arXiv:2304.00448v1 [math.CV] 2 Apr 2023

在 $\mathbb{C}^n$ 中的加权全纯 Besov 空间中的逼近

Ali Abkar

伊玛目霍梅尼国际大学理学院纯数学系，伊朗加兹温 34149

Email: abkar@sci.ikiu.ac.ir

摘要。我们研究多圆盘和单位球中的若干加权 Bergman 空间及加权 Besov 空间中的全纯函数。我们探讨非径向权函数的 Mergelyan 型条件，以保证给定函数的伸缩在范数意义下收敛到该函数；特别地，我们探讨非径向权函数满足何种条件，才能确保解析多项式在该空间中稠密。

关键词：Bergman 空间、解析 Besov 空间、伸缩、非径向权、角向权

MSC2020：46E15、46E20、30H25、32A36

1 引言

在研究定义于 $\mathbb{C}^n$ 的子域上的解析函数 Banach 空间时，一个重要问题是多项式是否在该空间中稠密。在复平面中，关于单连通域上 p 次幂面积可积函数空间中的多项式逼近，最早的结果由 Torsten Carleman 在其 1923 年的论文 [6]中给出。事实上，Carleman 逼近了该区域 Bergman 空间中的函数，但当时“Bergman 空间”这一说法尚未出现。随后，O.J. Farrell 将 Carleman 的结果推广到了更一般的区域（见 [7], [8]）。Farrell 证明，对每个 p 次幂面积可积函数 f，都存在一个多项式序列 p_n 使得 $p_n \to f$ 在范数意义下成立。值得注意的是，给定函数的泰勒多项式不一定能在范数意义下逼近该函数（见 [13], 和 [16]）。相反，人们试图证明伸缩 $f_r(z) = f(rz)$ 对于 $0 \le r < 1$，在范数意义下收敛到 f。不难理解，在较大区域上定义的伸缩 f_r 比函数 f 本身具有更好的性质，也更容易处理。

本文研究多复变数中的加权 Bergman 空间和加权 Besov 空间中的逼近。我们将多圆盘定义为以下子集

$$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1,\ 1 \le j \le n\}$$

n 维复空间中的，单位球表示集合

$$\mathbb{B}_n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}.$$

令 Hol($\mathbb{D}^n$) 表示定义在 $\mathbb{D}^n$ 上的全纯函数空间。对于 $0 < p < \infty$，多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上的 Bergman 空间定义为

$$A^p_\alpha(\mathbb{D}^n) = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}^n) \cap L^p(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$$

其中 $dV_\alpha(z) = dA_\alpha(z_1) \cdots dA_\alpha(z_n)$，并且

$$dA_\alpha(z_k) = (1 - |z_k|^2)^\alpha dx_k\, dy_k.$$

一般而言，α 大于 -1，但本文假设 $\alpha \geq 0$。若 $\alpha = 0$，则记作$dV(z) = dA(z_1) \cdots dA(z_n)$。

设 w 是定义在 $\mathbb{D}^n$上的正函数。对于 $0 < p < \infty$，加权 Bergman 空间 $A^p_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$由多圆盘上的全纯函数 f 组成，且这些函数满足积分

$$\|f\|^p_{A^p_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)} = \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^p w(z) dV_\alpha(z)$$

有限。类似地，令 Hol($\mathbb{B}_n$)表示单位球上全纯函数构成的空间。单位球上的 Bergman 空间定义为

$$A^p(\mathbb{B}_n) = \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n) \cap L^p(\mathbb{B}_n, dv)$$

其中 dv 是 $\mathbb{B}_n$上的归一化体积测度。事实上，加权 Bergman 空间$A^p_w(\mathbb{B}_n, dv)$由单位球内满足以下条件的全纯函数 f 组成：

$$\|f\|^p_{A^p_w(\mathbb{B}_n, dv)} = \int_{\mathbb{B}_n} |f(z)|^p w(z) dv(z) < \infty.$$

设 $0 < r < 1$和 $z = (z_1, ..., z_n)$。我们用 $rz = (rz_1, ..., rz_n)$表示，并且

$$\frac{z}{r} = \left(\frac{z_1}{r}, ..., \frac{z_n}{r}\right).$$

本文旨在探讨权函数 w （定义在 $\mathbb{D}^n$ 或 $\mathbb{B}_n$ 上）需满足哪些条件，才能保证伸缩 f_r 在范数意义下收敛到 f 。众所周知，当权函数为径向权时，这一问题已得到充分研究；而考虑非径向权时，困难便随之产生。由于 f_r 在更大的区域上全纯，它们可以用多项式逼近，因此 f 也可以用多项式逼近（前提是加权空间包含多项式）。我们将考虑满足以下 Mergelyan 型条件的权函数：存在一个非负整数 k 和一个 $r_0 \in (0,1)$，使得

$$r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \leq C w(z), \quad r_0 \leq r < 1,\ |z| < r. \tag{1}$$

这个关于权函数的条件具有普适性；它并不依赖于底层区域。在下一节中，我们将给出满足这一条件的非径向权的例子。我们将分别针对 Bergman 空间和 Besov空间证明一些逼近定理。需要指出的是，多个变量的全纯函数的 Besov空间定义略显棘手；我们将为这些空间介绍两种不同的定义；第 §3 节中出现的第一种定义取自 [17]。第二种基于径向导数概念的定义将在第 §4 节中讨论。据我们所知，后一种定义是全新的，我们无法在文献中追溯到它的出处。最后，在第 5 节中，我们引入多圆盘上的角权这一概念。这些权函数仅依赖于 z_1、...、 z_n 的幅角。对于角权，也可以建立类似的逼近结果。据我们所知

，角权的定义在某种程度上是新的，文献中尚未对此进行讨论。

多项式逼近在函数空间的算子理论中有许多应用；参见论文 [5], [11]。尽管早期论文（如 [9], [10], ）讨论过非径向权的逼近理论，但仍有许多问题有待解决；有关这一主题的全面论述，见 [14]。最后，我们提及单变量情形中的若干结果，例如 [1], [2], [3], [4]。

2 Bergman 空间

一个经典定理指出，若单位圆盘上的权函数是径向的，即 $w(z) = w(|z|)$，则多项式在加权 Bergman 空间 $A^2_w(\mathbb{D}, dA)$ 中稠密。S. Mergelyan 在假设 [12] 的条件下证明了这一点。

$$\int_0^1 rw(r)dr < \infty.$$

当然，对于 Bergman 空间 $A^p_w(\mathbb{D}, dA)$，当 $0 < p < \infty$ 时，同样的结论也成立。现在我们假设 w 是任意权函数（不一定是径向权），并且满足

$$\int_{\mathbb{D}} w(z)dA(z) < \infty.$$

我们将看到，在 w 满足某个温和条件时，多项式在加权 Bergman 空间 $A^p(\mathbb{D}, d\mu_\alpha)$ 中稠密。我们先给出以下定理。

定理 2.1 设 $0 < p < \infty$ and $d\mu_\alpha(z) = w(z)dV_\alpha(z)$ 是多圆盘上的有限正测度，且 w 满足条件 (1)。则多项式在加权 Bergman 空间 $A^p(\mathbb{D}^n, d\mu_\alpha)$ 中稠密。

证明. 设 $f \in A^p(\mathbb{D}^n, d\mu_\alpha)$，并考虑膨胀 $f_r(z) = f(rz)$，其中 $0 \le r < 1$，且$z \in \mathbb{D}^n$。通过变量替换可知，对于非负的 α，当 r 足够大时（$r \ge r_0$，见上文条件 (1)），有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^n} |f_r(z)|^p d\mu_\alpha(z) &= \frac{1}{r^{2n+k}} \int_{r\mathbb{D}\times\cdots\times r\mathbb{D}} |f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right) \prod_{k=1}^n \left(\frac{r^2 - |z_k|^2}{r^2}\right)^\alpha dV(z) \\ &\le \frac{C}{r^{2n+k}} \int_{r\mathbb{D}\times\cdots\times r\mathbb{D}} |f(z)|^p w(z) dV(z) < \infty.\end{aligned}$$

现在我们利用控制收敛定理得出

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}^n} |f_r|^p d\mu_\alpha(z) \le \int_{\mathbb{D}^n} |f|^p d\mu_\alpha(z).$$

该不等式结合 Fatou引理可推出，对于每个可测子集 $E \subseteq \mathbb{D}^n$,

$$\lim_{r\to 1^-} \int_E |f_r|^p d\mu_\alpha(z) = \int_E |f|^p d\mu_\alpha(z). \tag{2}$$

由积分在其定义域上的连续性性质，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f|^p d\mu_\alpha(z) < \epsilon.$$

由叶戈罗夫定理可知，存在一个子集 $E \subset \mathbb{D}^n$，使得 $\mu_\alpha(\mathbb{D}^n \setminus E) < \delta$ 和$f_r \to f$ 在 E上一致。现在我们写作

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^n} |f_r - f|^p d\mu_\alpha &= \int_E |f_r - f|^p d\mu_\alpha + \int_{\mathbb{D}\setminus E} |f_r - f|^p d\mu_\alpha \\ &\le \int_E |f_r - f|^p d\mu_\alpha + 2^p \int_{\mathbb{D}^n\setminus E} (|f_r|^p + |f|^p) d\mu_\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

由于 f_r 在 E上到 f 的一致收敛，右端的第一个积分 (3) 当 $r \to 1^-$时趋于零。对于第二个积分，我们利用 (2) 得到

$$\begin{aligned}0 \le \liminf_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}^n} |f_r - f|^p d\mu_\alpha(z) &\le \limsup_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}^n} |f_r - f|^p d\mu_\alpha(z) \\ &\le 2^{p+1} \int_{\mathbb{D}^n\setminus E} |f|^p d\mu_\alpha \\ &\le 2^{p+1}\epsilon,\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}^n} |f_r - f|^p d\mu_\alpha(z) = 0. \tag{4}$$

给定 $\epsilon > 0$，存在 $0 < r_0 < 1$，使得$\|f - f_{r_0}\|_{A^p(\mathbb{D}^n,\, d\mu_\alpha)} < \epsilon$。由于 f_{r_0} 在比单位多圆盘更大的区域内解析，我们可以利用梅尔格扬定理，用多项式 Q在 $\mathbb{D}^n$ 上一致逼近 f_{r_0}。由于 μ_α 是有限正测度，我们得到

$$\begin{aligned}\|f_{r_0} - Q\|^p_{A^p(\mathbb{D}^n, d\mu_\alpha)} &= \int_{\mathbb{D}^n} |f_{r_0} - Q|^p d\mu_\alpha \\ &\le \epsilon^p \int_{\mathbb{D}^n} d\mu_\alpha(z) := \epsilon^p C,\end{aligned}$$

由此可得

$$\|f - Q\|_{A^p(\mathbb{D}^n, d\mu_\alpha)} \le \epsilon(1 + C^{1/p}).$$

这就证明了该定理。 □

备注 2.2 条件 (1) 可按以下方式弱化：存在一个非负函数 g，使得对于充分大的 r，有 $r^k w(z/r) \le g(z)$，并且

$$\int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^p g(z) dV_\alpha(z) < \infty.$$

再次利用控制收敛定理得到

$$\limsup_{r\to 1^-} \int_E |f_r|^p d\mu_\alpha(z) \le \int_E |f|^p d\mu_\alpha(z).$$

定理 2.3 设 $0 < p < \infty$ 和 $d\mu_\alpha(z) = w(z)dV_\alpha(z)$ 是多圆盘上的有限正测度，使得对于某个非负整数 k，函数

$$r \mapsto r^k w\left(\frac{z}{r}\right), \quad |z| < r,$$

在 r 中递增。因此，多项式在 $A^p(\mathbb{D}^n, wdV_\alpha)$ 中稠密。

证明。只需证明每个函数 $f \in A^p(\mathbb{D}^n, d\mu_\alpha)$ 满足

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}^n}|f_r|^p d\mu_\alpha(z) \le \int_{\mathbb{D}^n}|f|^p d\mu_\alpha(z).$$

为此，我们进行变量替换，得到

$$\int_{\mathbb{D}^n}|f_r(z)|^p d\mu_\alpha(z) = \frac{1}{r^{2n+k}}\int_{r\mathbb{D}\times\cdots\times r\mathbb{D}}|f(z)|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right)\prod_{j=1}^n\left(\frac{r^2-|z_j|^2}{r^2}\right)^\alpha dV(z).$$

注意，函数

$$r\mapsto r^k w\left(\frac{z}{r}\right),\quad r\mapsto\left(\frac{r^2-|z_j|^2}{r^2}\right)^\alpha$$

关于 r 递增（根据该假设以及 α 非负这一事实），因此可以应用单调收敛定理，得到

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}^n}|f_r(z)|^p d\mu_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}^n}|f(z)|^p d\mu_\alpha(z).$$

现在，我们采用与定理 2.1 的证明类似的论证，即可得到结果。 □

例 2.4 (a)。令 $\alpha > -1$ 和 $w(z) = \prod_{k=1}^n(\alpha+1)(1-|z_k|^2)^\alpha$。

$$r^k w\left(\frac{z}{r}\right) = \prod_{k=1}^n(\alpha+1)r^{k-2\alpha}(r^2-|z_k|^2)^\alpha \le w(z),$$

只要 $k \ge 2\alpha+1$。现在可以应用定理 2.1。
(b). 不难看出，高斯权

$$w(z) = e^{-\beta|z|^2} = e^{-\beta(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)},\quad \beta>0,$$

满足上述定理关于 $k=0$ 的条件，因为对于 $0<r<r$,

$$\begin{aligned} w\left(\frac{z}{r}\right) &= e^{\frac{-\beta}{r^2}(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)}\\ &\le e^{-\beta(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)}\\ &= w(z).\end{aligned}$$

非径向权也满足同样的条件

$$w(z) = e^{-\beta(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)},\quad \beta>0,$$

其中 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ $z_k = x_k+iy_k$, $1\le k\le n$。
请注意，在某些情况下，函数 $r\mapsto w(z/r)$ 并非递增，但我们可以找到某个 k，使得当 r 大于 $|z|$ 时， $r\mapsto r^k w(z/r)$ 递增。例如，若取 $w(z)=\exp(|z|)$，则

$$\frac{d}{dr}w\left(\frac{z}{r}\right) = -\frac{|z|}{r^2}\exp\left(\frac{|z|}{r}\right) < 0$$

而

$$\frac{d}{dr}\left[rw(\frac{z}{r})\right] = \left(1-\frac{|z|}{r}\right)\exp\left(\frac{|z|}{r}\right) > 0,\quad |z|<r.$$

另请注意，由于 $r>1/2$， $r^2e^{|z|/r}$ 是递增的

$$\frac{d}{dr}(r^2e^{|z|/r}) = 2re^{|z|/r} + r^2(\frac{-1}{r^2}e^{|z|/r}) = (2r-1)e^{|z|/r} > 0.$$

3 Besov空间

在单位圆盘中，加权Dirichlet空间 $\mathcal{D}_w^p$, $1 < p < \infty$由满足以下条件的单位圆盘内解析函数组成:

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w^p} = \left(|f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p w(z) dA(z)\right)^{1/p}$$

有限。这些空间是某些解析函数 Banach 空间的特例，即加权解析 Besov 空间。加权解析 Besov空间 $\mathcal{B}_w^p$ 由单位圆盘上的解析函数 f 组成，且这些函数满足积分

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |f'(z)|^p w(z) dA(z)$$

有限。加权 Besov 空间中函数的范数定义为

$$\|f\|_{\mathcal{B}_w^p} = \left(|f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |f'(z)|^p w(z) dA(z)\right)^{1/p}.$$

在高维中，Besov空间的定义更为微妙。设 $dv(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的单位球 $\mathbb{B}_n$ 上的归一化体积测度，并令

$$d\tau(z) = \frac{dv(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}$$

为 $\mathbb{B}_n$ 中的 M¨obius 不变测度。对于 $0 < p < \infty$，Besov空间 $\mathcal{B}^p$ 由所有满足以下条件的全纯函数 $f \in \mathbb{B}_n$ 组成:

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z) \in L^p(\mathbb{B}_n, d\tau), \quad |m| = N,$$

其中， N 是满足 $pN > n$ 的任意固定正整数。根据 [17, 定理 6.1], ， $\mathcal{B}^p$ 的定义与 N 的选择无关。“范数”定义为

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p}^p = \sum_{|m|\le N-1} \left|\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(0)\right|^p + \sum_{|m|=N} \int_{\mathbb{B}_n} \left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^p d\tau(z).$$

当 $p = 2$, $\mathcal{B}^2$ 起到 Dirichlet 空间的作用时，记为 $\mathcal{D}^2$。

定理 3.1 设 $d\mu(z) = w(z)d\tau(z)$ 是单位球上的有限正测度，且 w满足条件 (1)。那么，多项式在 $\mathcal{D}_w^2(\mathbb{B}_n, d\mu)$ 中稠密。

证明。对于逼近，只需处理以下范数表达式（常数项对逼近不起任何作用）:

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w^2}^2 = \sum_{|m|=N} \int_{\mathbb{B}_n} \left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z) d\tau(z).$$

注意,

$$\|f_r\|_{\mathcal{D}_w^2}^2 = \sum_{|m|=N} \int_{\mathbb{B}_n} \left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f_r}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z) d\tau(z).$$

现在我们将 z 替换为 z/r，得到

$$\begin{aligned}\|f_r\|^2_{\mathcal{D}^2_w} &= \sum_{|m|=N}\frac{1}{r^k}\int_{r\mathbb{B}_n}\left|\Big(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\Big)^N r^{|m|}\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 r^k w\left(\frac{z}{r}\right)\frac{r^2}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}dv(z)\\ &\le C\frac{r^{2+2|m|}}{r^{k+4N}}\sum_{|m|=N}\int_{r\mathbb{B}_n}\left|\big(1-|z|^2\big)^N\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z)\frac{dv(z)}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}\\ &= C\frac{r^{2+2|m|}}{r^{k+4N}}\sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\chi(r\mathbb{B}_n)(z)\left|\big(1-|z|^2\big)^N\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z)\frac{dv(z)}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}\\ &\le C\frac{r^{2+2|m|}}{r^{k+4N}}\sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\left|\big(1-|z|^2\big)^N\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z)\frac{dv(z)}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

由于函数

$$r\mapsto\frac{1}{(r^2-|z|^2)^{n+1}},\quad |z|<r,$$

关于 r 单调递减，因此最后一个积分在 $r\to 1^-$ 处收敛，从而可以对第一个积分应用控制收敛定理的一个版本：

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to1^-}\|f_r\|^2_{\mathcal{D}^2_w} &= \limsup_{r\to1^-}\sum_{|m|=N}\frac{1}{r^k}\int_{r\mathbb{B}_n}\left|\Big(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\Big)^N r^{|m|}\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 r^k w\left(\frac{z}{r}\right)\frac{r^2}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}dv(z)\\ &= \sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\left|(1-|z|^2)^N\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^2 w(z)\frac{dv(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}\\ &= \|f\|^2_{\mathcal{D}^2_w}.\end{aligned}$$

证明的其余部分与定理 2.1 的证明相同；我们只需分别将 f 和 f_r 替换为 $\frac{\partial^m f}{\partial z^m}$ 和 $\frac{\partial^m f_r}{\partial z^m}$，即可得到

$$\lim_{r\to1^-}\|f_r-f\|^2_{\mathcal{D}^2_w}=\lim_{r\to1^-}\sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\left|(1-|z|^2)^N\left(\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)-\frac{\partial^m f_r}{\partial z^m}(z)\right)\right|^2 w(z)d\tau(z)=0.$$

另一方面，每个伸缩 f_r 都可以用多项式逼近（参见 [17, 定理 6.2]），因此，f 可以用多项式逼近。□

现在我们对解析 Besov 空间陈述一个类似的结论。

定理 3.2 设 $d\mu(z)=w(z)d\tau(z)$ 是单位球上的有限正测度，且 w 满足条件 (1)。则多项式在 $\mathcal{B}^p_w(\mathbb{B}_n, d\mu)$ 中稠密。

证明。我们首先考察该表达式

$$\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_w}=\sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\left|(1-|z|^2)^N\frac{\partial^m f_r}{\partial z^m}(z)\right|^p w(z)d\tau(z).$$

与前一种情形类似，我们有

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{\mathcal{B}^p_w} &= \sum_{|m|=N}\frac{1}{r^k}\int_{r\mathbb{B}_n}\left|\Big(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}\Big)^N r^{|m|}\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^p r^k w\left(\frac{z}{r}\right)\frac{r^2}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}dv(z)\\ &\le C\frac{r^{2+p|m|}}{r^{k+2pN}}\sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}_n}\left|\big(1-|z|^2\big)^N\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z)\right|^p w(z)\frac{dv(z)}{(r^2-|z|^2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

同样，这一论证表明

$$\limsup_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{B}^p_w}^p \le \|f\|_{\mathcal{B}^p_w}^p,$$

由此即可得出结果。 □

4 Besov空间：另一种定义

研究多复变数中的 Besov空间的另一种方法是使用径向导数的概念。设 f 是单位球 $\mathbb{B}_n$中的全纯函数。 f 的径向导数定义为

$$Rf(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z).$$

根据 [17], ，如果

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \tag{5}$$

是{v1}的齐 次展开（每个 f_k 都是 z_1,...,z_n中的 k 次多项式），则 n

$$Rf(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k(z).$$

加权解析Besov空间 $\mathrm{B}^p_w(\mathbb{D}^n)$ 由在多圆盘邻域内的解析函数 f 组成，且满足积分

$$\int_{\mathbb{D}^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)^{p-2} \Big) |Rf(z)|^p w(z) dV(z)$$

有限。$\mathrm{B}^p_w(\mathbb{D}^n)$ 中函数的范数定义为

$$\|f\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)^{p-2} \Big) |Rf(z)|^p w(z) dV(z).$$

定理4.1 设 $2 \le p < \infty$ 和 $d\mu(z) = w(z)dV(z)$ 是多圆盘上的有限正测度，且 w 满足条件 **(1)**。则多项式在加权解析Besov空间 $\mathrm{B}^p_w(\mathbb{D}^n)$ 中稠密。

证明。正如前面所指出的，范数定义中的常数项对逼近不起作用，因此我们只需考察

$$\|f_r\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)} = \int_{\mathbb{D}^n} \Big(\prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)^{p-2} \Big) |Rf_r(z)|^p w(z) dV(z).$$

我们首先注意到，由（5）

$$f_r(z) = f(rz) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(rz),$$

可得

$$(Rf_r)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} m f_m(rz).$$

将 z 替换为 z/r，我们得到

$$\begin{aligned}
\|f_r\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)} &= \int_{\mathbb{D}^n} \Big[\prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|^2)^{p-2}\Big]|Rf_r(z)|^p w(z)dV(z) \\
&= \frac{1}{r^{k+2n}} \int_{r\mathbb{D}\times\cdots\times r\mathbb{D}} \Big[\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{r^2-|z_j|^2}{r^2}\Big)^{p-2}\Big]|Rf(z)|^p r^k w(\frac{z}{r})dV(z) \\
&\le \frac{C}{r^{k+2n}} \int_{r\mathbb{D}\times\cdots\times r\mathbb{D}} \Big[\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{r^2-|z_j|^2}{r^2}\Big)^{p-2}\Big]|Rf(z)|^p w(z)dV(z).
\end{aligned}$$

由于 $p-2\ge 0$，每个函数

$$r \mapsto \Big(\frac{r^2-|z_j|^2}{r^2}\Big)^{p-2}$$

关于 r 都是递增的，因此我们可以应用控制收敛定理的广义版本，得到

$$\lim_{r\to 1^{-1}} \|f_r\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)} = \|f\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)}.$$

后者意味着伸缩 f_r 在范数下趋于 f；

$$\|f-f_r\|^p_{\mathbf{B}^p_w(\mathbb{D}^n)} = 0,$$

由此可得所需结果。 □

5 多圆盘上的角权函数

与定义在单位圆盘上的径向权不同，我们可以考虑仅依赖于 z 的辐角的权函数；也就是说，$w(re^{i\theta}) = w(\theta)$。我们可以称这类权函数为角权。例如，给定 $\alpha > 0$,

$$w(z) = w(re^{i\theta}) = (4\pi^2-\theta^2)^\alpha, \quad 0\le\theta<2\pi,$$

它是单位圆盘上的角权。类似地，多圆盘上的正连续函数 w 若满足以下条件，便称为角向函数：$\mathbb{D}^n$

$$w(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n}) = w(\theta_1,...,\theta_n),$$

这意味着 w 仅依赖于 $z\in\mathbb{D}^n$ 各分量的辐角 .

一些记号

为简便起见，给定一个 n-元组 $\mathbf{r} = (r_1,...,r_n)$，我们记作 $d\mathbf{r} = dr_1\cdots dr_n$；对于给定的权函数 w，我们用 $w(\mathbf{r})$ 代替 $\omega(r_1,...,r_n)$。同样，$w(\theta)$ 是 $w(\theta_1,...,\theta_n)$ 的简写，而 $d\theta$ 表示 $d\theta_1\cdots d\theta_n$。$\mathbb{D}^n$ 的特殊边界记为 $\mathbb{T}^n$，且 $|m| = m_1+\cdots+m_n$，其中 $m=(m_1,...,m_n)$ 是由非负整数构成的多重指标。

命题 5.1 设 w 是多圆盘上的角权函数，满足

$$\int_{\mathbb{T}^n} w(\theta)d\theta < \infty.$$

$A^2_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$ 中每个函数的泰勒多项式都依范数收敛到同一个函数。特别地，多项式在 $A^2_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$ 中稠密。

证明. 设 $m = (m_1,...,m_n)$ 为一个多重指标，并且

$$f(z) = \sum_{|m|\geq 0} a_m z^m = \sum_{|m|\geq 0} a_{m_1,...,m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$$

是 $A^2_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$ 中的一个函数。令 I^n 表示单位区间$[0,1]$的 n 次笛卡尔积。于是，利用极坐标，我们有

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)} &= \int_{I^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|m|\geq 0} |a_m|^2 \prod_{k=1}^n \left(r_k^{2m_k}(1-r_k^2)^\alpha r_k dr_k\right) w(\theta)d\theta \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}^n} w(\theta)d\theta\Big) \sum_{|m|\geq 0} \frac{|a_m|^2\,\Gamma(m_1+1)\cdots\Gamma(m_n+1)(\Gamma(\alpha+1))^n}{2^n\Gamma(m_1+\alpha+1)\cdots\Gamma(m_n+\alpha+1)}.\end{aligned}$$

这意味着对于 $p_k(z) = \sum_{0\leq|m|\leq k} a_m z^m$，我们有

$$\|f-p_k\|^2_{A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)} = \Big(\int_{\mathbb{T}^n} w(\theta)d\theta\Big) \sum_{|m|\geq k+1} \frac{|a_m|^2\,\Gamma(m_1+1)\cdots\Gamma(m_n+1)(\Gamma(\alpha+1))^n}{2^n\Gamma(m_1+\alpha+1)\cdots\Gamma(m_n+\alpha+1)}.$$

现在令 k 趋于无穷大，从而 $p_k \to f$ 属于 $A^2_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$。 □

这一结果可以推广如下。

定理 5.2 设 w 是多圆盘上的角权函数，满足

$$\int_{\mathbb{T}^n} w(\theta)d\theta < \infty.$$

于是，多项式在 $A^p_w(\mathbb{D}^n, dV_\alpha)$ $0 < p < \infty$ 中稠密。

证明。由于 w 是角向的，我们得到 $w(z) = w(\frac{z}{r})$，因此

$$\begin{aligned}\|f_r\|^p_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)} &= \int_{\mathbb{D}^n} |f_r(z)|^p w(z) \prod_{k=1}^n (1-|z_k|^2)^\alpha dV(z) \\ &= \frac{1}{r^{2n}} \int_{r\mathbb{D}^n} |f(z)|^p w(\frac{z}{r}) \prod_{k=1}^n \left(\frac{r^2-|z_k|^2}{r^2}\right)^\alpha dV(z) \\ &= \frac{1}{r^{2n}} \int_{r\mathbb{D}^n} |f(z)|^p w(z) \prod_{k=1}^n \left(\frac{r^2-|z_k|^2}{r^2}\right)^\alpha dV(z).\end{aligned}$$

再次，我们利用 $\alpha \geq 0$ 以及函数

$$r \mapsto \Big(\frac{r^2-|z_k|^2}{r^2}\Big)^\alpha, \quad |z_k| \leq r,$$

在 r 中递增这一事实，得到

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}^n}|f_r(z)|^p w(z)dV_\alpha(z)=\int_{\mathbb{D}^n}|f(z)|^p w(z)dV_\alpha(z),$$

与定理 2.1 的证明中一样，这个等式推出

$$\|f_r-f\|_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}=0,\quad r\to 1^-,$$

由此可得结论。 □

现在考虑由径向权和角向权相乘得到的权函数。

命题 5.3 设 $w(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n})=\omega(r_1,...,r_n)\nu(\theta_1,...,\theta_n)$，其中 ω和 ν是 $\mathbb{D}^n$ 上的两个权函数，满足

$$\int_{I^n}\Big[\prod_{k=1}^n(1-r_k^2)^\alpha r_k\Big]\omega(\mathbf{r})d\mathbf{r}<\infty,\quad \int_{\mathbb{T}^n}\nu(\theta)d\theta<\infty.$$

$A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)$ 中每个函数的泰勒多项式都依范数收敛到同一个函数。因此，多项式在 $A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)$ 中稠密。

证明。经过计算可得

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}&=\int_{I^n}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{|m|\geq 0}|a_m|^2\prod_{k=1}^n\Big(r_k^{2m_k}(1-r_k^2)^\alpha r_k dr_k\Big)\omega(\mathbf{r})\nu(\theta)d\mathbf{r}d\theta\\&=\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\nu(\theta)d\theta\Big)\sum_{|m|\geq 0}|a_m|^2\int_{I^n}\Big[\prod_{k=1}^n r_k^{2m_k}(1-r_k^2)^\alpha r_k\Big]\omega(\mathbf{r})d\mathbf{r}\\&=\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\nu(\theta)d\theta\Big)\sum_{|m|\geq 0}|a_m|^2\gamma_m,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_m&=\int_{I^n}\Big[\prod_{k=1}^n r_k^{2m_k}(1-r_k^2)^\alpha r_k\Big]\omega(\mathbf{r})d\mathbf{r}\\&\leq\int_{I^n}\Big[\prod_{k=1}^n(1-r_k^2)^\alpha r_k\Big]\omega(\mathbf{r})d\mathbf{r}<\infty.\end{aligned}$$

现在，对于 $p_k(z)=\sum_{0\leq|m|\leq k}a_mz^m$，我们有

$$\|f-p_k\|^2_{A^2_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}=\Big(\int_{\mathbb{T}^n}\nu(\theta)d\theta\Big)\sum_{|m|\geq k+1}^\infty|a_m|^2\gamma_m,$$

当 $k\to\infty$ 时趋于零。 □

定理 5.4 设 $w(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n})=\omega(r_1,...,r_n)\nu(\theta_1,...,\theta_n)$，其中 ω 和 ν 是定义在 $\mathbb{D}^n$ 上的两个权函数，满足

$$\int_{I^n}\Big[\prod_{k=1}^n(1-r_k^2)^\alpha r_k\Big]\omega(\mathbf{r})d\mathbf{r}<\infty,\quad\int_{\mathbb{T}^n}\nu(\theta)d\theta<\infty,$$

并且对某个整数 $k\geq 0$，有 $s^k\omega(r/s)\leq C\omega(r)$。于是，多项式在加权 Bergman 空间 $A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)$ $0<p<\infty$ 中稠密。

证明。再次可见，对于 $z=(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n})$,

$$\begin{aligned}\|f_s\|^p_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)} &= \int_{\mathbb{D}^n} |f_s(z)|^p\omega(r)\nu(\theta)\prod_{j=1}^n(1-|z_j|^2)^\alpha dv(z)\\ &= \frac{1}{s^{2n+k}}\int_{s\mathbb{D}^n}|f(z)|^p s^k\omega(r/s)\prod_{j=1}^n\left(\frac{s^2-|z_j|^2}{s^2}\right)^\alpha\nu(\theta)dv(z)\\ &\le \frac{C}{s^{2n+k}}\int_{s\mathbb{D}^n}|f(z)|^p\omega(r)\prod_{j=1}^n\left(\frac{s^2-|z_j|^2}{s^2}\right)^\alpha\nu(\theta)dv(z).\end{aligned}$$

利用以下事实：对于固定的 $\alpha\ge 0$ 和 j ,

$$s\mapsto\left(\frac{s^2-|z_j|^2}{s^2}\right)^\alpha,\quad |z_j|\le s,$$

关于 s 是递增的，我们得到

$$\limsup_{s\to 1^-}\|f_s\|^p_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}\le\|f\|^p_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}.$$

现在我们使用定理 2.1 证明中引入的方法，得到

$$\|f_s-f\|_{A^p_w(\mathbb{D}^n,dV_\alpha)}=0,\quad s\to 1^-,$$

进而得到所需结果。 □

6 声明

伦理批准
不适用

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

作者贡献 不适用

资金支持 不适
用

数据和材料的可用性
本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] A. Abkar， 多解析函数 Bergman 空间中的平均逼近，Anal. Math. Phys.12, 52(2022)

[2] A. Abkar，加权解析 Besov 空间与广义 Fock 空间中的逼近，Complex Anal. Oper. Theory 16, 11(2022), 1–19[3] A. Abkar，解析函数空间中的非径向权与多项式逼近，Complex Variables and Elliptic Equations, doi:10.1080/17476933.2022.2112189[4] A. Abkar，上半平面 Bergman 空间中通过膨胀进行的平均逼近，Acta. Math. Sci.（即将出版）[5] G. Cao, L. He, K. Zhu，多项式逼近与复合算子，Proc. Am. Math. Soc. 149 (2021), 3715–3724.[6] T. Carleman，通过给定幂的线性组合逼近解析函数，Ark. Mat. Astr. Fys. 17 (1923), 1–30[7] O. J. Farrell，关于用多项式逼近解析函数，Bull. Am. Math. Soc. 40 (1934), 908–914[8] O. J. Farrell，关于用多项式逼近单连通区域内的解析函数，Bull. Am. Math. Soc. 41 (1935), 707–711[9] L. I. Hedberg，解析函数的平均逼近，Trans. Am. Math. Soc. 163 (1972), 157–171[10] L. I. Hedberg，Carath ´eodory 区域中的加权平均逼近，Math. Scand. 23 (1968), 113–122[11] T. Korhonen, J. R¨atty¨a，加权 Bergman 空间的零点序列、因子分解与采样测度，Mathematische Zeitschrift 291 (2019), 1145–1173[12] S. N. Mergelyan，关于解析函数系的完备性，Amer. Math. Soc. Transl. 19 (1962), 109–136 (Uspehi Mat. Nauk 8 (1953), 3–63)[13] I.Park, J. Zhao, K. Zhu，Hardy 空间与 Bergman 空间中泰勒多项式的范数逼近，Internat. J. Math. 32 (2021), No. 6, 2150037.[14] J. A. Pel ´aez, J. R¨attya，由快速增长权诱导的加权 Bergman 空间，Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 227, no. 1066, 2014[15] W. Rudin，《实分析与复分析》，第3版，McGraw-Hill International Editions, Mathematics Series, 1987[16] K. Zhu，Bloch 函数的对偶性与泰勒级数的范数收敛，Michigan Math. J. 38, (1991), 89–101[17] K. Zhu，单位球中的全纯函数空间，Graduate Texts in Mathematics, 226, Springer-Verlag, 纽约, 2005