arXiv:2304.00449v1 [math.LO] 2 Apr 2023

通过强迫保留 AD

DAISUKE IKEGAMI 和 NAM TRANG

ABSTRACT. 我们证明，假设 ZF + 决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$”，那么任何会增加$\Theta$ 的偏序集都不能保留决定公理为真的性质。我们还证明，在 ZF +决定公理下， $\mathbb{R}$ 上的任何非平凡偏序集都不能保留决定公理为真的性质。这回答了 Chan 和 Jackson 的问题 [2,问题 5.7]。此外，我们证明，在假设 ZF+ 决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$”+“$\Theta$是正则的”时，存在一个 Θ 上的偏序集，它能添加 Θ 的一个新子集，同时保留决定公理为真的性质。这回答了 Cunningham 的问题 [3, 第 5]节。

1. INTRODUCTION

本文讨论强迫与决定性公理（AD）之间的关系，尤其关注什么类型的强迫能够保留 AD 为真的性质这一问题。

Cohen 引入力迫，以证明连续统假设相对于带有选择公理的策梅洛-弗兰克尔集合论（ZFC）的独立性。他还利用力迫证明了选择公理相对于策梅洛-弗兰克尔集合论（ZF）的独立性。此后，力迫一直是构造集合论模型的基本工具，并被用于证明集合论中某些数学命题的独立性或不可证性，以及分析各种类型的集合论模型。

Mycielski 和 Steinhaus 引入决定性公理（AD），旨在考察这样一种情形：每个实数集都具有简单集合（如博雷尔集和解析集）所具有的良好性质；勒贝格可测性和贝尔性质就是这类良好性质的例子。尽管 AD 与 ZF 中的选择公理相矛盾，但它对实数集有许多优美的推论。此外，研究表明，ZF + AD（或 ZF + AD$^+$）的模型与具有 Woodin 基数的 ZFC 模型之间存在深刻联系。AD 不仅在描述集合论中用于分析实数集的性质，也在大基数理论和内模型理论中发挥着重要作用。

我们来谈谈自己为何开始关注力迫与决定公理之间的关系，尤其是哪些力迫能够保留决定公理为真的问题。根据 Kunen 的结果，不存在非平凡的初等嵌入 {v1}: {v2}，使得 ({v3}<style id='4'>，</style>{v6}<style id='7'>，</style>{v9}) 是 ZFC 的模型。

2020年 数学主题分类。 03E60,03E40,03E15。关键词与短语。 决定性公理、力迫、描述集合论。作者谨向 W. Hugh Woodin 致谢，感谢他慷慨分享其关于本文主题的研究成果与见解。他们也感谢 William Chan 和 Steve Jackson 的相关工作 [2]，这些工作启发了本文第 4 节的研究。第一作者感谢日本学术振兴会（JSPS）通过 JSPS KAKENHI 项目（项目编号 19K03604）给予慷慨支持。他也感谢住友基金会通过基础科学研究资助项目给予慷慨支持。第二作者感谢美国国家科学基金会（NSF）通过 CAREER 资助项目 DMS-1945592 给予慷慨支持。

此外，Hamkins、Kirmayer 和 Perlmutter 证明，对于 V 上的任意集合泛型 G，不存在非平凡的初等嵌入 $j\colon V \to V[G]$，使得 $(V[G], \in, j)$ 是 ZFC 的模型。

于是可以提出这样的问题：如果结构 $(V, \in, j)$ 或 $(V[G], \in, j)$ 是 ZF 集合论或 ZF + 决定公理的模型，而不是 ZFC，会怎样？利用对称模型的方法，Woodin 证明存在一个在 V 上的集合泛型 G，以及一个非平凡的初等嵌入 $j\colon V \to V[G]$，使得 $(V[G], \in, j)$ 是 ZF + 决定公理的模型。然而，在他的例子中，$j \restriction \mathrm{Ord}$ 是恒等映射，因此 j 没有临界点。

据我们所知，是否存在一个在 V 上的集合泛型 G 和一个初等嵌入 $j\colon V \to V[G]$，使得 $(V[G], \in, j)$ 是 ZF + 决定公理的模型，且 $j \restriction \mathrm{Ord}$ 不是恒等映射，这个问题仍未解决。我们尤其关注这样的情形：j 的临界点是 V 中的 ω_1，因为如果 j 的临界点是 V 中的 ω_1，那么为得到 $V[G]$ 而进行的力迫必须向 V 添加新的实数，而决定公理会影响实数和实数集。要得到这样的 j，需要一个偏序集 $\mathbb{P}$ 来构造这样的模型 $V[G]$，并且偏序集 $\mathbb{P}$ 必须在保持从 V 到 $V[G]$ 的决定公理真值的同时添加新的实数。因此，我们提出了一个检验性问题：是否存在一种偏序集，能够在保持决定公理真值的同时添加一个新的实数？这就是我们开始关注力迫与决定公理之间关系的原因。

我们仍然不知道是否存在某个偏序集，能够添加一个新的实数，同时保持决定公理（AD）的真值不变。考虑这个问题时，我们注意到，许多添加新实数的力迫并不能保持决定公理的真值。一个典型的例子是 Cohen 力迫。众所周知，如果 G 是 V-Cohen 力迫泛型的，那么在 $V[G]$ 中，V 中的实数集不具有贝尔性质。特别地，AD 必须在 $V[G]$ 中失效。另一方面，也存在一些能够添加新集合、同时保持 AD 真值不变的偏序集。根据 Woodin [6, 第 3], 节的结果，如果我们假设 ZF + AD + "$V = \mathrm{L}(\mathbb{R})$"，并令 κ 为一个充分大的基数，令 $\mathbb{P}$ 为在 HOD（遗传序数可定义集）中添加 κ 的 Cohen 子集的偏序集，那么偏序集 $\mathbb{P}$ 会添加一个新集合，同时保持 AD 的真值不变。实际上，在这种情况下，偏序集 $\mathbb{P}$ 不会向 V 添加任何实数集。

我们一直在思考什么样的力迫能够保持决定公理（AD）为真。我们的直觉是，这样的偏序集 $\mathbb{P}$ 不应能彻底改变实数集的结构。借助序数 Θ，即所有作为 $\mathbb{R}$ 的满射像的序数的上确界，以下定理部分证实了这一直觉：

定理 3.1. 假设 ZF 集合论 $+\mathrm{AD}^+ +$ "$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$"成立。设偏序集 $\mathbb{P}$ 使 Θ 增大，即对于任意在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，都有 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$。那么，对于任意在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，$V[G]$ 中的 AD 都不成立。

不过，假设"$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$"对于定理 3.1 至关重要：

[1]这里，V 是所有集合的类；在结构 $(V, \in, j)$ 中，j 被视为定义在论域上的二元谓词的解释；而结构 $(V, \in, j)$ 满足关于 $\in$ 和 j 的二元谓词的一阶公式的概括公理和替换公理。

定理 3.2. 相对于 ZF + 决定公理$_{\mathbb{R}}$，以下命题是一致的：ZF + 决定公理成立，且存在一个偏序集 $\mathbb{P}$，它能在保持决定公理的同时 Θ 增加；也就是说，对于任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，若其基于 V，则有 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$，并且决定公理在 $V[G]$ 中成立。[2]

尤其是，存在一个偏序集，它会添加一个新的实数集（但不会添加新的实数），同时保留 AD 为真的性质。

在我们公布定理 3.1 和定理 3.2 后，Chan 和 Jackson [2] 开始研究什么类型的力迫不能保留 AD 为真。他们证明，假设 ZF + AD，若一个非平凡偏序集 $\mathbb{P}$ 是基数小于 Θ 的可良序力迫，那么 $\mathbb{P}$ 它不能保留 AD 为真（[2, 定理 3.2]）。他们还证明，假设 ZF +AD +“Θ 是正则的”，若一个非平凡偏序集 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的满射像，那么 $\mathbb{P}$ 它不能保留 AD 为真（[2, 定理 5.5]）。随后，他们提出问题：仅假设 ZF + AD（即不假设 Θ的正则性），是否就能推出：若一个非平凡偏序集 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的满射像，那么 $\mathbb{P}$ 它不能保留 AD 为真（[2, 问题 5.7]）？ 我们对这个问题给出肯定答案：

定理 4.1. 假设 ZF + 决定公理。设 $\mathbb{P}$ 是任意一个非平凡偏序集，且它是 $\mathbb{R}$ 的满射像；设 G 是 V 上的任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子。那么，决定公理在 $V[G]$中不成立。

现在我们转向关于哪些力迫能够保持决定公理成立这一问题的正面结果。正如前文所述，根据 Woodin [6, 第 3], 节的结果，若假设 ZF + 决定公理 +“$V = \mathrm{L}(\mathbb{R})$”，并设 κ 是一个足够大的基数，$\mathbb{P}$ 是在遗传序数可定义集 HOD（即遗传序数可定义集）中添加 κ 的 Cohen 子集的偏序集，那么偏序集 $\mathbb{P}$ 会添加一个新集合，同时保持决定公理成立。一个自然的问题是，为了得到这一结果，κ 可以取多小。Cunningham [3] 研究了这个问题。他证明，κ 可以取为任意大于 Θ^+ 的正则基数（[3, 第 4.1]小节）。随后，他问 κ 能否取为 Θ （[3, 第 5]节）。我们对这个问题给出了肯定回答。事实上，我们证明了如下一个更一般的定理：

定理 5.1。 假设 ZF + 决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”。设 Θ 是正则的。那么存在一个定义在 Θ 上的偏序集 $\mathbb{P}$，它会添加 Θ 的一个子集，同时保留决定公理；也就是说，对于任意在 V 上泛型的 $\mathbb{P}$-泛型滤子G，存在一个属于 $V[G] \setminus V$的 Θ^V的子集，并且决定公理在 $V[G]$中成立。[3]

注意，ZF + 决定公理 +“$V = \mathrm{L}(\mathbb{R})$”蕴含定理 5.1 的各项假设，包括 Θ的正则性。此外，在“$V = \mathrm{L}(\mathbb{R})$”的情形下，偏序集 $\mathbb{P}$ 就是定理 5.1 证明中情形 1 所用的、用于在遗传序数可定义集中添加一个 Cohen 子集的偏序集。因此，定理 5.1 的论证回答了 Cunningham 第 5] 节中的问题。 [3,

我们还指出，定理 5.1 在以下两个意义上是最优的：一方面，偏序集 $\mathbb{P}$ 的大小不能小于 Θ。如前一段所述，根据 Chan 和 Jackson [2, 定理 3.2], ，任何基数小于 Θ 的可良序力迫都无法保持决定公理成立。此外，根据定理 4.1（若 Θ 是正则基数，则也可根据 Chan 和 Jackson [2, 定理 5.5] ），定义在 $\mathbb{R}$ 上的任何偏序集（或 $\mathbb{R}$ 的满射像）都无法保持决定公理成立。另一方面，除非偏序集 $\mathbb{P}$ 添加一个新的实数，

[2]对于研究决定性公理的专家来说，假设 ZF +决定公理$_{\mathbb{R}}$ 过强了。定理 3.2 的证明表明，假设 ZF + 决定公理$^+$ +“$\Theta > \Theta_0$”就足够了。[3]定理 5.1 的证明表明，在情形 1 和情形 2 中，偏序集 $\mathbb{P}$ 都不会向 V添加任何新的实数集。特别地，偏序集 $\mathbb{P}$ 也保留决定公理$^+$ 的真值。

偏序集 $\mathbb{P}$ 无法在保持决定公理成立的同时添加 Θ 的一个新的有界子集。这是因为，如果 $\mathbb{P}$ 没有添加任何实数，且 V 和 $V[G]$ 都是决定公理成立的模型，那么根据 Moschovakis 编码引理， V 和 $V[G]$ 的 Θ 有相同的有界子集，因此偏序集 $\mathbb{P}$ 无法添加 Θ 的有界子集。

读过定理 5.1 后，自然会问“Θ 是正则的”这一假设是否是必要的。我们不知道这个问题的答案。不过，在 Θ 为奇异的情形下，在定理 5.1 的假设下有 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 。在 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 成立的情形下，也就是定理 5.1 证明中的情形 2，定理 5.1 中的偏序集 $\mathbb{P}$ 用于在遗传序数可定义集 HOD 中添加 Θ 的 Cohen 子集。我们证明，当 Θ 为奇异时，这个特定的偏序集无法保持 AD 的真值：

定理 5.2。 假设 ZF $+\,\mathrm{AD}^{+}+$“$V=\mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”。设 Θ 为奇异，并令 $\mathbb{P}$为 HOD 中的 $\mathrm{Add}(\Theta,\,1)$，其中 $\mathrm{Add}(\Theta,\,1)=\{p\mid p\text{：对某个 }\gamma<\Theta\}$成立。则对于 V上的任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，在$V[G]$ 中 AD 不成立。

2. Basic definitions, theorems, and lemmas

本节将介绍本文后续各节中会用到的基本定义、定理和引理。我们假设读者熟悉力迫和描述集合论的基础知识。本文未给出的基本定义，请参见 Jech [4]和 Moschovakis [9]。我们所说的“实数”，指贝尔空间 ω^{ω} 或康托尔空间 2^{ω}中的元素。

我们先介绍一些将在全文中使用的基本定义：

定义 2.1。

(1) 序数 Θ 是所有可由 $\mathbb{R}$满射得到的序数的上确界。(2) 集合 x 若可由一个以序数和 $y_1,\dots,y_n$ 为参数的一阶公式定义，则称其为由集合 $y_1,\dots,y_n$ 序数可定义 x。(3) 设 Y 是一个集合。若 $\{x\}$ 的传递闭包中的任意元素都可由 Y中的某些元素序数可定义，则称集合 x 是遗传 序数可定义$_Y$。(4) 对于集合 Y，我们用 HOD_Y表示所有遗传序数可定义集$_Y$的集合。当 Y 为空集时，我们简记 HOD 为 HOD_Y。

定义 2.2. 设 A 和 B 是实数集（或贝尔空间 ω^{ω}的子集）。若存在连续函数 $f\colon \omega^{\omega}\to\omega^{\omega}$ 使得 $A=f^{-1}(B)$，则称 A对 B是***Wadge*** 可约的。当 A 对 B是 Wadge 可约的时，记作 $A\leq_{\mathrm{W}}B$。序关系 $\leq_{\mathrm{W}}$ 称为实数集上的 ***Wadge*** 序。

引理 2.3（Wadge 引理）。 假设 ZF $+$ 决定公理。则对于任意实数集 A， B，以下两者必有其一：$A\leq_{\mathrm{W}}B$ 或 $B\leq_{\mathrm{W}}\omega^{\omega}\setminus A$。

证明。 例如，参见引理 2.1]。 □

以下定理将在第 3 节中用到。

定理 2.4（Woodin）。 假设 ZF $+$决定公理$^{+}+$“$V=\mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”。则遗传序数可定义集 HOD 模型具有 $\mathrm{L}[Z]$ 的形式，其中 Z 是 Θ的某个子集；并且存在 HOD 中的一个偏序集 $\mathbb{Q}$，以及一个在 HOD 上的 $\mathbb{Q}$-泛型滤子H，使得 $\mathrm{HOD}\subseteq V\subseteq\mathrm{HOD}[H]$。

证明。 参见例如， [13,定理 3.1.9]。 □

定理 2.5（Moschovakis）。 假设 ZF $+$决定公理。那么 Θ 是可测基数的极限。

证明。 若不假设 $\mathrm{DC}_{\mathbb{R}}$，可以先证明在 ZF+决定公理下， Θ是强分割基数的极限（如 [7] 中所示），然后再验证在 ZF 集合论下每个强分割基数都是可测基数（如 [5, 28 中所示）。10 定理]。□

定理 2.6 (Solovay)。 假设 $\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$。那么，对任意实数集 A，都存在一个实数集 B，它不是由 A 和任意实数序数可定义的。

证明。 参见 [10, 引理 2.2]。 □

下一条定理将在第 4 节中用到:

定理 2.7 (Chan 和 Jackson)。 假设 $\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}$，且 Θ 是正则的。那么，对于 $\mathbb{R}$ 上任意非平凡偏序集 $\mathbb{P}$，以及 V 上任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，公理 AD 在 $V[G]$ 中失效。

证明。 参见 [2, 定理 5.5]。 □

第 5 节将使用以下定理:

定理 2.8 （Moschovakis）。 假设 ZF +决定公理。则对于任意非零序数 $\gamma<\Theta$，存在一个实数集 A，使得存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\wp(\gamma)$ 的满射，该满射可由 A 序数可定义。

证明。 对于任意满射 $\rho\colon \mathbb{R}\to\gamma$， [5, 28.15 定理] 中的论证给出一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\wp(\gamma)$ 的满射，该满射可由 ρ 序数可定义。如果 A 是 $\mathbb{R}$ 上的长度为 γ 的拟良序，那么由 A 诱导的满射 $\rho\colon \mathbb{R}\to\gamma$ 显然可由 A 序数可定义。因此，存在一个从$\mathbb{R}$ 到 $\wp(\gamma)$ 的满射，该满射可由 A 序数可定义，正如所需。□

定理 2.9 （Woodin）。 假设 ZF $+$决定公理$^+$ +“$V=\mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”。还假设决定公理$_{\mathbb{R}}$不成立。则存在一个序数集 T，使得 $V=\mathrm{L}(T,\mathbb{R})$。

证明。 根据 Woodin 的结果 [7], 决定公理 AD^+ 与 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 的失败意味着，Suslin 基数的集合在 Θ 以下闭，而在 Θ中不共尾。因此，在 Θ中存在最大的 Suslin 基数。根据 Woodin 的结果 [12, 推论 6], ，假设 AD^+ 和“$V=\mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”意味着超幂 $V^{\mathcal{D}}/\mu$ 是良基的，其中 $\mathcal{D}$ 是图灵度的集合， μ 是 $\mathcal{D}$上的 Martin 测度。利用 Woodin 的结果 [7], 可知，存在一个序数集合 T，使得 $\wp(\mathbb{R})\subseteq\mathrm{L}(T,\mathbb{R})$。由于我们假设 $V=\mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$，因此有 $V=\mathrm{L}(T,\ \mathbb{R})$，如所需。□

定理 2.10 （Woodin）。 假设 ZF $+$ 决定公理 AD^+ + “$V=\mathrm{L}(T,\ \mathbb{R})$”，其中 T是某个序数集合。那么

(1) 对于某个 Θ 的子集 Z，我们有 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}=\mathrm{L}[T,Z]$; (2) 对于任意实数 x，我们有 $\mathrm{HOD}^{\{T,x\}}=\mathrm{HOD}_{\{T\}}[x]$。

证明。对于 (1)，可以用与 [1, 推论 7.21] 相同的方法论证。对于 (2)，参见 [7]。

□

接下来，我们介绍本文将使用的 Vopˇenka 代数及其变体:

定义 2.11。设 γ 是一个非零序数， T 是一个序数集。

(1) 设 n 是一个自然数， $n\geq 1$，且 $\mathcal{O}_n$ 是 $(\gamma^\omega)^n$ 的所有非空子集构成的集合，这些子集是从 T 序数可定义的。固定一个从 T 序数可定义的双射 $\pi_n\colon \eta\to\mathcal{O}_n$，其中 η 是某个序数。设 $\mathbb{Q}_n$ 是定义在 η 上的偏序集，使得对于每个 p， q 属于 $\mathbb{Q}_n$，当且仅当 $p\leq q$ 若 $\pi_n(p)\subseteq\pi_n(q)$。我们称 $\mathbb{Q}_n$ 为在遗传序数可定义集 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中添加 $(\gamma^\omega)^n$ 的*Vopˇenka*代数。

(2) 对所有满足 $1 \leq \ell \leq m$ 的自然数 ℓ 和 m，令 $i_{\ell,\, m}\colon \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_m$ 为由 π_ℓ 和 π_m 诱导的包含映射，即对于所有 $p \in \mathbb{Q}_\ell$, $\pi_m\big(i_{\ell,\, m}(p)\big) = \{x \in (\gamma^\omega)^m \mid x \restriction \ell \in \pi_\ell(p)\}$。那么每个 $i_{\ell,\, m}$ 都是偏序集之间的完全嵌入。令 $\big(\mathbb{Q}_\omega,\ (i_n\colon \mathbb{Q}_n \to \mathbb{Q}_\omega \mid n < \omega)\big)$ 为系统 $(i_{\ell,\, m}\colon \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_m \mid 1 \leq \ell \leq m < \omega)$ 的直接极限。我们称 $\mathbb{Q}_\omega$ 为在遗传序数可定义集 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中添加 γ^ω 的 Vopˇenka 代数的有限支撑直极限。

以下引理将在第 5 节中派上用场：

引理 2.12. 假设 ZF + 决定公理$^+$ + "$V = \mathrm{L}(T, \mathbb{R})$"，其中 T 是某个序数集合。

(1) 设 $\mathbb{Q}_1$ 为在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中添加一个 2^ω 的 Vopěnka代数。则偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 的大小至多为 Θ，且 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中满足 Θ-链条件。(2) 设 $\mathbb{Q}_\omega$ 为用于在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中添加一个 2^ω的 Vopěnka代数的有限支撑极限。则 $\mathbb{Q}_\omega$在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中满足 Θ-链条件。(3)（Woodin）存在一个 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型滤子 H，它在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 上泛型，且 $V = \mathrm{L}(T, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{HOD}_{\{T\}}[H]$，并且集合 $\mathbb{R}^V$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H]$中是可数的。

证明。 对于 (1)，我们首先证明偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中的基数至多为 Θ。回忆定义 2.11，$\mathbb{Q}_1$ 是定义在某个序数 η 上的偏序集，而 π_1 是从 η 到 $\mathcal{O}_1$ 的双射，且可由 T 序数可定义，其中 $\mathcal{O}_1$ 是所有可由 T 序数可定义的 2^ω 子集构成的集合。我们将证明序数 η 至多为 Θ。对于每个 $\alpha < \Theta$，令 W_α 为 $\mathcal{O}_1$ 中 Wadge 秩为 α 的实数集的集合。那么，我们有 $\mathcal{O}_1 = \bigcup_{\alpha<\Theta} W_\alpha$，并且每个 W_α 都是 $\mathbb{R}$ 的满射像。由于集合 $\mathcal{O}_1$ 是良序的，每个 W_α 也都是良序的，并且存在一个从 Θ 到 W_α 的满射，可由 T 序数可定义。因此，存在一个从 $\Theta \times \Theta$ 到 $\mathcal{O}_1$ 的满射，可由 T 序数可定义，故集合 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中的基数至多为 Θ，证毕。

接下来我们证明，偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中满足 Θ-链条件。为导出矛盾，假设 $\mathbb{Q}_1$ 中存在一个反链 $(p_\alpha \mid \alpha < \Theta)$，且该反链属于 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$。那么族 $\{\pi_1(p_\alpha) \mid \alpha < \Theta\}$ 是 2^ω 的非空子集构成的两两不交族，由此很容易导出一个从 $\mathbb{R}$ 到 Θ 的满射，这与 Θ 的定义矛盾。因此，偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中满足 Θ-链条件，证毕。

对于 (2)，我们首先注意到，对所有满足 $n \geq 1$ 的自然数 n，通过与 (1) 相同的论证可知，偏序集 $\mathbb{Q}_n$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中满足 Θ-链条件。再利用以下事实：Θ 在 $V = \mathrm{L}(T,\ \mathbb{R})$ 中是正则的，且 $\mathbb{Q}_\omega$ 是 $\mathbb{Q}_n$ 的直接极限，由此也可推出偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中满足 Θ-链条件。

对于 (3)，可以按照 [11, 引理 3.4 和引理 3.5] 中的相同方法，通过将$\mathcal{M}$ 替换为 V，并将 $\mathcal{H}$ 替换为遗传序数可定义集$^{\{T\}}$来论证。□

引理 2.13。 假设 ZFC。设 λ 是一个正则不可数基数，$\mathbb{P}$ 是一个 $<\lambda$-闭偏序集，而 $\mathbb{Q}$ 是一个 λ-链条件偏序集。那么对于任意在 V上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，偏序集 $\mathbb{Q}$ 在 $V[G]$中仍满足 λ-链条件。此外，如果 H 是在 V上的 $\mathbb{Q}$-泛型滤子，那么 H 也是$V[G]$ 上的 $\mathbb{Q}$-泛型。

证明。 设 G 是一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子，且 A 是 $V[G]$中的偏序集 $\mathbb{Q}$ 的一个反链。我们将证明，在 $V[G]$中，A的大小小于 λ。

为导出矛盾，我们假设 A 在 $V[G]$中的大小至少为 λ。

设 $\dot{A}$ 是一个具有 $\dot{A}^G = A$的 $\mathbb{P}$-名称。设 p 是 G 中满足 $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{A}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中大小至少为 λ的反链”的条件。利用 $\mathbb{P}$ 在 V中的 $<\lambda$-闭合性，可以构造一个 $\mathbb{P}$ 中的递减序列 $(p_\alpha \mid \alpha < \lambda)$，以及一个 $\mathbb{P}$ 中的序列 $(a_\alpha \mid \alpha < \lambda)$，满足以下性质：

(1) $p_0 = p$，(2) 对所有 α，$\beta < \lambda$ 满足 $\alpha \neq \beta$ 的情况，

我们有 $a_\alpha \neq a_\beta$，并且 (3) 对所有 $\alpha < \lambda$，$p_\alpha \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\check{a}_\alpha \in A$”。

. ˇ由于 $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “A 是 $\mathbb{Q}$ 中的一个反链”，根据上述 (1)、(2) 和 (3)，对于所有满足 $\alpha < \beta$ 的 α，$\beta < \lambda$，条件 p_β 强迫 a_α 与 a_β 在 $\mathbb{P}$ 中不相容。因此，集合 $B = \{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中大小为 λ 的一个反链，且位于 V 中。这与假设 $\mathbb{Q}$ 在 V 中满足 λ- 链条件相矛盾。因此，反链 A 在 $V[G]$ 中的大小小于 λ，如所求。

设 H 是在 V 上的 $\mathbb{Q}$-泛型滤子。我们将验证，H 对 $V[G]$ 也同样是 $\mathbb{Q}$-泛型的。设 A 是 $V[G]$ 中 $\mathbb{Q}$ 的一个极大反链。我们将看到 $H \cap A \neq \emptyset$。根据前面几段中的论证，A 在 $V[G]$ 中的大小小于 λ。由于 G 是在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子，且 $\mathbb{P}$ 在 V 中是 $<\lambda$-闭的，而 $\mathbb{Q}$ 属于 V，因此不存在 $V[G] \setminus V$ 中大小小于 λ 的 $\mathbb{Q}$ 子集。因此，反链 A 也属于 V。由 H 对 V 的泛型性可知，$H \cap A \neq \emptyset$，正如所需。□

引理 2.14。 假设 ZF + AD^+ + $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$。那么对于任意实数集的集合 C，存在一个 $s \in \Theta^\omega$，使得 C 可由 s 序数定义，并且 C 属于 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})$。

证明。 令 C为任意实数集。根据 Woodin [7], 在 ZF +AD^+ + $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$下的结果，每个实数集都是 Suslin 集。根据 Martin 和 Steel [8], 的结果，每个 Suslin 集和余 Suslin 实数集都是齐性 Suslin 集。特别地，其补集 $2^\omega \setminus C$ 是齐性 Suslin 集，并且由某个 $\kappa < \Theta$上的测度序列 $(\mu_u \mid u \in 2^{<\omega})$ 见证。根据 Kunen [5, 28的结果，.21 推论], 每个测度 μ_u 都是序数可定义的。利用 Moschovakis 编码引理和 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，可以证明每个测度 μ_u 都可由某个小于 Θ的序数定义。因此存在一个 $s \in \Theta^\omega$，使得序列 $(\mu_u \mid u \in 2^{<\omega})$ 可由 s定义。现在由序列 $(\mu_u \mid u \in 2^{<\omega})$ 可以构造一个 Martin-Solovay 树 T，使得 $C = \mathrm{p}[T]$。根据 T的构造可知，T 可由 $(\mu_u \mid u \in 2^{<\omega})$ 序数定义。因此 T 可由 s序数定义，这很容易推出集合 C 可由 s 序数定义，并且 C 属于 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})$，如所要求。□

引理 2.15. 假设 ZF + 决定公理$_{\mathbb{R}}$。令 $\gamma < \Theta$ 和 $\mathbb{Q}_1$ 为用于在遗传序数可定义集 HOD 中添加 γ^ω 的 Vopěnka 代数。再令 $\mathbb{Q}_\omega$ 为用于在 HOD 中添加 γ^ω 的 Vopěnka 代数的有限支撑极限。

(1) 偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 和 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 HOD 中的大小小于 Θ。(2) 令 $s \in \gamma^\omega$ 和 $h_s = \{p \in \mathbb{Q}_1 \mid s \in \pi_1(p)\}$，其中 π_1: $\mathbb{Q}_1 \to \mathcal{O}_1$ 如定义 2.11 所述。则集合 h_s 是 HOD 上的一个 $\mathbb{Q}_1$-泛型滤子，且 $\mathrm{HOD}[h_s] = \mathrm{HOD}^{\{s\}}$。(3)（Woodin）存在一个 HOD 上的 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型滤子 H，使得集合 $(\gamma^\omega)^V$ 在 $\mathrm{HOD}[H]$中是可数的。

证明。 对于 (1)，我们首先证明偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 HOD 中的大小小于 Θ。回忆定义 2.11，π_1: $\mathbb{Q}_1 \to \mathcal{O}_1$ 是一个 OD 满射，其中 $\mathcal{O}_1$ 是由 γ^ω 的所有 OD 子集组成的集合。由于 $\gamma < \Theta$，根据定理 2.8，存在一个实数集 A，使得存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\wp(\gamma)$ 的满射，且该满射是 OD 的，参数为 A。特别地，存在一个满射 σ: $\mathbb{R} \to \gamma^\omega$，且该满射是 OD 的，参数为 A。因此，对于每个 $b \in \mathcal{O}_1$，实数集 $\sigma^{-1}(b)$ 都是 OD 的，参数为 A。由于我们假设 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，根据定理 2.6，存在一个实数集 B，它不是

OD 的，参数为 A。根据 ZF + AD 下的 Wadge 引理，对于每个 $b \in \mathcal{O}_1$，集合 $\sigma^{-1}(b)$ 都是 Wadge 可约到 B 的。特别地，存在一个从 $\mathbb{R}$ 到族 $\{\sigma^{-1}(b) \mid b \in \mathcal{O}_1\}$ 的满射。因此，族 $\mathcal{O}_1$ 也是 $\mathbb{R}$ 的满射像，并且偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在V 中的大小小于 Θ。由于 Θ 是 V 中的一个基数，因此偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 HOD 中的大小也小于 Θ。

接下来我们证明，偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 HOD 中的大小小于 Θ。设 $C = A \oplus B = \{x * y \mid x \in A$ 和 $y \in B\}$，其中对所有 $\ell < \omega$，均有 $x * y(2\ell) = x(\ell)$ 且 $x * y(2\ell + 1) = y(\ell)$。那么，上一段中的论证表明，存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}_1$ 的满射，该满射相对于 C 是序数可定义的。同理可以论证，对于满足 $n \geq 1$ 的每个自然数 n，存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}_n$ 的满射，该满射相对于 C 是序数可定义的。由于所有这类满射都相对于 C 是序数可定义的，我们可以选取一个满射序列 $(\rho_n$: $\mathbb{R} \to \mathcal{O}_n \mid n \geq 1)$，从而立即得到一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}_\omega$ 的满射。因此，偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 V 中的大小小于 Θ。由于 Θ 是 V 中的一个基数，因此偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 HOD 中的大小也小于 Θ。

对于（2），关于 h_s 相对于 HOD 的 $\mathbb{Q}_1$-泛型性，参见例如 [4, 定理 15.46]。

我们将证明等式 HOD$[h_s]$ =HOD$^{\{s\}}$。包含关系 HOD$[h_s] \subseteq$ HOD$^{\{s\}}$ 很容易得到，因为 h_s 可由 s 序数可定义，而 h_s 是一个序数集。我们将论证 HOD$_{\{s\}} \subseteq$HOD$[h_s]$。由于 HOD$^{\{s\}}$ 是 ZFC 的一个模型，只需证明 HOD$^{\{s\}}$ 中的每个序数集也属于 HOD$[h_s]$。设 X 是 HOD$^{\{s\}}$ 中任意一个序数集。我们将验证 X 也属于 HOD$[h_s]$。设 δ 是一个满足 $X \subseteq \delta$ 的序数。由于 X 属于 HOD$^{\{s\}}$，集合 X 可由 s 序数可定义。因此，存在一个公式 ϕ，使得对所有 $\alpha < \delta$，都有 $\alpha \in X$ 当且仅当 $\phi[\alpha, s]$ 成立。对于每个 $\alpha < \delta$，令 $b_\alpha = \{x \in \gamma^\omega \mid \phi[\alpha, x]\}$。于是，每个集合 b_α 都是 γ^ω 的子集，而 γ^ω 是序数可定义的。因此，每个 b_α 都属于 $\mathcal{O}_1$。现在我们有以下等价关系：对于所有 $\alpha < \delta$，

$$\alpha \in X \iff \phi[\alpha, s] \iff s \in b_\alpha \iff \pi_1^{-1}(b_\alpha) \in h_s.$$

因此 $X = \{\alpha < \delta \mid \pi_1^{-1}(b_\alpha) \in h_s\}$。由于序列 $\left(\pi_1^{-1}(b_\alpha) \in \mathbb{Q}_1 \mid \alpha < \delta\right)$ 是序数可定义的，且 $\mathbb{Q}_1$ 属于遗传序数可定义集，序列 $\left(\pi_1^{-1}(b_\alpha) \in \mathbb{Q}_1 \mid \alpha < \delta\right)$ 属于遗传序数可定义集。因此，集合 $\{\alpha < \delta \mid \pi_1^{-1}(b_\alpha) \in h_s\}$ 属于遗传序数可定义集$[h_s]$。由此，集合 X 属于遗传序数可定义集$[h_s]$，证毕。

对于 (3)，可以仿照 [11, 引理 3.4 和引理 3.5] 中的论证，将$\mathbb{R}$ 替换为 γ^ω，将 $\mathcal{M}$ 替换为 V，并将 $\mathcal{H}$ 替换为遗传序数可定义集。□

3. On forcings increasing Θ

本节证明以下定理：

定理 3.1。假设 ZF 集合论 +决定公理$^+$ + "$V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$"。设偏序集 $\mathbb{P}$ 增大了 Θ，即 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$ 对于任意 $\mathbb{P}$泛型滤子 G（在 V上）。那么，对于任意 $\mathbb{P}$泛型滤子 G（在 V上），$V[G]$ 中决定公理不成立。

定理 3.2。相对于 ZF+AD$_{\mathbb{R}}$，以下陈述是一致的：ZF +AD 成立，且存在一个偏序集 $\mathbb{P}$，它在保留 AD 的同时增大 Θ；也就是说，对任意在 V上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，都有 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$，且 AD 在 $V[G]$中成立。

定理 *3.1* 的证明。设 G 是 V上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。我们将证明 AD 在$V[G]$中不成立。为导出矛盾，我们假设 AD 在 $V[G]$中成立。

由于我们有 AD$^+$ and V =L$(\wp(\mathbb{R}))$，根据定理 2.4，模型 HOD 的形式为 L$[Z]$，其中 Z 是 Θ 的一个子集，并且 HOD 中存在一个偏序集 $\mathbb{Q}$，以及一个在

HOD 上的 -泛型滤子，使得 HOD $\subseteq V \subseteq$HOD$[H]$。特别地，$Z^{\#}$ 在 HOD 中不存在。由于任何偏序集都不会添加 $Z^{\#}$，因此 $Z^{\#}$ 在 V 中也不存在。

我们将论证 $Z^{\#}$ 存在于 $V[G]$ 中，这与 $Z^{\#}$ 不存在于 V 这一事实矛盾。由于 $\mathbb{P}$ 增大了 Θ，因此我们有 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$。根据假设，在$V[G]$中有 AD，因此由定理 2.5 可知，$\Theta^{V[G]}$ 是 $V[G]$中可测基数的极限。特别地，在 $V[G]$ 中存在一个可测基数 κ，使得 $\Theta^V < \kappa$。设 U 是 $V[G]$中定义在 κ 上的一个 $<\kappa$-完备非主超滤子。令 $M = \mathrm{L}[U, Z]$，则基数 κ 在 M 中也可测，其见证为 $U \cap M$。由于 M 是 ZFC 的一个模型，且 Z 是 M中 κ的有界子集，因此可知 $Z^{\#}$存在于 M中。由 $Z^{\#}$的绝对性可知，$Z^{\#}$属于 $V[G]$，这与 $Z^{\#}$ 不存在于 V这一事实矛盾。

因此，假设 $V[G]$ 中成立决定公理是错误的，而 $V[G]$ 中决定公理不成立。
这就完成了定理 3.1 的证明。 □

定理 *3.2* 的证明。我们假设 ZF $+$决定公理$_{\mathbb{R}}$，并将证明存在一个内模型 M，它满足 ZF $+$决定公理，且存在一个偏序集 $\mathbb{P}$，可在保留决定公理的同时增加 Θ。

令 $M =$HOD$_{\mathbb{R}}$，即所有能由某个实数遗传序数可定义的集合所构成的类。我们将证明 M 就是所需的内模型。

首先注意，M 是 ZF 集合论的模型。此外，由于 M 包含所有实数，且 V 满足决定公理，因此 M 也是决定公理的模型。由于 V 中有 AD$_{\mathbb{R}}$，根据定理 2.6，存在一个实数集 B，它不能由任何序数和任何实数定义。因此，集合 B 不属于 M。

我们将证明 M 满足存在一个偏序集 $\mathbb{P}$，可在保留决定公理的同时增加 Θ。其思路是在 M 中考虑 Vopěnka代数的一个变体，将集合 B 加入 M。令$\mathcal{O} = \{b \subseteq \wp(\mathbb{R}) \mid b$ 为非空且可由某个实数$\}$ 序数可定义的集合族，并按包含关系排序。则 $\mathcal{O}$ 是一个序数可定义的偏序集。令 η 为一个充分大的序数，并令 π: $\eta \times \mathbb{R} \to \mathcal{O}$ 为一个序数可定义的满射，使得若集合 b 属于 $\mathcal{O}$ 且可由实数 x 序数可定义，则存在某个 $\alpha < \eta$，使得 $\pi(\alpha, x) = b$。令 $\mathbb{P} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$，并对 $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$，定义 $p_1 \leq p_2$，当且仅当 $\pi(p_1) \subseteq \pi(p_2)$。于是，由于 π 是序数可定义的，偏序集 $\mathbb{P}$ 属于 M。对于 $\mathbb{P}$ 中的一个 r，令 $\mathbb{P} \restriction r = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq r\}$。

我们将证明存在某个 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G over M，使得 $\Theta^M < \Theta^{M[G]}$ and$M[G]$ 是 AD 的一个模型。这足以结束定理的证明，因为这样就存在某个 $r \in \mathbb{P}$，它对 $M[G]$ over M 力迫所需的两个陈述，而偏序集 $\mathbb{P} \restriction r$ 就是 M 中所需的偏序集。

令 $H = \{b \in \mathcal{O} \mid B \in b\}$ and $G = \pi^{-1}(H)$。我们将看到 G 就是所需的滤子。

我们首先验证 G 是 $\mathbb{P}$ 上方的 M-泛型。令 D 是 $\mathbb{P}$ 在 M 中的一个稠密子集。我们将证明 $G \cap D \neq \emptyset$。令 $E = \pi[D]$ and $b_E = \bigcup E$。根据 $\mathbb{P}$ 的定义，集合 E 在 $\mathcal{O}$ 中稠密。我们断言 $b_E = \wp(\mathbb{R})$。反设不然。由于 D 属于 M 且 π 是序数可定义的，集合 b_E 可由某个实数序数可定义。因此 b_E 属于 $\mathcal{O}$。但此时 $\wp(\mathbb{R}) \setminus b_E$ 是一个非空集合，属于 $\mathcal{O}$，且与 E 的任何元素都不相容，这与 E 在 $\mathcal{O}$ 中稠密矛盾。因此 $b_E = \wp(\mathbb{R})$。由于 B 属于 $\wp(\mathbb{R})$，我们有 B 属于 b_E，所以存在某个 b' 属于 E，使得 B 属于 b'。根据 H 的定义，条件 b' 也属于 H。因此 $H \cap E \neq \emptyset$。由于 $G = \pi^{-1}(H)$ and$E = \pi[D]$，可知 $G \cap D \neq \emptyset$，如所需。因此，G 是 $\mathbb{P}$ 上方的 M-泛型。

接下来我们验证 $M[G]$ 是决定公理的一个模型。由于 B 属于 V、$H = \{b \in \mathcal{O} \mid B \in b\}$，且 $G = \pi^{-1}(H)$，因此 G 属于 V，并且 $M[G]$ 是 V的子模型。由于 M 包含所有实数，$M[G]$也包含所有实数。最后，由于 V 是决定公理的一个模型，因此 $M[G]$ 也是决定公理的一个模型，正如所需。

最后，我们验证 $\Theta^M < \Theta^{M[G]}$。由于 M 和 $M[G]$ 都是包含所有实数的决定公理模型，根据 ZF + 决定公理下的 Wadge 引理，只需证明 $M[G] \setminus M$中存在一个实数集。由于 B不属于 M，只需说明 B属于 $M[G]$。对每个实数x，令 $b_x = \{A \in \wp(\mathbb{R}) \mid x \in A\}$。那么 b_x 可由 x序数可定义，因此 b_x 属于 $\mathcal{O}$。根据 π的选取，对每个实数 x，都存在一个序数 α，使得 $\pi(\alpha, x) = b_x$。对每个实数 x，令 α_x 为满足 $\pi(\alpha_x, x) = b_x$的最小序数。于是，由于 π 和 $\mathcal{O}$ 都是序数可定义的，序列 $(\alpha_x \mid x \in \mathbb{R})$ 也是序数可定义的，且属于 $M =$遗传序数可定义集 $_{\mathbb{R}}$。利用序列 $(\alpha_x \mid x \in \mathbb{R})$ 和 G，可以如下计算集合B：对于任意实数 x，

$$x \in B \iff B \in b_x \iff b_x \in H \iff (\alpha_x, x) \in G.$$

因此，集合 B 属于 $M[G]$，如所需。

我们已经验证　因此，G 就是所需的滤子，这就完成了定理 3.2 的证明。 .

□

4. On forcings on the reals

本节中，我们证明以下定理，以回答 Chan 和 Jackson 提出的问题 [2, 问题 5.7]:

定理 4.1。假设 ZF + 决定公理。设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个非平凡偏序集的满射像，且 G 是 V 上的任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子。那么决定公理在 $V[G]$ 中不成立。

定理 4.1 的证明。设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个非平凡偏序集的满射像，且G 是 V 上任意一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。我们将证明决定公理在 $V[G]$ 中不成立。由于 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{R}$ 的满射像，存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上且与 $\mathbb{P}$ 强迫等价的偏序集。因此，我们可以假设 $\mathbb{P}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偏序集。

为了导出矛盾，我们假设决定公理在 $V[G]$ 中成立。

情形 1。集合 $\mathbb{R}^V$ 在 $V[G]$ 中不可数时。

关键点如下:

断言 1。存在一个实数 r_0 属于 $V[G]$，使得 $\mathbb{R}^{V[G]} \subseteq \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$。

断言 1 的证明。由于 $V[G]$ 满足决定公理，集合 $\mathbb{R}^V$在 $V[G]$中具有完美集性质。由于 $\mathbb{R}^V$ 在 $V[G]$中是不可数的，集合 $\mathbb{R}^V$ 在 $V[G]$中包含一个完美集 C。令 r_0 在 $2 = \{0, 1\}$ 上编码一棵完美树 T，且 $[T] = C$在 $V[G]$中。

我们将证明 $\mathbb{R}^{V[G]} \subseteq \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$。任取 2^ω中一个元素 x，其中 x属于 $V[G]$。我们将证明 x属于 $\mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$。

若节点 $t \in T$ 满足 T，且 $t^\frown\langle 0\rangle$ 和 $t^\frown\langle 1\rangle$ 都属于 T，我们就称它为 中的分裂节点。令 $\{t_s \in T \mid s \in 2^{<\omega}\}$ 为 T 中所有满足以下条件的分裂节点所成的集合：若 s_1 是 $2^{<\omega}$中 s_2 的一个子序列，则 t_{s_1} 是 T中 t_{s_2} 的一个子序列。令 $y = \bigcup\{t_{x\restriction n} \mid n < \omega\}$。于是 y 属于 $[T]$。由于$[T] = C \subseteq \mathbb{R}^V$，实数 y属于 $\mathbb{R}^V$。然而，对于所有 $n < \omega$和 $k \in 2 = \{0, 1\}$,

$$x(n) = k \iff t_{(x\restriction n)^\frown\langle k\rangle} \subseteq y.$$

因此，x可以直接由 y和 T计算得出。所以 $x \in \mathrm{L}[y, T]$。由于 $\mathrm{L}[y, T] \subseteq \mathrm{L}[y, r_0] \subseteq \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$，实数 x 属于 $\mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$，正如所需。

这就完成了断言 1 的证明。 □

继续情形 1 中的论证，设 r_0 是 $V[G]$ 中的一个实数，满足断言 1 中的 $\mathbb{R}^{V[G]} \subseteq \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0)$。由于偏序集 $\mathbb{P}$ 定义在 $\mathbb{R}^V$ 上，存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$，使得 $\dot{x}^G = r_0$，且 $\dot{x}$ 由 V 中某个实数集 A 编码。于是令 $M = \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, \mathbb{P}, A)$，我们得到 M 是 V 的一个内模型，满足决定公理以及命题“Θ 是正则的”。然而，由于 $\mathbb{R}^{V[G]} \subseteq \mathrm{L}(\mathbb{R}^V, r_0) \subseteq M[G] \subset V[G]$，且我们假设 $V[G]$ 满足决定公理，因此模型 $M[G]$ 也满足决定公理，这与定理 2.7 矛盾。因此，假设 $V[G]$ 满足决定公理是错误的，决定公理必定在 $V[G]$ 中失效，证毕。

这就完成了情形 1 中定理 4.1 的论证。

情形 2. 当 $\mathbb{R}^V$ 在 $V[G]$ 中是可数的。

由于 $\mathbb{R}^V$ 在 $V[G]$ 中是可数的，任何小于 Θ^V 的序数 α 在 $V[G]$ 中也可数。因此 $\Theta^V \leq \omega_1^{V[G]}$。

我们将证明 $\Theta^{V[G]} \leq (\Theta^+)^V$，这将与决定公理在 $V[G]$ 中成立的假设矛盾，因为 $V[G]$ 中的决定公理将推出 $\Theta^{V[G]} > \omega_2^{V[G]} \geq (\Theta^+)^V$，这是由于 $\Theta^V \leq \omega_1^{V[G]}$。

为了证明 $\Theta^{V[G]} \leq (\Theta^+)^V$，令 $f\colon \mathbb{R}^{V[G]} \to (\Theta^+)^V$ 是 $V[G]$ 中的任意函数。我们将证明它不是满射。与情形 1 中的论证一样，由于 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{R}$ 上，$V[G]$ 中的任意实数都可以用 V 中的实数集编码。因此我们可以假设 $f\colon \wp(\mathbb{R})^V \to (\Theta^+)^V$。此外，由于 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{R}^V$ 上，存在 V 中的函数 $g\colon \wp(\mathbb{R})^V \times \mathbb{R}^V \to (\Theta^+)^V$，使得 $\mathrm{rng}(f) \subseteq \mathrm{rng}(g)$。因此，只需证明 g 在 V 中不是满射。

现在我们在 V 中工作。为了说明 g 不是满射，对每个 $\alpha < \Theta$，令 $W_\alpha = \{B \in \wp(\mathbb{R}) \mid |B|_{\mathrm{W}} = \alpha\}$，其中 $|B|_{\mathrm{W}}$ 是 B 的 Wadge 序数。于是每个 W_α 都是 $\mathbb{R}$ 的满射像，因此集合 $R_\alpha = \{g(B, x) \mid B \in W_\alpha, x \in \mathbb{R}\}$ 也是如此。因此，对于每个 $\alpha < \Theta$，R_α 的序型小于 Θ，而 $\mathrm{rng}(g) = \bigcup_{\alpha<\Theta} R_\alpha$ 是 $\Theta \times \Theta$的满射像。因此，$\mathrm{rng}(g)$ 的基数至多为 Θ，小于 Θ^+。所以，g 在 V 中不是满射，证毕。

至此，情形 2 中定理 4.1 的论证完成。

定理 4.1 的证明至此完成。 □

5. On forcings adding a subset of Θ

在本节中，我们证明以下定理：

定理 5.1. 假设 ZF + 决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$”。假设 Θ 是正则的。那么存在一个定义在 Θ 上的偏序集 $\mathbb{P}$，它会添加 Θ 的一个子集，同时保留决定公理；也就是说，对于任意在 V 上关于 $\mathbb{P}$ 的泛型滤子 G，存在一个属于 $V[G] \setminus V$ 的 Θ^V 的子集，并且决定公理在 $V[G]$ 中成立。

定理 5.2. 假设 ZF + 决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$”。假设 Θ 是奇异的，并令 $\mathbb{P}$ 为遗传序数可定义集中的 $\mathrm{Add}(\Theta, 1)$，其中 $\mathrm{Add}(\Theta, 1) = \{p \mid p\colon \gamma \to 2$ 对某个 $\gamma < \Theta\}$成立。那么，对于任意在 V 上关于 $\mathbb{P}$ 的泛型滤子 G，决定公理在 $V[G]$ 中失效。

定理 5.1 的证明。 在定理的整个证明过程中，我们记 λ 为 Θ^V。我们通过讨论 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 是否成立这两种情形来证明该定理。

情形 1。 当 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 不成立时。

由于 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ 不成立，而我们假设 AD^+ 且 $V = \mathrm{L}(\wp(\mathbb{R}))$，根据定理 2.9，存在一个由序数组成的集合 T，使得 $V = \mathrm{L}(T, \mathbb{R})$。在情形 1 的论证中，我们始终固定这样一个 T。

令 $\mathbb{P}$ 为 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中的 $\mathrm{Add}(\lambda,\ 1)$，其中 $\mathrm{Add}(\lambda,\ 1)\ =\{p\mid p\colon\ \gamma\to 2=\{0,1\}$，对某个 $\gamma<\lambda\}$ 成立。由于 $\mathbb{P}$ 是在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中计算的，且 $\lambda=\Theta^V$ 是 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中的不可达基数，因此偏序集 $\mathbb{P}$ 可视为 λ 上的偏序集。

我们将证明，在情形 1 中，$\mathbb{P}$ 是所需的偏序集；也就是说，$\mathbb{P}$ 添加了 $\lambda=\Theta^V$ 的一个子集，同时在情形 1 中保留决定公理。

设 G 是 V 上的任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子。那么，函数 $\bigcup G\colon\ \lambda\to 2$ 可视为 λ 的一个子集；由 G 在 V 上的泛型性可知，该子集不属于 V。因此，偏序集 $\mathbb{P}$向 V添加了 λ 的一个新子集。

我们将证明决定公理在 $V[G]$中成立。首先证明偏序集 $\mathbb{P}$ 不会添加 λ的任何有界子集：

断言 1. 对于任意 $\gamma<\lambda$，有 $\wp(\gamma)^V=\wp(\gamma)^{V[G]}$。特别地，$\mathbb{R}^V=\mathbb{R}^{V[G]}$。

断言 1 的证明。 设 γ 是小于 λ 的一个序数，且 $f\colon\ \gamma\to 2$ 属于 $V[G]$。我们将证明f 属于 V。

设 $\dot{f}$ 是一个带有 $\dot{f}^G=f$ 的 $\mathbb{P}$-名称。由于 $\mathbb{P}$ 可以看作定义在 λ 和 f 上的偏序集：$\gamma\to 2$，我们可以假设 f 是 $\lambda\times\gamma\times 2$ 的子集。由于 $V=\mathrm{L}(T,\mathbb{R})$ 且 f 属于 V，我们有 $\dot{f}$ 对某个实数 x 是序数可定义的$^{\{T,x\}}$。于是，由于 f 本质上是一个序数集，f 属于遗传序数可定义集$^{\{T,x\}}$。根据定理 2.10，我们有 $\mathrm{HOD}^{\{T,x\}}=\mathrm{HOD}_{\{T\}}[x]$ 且 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}=\mathrm{L}[T,Z]$，其中 Z 是 λ的某个子集。由于 $f=\dot{f}^G$，可知 f 属于 $\mathrm{HOD}_{\{T,x\}}[G]=\mathrm{HOD}_{\{T\}}[x][G]$。

设 $\mathbb{Q}_1$ 是用于在遗传序数可定义集$^{\{T\}}$中添加 2^ω 的一个元素的 Vopěnka代数。于是，实数 x 在遗传序数可定义集$^{\{T\}}$ 上诱导出一个 $\mathbb{Q}_1$-泛型滤子 h_x，使得 $x\in\mathrm{HOD}_{\{T\}}[h_x]$。由于 G 被选为在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型，它也是在遗传序数可定义集$_{\{T\}}[h_x]$上的 $\mathbb{P}$-泛型。因此，滤子 $G\times h_x$ 是在遗传序数可定义集$^{\{T\}}$上的$\mathbb{P}\times\mathbb{Q}_1$-泛型，并且 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[x][G]\subseteq HOD_{\{T\}}[h_x][G]=\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G][h_x]$。

由于 f 属于遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]$中一个充分大的基数，并令 ν 为遗传序数可定义集$=V_\nu$ 中的$_{\{T\}}[G]$。由遗传序数可定义集$^{\{T\}}$中 $\mathbb{P}$的$<\lambda$-闭性，序数 λ在遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]$中是正则的。由于遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]$是 ZFC 的一个模型，遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]$中存在 N的一个初等子结构 X，使得 $\gamma+1\subseteq X$、$X\cap\lambda\in\lambda$、X的大小小于 λ，并且 T、Z、G、$\mathbb{P}$、$\mathbb{Q}_1$、$\tau\in X$。令 M为 X 的传递塌缩，并令 $\pi\colon\ M\to X$ 为塌缩映射的逆。再令 $\kappa=X\cap\lambda$，则 κ 是 π 的临界点，且 $\pi(\kappa)=\lambda$。对于任意 $a\in X$，我们用 $\bar{a}$ 表示 $\pi^{-1}(a)$，即 $\pi(\bar{a})=a$。

我们断言 M属于遗传序数可定义集$^{\{T\}}$。令 $g=\bigcup G$。那么，根据 G的泛型性，我们有$g\colon\ \lambda\to 2$。由于 G可由 g直接定义，因此我们有遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]=$遗传序数可定义集$_{\{T\}}[g]$。回想一下，遗传序数可定义集$^{\{T\}}=\mathrm{L}[T,Z]$，所以遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]=\mathrm{L}[T,Z][G]=\mathrm{L}[T,Z][g]$。因此，模型 M具有 $\mathrm{L}_\mu[T,Z][\bar{g}]$ 的形式，其中 μ。由于 Z 是 λ的子集，我们有 $Z=Z\cap\kappa$，因此 $Z\in$属于遗传序数可定义集$^{\{T\}}$。由于 T是遗传序数可定义集$_{\{T\}}[G]$中大小小于 λ的序数集，根据遗传序数可定义集$^{\{T\}}$中 $\mathbb{P}$的 $<\lambda$-闭包，集合 T属于遗传序数可定义集$^{\{T\}}$。由于 $g\colon\ \lambda\to 2$，我们有 $\bar{g}=g\restriction\mu$，它属于 $\mathbb{P}$。因此，$\bar{g}$属于遗传序数可定义集$^{\{T\}}$。由于 $M=\mathrm{L}_\mu[T,Z,\bar{g}]$，模型 M属于遗传序数可定义集$^{\{T\}}$，证毕。

令 $h_x=\{\bar{q}\mid q\in h_x\cap X\}$。我们断言，$h_x$ 是 M上的 $\mathbb{Q}_1$-泛型。回想一下，$\mathbb{Q}_1$ 是用于在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中添加 2^ω 的 Vopěnka代数。根据引理 2.12，我们可以假设 $\mathbb{Q}_1$ 位于 $\Theta^V=\lambda$ 上，并且 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中满足 λ-链条件。设 A 是 $\mathbb{Q}_1$ 中的一个极大反链，且 A 属于 M。我们将验证 $A\cap h_x\neq\emptyset$。由于 $\mathbb{P}$ 是 $<\lambda$-闭的，并且 $\mathbb{Q}_1$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中满足 λ-链条件，根据引理 2.13，偏序集 $\mathbb{Q}_1$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G]$中仍满足 λ-链条件。由 π的初等性，偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 M中满足 κ-链条件。特别地，反链 A 的大小小于

M中的 κ。由于 $\mathbb{Q}_1$位于 λ上，偏序集 $\mathbb{Q}_1$在 M中位于 κ上。因此，反链 A是 κ的一个有界子集。由于 κ 是 π的临界点，我们有 $\pi(A) = A$。

由 π的初等性可知，反链 $\pi(A) = A$ 在遗传序数可定义集 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G]$中的 $\mathbb{Q}_1$ 里是极大的。由于 M属于 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$，且 A属于 M，反链 A在遗传序数可定义集 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中的 $\mathbb{Q}_1$里也同样是极大的。由 h_x 在遗传序数可定义集 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$之上的泛型性可知，集合 $A \cap h_x$ 非空。令 q 为 $A \cap h_x$的一个元素。由于 A 属于 M 且 M 是传递的，因此条件 q 属于 M。由于 $\mathbb{Q}_1$ 在 λ上，$\pi(\kappa) = \lambda$、q和 $q \in h_x \cap M$，我们有 $\pi(q) = q$，因此 $q \in h_x$。所以，$q \in A \cap h_x$，且集合 $A \cap h_x$ 非空，正如所需。

由于偏序集 $\mathbb{Q}_1$在 M中满足 κ-链条件（c.c.），由一个标准论证可知，可以将嵌入 $\pi\colon M \to N$提升为初等嵌入 $\hat{\pi}\colon M[h_x] \to N[h_x]$，使得 $\hat{\pi}(h_x) = h_x$。

我们现在论证函数 f 属于 V。只需验证 f 属于 $M[h_x]$，因为 M 属于 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$、$\mathrm{HOD}_{\{T\}} \subseteq V$ 和 $h_x = \{\bar{q} \mid q \in h_x \cap X\} = \{q \mid q \in h_x \cap X\} = \mathbb{Q}_1 \cap h_x$。回想一下，$\tau$ 是 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中的一个 $\mathbb{Q}_1$-名称，满足 $\tau^{h_x} = \dot{f}$；而 $\dot{f}$ 是 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[h_x]$ 中的一个 $\mathbb{P}$-名称，满足 $\dot{f}^G = f$。由于 τ 属于 X，令 $\dot{g} = \bar{\tau}^{\bar{h}_x}$ 和 $g = \dot{g}^{\bar{G}}$，我们有 $\hat{\pi}(g) = f$。由 $\hat{\pi}$ 的初等性，集合 g 是从 $\pi^{-1}(\gamma)$ 到 2 的函数。现在我们验证 $f = g$，这将推出 f 属于 $M[h_x]$，因为 g 属于 $M[h_x]$。由于 $\gamma + 1 \subseteq X$，我们有 $\pi \restriction (\gamma + 1) = \mathrm{id}$。因此 $\pi^{-1}(\gamma) = \gamma$ 且 $g\colon \gamma \to 2$。此外，由于 $\hat{\pi}(g) = f$，根据 $\hat{\pi}$ 的初等性，对于任意 $\alpha < \gamma$ 和 $i < 2$，我们有 $g(\alpha) = i$ 当且仅当 $f(\alpha) = i$。因此，$f = g$，如所求。

这就完成了断言 1 的证明。 □

根据断言 1，我们知道 $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[G]}$。因此，对于 $\mathbb{R}^V$ 或 $\mathbb{R}^{V[G]}$，我们只需写作 $\mathbb{R}$。回想一下，我们将 Θ^V记作 λ。

现在我们证明 $\mathbb{P}$ 不会向 V添加任何实数集：

断言 2. 等式 $\wp(\mathbb{R})^V = \wp(\mathbb{R})^{V[G]}$ 成立。

断言的证明 2. 设 A 是 $V[G]$ 中的任意实数集。我们将证明 A 也属于 V。

我们首先断言，λ在 $V[G]$ 和 $\lambda = \Theta^{V[G]}$中是正则的。令 $\mathbb{Q}_\omega$ 为用于在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中添加 2^ω 的一个元素的 Vopěnka 代数的有限支撑直极限。于是根据引理 2.12，偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$ 中满足 λ-链条件，并且存在一个 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型滤子 H，使得在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$上有 $V = \mathrm{L}(T, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{HOD}_{\{T\}}[H]$，且集合 $\mathbb{R}$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H]$中是可数的。由于 $\mathbb{P}$在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中是 $<\lambda$-闭的，而 $\mathbb{Q}_\omega$在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$中满足 λ-链条件，根据引理 2.13，偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G]$中仍满足 λ-链条件，并且滤子 H也在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G]$上是 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型的。因此，λ在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G][H]$中仍是正则不可数的，滤子 $G \times H$在 $\mathrm{HOD}^{\{T\}}$上是 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}_\omega$-泛型的，并且 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[G][H] = \mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$。所以，$\lambda$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$中仍是正则不可数的。由于 $V[G] \subseteq \mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$，序数 λ在 $V[G]$中也是正则的。此外，由于 $\mathbb{R}$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H]$和 $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[G]}$中是可数的，而 $V[G] \subseteq \mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$，序数 $\Theta^{V[G]}$在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$中至多为 ω_1。由于 λ在 $\mathrm{HOD}_{\{T\}}[H][G]$中是正则不可数的，我们有 $\Theta^{V[G]} \leq \lambda$。由于 $V \subseteq V[G]$ 且 $\lambda = \Theta^V$，不等式 $\lambda \leq \Theta^{V[G]}$ 也成立。因此，$\lambda = \Theta^{V[G]}$，如所需。

令 ν 为 $V[G]$ 中一个充分大的基数，并令 N 在 $V[G]$中为 V_ν。由于 $V = \mathrm{L}(T, \mathbb{R})$，模型 N 具有 $\mathrm{L}_\nu(T, \mathbb{R})[G]$的形式。由于 N 的每个元素都可由 T, G（一个序数）和某个实数定义，而 λ 在 $V[G]$ 和 $\lambda = \Theta^{V[G]}$中是正则的，因此可以找到 N 在 $V[G]$ 中的一个初等子结构 X，使得 $\mathbb{R} \subseteq X, \lambda \cap X \in \lambda$，结构 X 是 $\mathbb{R}$的满射像，并且 $T, \mathbb{P}, G, A \in X$。令 M 为 X 的传递塌缩，并令 $\pi\colon M \to X$

为塌缩映射的逆。于是令 $\kappa = \lambda \cap X$， π 的临界点为 κ，且$\pi(\kappa) = \lambda$。对于 X 中任意 a，记 $\bar{a}$ 为 $\pi^{-1}(a)$，即 $\pi(\bar{a}) = a$。

我们将完成对集合 A 属于 V 的论证。由于 $\mathbb{R}$ 包含于 M，且 $\pi(A) = A$，我们有 $A = A$，并且集合 A 属于 M。因此，只需验证模型 M 属于V。回想一下， $g = \bigcup G$和 $g\colon\ \lambda \to 2$。由于 G可由 g 简单定义，我们有 $N = \mathrm{L}_\nu(T, \mathbb{R})[G] = \mathrm{L}_\nu(T, \mathbb{R})[g]$。由于 N 具有 $\mathrm{L}_\nu(T, \mathbb{R})[g]$ 的形式， X 是 $V[G]$ 中 $\mathbb{R}$ 的满射像，且 $\lambda = \Theta^{V[G]}$，由此可得 M具有 $\mathrm{L}_\mu(\bar{T}, \mathbb{R})[\bar{g}]$ 的形式，其中某个序数 $\mu < \lambda$。由于 $\mu < \lambda$，集合 T是 $V[G]$中 λ 的有界子集。根据断言 1，集合 T 也属于V。由于 $g\colon\ \lambda \to 2$，且 $\pi(\kappa) = \lambda$，我们有 $\bar{g} = g \restriction \kappa$，并且 $\bar{g}$ 属于 $\mathbb{P}$。因此， $\bar{g}$ 也属于 V。由于 $M = \mathrm{L}_\mu(T, \mathbb{R})[\bar{g}]$，模型 M属于 V，且集合 A属于 V，如所需。

这就完成了断言 2 的证明。 □

由断言 1 和断言 2，我们得到 $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[G]}$ and $\wp(\mathbb{R})^V = \wp(\mathbb{R})^{V[G]}$。由于我们假设 V 中的决定公理，因此决定公理在 $V[G]$ 中也成立。

当决定公理$_{\mathbb{R}}$ 不成立时，这就完成了情形 1 下定理 5.1 的论证。

情形 2。 当决定公理$_{\mathbb{R}}$ 成立时。

回顾一下，我们将 λ 记作 Θ^V。令 $\mathbb{P}$ 为遗传序数可定义集 HOD 中的 Add(λ, 1)，其中 Add(λ, 1) $= \{p \mid p\colon\ \gamma \to 2 = \{0,1\}$，对某个 $\gamma < \lambda\}$ 成立。由于 $\mathbb{P}$ 在遗传序数可定义集 HOD 中计算，且 $\lambda = \Theta^V$ 在遗传序数可定义集 HOD 中是不可达基数，因此集合 $\mathbb{P}$ 可视为 λ上的偏序集。令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子。我们将证明决定公理在 $V[G]$中成立。

断言 3。 力迫 $\mathbb{P}$ 不会添加任何新的实数集，即 $\wp(\mathbb{R})^V = \wp(\mathbb{R})^{V[G]}$。

断言 *3* 的证明。 我们将证明，对于任意 $f\colon\ \mathbb{R}^V \to 2$ in $V[G]$，函数 f也属于 V。由于 $V[G]$ 中的任意实数都可以简单地编码为 $V[G]$中 $\mathbb{R}^V$ 的一个子集，这就表明$\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[G]}$ and $\wp(\mathbb{R})^V = \wp(\mathbb{R})^{V[G]}$ 也成立。

从现在起，我们用 $\mathbb{R}$ 表示 $\mathbb{R}^V$。

子断言 1。 对于某个序列 $s \in \lambda^\omega$，函数 f 属于 $\mathrm{HOD}_{\{s\}}(\mathbb{R})[G]$。

子断言 *1* 的证明。 设 $\dot{f}$ 是一个满足 $\dot{f}^G = f$的 $\mathbb{P}$-名称。由于 $\mathbb{P}$ 可以视为定义在 λ上的偏序集，我们不妨假设 f可以视为 $\lambda \times \mathbb{R} \times 2$的一个子集。为简便起见，我们将 f视为 $\lambda \times \mathbb{R}$的一个子集。

由于 $V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$，存在一个实数集 A，使得 $\dot{f}$ 可由 A序数定义。对于每个 $\alpha < \lambda$，令 $X_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid (\alpha, x) \in f\}$，并令 ξ_α为满足 $X_\xi = X_\alpha$的最小序数 $\xi < \lambda$。对于$\alpha, \beta < \lambda$，若 $\xi_\alpha \leq \xi_\beta$，则记作 $\alpha \preceq \beta$。于是，结构 $(\lambda, \preceq)$ 是一个拟良序。令$\pi\colon (\lambda, \preceq) \to (\gamma, \leq)$ 为 Mostowski 崩塌映射。对于每个 $\delta < \gamma$，令 $\eta_\delta = \min \pi^{-1}(\delta)$，并令 $Y_\delta = X_{\eta_\delta}$。设 $Y = (Y_\delta \mid \delta < \gamma)$。

由于 $\dot{f}$是序数可定义的 由 A 可得，因此 π 也是如此。此外， π 本质上是一个序数集，因此 π 属于遗传序数可定义集$_{\{A\}}$。

接下来我们验证，存在一个实数集 B，使得 Y 属于 $\mathrm{L}(B, \mathbb{R})$。由于在情形 2 中我们有 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，根据定理 2.6，存在一个实数集 B_0，它不能由 A 和任意实数序数可定义。由于 f 可由 A序数可定义， Y 也如此。因此，每个实数集 Y_δ 都可由 A序数可定义。根据 ZF +AD 下的 Wadge 引理，每个 Y_δ 都是 Wadge 可约于 B_0。特别地，存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\{Y_\delta \mid \delta < \gamma\}$ 的满射，它属于 $\mathrm{L}(B_0, \mathbb{R})$。由于序列 $Y = (Y_\delta \mid \delta < \gamma)$ 是单射，$\mathrm{L}(B_0, \mathbb{R})$ 中也存在一个满射 $\rho\colon\ \mathbb{R} \to \gamma$。令 $B_1 = \{x * y \mid x \in Y_{\rho(y)}\}$，其中

$x*y(2n) = x(n)$ 和 $x*y(2n+1) = y(n)$ 对所有 $n \in \omega$ 都成立。于是 Y 属于 $\mathrm{L}(\rho,\ B_1,\ \mathbb{R})$。因此，令 $B = B_0 \oplus B_1 = \{x*y \mid x \in B_0$ 和 $y \in B_1\}$，我们有 Y 属于 $\mathrm{L}(B,\ \mathbb{R})$，如所需。

现在我们证明，对于某个序数 α，π 属于遗传序数可定义集$\{A\}$，且 Y属于 $\mathrm{L}(B,\ \mathbb{R})$，令 $C = A \oplus B$，可得 π 属于遗传序数可定义集$\{C\}$，且 Y属于 $\mathrm{L}(C,\ \mathbb{R})$。由于情形 2 中有 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，由引理 2.14，存在一个 $s \in (\Theta^V)^\omega = \lambda^\omega$，使得 C 可由 s 序数定义，且 C 属于遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})$。因此，π 和 Y 都属于遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})$。由于 f 可由 π 和 Y简单定义，因此 f 属于遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})$，证毕。

由于 $f = \dot{f}^G$ 和 $\dot{f}$ 属于遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})$，可得 f 属于遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})[G]$。

这就完成了子断言 1 的证明。 □

由于我们假设 $\lambda = \Theta^V$ 在 V中是正则的，且 $s \in \lambda^\omega \cap V$，我们可以选取一个序数$\gamma < \lambda$ 使得 $s \in \gamma^\omega$。令 $\mathbb{Q}_1$ 为用于在遗传序数可定义集中添加 γ^ω 的一个元素的 Vopěnka代数，并令 $h_s = \{p \in \mathbb{Q}_1 \mid s \in \pi_1(p)\}$，其中 $\pi_1\colon\ \mathbb{Q}_1 \to \mathcal{O}_1$ 如定义 2.11 所述。于是根据引理 2.15，我们有 h_s 是遗传序数可定义集上的一个 $\mathbb{Q}_1$-泛型滤子，且遗传序数可定义集$[h_s]$ =遗传序数可定义集$\{s\}$。

子断言 2. 序数 λ 在遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})[G]$ 中是正则的，并且在遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R})[G]$中不存在从 $\mathbb{R}^V$到 λ 的满射。

子断言 *2* 的证明。令 $\mathbb{Q}_\omega$ 为用于在遗传序数可定义集中添加 γ^ω 的元素的 Vopěnka 代数的有限支撑极限。由于 $\mathbb{Q}_1$ 是 $\mathbb{Q}_\omega$的完备子序，根据引理 2.15，存在一个遗传序数可定义集上的 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型滤子 H，使得 $h_s \in$遗传序数可定义集$[H]$，并且集合 $(\gamma^\omega)^V$ 在遗传序数可定义集$[H]$中是可数的。特别地，遗传序数可定义集$\{s\}(\mathbb{R}) \subseteq$ 遗传序数可定义集$[h_s](\mathbb{R}) \subseteq$ 遗传序数可定义集$[H]$，且 $\mathbb{R}^V$ 在遗传序数可定义集$[H]$中是可数的。由于在情形 2 中我们有 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，根据引理 2.15，偏序集 $\mathbb{Q}_\omega$ 的大小小于$\Theta^V = \lambda$。由于 $\mathbb{P}$ 在遗传序数可定义集中是 $<\lambda$-闭的，且 G 是遗传序数可定义集上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子，我们有遗传序数可定义集$[G]$ 中的 $\mathbb{Q}_\omega$ 的任何子集也属于遗传序数可定义集。因此，滤子 H 也是遗传序数可定义集$[G]$ 上的 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型滤子。

现在我们论证，λ 在 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$中是正则的。由于 $\mathbb{P}$ 在 HOD 中是 $<\lambda$-闭的，且 G 在 HOD 上是$\mathbb{P}$-泛型的，序数 λ 在 HOD$[G]$中仍然是正则的。此外，由于 $\mathbb{Q}_\omega$ 在 HOD 中的大小小于 λ，且 H 在 HOD$[G]$上是 $\mathbb{Q}_\omega$-泛型的，序数 λ 在 HOD$[G][H]$中也是正则的。由于 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G] \subseteq$ HOD$[H][G]$ =HOD$[G][H]$，序数 λ 在 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$中是正则的，正如所需。

接下来我们证明，在 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$中不存在从 $\mathbb{R}^V$ 到 λ 的满射。由于 $\mathbb{R}^V$ 在 HOD$[H]$ 中是可数的，而 λ 在 HOD$[H][G]$中是正则不可数的，因此在 HOD$[H][G]$中不存在从 $\mathbb{R}^V$到 λ 的满射。由于 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G] \subseteq$ HOD$[H][G]$，在 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$中不存在从$\mathbb{R}^V$ 到 λ 的满射，正如所需。

这就完成了子断言 2 的证明。 □

回忆一下，$\mathbb{Q}_1$ 是用于添加 γ^ω 的一个元素的 Vopěnka代数，而 h_s 是由 s 导出的、基于 HOD 的 $\mathbb{Q}_1$-泛型滤子，且 HOD$[h_s]$ = HOD$\{s\}$。由于在情形 2 中我们有 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$，根据引理 2.15，偏序集 $\mathbb{Q}_1$ 在 HOD 中的大小小于 $\Theta^V = \lambda$。因此，滤子 h_s 本质上是 λ的一个有界子集。由于我们假设 ZF + AD^+ + “$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”，根据定理 2.4，存在一个集合 $Z \subseteq \Theta^V = \lambda$，使得 HOD = L$[Z]$。因此，模型 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$ 具有如下形式：$\mathrm{L}(Z,\ h_s,\ \mathbb{R})[G]$，其中 Z是 λ 的一个子集，而 h_s是 λ的一个有界子集。根据子断言 1，函数 f 属于模型 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$。

现在我们可以完成断言 3 的论证了；这些论证与断言 2 的论证类似。设 ν 是 HOD$\{s\}(\mathbb{R})[G]$ 中的一个足够大的基数，并设 N 是 V_ν，属于 $V[G]$。令$g = \bigcup G$。那么，根据 G的泛型性，我们有 $g\colon\ \lambda \to 2$。由于 G 可由以下对象简单定义：

g，我们也有 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})[G] = \mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})[g]$。由于 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R}) = \mathrm{L}(Z, h_s, \mathbb{R})$，模型$N$具有如下形式：$\mathrm{L}_\nu(Z, h_s, \mathbb{R})[G] = \mathrm{L}_\nu(Z, h_s, \mathbb{R})[g]$。由于 N的每个元素都可由 Z、h_s、g（一个序数）和某个实数定义，而 λ 在 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})[G]$ 中是正则的；又根据子断言 2，在 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})[G]$ 中不存在从 $\mathbb{R}$ 到 λ 的满射，因此可以在 $\mathrm{HOD}^{\{s\}}(\mathbb{R})[G]$ 中找到 N 的一个初等子结构 X，使得 $\mathbb{R} \subseteq X, \lambda \cap X \in \lambda$，结构 X 是 $\mathbb{R}$的一个满射像，并且 $Z, \mathbb{P}, h_s, G, f \in X$。设 M为 X的传递塌缩，并令π: $M \to X$ 为塌缩映射的逆。于是令 $\kappa = \lambda \cap X$， π 的临界点为 κ，且 $\pi(\kappa) = \lambda$。对于 X中的任意 a，记 $\bar{a}$ 为 $\pi^{-1}(a)$，即 $\pi(\bar{a}) = a$。

我们将完成关于函数 f 属于 V 的论证。f 属于 $\mathbb{R}^M$，因此 M 只需验证模型 $M^{\bar{\ }}$ 属于 V。由于 N具有 $\mathrm{L}_\nu(Z, h_s, \mathbb{R})[g]$的形式，集合 M具有 $\mathrm{L}_\mu(Z, H_s, \mathbb{R})[\bar{g}]$ 的形式，其中某个序数为 μ。由于 Z 是 λ的子集，我们有 $Z = Z \cap \kappa$，它属于 V。滤子 h_s实质上是 λ 的有界子集，且 h_s 属于 X。因此，根据 X的初等性，我们有 $h_s \subseteq X$，由此可得 $h_s = h_s$，它也属于 V。由于 g: $\lambda \to 2$，我们有 $\bar{g} = g \restriction \kappa^{\bar{\ }}$，所以 $\bar{g}$属于 $\mathbb{P}$。因此我们有 $\bar{g} \in V$。由于 $M = \mathrm{L}_\mu(Z, h_s, \mathbb{R})[\bar{g}]$，模型 M属于 V，从而函数 f 属于 V，证毕。

断言 3 的证明至此完成。 □

由断言 3 可得 $\wp(\mathbb{R})^{V[G]} = \wp(\mathbb{R})^V$。由于 AD 在 V 中成立，因此在 $V[G]$ 中也成立，正如所需。
这就完成了情形 2 中 $\mathrm{AD}_\mathbb{R}$ 成立时定理 5.1 的证明。
定理 5.1 的证明至此完成。 □

定理 *5.2* 的证明。设 G 是 V 上任意一个 $\mathbb{P}$-generilc 滤子。我们将证明 AD 在$V[G]$中不成立。为导出矛盾，我们假设 AD 在 $V[G]$ 中成立。

由于我们在 V 中有 ZF + AD^+ + "$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$"，由定理 3.1，只需证明 $\mathbb{P}$ 增加了 Θ，即 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$。

设 γ 是 V 中 Θ 的共尾数。由于 Θ 在 V 中是奇异的，因此我们有 $\gamma < \Theta$。

我们将证明在 $V[G]$ 中存在从 Θ^V 到 $\wp(\gamma)^{V[G]}$ 的单射，这将推出 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$，证明如下：由于我们假设 $V[G]$ 中成立决定公理，根据定理 2.8，存在从 $\mathbb{R}^{V[G]}$ 到 $\wp(\gamma)^{V[G]}$ 的满射，且该满射属于 $V[G]$。由于存在从 Θ^V 到 $\wp(\gamma)^{V[G]}$ 的单射，因此存在从 $\mathbb{R}^{V[G]}$ 到 Θ^V 的满射，且该满射属于 $V[G]$。根据 $\Theta^{V[G]}$ 的定义，我们可得 $\Theta^V < \Theta^{V[G]}$，证毕。

我们将构造一个函数 ι: $\Theta^V \to \wp(\gamma)^{V[G]}$，它属于 $V[G]$，并验证其为单射。由于 $\mathbb{P} = \mathrm{Add}(\Theta, 1)$ 属于遗传序数可定义集，且 G 在 V 上是 $\mathbb{P}$-泛型，因此集合 $g = \bigcup G$ 是一个从 Θ^V 到 $2 = \{0, 1\}$ 的函数。由于 γ 是 V 中 Θ 的共尾数，我们可以固定一个 V 中的 Θ 内的共尾递增序列 $(\beta_\alpha$: $\alpha < \gamma)$。对于每个 $\delta < \Theta^V$，令 a_δ 为 V 中的 Θ 内的序列 $(\beta_\alpha + \delta \mid \alpha < \gamma)$。现在令 $\iota(\delta) = \{\alpha < \gamma \mid g\big(a_\delta(\alpha)\big) = 1\}$。那么对于每个 $\delta < \Theta^V$， $\iota(\delta)$ 是 γ 的子集。

我们将验证函数 ι: $\Theta^V \to \wp(\gamma)^{V[G]}$ 是单射。设 δ, ϵ 是小于 Θ^V 的不同序数。我们将证明 $\iota(\delta) \neq \iota(\epsilon)$。首先注意，函数 a_δ 和 a_ϵ 处处不同：对于所有 $\alpha < \gamma$，都有 $a_\delta(\alpha) = \beta_\alpha + \delta \neq \beta_\alpha + \epsilon = a_\epsilon(\alpha)$。现在，由于 a_δ 和 a_ϵ 处处不同，且二者都属于 V，根据 G 的泛型性，存在一个 $\alpha < \gamma$，使得 $g\big(a_\delta(\alpha)\big) \neq g\big(a_\epsilon(\alpha)\big)$，因此 $\alpha \in \iota(\delta) \triangle \iota(\epsilon)$。所以，我们得到 $\iota(\delta) \neq \iota(\epsilon)$，证毕。

定理 5.2 的证明至此完成。 □

6. Questions

我们以提出两个问题结束本文。

问题 6.1. 假设 ZF + 决定公理。令 $\mathbb{P}$ 为一个添加新实数的偏序集，并令 G 在 V上是$\mathbb{P}$-泛型。那么，决定公理在 $V[G]$中必定失效吗?

若要对问题 6.1 回答“否”，就需要找到一个能大幅改变 Θ 以下基数结构的偏序集，具体如下：Woodin 证明，若存在一个添加新实数同时保留决定公理真值的偏序集，那么该偏序集必定压塌 ω_1。此外，根据定理 3.1，若这种偏序集存在于一个满足 ZF +决定公理$^+$ +“$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”的模型中，那么该偏序集必须保留 Θ。此外，根据 Chan 和 Jackson 对 [2, 引理 2.10] 的论证，若一个偏序集添加新实数同时保留决定公理真值，那么其泛型扩张中某个基数的任何弱分割性质，都不能由基模型中的闭无界集来见证。因此，若这种偏序集也保留 Θ ，那么对于 κ 以下共尾多个基数，该偏序集必须在 κ 中射击一个闭无界集，而该集合不包含基模型 κ 中的任何闭无界集。

关于 ZF 上的力迫，我们还有许多未知之处，尤其是当 Θ 为奇异时。在这些问题中，有一个是：定理 5.1 中“Θ 为正则”这一假设是否必不可少：

问题 6.2。 假设 ZF + AD$^+$ +“$V = \mathrm{L}\big(\wp(\mathbb{R})\big)$”。设 Θ 为奇异。那么，是否存在某个偏序集，在保持 AD 的同时添加 Θ的新子集?

References

[1] William Chan. 决定性公理组合学导论。载于集合论趋势，第 752 卷当代数学，第 21–75 页。美国数学会，2020年。[2] William Chan 和 Stephen Jackson。对 $\mathbb{R}$ 上的决定公理的力迫破坏，其中Θ 是正则的。以色列数学杂志，241(1):119–138，2021年。[3] Daniel W. Cunningham。关于在 $L(\mathbb{R})$上的力迫。数学与逻辑档案，2023年。即将出版。可见 https: //doi.org/10.1007/s00153-022-00844-4。[4] Thomas Jech。集合论。数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，2003年。第三个千年版，修订并扩充。[5] Akihiro Kanamori。更高的无穷：集合论中大基数的起源与发展。数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，第二版，2003年。[6] Alexander S. Kechris。决定性公理蕴含 $L(\mathbb{R})$中的依赖选择公理。符号逻辑杂志，49(1):161–173，1984年。[7] Paul B. Larson。决定性公理的扩展，2019年。一本关于 AD$^+$的在编著作。编写中。[8] Donald A. Martin 和 John R. Steel。Moschovakis 标度的树是齐次的。载于博弈、标度与 *Suslin* 基数：*Cabal* 研讨会，第一卷，逻辑讲义丛书第 31 卷，第 404–420 页。符号逻辑协会，伊利诺伊州芝加哥，2008年。[9] Yiannis N. Moschovakis。描述集合论，数学调查与专著第 155 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2009年。[10]Robert M. Solovay。依赖选择公理 DC 与决定公理 AD 的独立性。载于 Alexander S. Kechris 和 Yiannis N. Moschovakis 编，*Cabal Seminar 76–77*（*1976–1977*年加州理工学院—加州大学洛杉矶分校逻辑研讨会论文集），数学讲义第 689 卷，第 171–183 页。Springer，柏林，1978。[11] John R. Steel。$\mathbf{K}(\mathbb{R})$中的标度。载于博弈、标度与 *Suslin* 基数：*Cabal* 研讨会，第一卷，逻辑讲义丛书第 31 卷，第 176–208 页。符号逻辑协会，伊利诺伊州芝加哥，2008年。[12] John R. Steel 和 Nam Trang。AD$^+$、导出模型与 Σ_1-反射，2010年。预印本。可见 https://math.unt.edu/~ntrang/AD+reflection.pdf。

[13] Nam Trang。广义 *Solovay* 测度、*HOD* 分析与核心模型归纳。博士论文，2013。可见 https://math.unt.edu/~ntrang/thesis.pdf。[14] Robert Van Wesep。Wadge 度与描述集合论。载于 Alexander S. Kechris 和 Yiannis N. Moschovakis 编，*Cabal Seminar 76–77*（*1976–1977*年加州理工学院—加州大学洛杉矶分校逻辑研讨会论文集），数学讲义第 689 卷，第 151–170 页。Springer，柏林，1978。
（D. Ikegami） College of Engineering,
Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku,Minuma-Ward, Saitama City, 337-8570,
Saitama JAPAN电子邮箱，D. Ikegami：ikegami@shibaura-it.ac.jp（N. Trang）
Department of Mathematics, University of North Texas, 1155 Union Circle311430, Denton,
TX 76203-5017, USA电子邮箱，N. Trang：nam.trang@unt.edu