵌入维数三的数值半群》，Arch. Math.（Basel）83（2004年），第 6 期，488–496。[32] J. C. Rosales、M. B. Branco 和 D. Torr˜ao，Thabit 数值半群的 Frobenius 问题，J. Number Theory 155（2015年），85–99。[33] J. C. Rosales、M. B. Branco 和 D. Torr˜ao，Mersenne 数值半群的 Frobenius 问题，Math. Z. 286（2017年），741–749。[34] E. S. Selmer，关于 Frobenius 线性丢番图问题，J. Reine Angew. Math. 293/294（1977年），1–17。[35] J. J. Sylvester，关于数的分拆，Quart. J. Pure Appl. Math. 1（1857年），141–152。[36] J.J.Sylvester，关于子不变量，即任意阶二元量子式的半不变量，Am. J. Math. 5（1882年），119–136。[37] J.J.Sylvester，数学问题及其解答，Educational Times 41（1884年），21。

[38] A. Tripathi，方程 $ax + by = n$ 的解的个数，Fibonacci Quart. 38（2000年），290–293。[39] A. Tripathi，关于不能表示为 $ax+by$ 形式的正整数之和，Amer. Math. Monthly 115（2008年），363–364。[40] A. Tripathi，三个变量中 Frobenius 数的公式，J. Number Theory 170（2017年），368–389。