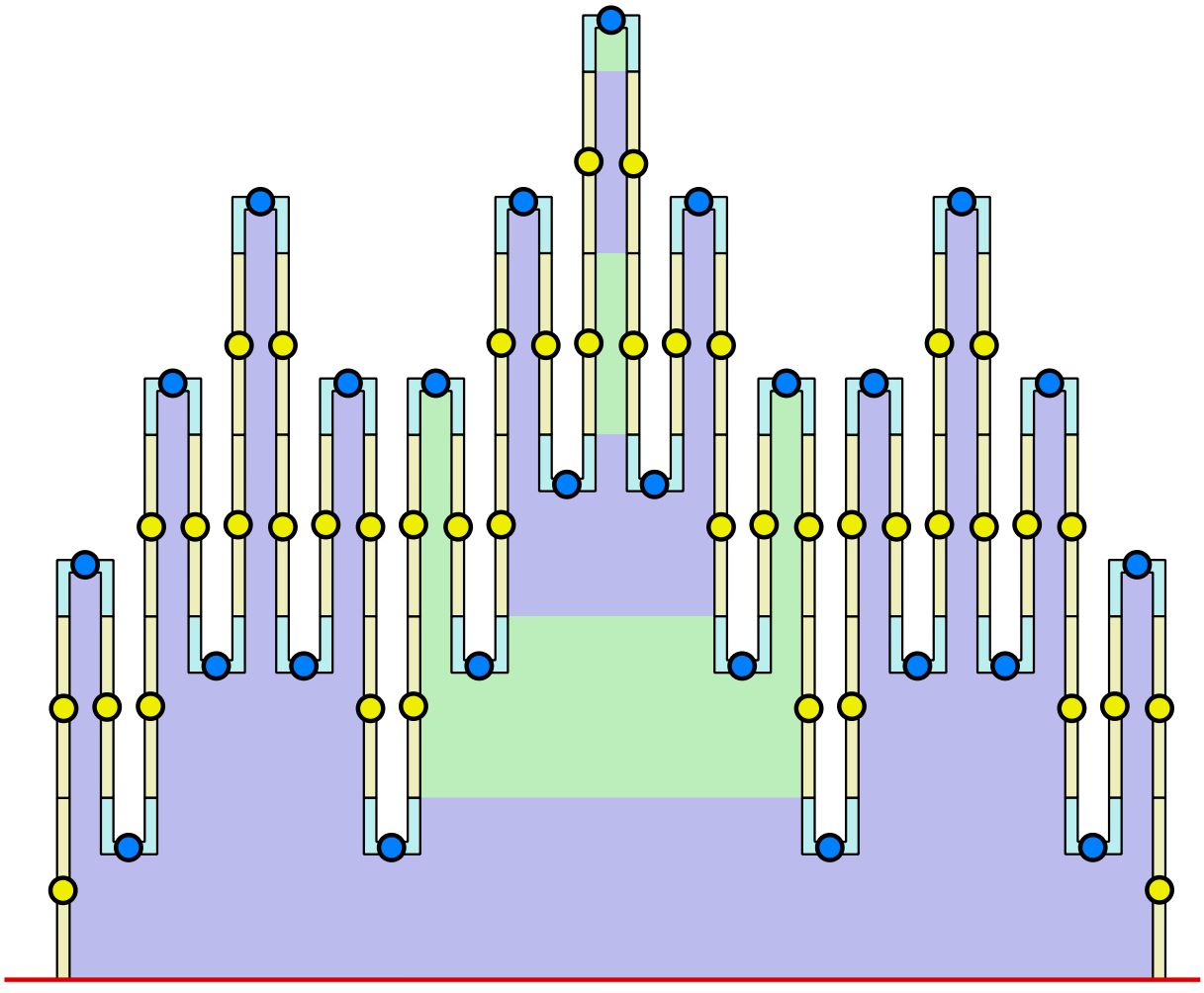
一部数学专著

斐波那契词上的替换绘图规则

英国开放大学的研究型理学硕士

Martin Hansen



理学硕士学位论文

Martin Hansen 的《斐波那契词上的替换绘图规则》。本论文为满足理学硕士学位的要求而撰写，由开放大学米尔顿凯恩斯数学与统计学院的 Reem Yassawi博士和 Dan Rust博士指导，学院位于英格兰。

献辞

献给 Helen，感谢她在过去一年里对这项事业始终如一的支持。

评阅与评论

“Martin 不仅以优异成绩通过了学位论文评审，还取得了极高的分数，在约八十名同届学生中名列前五。他在论文中展现了对多种高级组合方法和计算方法的熟练掌握，甚至证明了一些据我所知尚未见诸文献的初步命题；对于一名硕士生而言，这是一项了不起的成就。”

“Martin 在这项研究中运用了种类繁多、令人赞叹的数学方法和学科，包括但不限于词组合学、分形几何、线性代数、数论、数学归纳法和计算机可视化。这篇学位论文充满了详尽且论证严谨的证明与计算，堪称真正的杰作。”

“Martin 是一位出色的作者，能够以严谨且发人深省的方式阐述复杂的数学论证，同时又善于融入几分趣味与奇思妙想；阅读他的学位论文时，我对此深感愉悦。”

“Martin 的学位论文十分出色，读来令人愉悦，也着实令人印象深刻。除了出色的数学内容——有时错综复杂、颇费心思（但精准严谨）——以及他原创地从斐波那契词构造出一个分形（其中还运用了精美的计算机生成插图来阐释）之外，最令我注意到的是，Martin 显然乐在其中；他向读者传递了从事数学研究的喜悦与兴奋。”

“本学位论文中的许多证明都是马丁自己的成果，探讨了两种极其有趣的几何构造。我尤其欣赏马丁能够在整篇论文中反复运用前面章节中的引理和命题，这突显出论文各章节彼此关联，并逐步递进。这有助于构建出引人入胜且令人信服的叙述。”

关于斐波那契词的替换绘图规则

开放大学（英国）的研究型理学硕士

Martin Hansen

关于斐波那契词的替换绘图规则 ~ 开放大学（英国）研究型理学硕士 ~版本：1.2（在线版）在线发布：2nd 2023年4月 Martin Hansen 什鲁斯伯里 SY2 5DT mhh@shrewsbury.org.uk 07841 288198（仅限短信）

摘要

本文深入而聚焦地探讨了斐波那契替换及其产生的数学对象——斐波那契词。我们的研究兼具代数与几何性质；事实上，正是二者的结合构成了本文的整体特色。全文分为四个部分。第1章简要介绍所需的基础知识，包括定义、关键定理以及若干后文将广泛使用的技巧。第2章借助一种据认为原创的几何图形，探讨一维绘图规则；我们将这种图形称为“零偏差图”。本章的亮点是结尾处对一个非平凡结果所作的初等证明。第3章介绍二维绘图规则。尽管选取的是可能最简单的形式之一，但这次由规则生成的对象却是一个分形。文中证明了这一点，并计算了该分形的（豪斯多夫）维数。这个分形是文献中称为“斐波那契分形”的一种变体，或许此前尚未得到研究。作为全文总结，最后的第4章指出了前文中若干值得进一步分析的方面。

Martin Hansen 开放大学
2022年5月

使用的符号

除标准数学符号外，下列符号在本文中具有特定含义。

符号	含义
$\mathcal{A}$	字母表：一组字母
$\mathcal{D}_n$	第 n^{th} 个零结构偏差（n 是目录条目）。
$\dim_{SYM}$	分形的相似维数
$\mathcal{E}_n$	与嵌入词相关的铺砌片段
$\mathcal{F}_n$	斐波那契词，$\mathcal{F}_n = \theta^n(a)$
$\mathcal{F}_n^*$	去掉开头的（aba）后；$\mathcal{F}_n\mathcal{F}_n = (aba)\mathcal{F}_n^*$
$\lvert\mathcal{F}_n\rvert$	词 $\mathcal{F}_n$ 中字母的数量
$\vec{\mathcal{F}}_n$	相关路径起点与终点之间的位移向量
$\mathcal{F}$	无限斐波那契词
$\mathcal{G}_n$	增长图中的一段铺砌（n 是目录条目）
L_A	瓦片的长度（例如 A 型砖块）
$\mathbf{M}_\Phi$	关联矩阵（例如替换 Φ 的关联矩阵）
$\mathcal{T}_n$	最后两个字母互换后的 $\mathcal{F}_n$
$\mathcal{W}_n$	去掉最右侧两个字母后的斐波那契词 $\mathcal{F}_n$
$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$	相关路径起点与终点之间的位移向量
ϕ	黄金比例，$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
λ	一个特征值（λ_{PF} 是佩龙-弗罗贝尼乌斯特征值）。
θ	斐波那契替换（$a \to ab$，$b \to a$）
Θ	瓦片长度上的膨胀映射
□	表示证明结束

目录

第1章

斐波那契词

1.1 数学之美 07 1.2 定义 07 1.3 两个关键的形式语言排除规则 09 1.4 反代换 11 1.5 关联矩阵 12 1.6 关联铺砌几何 15 1.7 第1章作者注释 16

第2章

迭代函数系统绘制规则

2.1 数学 DNA 17 2.2 往返绘图规则 18 2.3 关于零偏差线 23 2.4 探索增长 26 2.5 探索 $n \equiv 0$ （模 3）情形 30 2.6 距原点有多远？34 2.7 第2章作者注释 38

第3章 自然界中的分形

3.1 概述 39 3.2 相似分形 39 3.3 双字母绘制规则 40 3.4 路径是分形吗？43 3.5 铺砌路径之间的向量关系 47 3.6 确定分形维数 52 3.7 第3章作者注释 54

第4章

未来方向

4.1 广义往返 55 4.2自避行走 57 4.3字母频率分析 58 4.4 对非周期对象的周期近似 58 4.5第4章作者注释 59

附录

A.1 缅怀 Uwe Grimm教授 60 A.2 分形绘图计算机程序 62

参考文献 63

6 斐波那契词上的替换绘图规则

字数：总计约 11853 词。

第1章			第2章			第3章			第4章		
Page	N°	总计	Page	N°	总计	Page	N°	总计	Page	N°	总计
07	467	00467	17	413	04110	39	256	07927	55	249	11228
08	270	00737	18	188	04298	40	195	08122	56	000	11228
09	346	01083	19	178	04476	41	315	08437	57	170	11398
10	475	01558	20	319	04795	42	312	08749	58	295	11693
11	533	02091	21	000	04795	43	257	09006	59	160	11853
12	299	02390	22	000	04795	44	103	09109			
13	384	02774	23	138	04933	45	171	09280			
14	383	03157	24	205	05138	46	293	09573			
15	232	03389	25	192	05330	47	182	09755			
16	308	03697	26	172	05502	48	063	09818			
			27	258	05760	49	000	09818			
			28	108	05868	50	111	09929			
			29	000	05868	51	227	10156			
			30	143	06011	52	329	10485			
			31	088	06099	53	233	10718			
			32	291	06390	54	261	10979			
			33	000	06390						
			34	314	06704						
			35	185	06889						
			36	264	07153						
			37	245	07398						
			38	271	07669						

第1章

斐波那契词

1.1 数学之美

数学常被数学家们形容为美。“美在观者眼中”，有人这样说。对我而言，数学之美在于：简单的思想能够孕育出有趣的对象，其可视化图形既能在纸上勾画出来，又具有非凡的性质和深度。在接下来的篇幅中，我们将阐释并探究一个迷人的对象——斐波那契词。为交代背景并使本书内容自成一体，本章首先简要介绍斐波那契词。这里介绍的基础知识广为人知。我们必然要从感兴趣对象的定义入手。这些定义经过有意删减，力求浅显易懂，使本书尽可能通俗易读。对于希望更深入了解基础理论，并了解这些理论如何融入更一般背景的读者，建议阅读 Pytheas Fogg 撰写的经典教材 [Fogg]。本章对既有文献的主要贡献，是将标准著作中的片段串联起来（例如 [BGr13], 和 [ASh03]），并采用统一的符号和术语。本章力求改进已有的阐释，理清各项内容之间的依存关系，并以流畅的叙述涵盖关键步骤，使内容自成一体。本章着重介绍构建斐波那契词所需的部分内容，为后续章节探讨相关可视化做好准备。斐波那契词真正的美，也正是从这里开始展现。

1.2 定义

根据定义，词是由元素构成的有限或无限序列，这些元素称为字母，且均取自一个称为字母表的有限集合。在本学位论文中，我们仅使用二字母字母表 $\mathcal{A} = \{ \mathrm{a}, \mathrm{b} \}$。例如，可以从该字母表中依次选取字母 a、b、a、a 和 b。然后，通过连接，便形成了词 abaab。连接即是按照从左到右的顺序，将所选字母简单地一个接一个排列起来，以形成一个词。词本身也可以连接。例如，将 aba 与 ab 连接，仍会形成词 abaab。这里的重点并不在于从字母表中随机选取字母来形成词，而是在于从最简单的词——一个孤立的字母 a——开始，并重复应用一种替换。一般而言，替换可以被视为“一种替换规则”。我们关注的是斐波那契替换，记作 θ. 给定一个词，斐波那契替换会将字母 a 的每次出现替换为字母对 ab，并将字母 b 的每次出现替换为字母 a。从数学上讲，θ 定义为：

$$a \to ab$$

$$b \to a$$

对初始字母 a 连续迭代应用三次后，通过以下步骤得到词 abaab，

$$a \to ab \to aba \to abaab$$

$\theta^3(a) = \text{abaab}$， $\mathcal{F}_3 = \text{abaab}$ 可以将其写成这样，但本文将始终完全聚焦于这一特定的简单情形：对一个初始的独立字母 a 连续迭代应用斐波那契替换。根据定义，第 n^{th} 个斐波那契词定义如下：

$$\mathcal{F}_n = \theta^n(a)$$

表 1.1 展示了初始字母 a 经过反复应用斐波那契替换后，生成的前几个斐波那契词。

n	$\mathcal{F}_n = \theta^n(a)$	|a|	|b|	$\lvert\mathcal{F}_n\rvert$
0	$= a\mathcal{F}_0$	1	0	1
1	$= ab\mathcal{F}_1$	1	1	2
2	$= aba\mathcal{F}_2$	2	1	3
3	$= abaab\mathcal{F}_3$	3	2	5
4	$= abaababa\mathcal{F}_4$	5	3	8
5	$= abaababaabaab\,\mathcal{F}_5$	8	5	13
6	$= abaababaabaababaababa\,\mathcal{F}_6$	13	8	21
7	$= abaababaabaababaababaabaababaabaab\,\mathcal{F}_7$	21	13	34

表 1.1：对初始字母 a 迭代应用斐波那契替换。

对于任何迭代过程而言，具有不动点性质的对象都值得关注。有鉴于此，请注意，与任意给定值 n 对应的词，都会出现在所有后续词的最左端。当 n 趋于无穷大时所得的无限不动词，被称为 斐波那契词，，并被描述为“无限词组合理论中研究最为深入的例子之一” [CRR14，第 40]。$\mathcal{F}_n$， $\mathcal{F}$

正如表 1.1 所示，连续的斐波那契词，中，字母 a 的出现次数（记作 ）、字母 b 的出现次数（记作 ）以及词长 都沿循举世闻名的斐波那契数列，该数列见表 1.2。稍加思考便可看出，表 1.1 中的数字模式直接源于斐波那契替换（$\text{a} \to \text{ab}$，$\text{b} \to \text{a}$）：前一个词中的每个字母都会在下一个词中产生一个字母 a；此外，前一个词中的每个字母 a 还会在下一个词中产生一个字母 b。$\mathcal{F}_n$ a| | |b，$\mathcal{F}_n$|

位置	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Term	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

表 1.2：斐波那契数列。

任意一个斐波那契词都是前两个斐波那契词连接而成，这种关系十分显著；

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{F}_{n-2} \text{ for } n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 3,$$
$$\text{with } \mathcal{F}_1 = ab \text{ and } \mathcal{F}_2 = aba.$$

例如，在表 1.1 中，请注意 =*abaab*、=*abaababa*，以及由它们连接而成的 =*abaababaabaab*。Lothaire 等知名作者将这种关系作为斐波那契词的定义 [Lot83, page 10]。顺便一提，原则上，这种关系提供了一种计算效率很高的方法：通过反复连接前两个词，可以生成任意给定 n 对应的有限斐波那契词。

$\mathcal{F}_3\mathcal{F}_4\mathcal{F}^{5}\mathcal{F}_4\mathcal{F}_3\mathcal{F}_5$

无限斐波那契词的子词定义为可以在其中找到的任意一个词。显然，斐波那契词，=*abaababaabaababaabaababaabaab*...通过研究可以看出，其中还包括其他子词，例如*bab* 和 *baab*。$F_{,}FF_{n}FFF$

现在，我们将无限斐波那契词的语言定义为其所有可能子词的集合。表 1.3 列出了长度不超过六个字母的该形式语言中的子词。$\mathcal{F}$

长度	1	2	3	4	5	6	...
$\mathcal{F}$ 词	*a*	*aa*	*aab*	*aaba*	aabaa	aabaab	...
	b	*ab*	*aba*	*abaa*	aabab	aababa	...
		ba	*baa*	*abab*	abaab	abaaba	...
			bab	*baab*	ababa	ababaa	...
				baba	baaba	baabaa	...
					babaa	baabab	...
						babaab	...
							...
N° 个词	2	3	4	5	6	7	...

表 1.3：斐波那契词的语言中长度不超过六个字母的所有子词。

1.3 两条关键语言排除规则

表 1.3 是有意以一种略显“突兀”的方式呈现的，这是因为，尽管它为斐波那契词中的结构提供了富有启发性的线索，但对其进行详细推导与第 2 章和第 3 章所关注的斐波那契词特性无关。不过，bb 和 aaa 这两个词都不会出现，这一点至关重要；现在我们来证明这一点。

引理 1.1：从 $\mathcal{F}$ 中排除 bb

由字母*a* 和 *b*可以组成的四种可能的双字母子词中，除 *bb* 之外，其余都是无限斐波那契词的子词 $F_{。}$

证明

注意，bb 不会出现在 、 或 中。检查 =abaab 可知，斐波那契词的语言中长度为两个字母的子词包括 ab、ba 和 aa。若字母 b 出现在 之后，那么它必定来自斐波那契替换 a →ab 的部分。每当 b 出现在 中且 n ⩾ 3 时，它前面必定有一个 a。因此，在斐波那契词的语言中，bb 不可能作为子词出现在任何长度的词中。□$\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3\mathcal{F}_3\mathcal{F}_3\mathcal{F}_n$

引理 1.2：ab 与 ba 的词尾交替

对于 n ⩾ 1，斐波那契词的结尾在 ab 和 ba 之间交替。事实上，当 n 为奇数时，斐波那契词以 ab 结尾；当 n 为偶数时，则以 ba 结尾。$\mathcal{F}_n$

证明

一般而言，如果一个 n^{th} 词以 ab 结尾，那么第 $(n+1)^{th}$ 个词必定以 aba 结尾，其中第 $(n+1)^{th}$ 个词末尾的 a 是由替换作用于第 n^{th} 个词末尾的 b 生成的，而第 $(n+1)^{th}$ 个词倒数第二个位置上的 b，则是由替换作用于第 n^{th} 个词倒数第二个位置上的 a 生成的。另一方面，如果一个 n^{th} 词以 ba 结尾，那么第 $(n+1)^{th}$ 个词将以 ab 结尾，这是由替换作用于第 n^{th} 个词末尾的 a 生成的。这就证明了引理的第一部分：对于 n ⩾ 1，词尾在 ab 和 ba 之间交替。现在注意到 $\mathcal{F}_1 = ab$。也就是说，它以 ab 结尾，由此可推得，当 n 为奇数时，以 ab 结尾。进一步推论，由于词尾交替，当 n 为偶数时，以 ba 结尾。□

引理 1.3：从 $\mathcal{F}$ 中排除 aaa

由字母 a 和 b 组成的八个可能的三字母子词中，只有 aab、aba、baa 和 bab 是无限斐波那契词的子词。特别是，子词 aaa 不可能出现。

证明

所述八个可能的三字母子词分别为 aaa、aab、aba、baa、abb、bab、bba 和 bbb。其中，引理 1.1 排除了含有 bb 这一子词的项，剩下 aaa、aab、aba、baa 和 bab。

现在我们将证明，必须从这个缩短后的列表中删去 aaa。

显然，aaa 不会出现在 $\mathcal{F}_0 =$ $\mathcal{F}_1 =$ ab 中。$\mathcal{F}_2 = a$ 或 $\mathcal{F}_2 = aba$ 归纳证明的基础是注意到，$\mathcal{F}_3 = aba$ 和 $\mathcal{F}_4 = abaab$ 都不包含子词 aaa。回忆一下，任意给定的斐波那契词都是前两个词的连接。我们的归纳证明要求假设，对于任意给定的 n ⩾ 4，前两个词和都不包含 aaa。在构造 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{F}_{n-2}$ 时，aaa 只能出现在前两个词连接的接合处。$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_3\mathcal{F}_n$

令符号 : 表示该接合处。

情况1：连接为 ... a : aa ...

这不可能发生，因为没有词以 aa 开头，它们都以 ab 开头。

情形 2：连接为 ... aa : a ...

这不可能发生，因为没有词以 aa 结尾，它们都交替结尾

根据引理 1.2，包含 ab 和 ba。

由数学归纳法可知，子词 aaa 不可能出现在任何斐波那契词中。

此外 $\mathcal{F}_6$，现在也从列表中删除了 aaa，剩下的是 *aab*，*aba*，*baa*，*bab*。

检查= *abaababaabaababaababa* 表明列表中不应再删除其他词。 □

1.4 反代换

引理 1.1 和引理 1.3 为通常所称的模式回避提供了简单示例。对于斐波那契词，bb 和 aaa 被称为非法子词。事实上，斐波那契词还有无穷多个其他非法子词。不过，值得庆幸的是，斐波那契子词具有一种理想性质，因此这里无需特别关注其他非法子词。这种性质使得在需要时，判断某个子词是否合法比列出哪些子词合法、哪些不合法要容易得多。这种性质就是可以轻易进行反代换。要解释反代换，首先需要明白，我们最终要分析的是据称属于无限斐波那契词的片段。通常，我们并不知道待分析片段在词中的确切位置，甚至不知道它是否真的是斐波那契词中的合法片段。此外，即使它合法，也可能出现在多个位置，甚至可能出现在无穷多个位置！反代换提供了一种判定该片段是否合法的方法。它就是进行逆代换：对于给定的词，推断它可能由哪个或哪些先前的词生成。$\mathcal{F}$。

回想一下，斐波那契替换 θ 定义如下，

$$a \rightarrow ab$$

$$b \rightarrow a$$

其中添加了一些颜色，以帮助理解接下来给出的示例。现在我们可以这样推理：进行反代换时，任何字母 b 连同其左侧必定相邻的字母 a，都必定来自前一个词中的一个字母 a。处理完所有 ab 的出现次数后，剩下的字母 a 都必定来自前一个词中的一个字母 b。例如，假设要判断下面这段据称是斐波那契词的片段是否合法，

$$\ldots abaabaababaababababa\ldots$$

首先要检查这个词中是否出现 bb 或 aaa，以确认它是否明显不合法。如果这个词通过了初步检查，下一步就是将每个字母 b 与其左侧紧邻的 a 一起括起来，如下所示，

$$\ldots (ab)\,a\,(ab)\,a\,(ab)\,(ab)\,a\,(ab)\,(ab)\,(ab)\,a\,\ldots$$

现在可以进行反代换，从而得到前一个词：

$$\ldots ababaababaaab\ldots$$

非法子词 aaa 现在出现在反代换后的词中，因此可以推断，正在分析的斐波那契词片段也不合法。第2章将给出更多反代换的例子。现在请注意，如果初次反代换得到的词不含 aaa，就会重复去替代过程，直到出现 aaa，或得到一个足够短且显然合法的词。当然，这个过程最终会在这两种情况之一出现时终止，因为每次应用反代换后，词的长度都会缩短。敏锐的读者可能会想知道，除了最初扫描时，为什么没有继续留意非法子词 bb。这是因为……aaa……反代换后会变成……bbb……或……bba……，二者都含有非法子词 bb。因此，进行反代换时，总会先遇到非法子词 aaa，而不可能先出现非法子词 bb。

1.5 关联矩阵

一般来说，替换 Φ 都对应一个称为关联矩阵的矩阵 M。对于斐波那契替换 θ，矩阵 M 在确定无限斐波那契词中字母的相对频率方面非常有用，也有助于揭示由该词自然产生的铺砌几何。我们先来确定相对频率。

Φ θ

以下是关联矩阵的标准定义；

A { a_1, a_2, ..., an } 对于作用于基数为 n 的字母表 = 上的替换 Φ，Φ (m_{rc}) mrc 关联矩阵定义为 n × n 矩阵 M = ，其中 ar $\Phi(a_c)$ 等于 中出现的 次数。（摘自 [GY21]）

对于斐波那契替换，θ,

$$\begin{matrix} a \to ab \\ b \to a \end{matrix} \text{ has incidence matrix } \mathbf{M}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

在 **M** 中，左上角的 1 表示 中有一个字母 a，左下角的 1 表示 中有一个字母 b。类似地，右上角的 1 表示 中有一个字母 a，右下角的 0 则表示 中没有字母 b。

θ $\theta(a)$ $\theta(a)$ $\theta(b)$ $\theta(b)$

为了更好地理解这如何传达有关斐波那契词中字母频率的信息，可以考虑词 = $abaababaabaababaabababa$ 并观察到，使用前面定义的记号, | = 13 | 以及= 8。$\mathcal{F}^6$ | a b |

The connection with $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ is suggestive of the following,

---

命题1.1：关联矩阵的幂

Φ n Φ Φ^n 如果 M 是 Φ 的关联矩阵，那么 M 就是 的关联矩阵。

证明

Φ 一般而言，矩阵 M 必然是平方矩阵，其形式为：

$$\mathbf{M}_\Phi = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \\ \dots \\ a_n \end{matrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1c} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2c} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{r1} & m_{r2} & \dots & m_{rc} & \dots & m_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nc} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Phi(a_1) \quad \Phi(a_2) \quad \dots \quad \Phi(a_c) \quad \dots \quad \Phi(a_n)$$

其中 Φ 是字母表$\mathcal{A}$上的替换 = 。矩阵周围的框架（通常不显示）有助于说明，rcth 项给出了字母在其中出现的次数，其中是cth 中的$\mathcal{A}$. {a_1, a_2, … …, ar, ……, an} ar $\Phi(a_c)$ ac

这个矩阵的平方中，第 rcth 个元素等于第 rth 行与第 cth 列的数量积；

$$\mathbf{M}_\Phi^2(m_{rc}) = m_{r1}m_{1c} + m_{r2}m_{2c} + \dots + m_{rc}m_{rc} + \dots + m_{rn}m_{nc}$$

这将是字母在 中出现的次数。$ar\ \Phi^2(a_c)$

$n\,\Phi$。 这为 n = 2 in M 的情形建立了归纳证明的基础。对于归纳步骤，假设对于某个整数 k ⩾ 3，当 n = k 时，M 的 rcth entry $\overset{k}{\Phi}$ a$_r$ $\Phi^k(a_c)$ 。 表示字母在 中出现的次数。将 M 的行与 M 的列作标量 rth $_\Phi$cth $_{k\Phi}$ 积，便可得出字母 a$_r$ $\Phi^{k+1}(a_c)$。 $_{\Phi}^{k+1}$ 在 中出现的次数。因此，M 的 rcth entry 表示字母 a$^{th}_r$ $\Phi^{k+1}(a_c)$ 。 $_{\Phi}$ Φ^n。□中的出现次数。根据数学归纳法，M 是.....的关联矩阵

将关联矩阵与斐波那契词联系起来的主要意义在于，可以运用线性代数的结果。特别是，斐波那契替换的关联矩阵具有本原这一理想性质。根据定义，实矩阵 M 若非负，且其 mth 次幂对于某个自然数 m 为正，则称 M 为本原矩阵；也就是说，对于某个 m ∈，M 的所有元素都严格为正。目前，斐波那契替换的关联矩阵满足所需的非负性，但其中的零元素起初令人担忧！然而，它确实是本原矩阵，因为例如它的平方严格为正；$_m\mathbb{Z}^+$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

关联矩阵为本原矩阵的替换本身称为本原替换。对于本原替换，其关联矩阵 **M**具有一个非常理想的性质：它有一个严格为正的单特征值， λ。从绝对值来看， λ 严格大于 **M**的其他特征值；这一事实是佩龙–弗罗贝尼乌斯定理的推论。证明见 [Q95, 第132] 页。此外， λ 还有一个对应的特征向量，其各元素都严格为正。对于替换的无限不动点，只要该替换是本原替换，各个字母出现的相对频率就存在。此外， λ 是确定这些频率的关键。那么，在无限斐波那契词 a 和 b中，字母$\mathcal{J}$出现的相对频率是多少?

佩龙–弗罗贝尼乌斯定理 佩龙–弗罗贝尼乌斯定理 佩龙–弗罗贝尼乌斯定理 佩龙–弗罗贝尼乌斯定理

要回答这个问题，请注意，斐波那契替换的关联矩阵的特征多项式为，因此得到，其中 ϕ 表示黄金比例，它是一个无理数，其精确值为

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ $\lambda_{PF} = \phi$,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

各字母的相对频率由对应于的右特征向量给出，且其分量之和为(x， y) ^{T} λ_{PF}， x +y = 1

在这些约束条件下求解可得，

$$x = relative\,frequency\,(a) = \frac{1}{\lambda_{PF}} = \phi - 1 \text{ (About 61.8\%)}$$

$$y = relative\,frequency\,(b) = 1 - \frac{1}{\lambda_{PF}} = 2 - \phi \text{ (About 38.2\%)}$$

有用的是，:的比率可以准确地写成 $\phi:1$，由此可以直接证明斐波那契词是非周期的。下面将其表述为命题 1.2。|a| |b|

命题 1.2：斐波那契词的非周期性

字母比例为 ϕ : 1 的斐波那契词是非周期的。|a| |b| $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。 黄金比例 ϕ 是一个无理数，其精确值为

证明

假设斐波那契词严格周期，此时该词可以按如下方式划分，例如，

(*aba...ab*)(*aba...ab*)(*aba...ab*)(*aba...ab*) ...

在一个划分块中，设字母 a 的出现次数为 p，字母 b 的出现次数为 q。注意，根据这一构造，p 和 q 都必须是正整数。

因此 $\frac{p}{q}$ 这两个字母出现次数的比率为 p : q。 $p, q \in \mathbb{Z}$。 更能揭示问题的是，这个比率可以表示为 : 1，其中

现在将斐波那契词的字母比例 ϕ:1 直接进行比较。

$\frac{p}{q}$，根据定义，是一个有理数，因此不可能等于 ϕ.

因此，正如所声称的那样，斐波那契词必定是非周期的。 □

证明斐波那契词是非周期的，还不足以断言它具有非周期结构。要成为非周期对象，我们必须排除斐波那契词包含任意大的周期部分这种可能性。为说明排除这种可能性的必要性，考虑这样一个词：先有五个 a，然后无限地交替出现 b 和 a；

aaaaababababab...

这虽然是非周期的，但并不比它如果具有周期性更有趣。它通过一个令人恼火的技术性细节成为非周期对象！要证明斐波那契词并非如此，就需要证明其中不包含任意大的周期部分；根据定义，这正是使它成为 非周期对象 [Wik21a] 的条件。1983 年，Juhani Karhumäki 在一项更一般的结果中证明，斐波那契词中的任何子词都不可能连续出现超过三次 [Kar83]。正是这一性质使斐波那契词在数学上如此引人入胜。

另一个将在第2章中遇到的微妙之处是，任意给定的子词都会出现无限多次。这使斐波那契词成为一个回返词 [Lot02 page 31]。表1.4列举了斐波那契词中的回返、平方和立方示例。$\mathcal{F}$

aba abab aaba abab a abab aaba abab aaba... $F =$

a baabaabaa baabaabaa babaabaabaabaaba... $F =$

abaabaabaa baaba baaba baaba abaabaaba... $F =$

表 1.4：上：斐波那契词的任意子词（例如 abab）都会无限次出现，但不会连续出现超过三次。中：平方；baababaa 在斐波那契词中连续出现两次。下：立方；baaba 在斐波那契词中连续出现三次。

1.6 关联铺砌几何

斐波那契词可以形象地表示为一维铺砌。为了找到忠实体现该词的铺砌，采用两种长度的瓦片似乎合乎逻辑：长度为的 A 瓷砖表示字母 a，长度为的 B 瓷砖表示字母 b。膨胀映射 Θ 需要将 A 瓷砖膨胀到长度等于一块 A 瓷砖与一块 B 瓷砖长度之和，同时将 B 瓷砖膨胀到长度等于一块 A 瓷砖的长度。 Θ 的铺砌块长度膨胀几何可以概括如下，从而明显体现与θ 的对应关系，即：$\mathrm{L}_A\mathrm{L}_B$

$$L_A \rightarrow L_A + L_B$$

$$L_B \rightarrow L_A$$

此前，在研究相对频率时，是关联矩阵的右特征向量给出了频率信息。然而，一般而言，要构造与之关联的几何结构，需要的是左特征向量。所需的特征值仍为 $\lambda \quad = \phi$ ，因为它是唯一一个模大于 1 的特征值，因此能够产生所需的扩张映射。如果任意指定 B 瓷砖的长度为 1，那么 A 瓷砖的长度将为 ϕ. 。图 1.1 总结了由此得到的膨胀映射。PF

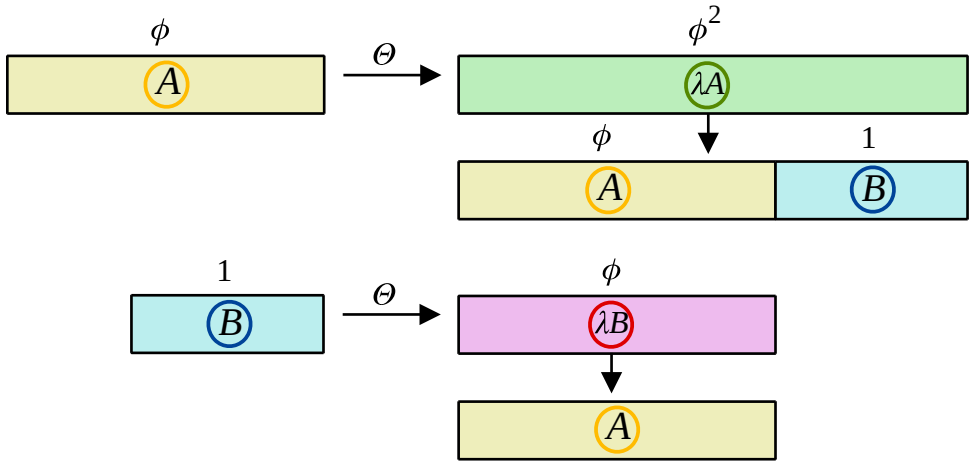


图 1.1：斐波那契词所对应的膨胀映射 Θ 概览。

作为本章节的总结，图1.2展示了最初几个斐波那契词的实数集一维几何铺砌。长度按比例绘制，并任意设定了宽度，以便能够看清。实数集$^+$

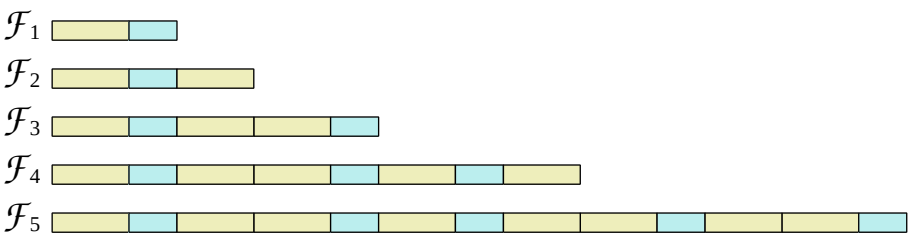


图 1.2：前几个斐波那契词在线段上表示为铺砌。

1.7 第1章作者注释

作为本章节开篇的数学之美定义旨在引人深思，同时也带有几分戏谑意味。我很清楚，数学家在只与符号打交道时会感受到怎样的乐趣：他们可以毫不费力地在自己十分熟悉的领域中游刃有余地探索，灵活运用它来解决问题或构建证明，完全不需要借助实体笔和纸上的图示。数学之外的人难以领会这种美，这促使哥伦比亚大学的 Samuel Eilenberg 曾这样评论道：“数学是一种表演艺术，但它唯一的观众是同行表演者。” [PM16]或许，自20世纪80年代个人电脑问世以来，情况有所改变；数学某些分支，尤其是分形几何和曼德博集合，呈现出的惊艳视觉效果也让这种美不再那么隐晦。

本章的早期版本包含了若干关于斐波那契词结构的证明，例如证明它是斯图姆词。不过，我觉得这些内容整体上反而使论述失去了清晰的方向，因此便毫不犹豫地删去了它们，以便聚焦于为本学位论文后续部分奠定基础所必需的内容。类似地，也没有必要介绍左不动点、双向不动点或周期性不动点。

本文中处处可见通往数学深水区的入口。例如，在分析由替换迭代产生的不动点词时，反代换究竟有多大效用，或效用有限，这被称为可识别性，也是当前研究的一个活跃领域。例如，参见[Kyr19，第 3]。模式回避作为一种普遍现象，是另一个仍在积极研究的广阔领域。例如，参见[Ram04], [Ram12]。

我对本章所涵盖内容的最初理解，源自开放大学课程《非周期铺砌与符号动力系统》的专题指南（仅供校内使用），该指南由 Reem Yassawi 和已故的 Uwe Grimm 撰写 [GY21]。

我谨向开放大学的 Dan Rust 致谢，感谢他对本章节早期草稿提出的宝贵意见，尤其感谢他建议我挥动编辑之刀，删去不必要的内容。

第2章

迭代函数系统绘制规则

2.1 数学 DNA

现代最令人惊叹的发现之一，是每种生物都在自身的每个细胞中，拥有一份指导其构造、发育、功能和繁殖的蓝图。这份蓝图储存在一种名为DNA的分子中。从本质上说，这种长分子与自身的一份反向平行拷贝缠绕在一起，形成双螺旋，可以表示为一串一维字母。这些字母代表DNA的四种不同基本单位——核苷酸，其碱基分别为胸腺嘧啶、**T**、腺嘌呤、**A**、鸟嘌呤、**G**或胞嘧啶、**C**。图2.1给出了一个DNA片段的示例。正是这四种字母的排列顺序——在人类DNA中，这些字母超过三十亿个——构成了生物密码，决定了生物的本质及其可能的发展。

ATCCAAGCGCCCGCTAATTCTGTTCTGTTAATGTTCATACCAAGAACCGGC

图 2.1：DNA 片段示例

有鉴于此，我们不妨思考一下：斐波那契词能否用作生成另一个数学对象的代码。事实上，第1章正是将斐波那契词视为线段的铺砌，从而实现了这一点。本章并不会就此止步，而将进一步探索这一想法。

在生物学中，字符串重写系统这一概念归功于 Aristid Lindenmayer。这位匈牙利生物学家寻求一种描述植物基本生长过程的方法，并于 1968 [Lin68] 中发表了他的想法。如今，这类系统被称为 *L-systems*，其语法 G 由以下三个部分组成；

- 由符号构成的字母表 V。
- 由符号构成的字符串 ω，用于定义系统的初始状态。
- 一组产生式规则 P，用于规定如何根据前一个字符串生成下一个字符串。

通过反复应用规则 P，L系统会生成一个字符串序列，其方式与斐波那契词的生成过程类似，其中，

$$G = (V, \omega, P) = (\mathcal{A}, a, \theta)$$

以及其中，$\mathcal{A}$ = { a, b }、ω = “a”与θ 是替换规则：a $\rightarrow$ ab，b $\rightarrow$ a。

1986年，波兰计算机科学家 Przemyslaw Prusinkiewicz 将L系统的数学理论形式化，并将字符串解释为海龟的绘图指令。海龟是一支屏幕绘图笔，由运行着20世纪80年代流行的编程语言 LOGO 的计算机控制 [Prz86]。

1982年 Benoit Mandelbrot 的《自然界的分形几何》出版后，当时人们热衷于创作 分形。 [Man82]本章通过一维绘图规则来诠释斐波那契词。人们似乎此前从未见过或探索过由此产生的可视化结果。它们提供了引人入胜的方法，可揭示斐波那契词的某些特征及其内部的对称性。

2.2 往返绘图规则

斐波那契词的 L系统迭代生成基本上已在第1章中处理完毕。本章将重点放在绘图规则上。表 2.1 给出了要考察的第一条规则。它从新的视角呈现了第 1.6 节沿实数集 的铺砌。这可以看作一条恒等绘图规则。[+]

符号	动作
a	前进 ϕ
b	前进 1

表 2.1：恒等绘图规则

在每个 b 瓦片的中点加上一个简单的转向，即可得到表 2.2 所示的往返绘图规则。据信，此规则此前尚未被探索过，这也是本章将重点讨论的内容。

符号	操作
a	前进 ϕ
b	前进 0.5 , 转向 180° , 前进 0.5

表 2.2：往返绘图规则。

将往返绘图规则应用于斐波那契词，会得到一条在一维直线上反复覆盖自身的铺砌路径。为了看清其中的规律，图 2.2 利用了原本空置的第二维，绘制出零偏差图。图中展示了将该规则应用于 $\mathcal{F}$ 后得到的一条从 A 延伸至 B 的铺砌路径。每块瓦片的中点处都设有一个控制点，以便读者更容易看清其中的规律。随着路径以之字形向下延伸，会形成以紫色标出的人工区域。这些区域由路径和一条人工 y 轴（红色所示）围成，直观呈现了每段曲折偏离原点的幅度。[6]

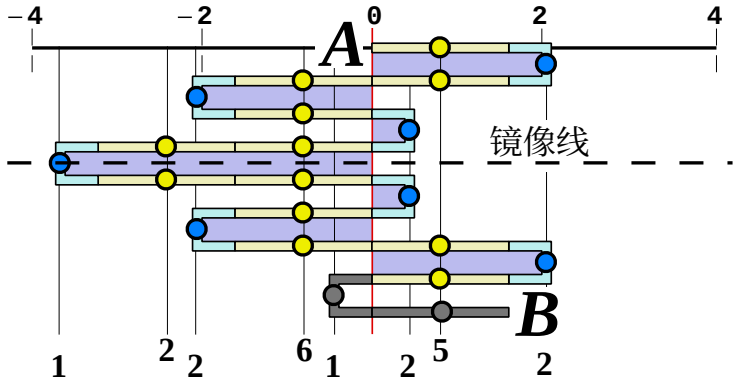


图 2.2：往返绘图规则生成的$\mathcal{F}$零偏差图。为了呈现路径沿一维直线前后往返的运动，图中将其画成二维锯齿线。图示底部的数字统计了在每个可能的 x 值处出现的瓦片控制点数量。最初，本意是研究这些计数背后的数学原理，但随着关注点转向围绕人工 y 轴前后摆动的运动，这项研究便被搁置了。控制点计数仍保留在图中，以供将来可能的分析之用。[6]

图 2.2 的一个显著特点是，将最后两块瓦片灰显后，零偏差图关于图中以虚线表示的镜面具有镜面对称性。这样的直线必定穿过回文词的中心 b 瓦片。下方的表 2.3 显示，所有斐波那契词中都包含回文词：有些以字母 b 为中心，有些以字母 a 为中心，还有些中心为空。图中用不同颜色标示这些观察结果。

$\mathcal{F}_n = \theta^n(a)$
$\mathcal{F}_1 = ab$
$\mathcal{F}_2 = aba$
$\mathcal{F}_3 = abaab$
$\mathcal{F}_4 = abaababa$
$\mathcal{F}_5 = abaababaabaab$
$\mathcal{F}_6 = abaababaabaababaababa$
$\mathcal{F}_7 = abaababaabaababaabababaabaababaabaab$

表 2.3：所示每个斐波那契词的最后两个字母以灰色标出。剩下的部分是一个回文，属于三种类型之一，并按模 3 序列重复出现：中心字母为空、中心字母为 a、中心字母为 b。

引理 2.1：斐波那契词的回文性质
去掉最后两个字母后的斐波那契词是回文，$n \geqslant 1$。$\mathcal{F}_n$

证明
设$\mathcal{W}_n$ $\mathcal{F}_n$为去掉最后两个字母后的斐波那契词，其中 $n \geqslant 1$。此时$\mathcal{W}_1$ $\mathcal{W}_2$ 为空词，而$\mathcal{W}_3$为回文，aba 也是回文。由此，我们可以用强归纳法进行证明。假设对于某个常数 $k \geqslant 3$，当 $n \leqslant k$ 时，$\mathcal{W}_k$均为回文。考虑有限斐波那契词，并回忆$\mathcal{F}_{k+1}$，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-1}\\ &= \mathcal{F}_{k-1}\,\mathcal{F}_{k-2}\,\mathcal{F}_{k-1}\end{aligned}$$

正如引理 1.2 中先前所述，斐波那契词交替以字母对 ab 和 ba 结尾。

情况1：以 ab 结尾，此时以 ba 结尾，因此$\mathcal{F}_{k-1}$ $\mathcal{F}_{k-2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{W}_{k-1}(ab)\ \mathcal{W}_{k-2}(ba)\ \mathcal{W}_{k-1}(ab)\\ \mathcal{W}_{k+1} &= \mathcal{W}_{k-1}(ab)\ \mathcal{W}_{k-2}(ba)\ \mathcal{W}_{k-1}\end{aligned}$$ which is a palindrome.

情形 2：以 ba 结尾，此时以 ab 结尾，因此$\mathcal{F}_{k-1}$ $\mathcal{F}_{k-2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{W}_{k-1}(ba)\ \mathcal{W}_{k-2}(ab)\ \mathcal{W}_{k-1}(ba)\\ \mathcal{W}_{k+1} &= \mathcal{W}_{k-1}(ba)\ \mathcal{W}_{k-2}(ab)\ \mathcal{W}_{k-1}\end{aligned}$$ which is a palindrome.

在这两种情况下，都是回文。$\mathcal{W}_{k+1}$

通过强归纳法，证明完成。 □

引理 2.2：回文词的中心字母

设$\mathcal{W}_n$ $\mathcal{F}_n$为去掉最后两个字母的斐波那契词，n ⩾ 1。根据引理 2，

1， $_n$ 是回文。$\mathcal{W}$

此外，该回文的中心字母为：

- 空（若 n ≡ 1 （模 3））
- a（若 n ≡ 2 （模 3））
- b（若 n ≡ 0 （模 3））

证明

当 = ab 为空时，其中心字母为空，且 n ≡ 1 （mod 3）。$\mathcal{F}_1$ $\mathcal{W}_1$当为空时，其中心字母为 a，且 n ≡ 2 （mod 3）。$\mathcal{F}_2$ = aba, = a$\mathcal{W}_2$当 = abaab, = aba 时，其中心字母为 b，且 n ≡ 0 （mod 3）。$\mathcal{F}_3$ $\mathcal{W}_3$

上述三个陈述构成了归纳证明的基础。

假设对于某个常数 k ⩾ 3，当 n ⩽k 时，若 k ≡ 1 （mod 3），则中心字母为空；若 k ≡ 2 （mod 3），则中心字母为 a；而当 k ≡ 0 （mod 3）时，中心字母为 b。$\mathcal{W}_k$

考虑引理 2.1 中使用的构造，即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-1}\\ &= \mathcal{F}_{k-1}\,\mathcal{F}_{k-2}\,\mathcal{F}_{k-1}\\ &= \mathcal{W}_{k-1}(uv)\;\mathcal{W}_{k-2}(vu)\;\mathcal{W}_{k-3}(ab)\\ \mathcal{W}_{k+1} &= \mathcal{W}_{k-1}(uv)\;\mathcal{W}_{k-2}(vu)\;\mathcal{W}_{k-1}\end{aligned}$$

其中 uv 是将 ab 或 ba 逐字母替换所得。

这表明，该回文与$\mathcal{W}_{k+1}$ $\mathcal{W}_{k-2}$具有相同的中心字母。现在通过强归纳法即可完成证明。 □

从更广泛的角度来看，引理 2.2 可以视为数论中关于斐波那契数的长期既有定理的推论。一项相关结果是，斐波那契数列模n具有周期性。模n的周期长度记作 $\pi(n)$. 它称为n^{th} 皮萨诺周期[Wik21c]。引理 2.2 证明的事实，即中心字母会在三种可能性之间反复循环，源于$\pi(2) = 3$。$\mathcal{W}_h$

引理 2.2 的一个推论是，下一个关于B瓦片呈镜像对称的斐波那契词会出现，而图 2.3 表明情况确实如此，但仍需检查 和 之间“中间”的零偏差图。$F^{6,}F^{9}F_7F_8$

稍加思考，如图 2.4 所示，可以看出，为了成为，

- 回文的
- 不含非法的双 B 或三 A 瓷砖组合

它们必须围绕空的中心瓷砖或中心 A 瓷砖具有半周旋转对称（因此，这两种情况下都不具有镜像对称）。图 2.5 显示了半周旋转对称的中心位于零偏差线上。这条线是表示y-轴的人工轴线，原点位于实数集 。图 2.6 也显示了这一点，正如预期的那样，它具有半周旋转对称，但这次对称中心不在零偏差线上。F

$^{+}$ F_8

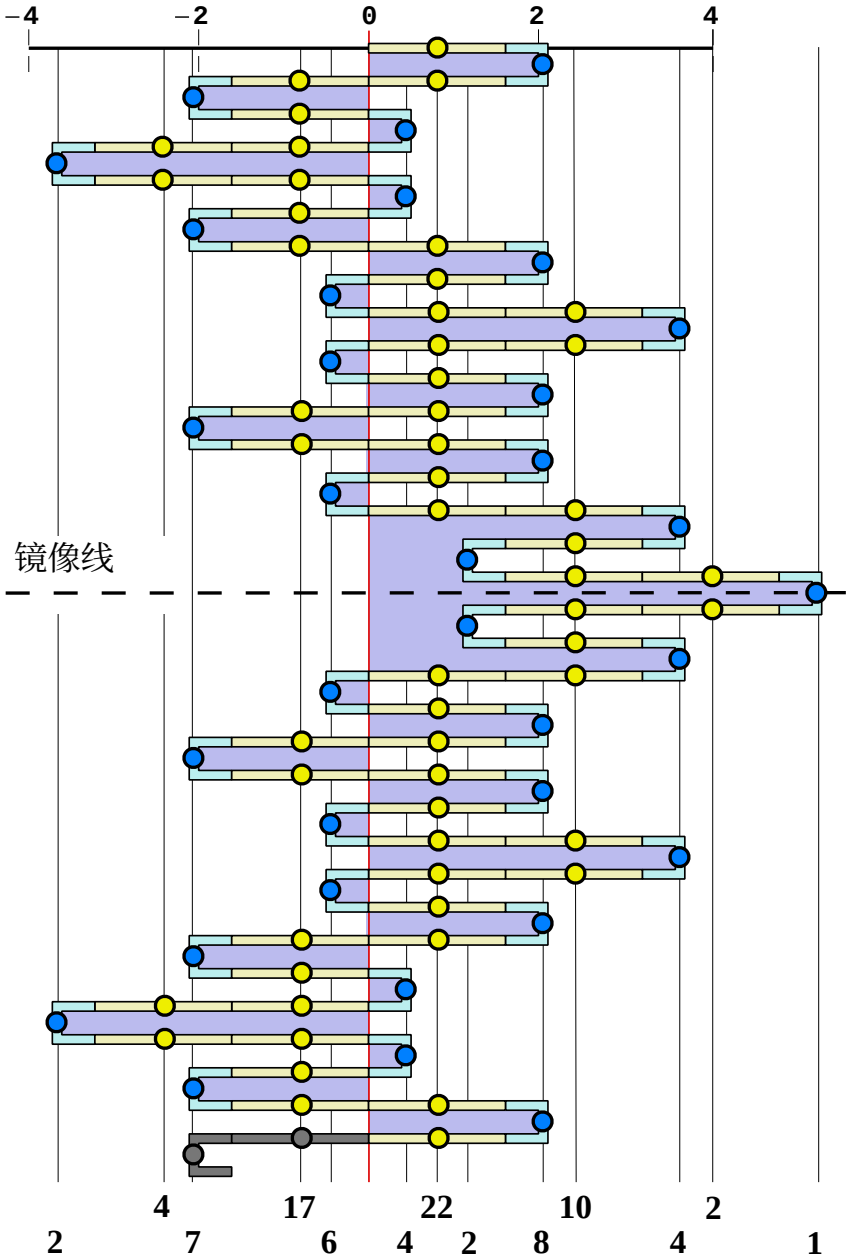


图 2.3：在往返绘图规则下，的零偏差图。与（图 2.2）中的图一样，它通过对应回文词（）的中心字母 b 有一条镜面对称线。$\mathcal{F}_9$ $\mathcal{F}_6$ $\mathcal{W}_9$

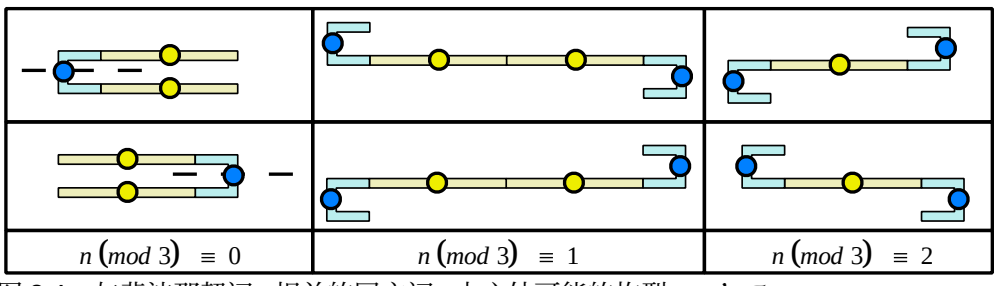


图 2.4：与斐波那契词，相关的回文词，中心处可能的构型。$\mathcal{W}_n$ $\mathcal{F}_n$

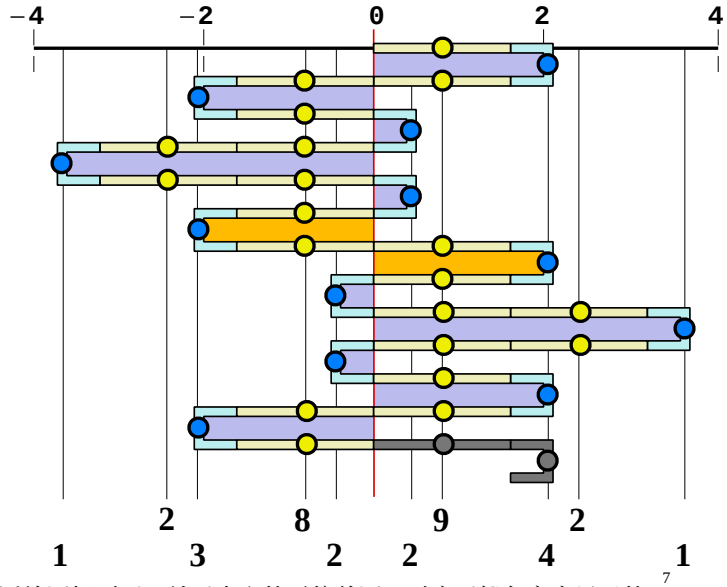


图 2.5：在往返绘图规则下，关于中心的零偏差图；对应于橙色高亮显示的$\mathcal{F}_7$ $\mathcal{W}_7$ n (*mod* 3) ≡ 1 情形（图 2.4）。该图关于其中心具有半周旋转对称，其中心位于零偏差线（红色所示）上。$\mathcal{W}_7$

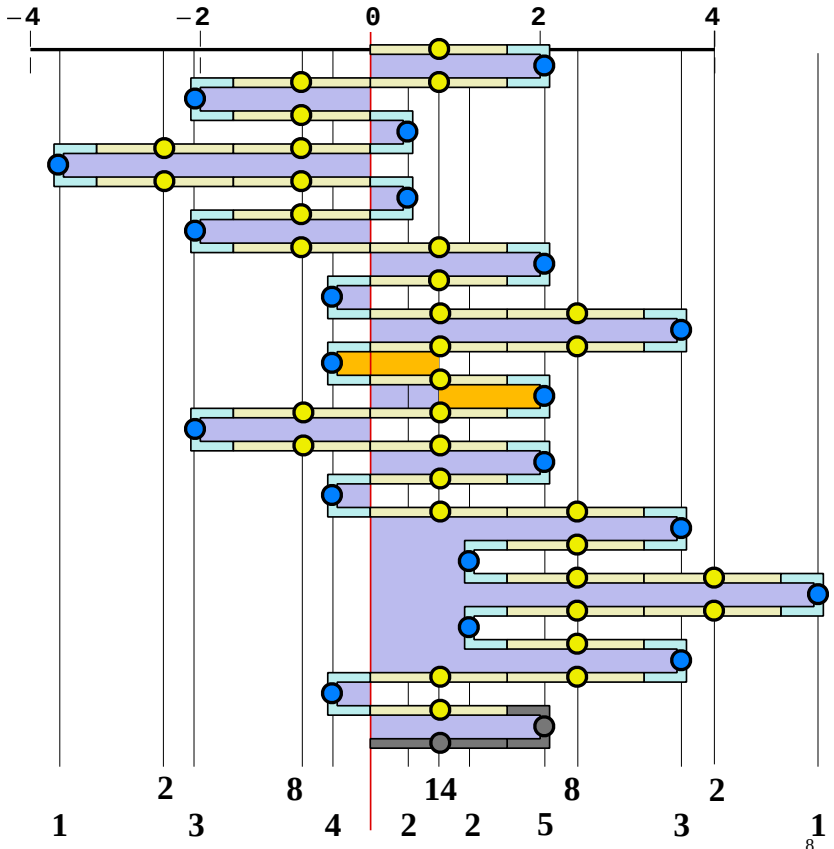


图 2.6：在往返绘图规则下，关于中心的零偏差图；对应于橙色高亮显示的F_8 W_8 n (*mod* 3) ≡ 2 情形（图 2.4）。该图关于其中心具有半周旋转对称，但与图 2.5 不同，此处的中心不在零偏差线（红色所示）上。W_8 F_7,

2.3 关于零偏差线

往返绘图规则得名于一维路径反复从原点的一侧摆向另一侧，再沿着 实数集 返回的方式。自然会让人好奇，它能摆离原点多远，以及可能出现的偏离原点的情况有何特征。要了解这类“全局性”问题，我们需要考察更长的斐波那契词，因为与一般的迭代一样，系统在前几次迭代中未必会显现出涌现行为。图2.7给出了（一个“更长的词”）的零偏差图，其中不再显示单个图块和控制点，只显示它们围成的区域以及零偏差线。 $\mathcal{F}_{11}$



图2.7：往返绘图规则下的零偏差图。该图由运行 LOGO 编程语言的计算机绘制。附录 A 中列出了部分代码示例。$\mathcal{F}_{11}$

乍看之下，图2.7似乎很复杂，但将其中看似不同的结构分别辨认出来后，会发现它们其实寥寥无几。下一幅图图2.8展示了这些结构，并分别为其分配了一个目录标识符。

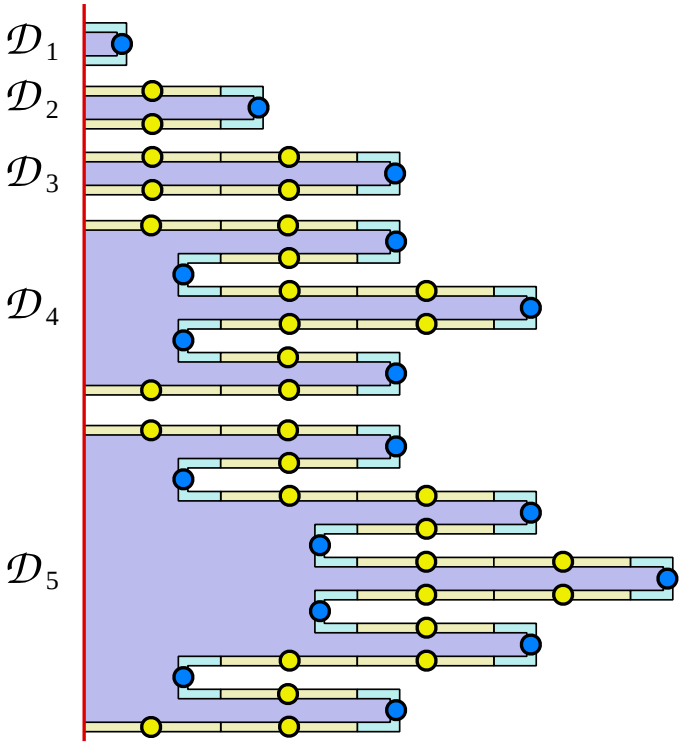


图2.8：在往返绘图规则下，斐波那契词 $\mathcal{F}_{11}$ 的零偏差图中明显呈现出的五种看似不同的结构。

随着斐波那契词的词长增加，人们或许会认为会开始出现更复杂的结构。然而，仔细观察图2.8，会发现另一种可能：呈现出来的其实是同一个结构越来越大的片段。

意识到所有斐波那契词背后或许只有一种基本结构，不禁让人想问：为什么没有出现其他结构？而且，随着词长进一步增加，为什么它们仍然不可能出现？图2.9展示了一种简单结构的例子；在截至（含）F 11 的所有零偏差图中，这种结构都尚未出现。那么，这种特定结构最终会在一个尚未研究过的斐波那契词中出现吗？还是说它永远不会出现？

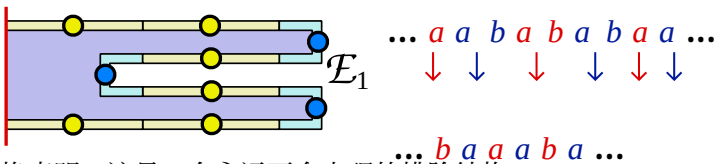


图2.9：反代换表明，这是一个永远不会出现的排除结构。$\mathcal{E}_1$

回答这个问题的关键，是对与该结构相关的词片段进行反代换。第1.4节此前已描述过去替代过程。在这里，它给出的前一个词是……baaaba……。三个连续的 a 不合法，因此必然得出结论：这种结构永远不可能出现。

与某个结构或拟议结构相关的一段词，称为嵌入词。之所以这样称呼，是因为应用反代换时，可能需要推测嵌入词紧邻前后位置的字母是什么。它不一定有固定的起点或终点。可能需要反复应用反代换，才能确定一个嵌入词是否合法。例如，经过连续两次反代换，可以证明嵌入词……aababaabaabaaba……不合法，因为它必定源自一个含有不合法的三个连续 a 的词。图2.10给出了详细过程。

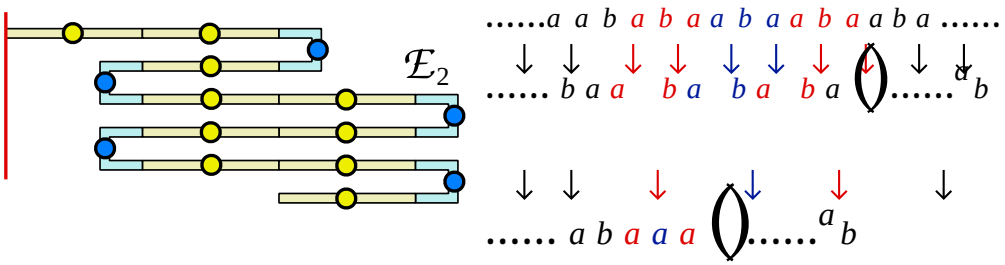


图2.10：要证明这种结构绝不可能出现，需要连续进行两次反代换。括号用于表示嵌入词右侧紧邻的字母可能会改变反代换后词该端的字母；该位置可能是 a 或 b。

图2.11给出了一个例子：要证明嵌入词……aababaababaababaaba……不合法，需要连续进行三次反代换。

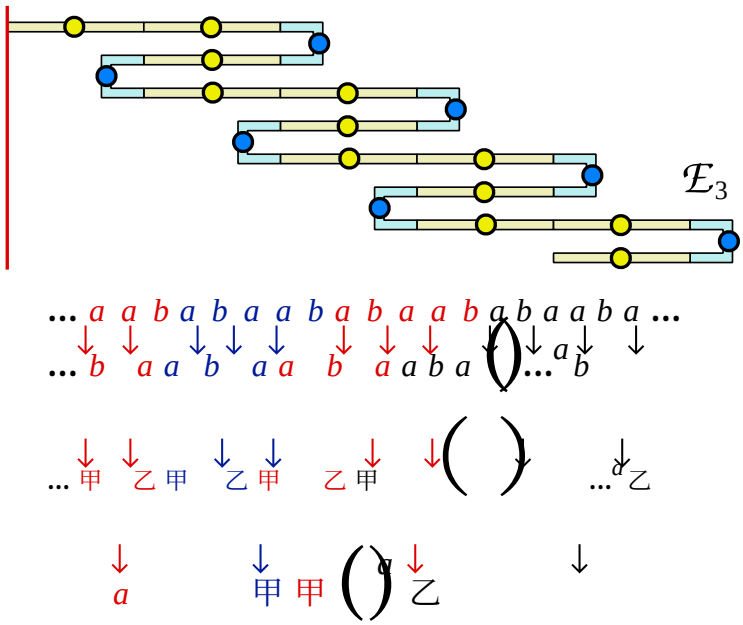


图2.11：要证明这种结构永远不会出现，需要连续进行三次反代换。

反代换提供了一种检验所提出结构是否合法的方法。应用于斐波那契词时，该方法之所以有效，是因为可能的反代换通常是唯一的，或者仅在一端存在不确定性。对于其他代换，情况可能并非如此。

2.4 绘制增长图

第 2.3 节所述的去代换方法，可以看作一种自上而下分析所提出结构合法性的方法。然而，这种方法在寻找结构时却像是在“黑暗中摸索”。必须先猜测结构，再通过反代换检验其有效性。要更系统地编制结构目录，可以采用自下而上的方法，绘制增长图，展示结构能够以哪些合法方式构建。图 2.12a 展示了对所有可能的零结构偏差进行系统、全面且稳健搜索的开端。

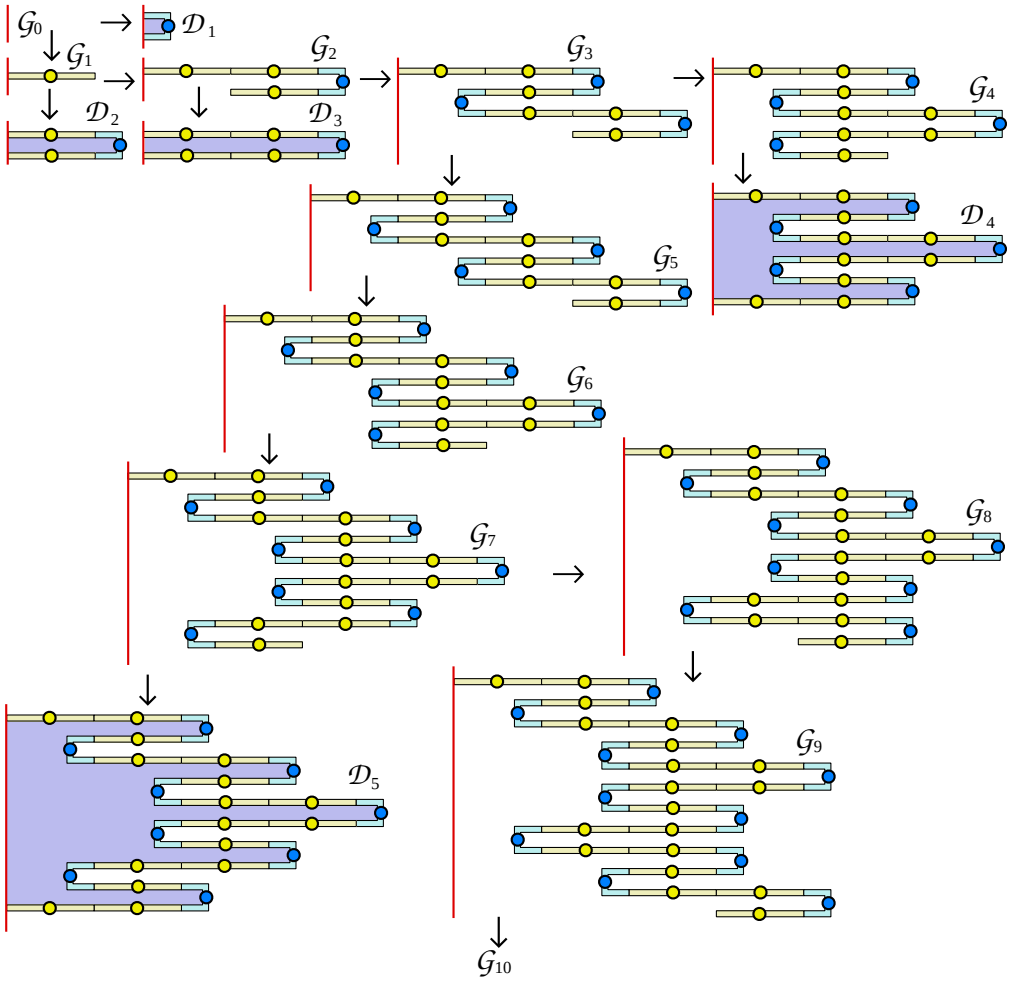


图 2.12a：增长图的起始部分，映射所有长度小于三十个图块的可能零结构偏差。

增长图并非每次添加一个字母及其对应的瓦片，而是通过每次添加三个或五个来加快这一过程。这是基于斐波那契词可以按以下方式因式分解这一事实；

$$\mathcal{F} = (aba)(aba)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)\ldots$$

其中涉及的因子只有 aba 或 baaba。请注意，在增长图中，从一个图示移到下一个图示时，都会在先前的铺砌路径上添加图块 ABA 或 BAABA（初始项之后）。因子分解保证总能添加 ABA 或 BAABA 其中之一。有时两者都可行，因此会出现分支，例如$\mathcal{G}_3$。

增长图表明，图2.8中已经观察到的结构（即 和 ）是仅有的少于三十块图块的结构。正如图 2.12a 底部的箭头所示，增长图还会继续。在介绍扩展之前，最好先证明所声称的斐波那契词因子分解。关于 $\mathcal{D}_1$、 $\mathcal{D}_2$、 $\mathcal{D}_3$、$\mathcal{D}_4\mathcal{D}_5$与斐波那契词相似的词的因子分解，已有大量文献。例如，Amy Glen 的 2006年博士论文完全致力于研究具有与斐波那契词相似性质的词的各种分解，重点关注回文因子分解 [Gle06]。不过，鉴于我们目前的需求有限，采用一个不那么一般、针对性更强的证明便足够了。

定理 2.1：F 的 ABA、BAABA 因子分解

斐波那契词可以分解为以下形式，

$$\mathcal{F}=(aba)\,(aba)\,(baaba)\,(aba)\,(baaba)\,(baaba)\,(aba)\,\ldots$$

其中涉及的因子只有 ABA 或 BAABA。

证明

首先注意，所有 (baaba) 的出现都可以进一步因式分解为 (ba)(aba)。在斐波那契词的语境中，这是一个明确且可逆的代数变换，其中最左侧的因子是 aba。因此，该结论等价于证明：

$$\mathcal{F} = (aba)(aba)(ba)(aba)(aba)(ba)(aba)(ba)(aba)(aba)\ldots$$

其中涉及的因子只有 aba 或 ba。

所有斐波那契词都以 aba 开头，对于 n ⩾ 2。$\mathcal{F}_n$

设其前导 *aba* 已移除，其中 $n \geqslant 2$。$F_n^* F_n$

归纳基础：= (ab)、= (aba) 和 = (aba)(aba)(ba)。$\mathcal{F}_1\,\mathcal{F}_2\,\mathcal{F}_4$

假设所述。$\leqslant k$（其中某个偶常数k ⩾ 4）时，（因此 ）因式分解为 e

情况1： $\mathcal{F}_{\text{偶数}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k+2} &= \mathcal{F}_{k+1}\,\mathcal{F}_k && k \text{ is even}\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-1}\,\mathcal{F}_k\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-2}\ldots\mathcal{F}_6\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_2\,\mathcal{F}_1\,\mathcal{F}_k\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-2}\ldots\mathcal{F}_2\,(ab)(aba)\,\mathcal{F}_k^*\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-2}\ldots\mathcal{F}_2\,(aba)(ba)\,\mathcal{F}_k^*
\end{aligned}$$

情形 2： $\mathcal{F}_{\text{奇数}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-1} && k \text{ is still even}\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-2}\,\mathcal{F}_{k-4}\ldots\mathcal{F}_6\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_2\,\mathcal{F}_1\\
&= \mathcal{F}_k\,\mathcal{F}_{k-2}\,\mathcal{F}_{k-4}\ldots\mathcal{F}_2\,(ab)
\end{aligned}$$

由强归纳法可得目前的结果；对于词$\mathcal{F}_{\text{偶数}}\,\mathcal{F}_{ODD}$，除每个词末尾的因子 (ab) 外，都能按要求分解。无限斐波那契词是由 n $\to \infty$. 形成的词，因此在极限下，所有词都能按所述方式分解。定理 2.1 的证明完毕。□

处理嵌入词时，对于词右侧的延伸存在歧义：由于该词总以 aba 结尾，后续可以是 aba，也可以是 baaba。因此，每次延伸该词时，都要运用反代换来确定哪种延伸是合法的。事实上，有时 aba 和 baaba 都可以作为该词的合法延伸，从而为相应的铺砌路径提供两种有效延伸。这便产生了增长图中观察到的分支现象。然而，根据定理 2.1，至少有一种延伸始终是合法的。任何不合法的情况经过反代换，最终都会导致不合法的 aaa。

现在一切就绪，可以延续从图 2.12a 开始的增长图；这一延续部分将在接下来的几页中呈现。

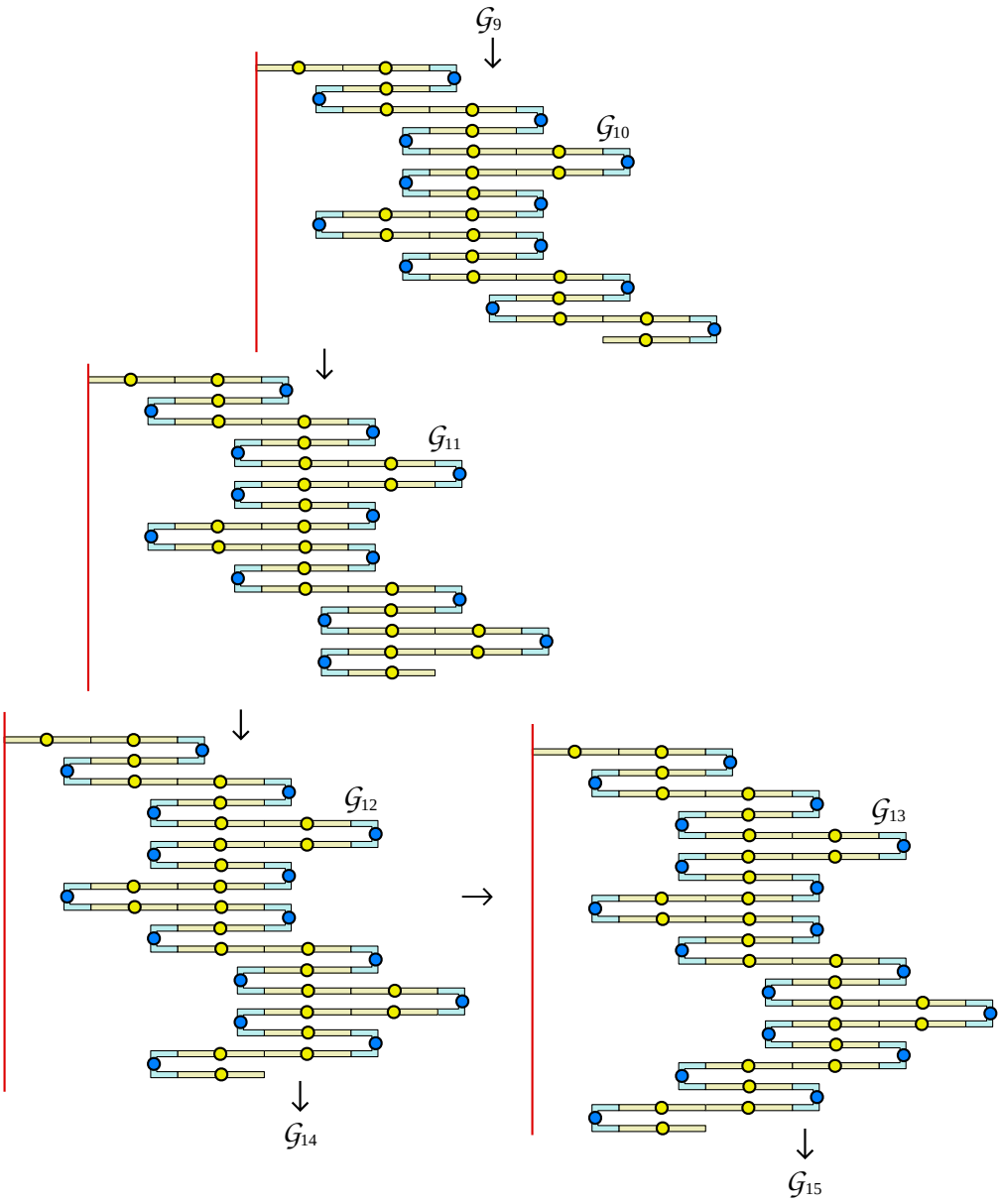


图 2.12b：从图 2.12a 开始的增长图的延续部分。进一步的延续部分见图 2.12c。

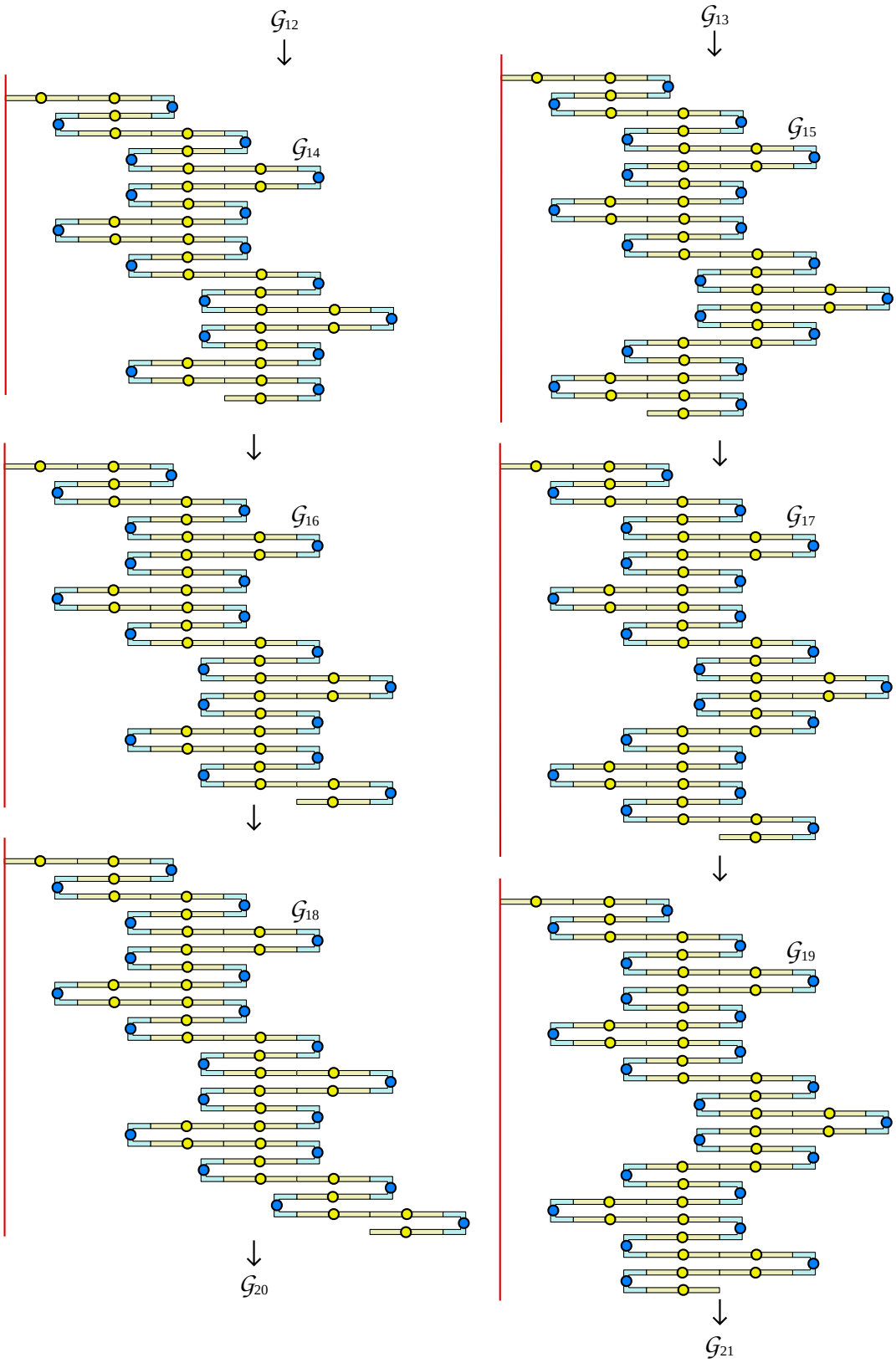


图 2.12c：图 2.12b 中增长图的延续部分。下一段延续部分见图 2.12d。

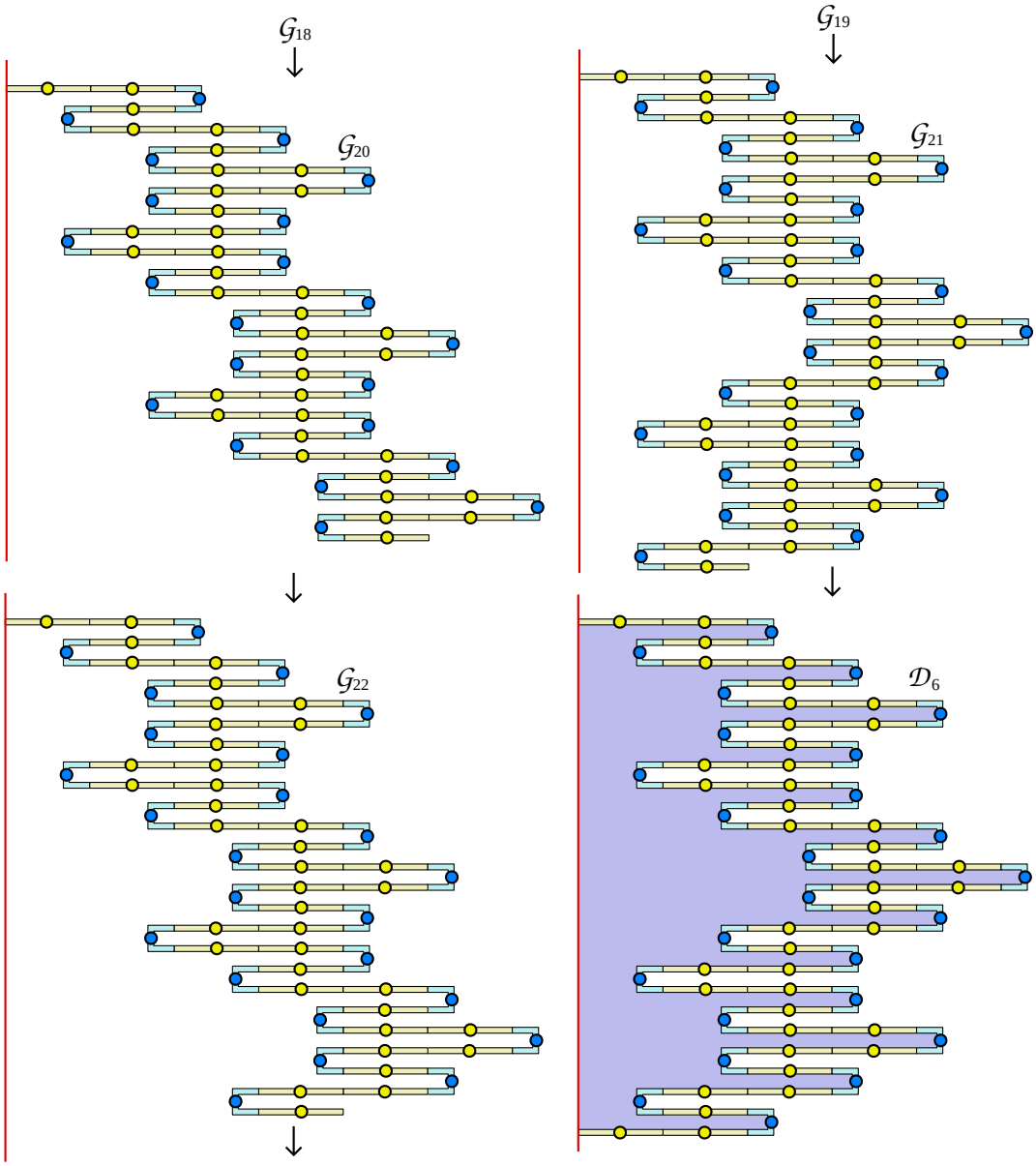


图 2.12d：图 2.12c 中增长图的延续部分。它展示了零结构偏差，$\mathcal{D}_6$

四幅图 2.12a、2.12b、2,12c 和 2.12d 中呈现的增长图，已经确定了以及的 67 个图块和的 64 个图块以内所有可能的偏离零结构。增长图还可以继续延伸。事实上，斐波那契词的非周期性似乎很可能保证它会无限延续。找到的所有结构都继续表明，它们只是某个底层单一结构中越来越大的片段。$\mathcal{D}_6$ $\mathcal{G}_{22}$

2.5 探索 $n \equiv 0$（模 3）情形

有两个事实引发了一些推测性想法。首先，对于满足 $n \equiv 0 \pmod 3$ 的斐波那契词，其相关的回文词关于中央的 B 瓦片呈镜像对称。其次，由于所有词都从零偏差线开始，镜像对称保证满足 $n \equiv 0 \pmod 3$ 的词也会在该线上结束。因此，铺砌路径两端都固定在零偏差线上，据此可以合理推测，最大 $\mathcal{F}_n$ $\mathcal{W}_n \mathcal{W}_n$

偏离零偏差线的情况倾向于发生在词的中心附近。如图 2.4 所示，当 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时，中心铺砌构型为 *ABA*。现在可以应用定理 2.1 中的 *aba*, *baaba* 因子分解定理。这里需要谨慎，因为 *ABA* 与 *aba* 相匹配，而后者位于因子（*baaba*）的右端。现在的目标是从中心的 *aba* 向外展开，图 2.13 展示了结果。 $W_n F F$

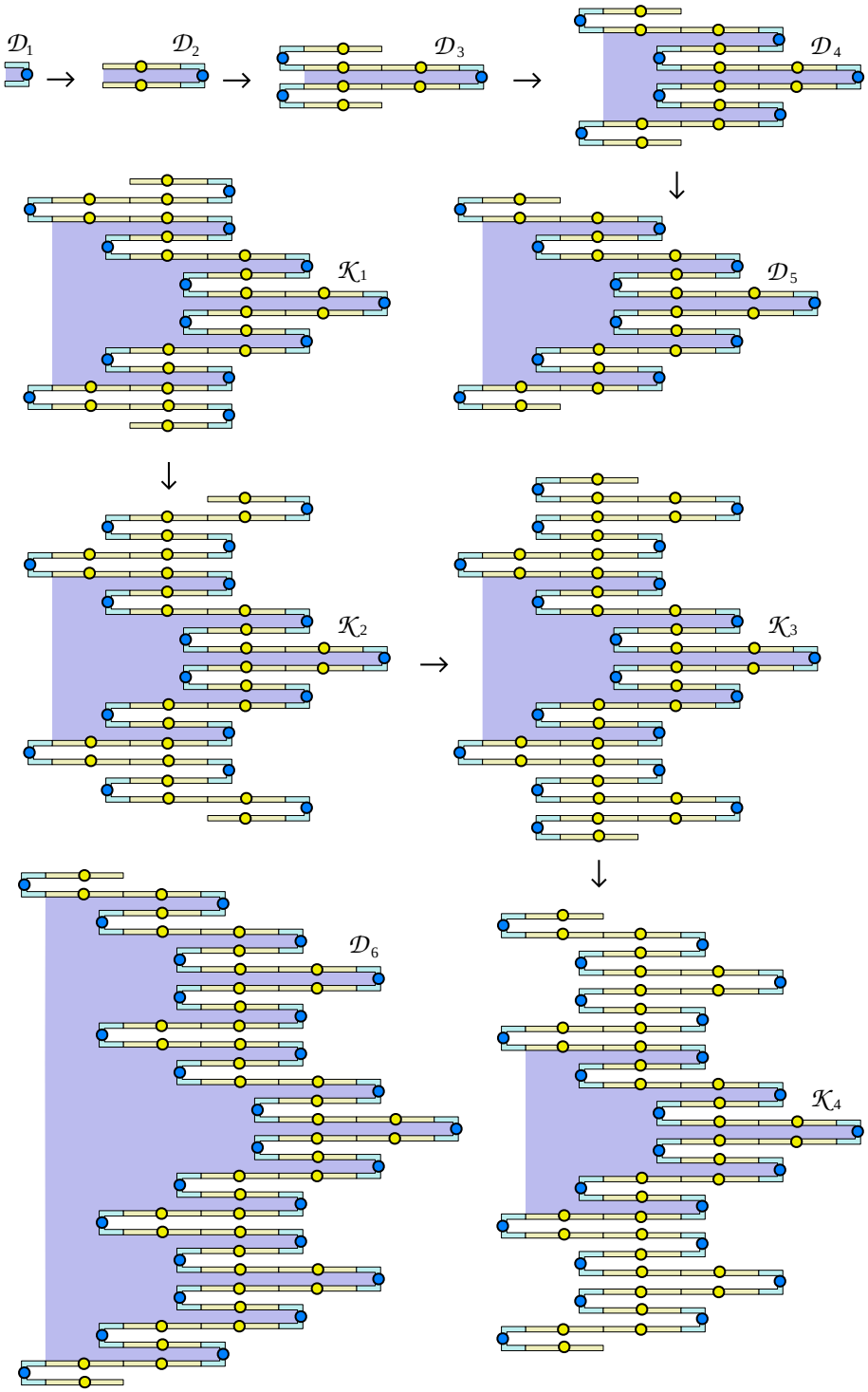


图 2.13：铺砌增长图，从中央的 ABA 向外延伸，可以合理推测，最大偏差出现在远离零偏差线的位置。

从图 2.13 可以立即看出，这是迄今为止确定可能出现的零结构偏差最有效的方法。绘制图 2.13 时，首先用词推导出这些铺砌。实际操作中，每一步最容易的做法是先确定右侧的下一个因子应为 (aba) 还是 (baaba)，再在左侧添加能保持所需镜像对称的字母。向左扩展时，因子的括号划分并不总是一目了然，往往要到后续步骤才能看清。通过反代换来确保每一步增长的合法性。

b aba a)(baaba)(aba) a)(baaba)(baaba)(aba)(baaba)
aba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)
a)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)
aba)(aba)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)(baaba)(baaba)(aba)(baaba)

a)(*baaba*)(*aba*)(*baaba*)(*aba*)(*baaba*)(*baaba*)(*aba*)(*baaba*)(*baaba*)(*aba*)(*baaba*)(*aba*)

图 2.14：铺砌增长图（图 2.13）的前几个阶段，从中央的 ABA 向外扩展，但这里用词而非瓦片表示。先确定词的扩展方式，再绘制增长图铺砌。这是因为需要反复使用反代换，以检查向右的两种可能扩展中哪一种是合法的。

从增长图的构造方式，或只需观察铺砌（图 2.13）或词（图 2.14），便可清楚看出，随着一端向外延伸、另一端作回文反射而被“逐步遍历”的，是迭代的不动点中的一段。注意到这一点后，这并不令人意外，因为，

$$\mathcal{F}_{3m} = \mathcal{F}_{3m-1}\,\mathcal{F}_{3m-2} \qquad m \in \mathbb{Z},\ m \geqslant 1$$
$$= \mathcal{F}_{3m-2}\,\mathcal{F}_{3m-3}\,\mathcal{F}_{3m-2}.$$

这表明，形式为 $n \equiv 3 \pmod 3$ 的一个前置词，包含在后续同形式词的中央。事实上，由于这一过程具有迭代性质，它包含在所有后续同形式词的中央。图 2.15 展示了一些具体例子；=，

= = 和 。

这里用颜色和叠加来展示它们之间的关系。正如图 2.15 所示，这些独立结果可以嵌套起来，例如可以写成，$\mathcal{F}_n\mathcal{F}_6\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_3\,\mathcal{F}^4\,\mathcal{F}_9\,\mathcal{F}_7\,\mathcal{F}_6\,\mathcal{F}_7\ \ \mathcal{F}_{12}\,\mathcal{F}_{10}\,\mathcal{F}_9\,\mathcal{F}_{10}$

$$\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_{10}\,\mathcal{F}_7\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_3\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_7\,\mathcal{F}_{10}$$

这一讨论很容易推广，并由引理 2.3 简洁地概括为一个形式化结果，该结果将在下一节中发挥作用。

引理 2.3：$\mathcal{F}_3$ 的中心化递归嵌入

$$\mathcal{F}_{3m} = \mathcal{F}_{3m-2}\,\mathcal{F}_{3m-5}\ldots\mathcal{F}_7\,\mathcal{F}_4\,(\mathcal{F}_3)\,\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_7\ldots\mathcal{F}_{3m-5}\,\mathcal{F}_{3m-2} \qquad m \in \mathbb{Z}^+$$

证明：由于这是一个直接的归纳证明，故留作练习，供有兴趣的读者完成。□

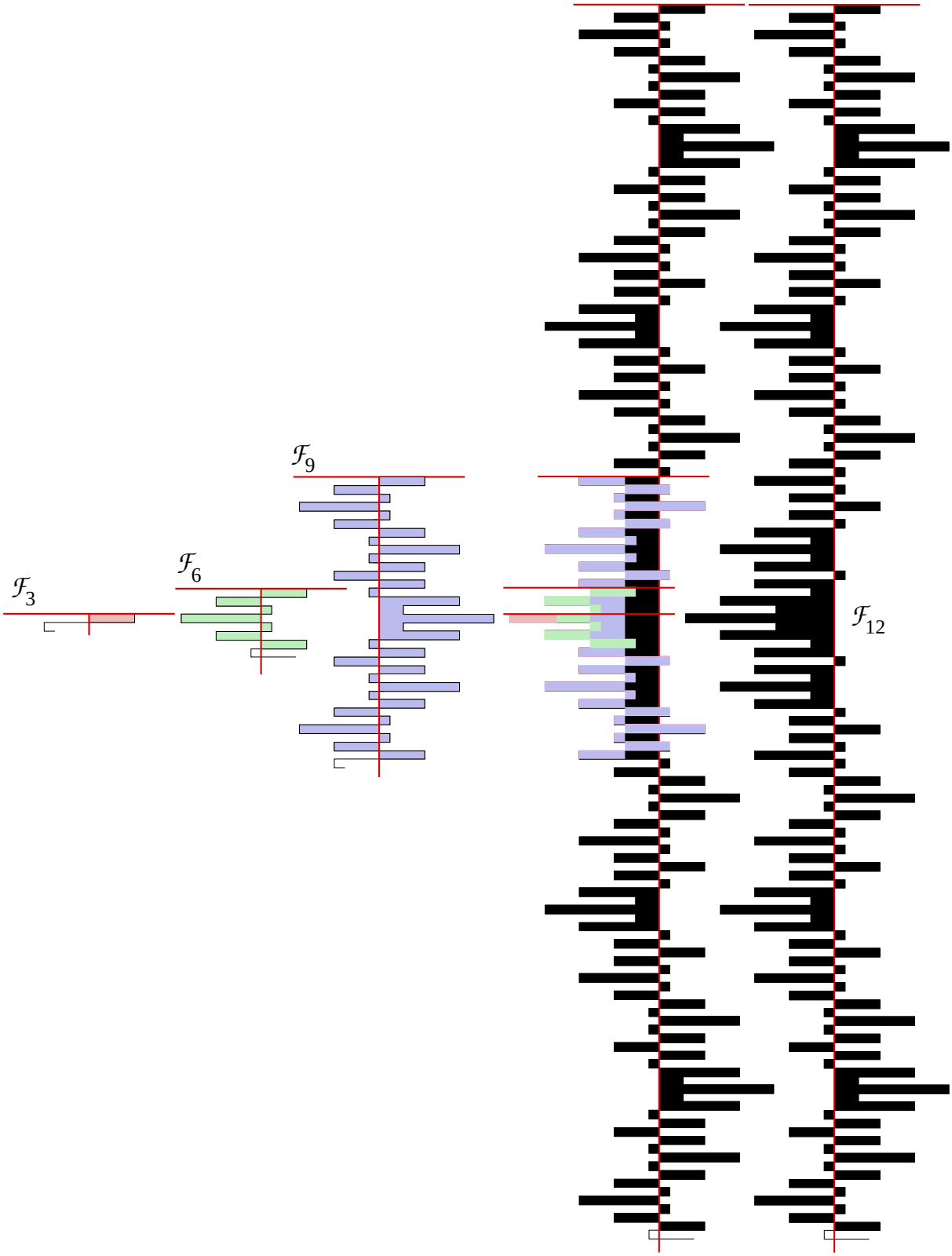


图 2.15：说明仅处理满足以下条件的词时，较短的词如何出现在后续词的中心：$n \equiv 0$（模 3）。有时，在叠加铺砌路径之前，需要先将与词相关联的铺砌路径反射。何时需要进行此类反射将在后文说明。颜色用于展示前面的词中出现的情况。可以说，嵌入于之中，而嵌入于之中，依此类推。本图由运行 LOGO 编程语言（附录 A）的计算机绘制。$\mathcal{F}_n$ $\mathcal{F}_{12}$ $\mathcal{F}_3$ $\mathcal{F}_6$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_3$ $\mathcal{F}_6$ $\mathcal{F}_9$ $\mathcal{F}_{12}$

2.6 离原点有多远?

第2章的最后一节将回到之前提出的一个问题：之字形路径能离原点多远。从宏观角度来看，既然斐波那契词是非周期对象，那么可以认为，无论给定离原点的距离是多少，路径最终都会超出这一距离。这是因为非周期意味着不会出现长时间的重复，也不会有任意大的周期部分。这似乎与零偏差图所揭示的情况相矛盾：路径似乎有些犹豫，不愿远离零偏差线。因此，问题逐渐转变为：是什么机制使路径总体上偏离这条线的最大距离始终有限，却随着 n 趋于无穷而不断向外扩展？一个关键思路是确定斐波那契词代表的是方向反转还是方向保持。换句话说，它会使后续的路径片段起初沿相同方向还是相反方向前进？图 2.16 给出了两个例子，一个是方向保持，另一个是方向反转。$\mathcal{F}_n$

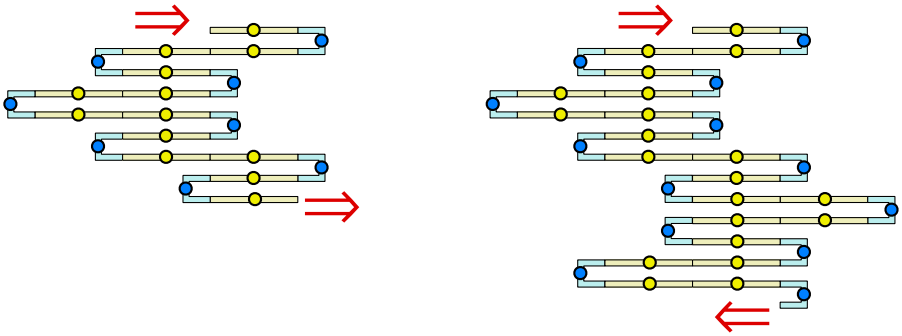


图 2.16：左侧是使下一段路径沿相同方向延伸的词。$\mathcal{F}_6$右侧是使下一段路径沿相反方向延伸的词。$\mathcal{F}_7$

显然，如果“转向”指令的数量为奇数，那么一个词就表示方向反转。也就是说，词中字母 b 的数量为奇数。我们已经观察到（见表 1.1），词中字母 b 的数量属于斐波那契数列；因此，对这个数量取模 2，就能判断任意给定的斐波那契词表示的是方向保持还是方向反转。表 2.2 展示了由此得到的规律。

Word	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$
N° 个 b	1	1	2	3	5	8	13
N° 个 b（mod 2）	1	1	0	1	1	0	1
S 或 R	*R*	*R*	*S*	*R*	*R*	*S*	*R*

表 2.2：斐波那契词所表示的方向只有两种：方向保持（S）或方向反转（R）。

由于一个词中 b 的数量等于前两个词中 b 的数量之和，根据奇数和偶数相加时的简单规则可知，当 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时，这是一个方向保持词；否则，这是一个方向反转词。$\mathcal{F}_n$

第二个关键思路是确定与$\mathcal{F}_n$ $\vec{\mathcal{F}_n}$相关的路径相对于其初始方向，从起点到终点的一维向量位移，即 。回想一下，A 型砖块的长度为 ϕ，也就是黄金比例。

对于具有 $n \equiv 0$ （模 3）的词，其对应的铺砌路径必须同时从零偏差线开始并在零偏差线上结束。这是因为它关于中心字母 b 具有镜像对称，是回文的。具有 $n \equiv 0$ （模 2）的词以 ba 结尾，而具有 $n \equiv 1$ （模 2）的词以 ab 结尾；结合起来可得，$\mathcal{F}_n \mathcal{W}_n$

$$\vec{\mathcal{F}}_n = \left\{ \begin{array}{l} +\phi, \ \textit{Sustain for } n \equiv 0 \ (\text{mod } 6) \\ -\phi, \ \textit{Sustain for } n \equiv 3 \ (\text{mod } 6) \end{array} \right\} \ \text{for } n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$$

图 2.17 展示了可能出现的四种情况。

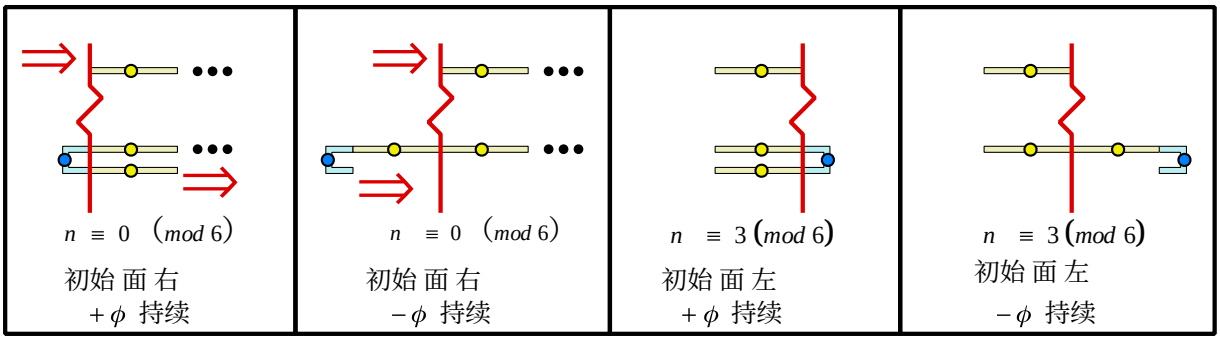


图 2.17：当 $n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$ 时，相对于初始方向的四种可能位移。

对于 $n \equiv 1 \ (\text{mod } 3)$ 的词，其对应的铺砌路径必须以零偏差线为起点和终点（因为它是具有半周旋转对称的回文词，并且中心位于零偏差线上，中心空词两侧各有一个 a）。这一次，结合以下事实：$n \equiv 0 \ (\text{mod } 2)$ 的词以 ba 结尾，而 $n \equiv 1 \ (\text{mod } 2)$ 的词以 ab 结尾，我们可以得出：$\mathcal{F}_n \mathcal{W}_n$

$$\vec{\mathcal{F}}_n = \left\{ \begin{array}{l} +\phi, \ \textit{Reversal for } n \equiv 1 \ (\text{mod } 6) \\ -\phi, \ \textit{Reversal for } n \equiv 4 \ (\text{mod } 6) \end{array} \right\} \ \text{for } n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$$

图 2.18 展示了可能出现的四种情况。

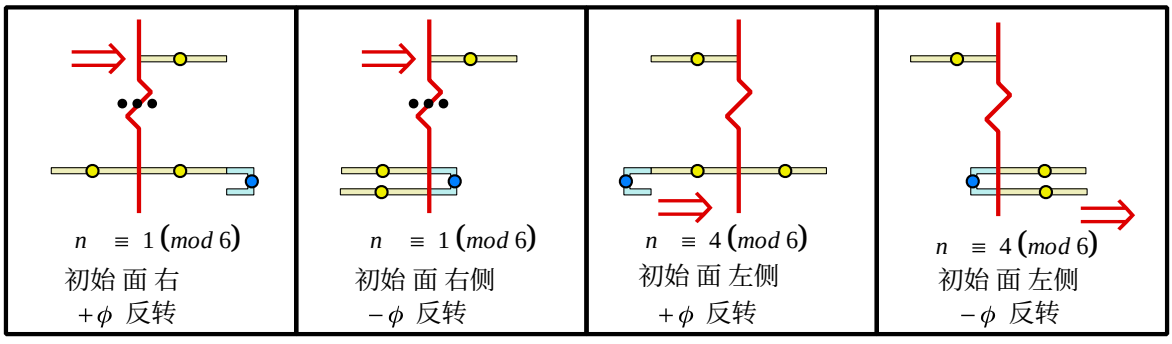


图 2.18：当 $n \equiv 1$ (模 3) 时，相对于初始方向的四种可能位移。

至此，所有准备工作都已就绪，我们可以通过考察与该铺砌对应的词的一种特殊分解，来追踪某个特定铺砌偏离零偏差线的过程，并以此完成一个示例。

重点关注形如以下形式且满足条件的词：$n \equiv 0$（模 3），对这些词可以应用关于斐波那契词中心化递归嵌入的引理 2.3。$F^n F_3$
例如，考虑该词。根据引理 2.3，它可分解为：$\mathcal{F}_{15}$

$$\mathcal{F}_{15} = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{10}\mathcal{F}_7\mathcal{F}_4\mathcal{F}_3\mathcal{F}_4\mathcal{F}_7\mathcal{F}_{10}\mathcal{F}_{13}$$

注意，中心附近的所有词都具有 $n \equiv 1$（模 3）的形式。现在来追踪与各个分量词相关的铺砌，其末端距离零偏差线有多远。$\mathcal{F}_3$

表 2.3 展示了计算过程。

分量 $\mathcal{F}_{15}$	$\mathcal{F}_{13}$	$\mathcal{F}_{10}$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_7$	$\mathcal{F}_{10}$	$\mathcal{F}_{13}$
初始方向	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
相对位移	$+\phi$	$-\phi$	$+\phi$	$-\phi$	$-\phi$	$-\phi$	$+\phi$	$-\phi$	$+\phi$
最终方向	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$
总体位移	$+\phi$	$+2\phi$	$+3\phi$	$+4\phi$	$+3\phi$	$+2\phi$	$+\phi$	0	$-\phi$

表 2.3：追踪每个组成部分的末端距离零偏差线有多远。相对位移是相对于初始方向而言的。

作为对表格 2 3 $\overrightarrow{\mathcal{F}_{15}}$.计算的核对，请注意，总体上确定为 (ϕ, 持续)，这正如预期。这类追踪计算是定理 2.2 的核心，也是本章节的高潮亮点。$\mathcal{F}$

定理 2.2：偏离零偏差线的无限游移 $\mathcal{F}_n$

给定一个距离，为方便起见，将其表示为 ϕ 的整数倍。与斐波那契词相关联的来回铺砌路径最终会$\mathcal{F}_n$远离原点，超过该（一维）距离；只要 n 足够大且 $n \equiv 0 \pmod 3$。

证明
要用到两个结果。首先，如上所述，

$$\vec{\mathcal{F}}_n = \begin{cases} +\phi, & \textit{Sustain for } n \equiv 0 \pmod 6 \\ +\phi, & \textit{Reversal for } n \equiv 1 \pmod 6 \\ -\phi, & \textit{Sustain for } n \equiv 3 \pmod 6 \\ -\phi, & \textit{Reversal for } n \equiv 4 \pmod 6 \end{cases}$$

其次，根据引理 2.3，

$$\mathcal{F}_{3m} = \mathcal{F}_{3m-2}\mathcal{F}_{3m-5}\ldots\mathcal{F}_7\mathcal{F}_4(\mathcal{F}_3)\mathcal{F}_4\mathcal{F}_7\ldots\mathcal{F}_{3m-5}\mathcal{F}_{3m-2} \qquad m \in \mathbb{Z}^+$$

证明在两种情形下分别使用这两个结果：一种对应于 $3m \equiv n \equiv 3 \pmod 6$ 时向右偏离，另一种对应于 $3m \equiv n \equiv 0 \pmod 6$ 时向左偏离。

情况1：向右偏离。对于 $3m \equiv n \equiv 3 \pmod 6$，广义计算结果如表 2.4 所示。

分量 $\mathcal{F}_{3m}$	$\mathcal{F}_{3米-2}$	$\mathcal{F}_{3m-5}$		$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	…		
初始方向	⇒	⇐	…	⇐	⇒	⇒	…	⇒	⇐
相对位移	$+\phi$	$-\phi$	…	$-\phi$	$-\phi$	$-\phi$	…	$-\phi$	$+\phi$
最终方向	⇐	⇒	…	⇒	⇒	⇐	…	⇐	⇒
总体位移	$+\phi$	$+2\phi$	…					0	$-\phi$

表 2.4：关于终点偏离零偏差线距离的广义核算 f
每个组成部分都位于 $3m \equiv n \equiv 3$ (模 6)。

情形 2：向左偏离。对于 $3m \equiv n \equiv 0$ (模 6)，广义计算如表 2.5 所示。

F 的组成部分 $\mathcal{F}_{3m}$	$\mathcal{F}_{3米-2}$			$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	…		
初始方向	⇒	⇐	…	⇒	⇐	⇐	…	⇒	⇐
相对位移	$-\phi$	$+\phi$	…	$-\phi$	$-\phi$	$-\phi$	…	$+\phi$	$-\phi$
最终方向	⇐	⇒	…	⇐	⇐	⇒	…	⇐	⇒
总体位移	$-\phi$	$-\phi$	…		(m			0	$+\phi$

表 2.5：对于 $3m \equiv n \equiv 0 \pmod 6$，对各组成部分末端偏离零偏差线的距离进行概括核算。

设 $d\phi$ 是 ϕ. 的整数倍
那么，这就是必须超过的、距原点固定的距离。令 $m = d + 1$。

考虑词，按照引理 2.3 进行分解，其中与中心嵌入的 相关联的铺砌，其起点与原点的距离为 $d\phi$，并且其朝向使其向远离原点的方向再投影 $\phi + 0.5$ 个单位。因此，与 相关联的铺砌超出了与原点的距离 $d\phi$ 。□ $\mathcal{F}_{3m}$ $\mathcal{F}_3$ $\mathcal{F}_{3m}$

有趣的是，如果 A 类砖块的长度从 ϕ 缩短到 1，定理 2.2 仍会得出相同的结论。

2.7 第2章作者注释

据我所知，第2章呈现了一些原创性的数学研究，并力求既为斐波那契词引入一种创新的可视化方式，又针对观察到的现象证明新的结果。所涉及的大多数技巧都是词组合学中常见的符号动力系统操作。因此，我认为有必要看看这些新想法会发展到何处，并展示这些技巧如何应用于一个陌生的情境。

在本章中，局部规则相互作用，产生全局行为和约束，这一过程引人入胜。文献中常将斐波那契词描述为“复杂度最低的非周期词”。即便如此，尽管起初我原本期待发现并编目多种结构，最终却浮现出单一结构，这仍让我深感着迷。回想起来，我在别处也见过这种现象：铺砌中精心选取的一块对称拼块，能够通过替换的迭代，优雅地生成平面 拼块， $\mathbb{R}$ 的铺砌。关键在于，这块拼块与不动点中选定的一部分相关联。在本章中，这一选定部分称为嵌入词。若想了解别处出现类似情形的一个具体例子，请参见图 2.19；有关这种“椅子替换”的完整细节，请参阅 [Rob99]。 2

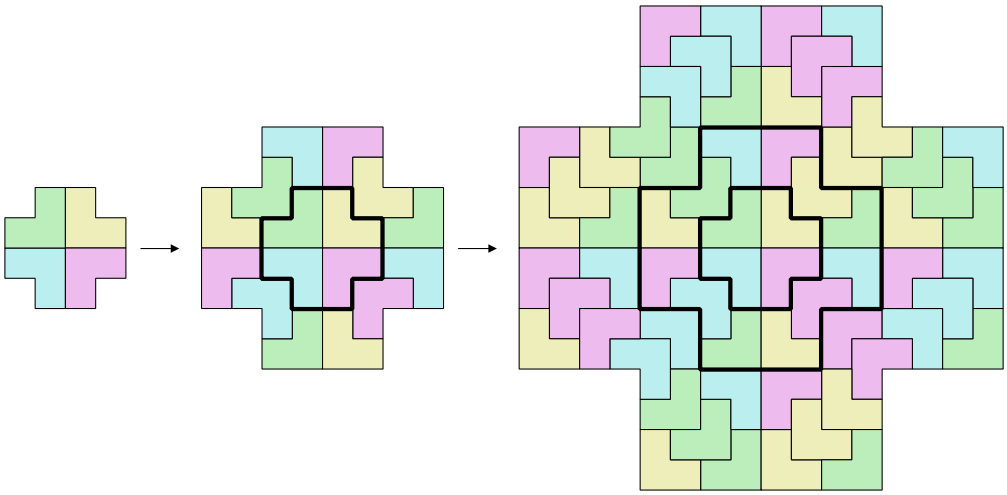


图 2.19：左侧是与迭代替换不动点中选定的嵌入词相关联的初始拼块。对这个对称的起始图案进行迭代（忽略瓦片的颜色），便可得到一种格外引人入胜的替换结构展示，其方式与本章中展示斐波那契词的做法大致相同。

我最初在本章节中打算探索一种二维绘图规则。不过，绘图规则这一概念本身就十分有趣，因此我开始思考，最简单的绘图规则会是什么样子，即使它无法生成二维路径。往返绘图规则逐渐演变为最简单的规则之一，却证明能够捕捉到斐波那契词的一些对称性。零偏差图则是为了回应后来的一些发现而产生的。我最初偶然想到，可以将路径与人工 y 轴之间的区域着色；但由于效果具有强烈的视觉冲击力，这个想法便被采用了。通常的做法是将控制点放在瓦片的一端。我选择将控制点放在中间，然后把 B 瓦片沿控制点对折，这样做是为了更清晰地呈现并捕捉零偏差的对称性。

第3章

自然界中的分形

3.1 概述

此前我们看到，斐波那契词上的往返绘图规则是在实数集实数集上来回遍历的一维路径。在本章节中，我们将继续探索斐波那契词的性质。这里应用了一种新的绘图规则，它会在实数集 上生成一条二维路径。结果发现，这是一种分形。[2]。

3.2 相似分形

Benoit Mandelbrot 于1982年发表的开创性著作《自然界的分形几何》，包含下图3.1 [第50]页中展示的一个数学理想化分形示例。此类分形由两个几何对象构成，Mandelbrot 将它们称为初始元和生成元。在图3.1中，初始元是长度为单位长度的直线段 A_1，。生成元是 A_2 之字形。A_2 生成元由八条长度各为0.25单位的线段组成，其中较长的双倍长度线段视为两条单独的线段。现在，这八条线段中的每一条都可以看作一个初始元，其长度均为原初始元 A_1 的四分之一。将生成元缩放至合适大小后，分别应用于每条线段，结果如 A_3所示。重复这一过程，此次使用0.25 2的缩放因子，得到 A_4。随着迭代次数趋于无穷，最终形成的“曲线”就是该分形。关键在于，生成元只能由经过缩放和旋转的初始元副本构成。

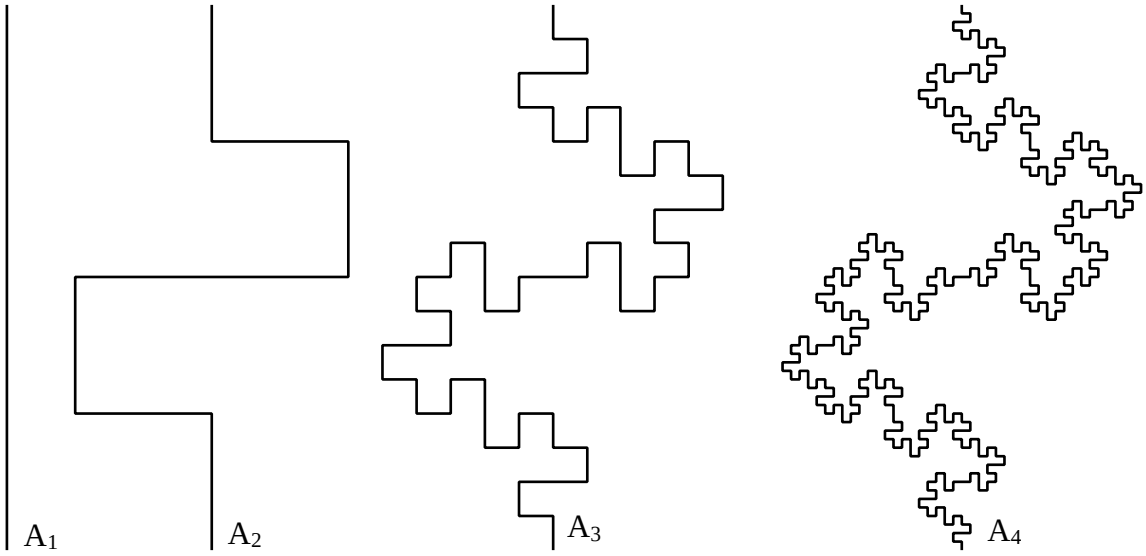


图 3.1：产生分形的几何迭代。

一般来说，由m个自身的副本组成、且长度按比例因子r缩放的集合，其维数$_{SYM}$ = – 为 log m log r 。 相似维数。对于图3.1中的分形，这给出的相似维数为1.5。

3.3 双字母绘制规则

选择这个入门示例，是因为它看起来有些像一条曲折路径。若想从斐波那契词得到这种路径，除了向前移动之外，向左和向右转弯似乎也能提高绘制出一条不会过度覆盖自身的路径的可能性。斐波那契词的语言包含三个长度为两个字母的词，这提示我们可以采用类似表3.1所示的绘图规则，为每种可能的双字母组合指定不同的绘图指令。每条指令的总长度均设为1个单位。

符号	动作
ab	前进 0.5，右转 90°, 前进 0.5
aa	前进 1
ba	前进 0.5 , 左转 90° , 前进 0.5

表3.1：双字母绘制规则。

双字母绘制规则仅适用于字母数量为偶数的斐波那契词。这样，字母才能两两配对，不会有字母落单。这一要求使我们关注形式为 $n \equiv 1 \pmod 3$ 的词。作为符合这些条件的示例，我们来考察 = abaababa 和 = abaababaabaababaababaabaababaaba。$\mathcal{F}_n \mathcal{F}_4 \mathcal{F}_7$

将这些词按字母对配对，如下所示:

$$\mathcal{F}_4 = (ab)(aa)(ba)(ba)$$

and

$$\mathcal{F}_7 = (ab)(aa)(ba)(ba)(ab)(aa)(ba)(ba)(ab)(ab)(aa)(ba)(ab)(ab)(aa)(ba)(ab)$$

由此应用双字母绘制规则得到图 3.2。

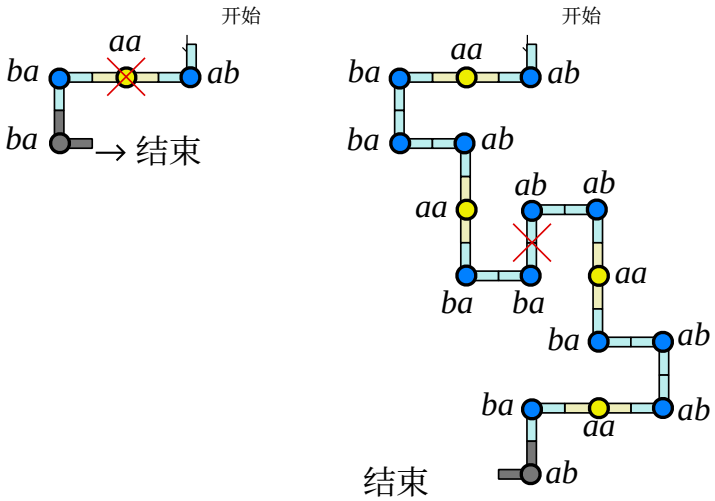


图 3.2：左：按双字母绘制规则得到的铺砌路径。$\mathcal{F}_4$右：按双字母绘制规则得到的铺砌路径。$\mathcal{F}_7$

在这两种情况下，移除最后一块瓦片后的路径都关于红色十字标记的点呈旋转对称。移除最后一块瓦片后，方向保持不变，即入口移动向下，出口移动也向下。

当然，根据引理 2.1，我们知道，从中移除最后一对字母后，会得到一个回文词，。对于上面两个例子，这给出：$\mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_n$

$$\mathcal{W}_4 = (ab)\,(aa)\,(ba)$$

and

W $_7$ =(*ab*) (*aa*) (*ba*) (*ba*) (*ab*) (*aa*) (*ba*) (*ba*) (*ab*) (*ab*) (*aa*) (*ba*) (*ab*) (*ab*) (*aa*) (*ba*)，其中每个词的中间部分以红色标出。事实上，除了这两种可能外，不可能有其他中间部分，因为 bb 不合法，而且中间部分必须是回文的。在继续讨论图 3.2 之前，可以先提取几点观察。首先，注意到两条路径的最后一个图块都被灰显了，而在这两种情况下，剩余的彩色路径都关于红色十字所标记的点呈半周旋转对称。这个红色十字对应于 中间的 ...(aa)...，或 ...(ba)(ab)... 对应的图块。其次，注意到图块在半周旋转对称变换后的图像中，其方向会反转。为进一步探讨并解释这种对称性，表3.2列出了绘图规则所绘制图块的所有可能方向，以及每个图块经过半周旋转并将方向“翻转”后的图像。这种翻转是为了保持铺砌路径上的方向正确。不能忽略方向这一要素，例如，右转 (ab) 对应的图块如果从“错误的方向”通过，看起来就会像左转 (ba)。从根本上说，必须在铺砌路径中保留词从左向右读取的顺序，因为这个词会生成该铺砌路径。W n W n

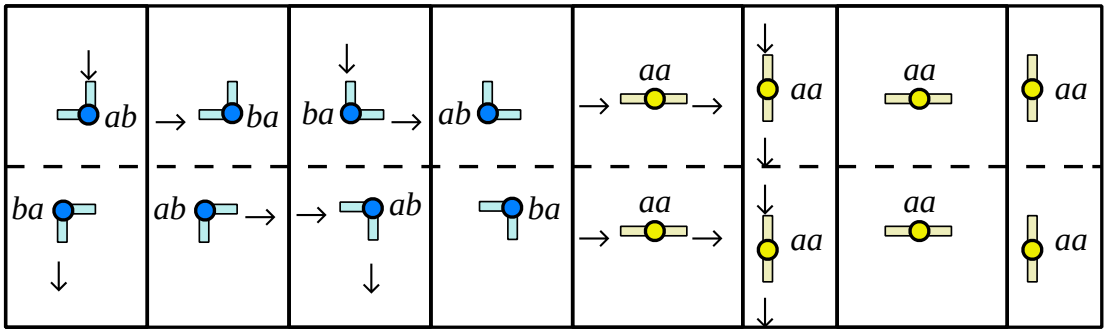


表3.2：双字母绘制规则下瓷砖的所有可能方向。从表格上行选取的瓦片，经过半周旋转后的图像直接显示在其正下方（反之亦然）。瓦片旋转后，穿过它的路径方向会反转。

表3.2指出，在所有情况下，若也考虑方向，则（ab）的图像为（ba），（aa）的图像是其本身，而（ba）的图像为（ab）。这种匹配也显而易见，且源于这些词的回文性质。图3.3展示了这一点；$\mathcal{W}_4\,\mathcal{W}_7$

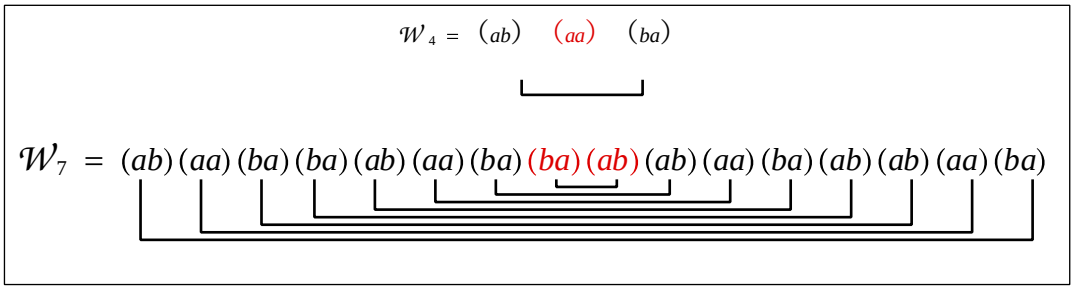


图3.3：在 and 中，(ab) 与 (ba)、(aa) 与自身，以及 (ba) 与 (ab) 的匹配 W_4 W_7 .

引理 3.1：当 $n \equiv 1$ （模 3）时$\mathcal{W}_n$的半周旋转对称
对于 $n \equiv 1$ （模 3），根据双字母绘制规则会产生一条具有半周旋转对称性的路径。此外，入口方向与出口方向相同。$\mathcal{W}_n$

证明
情况1：$n \equiv 1$ （模 6）。
中的字母数将呈现 $4k + 2$ 的形式，其中 k 为某个非负整数。去掉最后两个（最右边的）字母后，剩下的部分，即，是一个回文（根据引理 2.1），长度为 4k。由于子词 bb 不合法，在该回文的中间必定是字母构型 ...(*ba*)(*ab*)...；根据双字母绘制规则，从几何上看，这对应于图3.3所示的铺砌构型之一；$\mathcal{F}_n$ $\mathcal{W}_n$

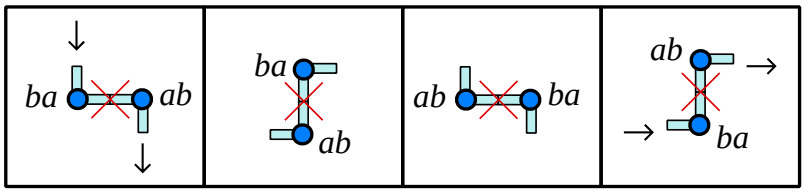


图3.3：与 $n \equiv 1$ （模 6）时的(*ba*)(*ab*)...瓦片相关的铺砌路径中间部分的四种可能方向。$\mathcal{W}_n$

情形 2：$n \equiv 4 \pmod 6$。
中字母的数量将具有 4 的形式k，其中 k 为某个非负整数。去掉最后两个（最右侧的）字母后，剩余部分是回文（由引理 2.1 可知），长度为 4k 2。由于子词 bb 不合法，因此该回文中间必须是字母构型 ...(*aa*)...；根据双字母绘制规则，它在几何上对应于图 3.4 所示的某一种铺砌构型；$\mathcal{F}_n$ $\mathcal{W}_n$ –

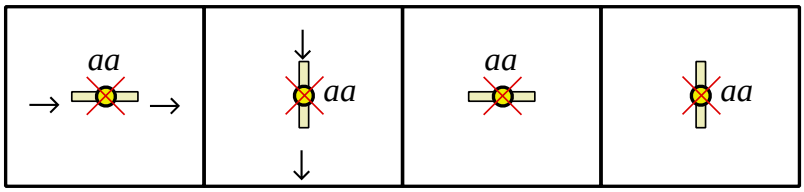


图 3.4：当 $n \equiv 4 \pmod 6$ 时，与铺砌路径相关联的词中间，...(*aa*)... 瓷砖的四种可能方向。$\mathcal{W}_n$

在图 3.3 和 3.4 中，箭头表示将瓦片视为路径片段时经过该瓦片的方向。请注意，这些图中的所有可能构型都关于红色十字标示的中心具有半周旋转对称，而且它们的出口方向都与入口方向相同。情形 1 和 2 现在结合起来，为归纳证明奠定基础。

在假设步骤中，我们假设存在一段已有的铺砌路径，其关于中点具有半周旋转对称，且入口和出口方向相同。其示意图如

图3.5所示，并且不失一般性地假设铺砌路径中的方向和朝向如图所示。



图3.5：以图示形式表示路径片段的假设步骤。绿色半块铺砖表示与 (ab)、(aa) 或 (ba) 相关的三种可能瓦片之一。假设这段路径关于其中心的红色十字具有半周旋转对称性。该路径的方向以及入口和出口方向如图所示，且不失一般性。

图3.5中的路径片段将以三种可能方式之一向右延伸：添加与 ab、aa 或 ba 相关的瓦片。根据斐波那契词的回文性质，这三种可能的向右延伸，分别必须与向左延伸的 ba、aa 或 ab 相匹配。图3.6以图示形式展示了这三种可能性。

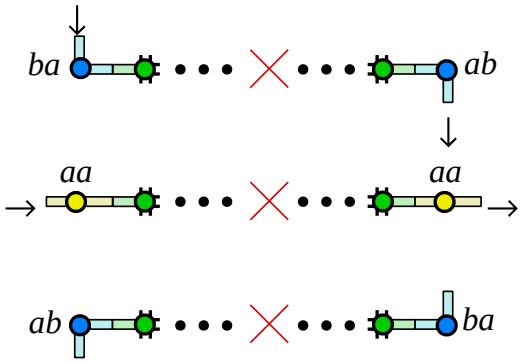


图3.6：归纳步骤，说明路径向右延伸一块瓦片的所有可能情况，都会导致左侧添加一块瓦片，使其保持关于红色十字的半周旋转对称，并使入口和出口方向继续保持相同。

在所有情况下，经过归纳步骤后，铺砌路径仍然关于红色十字呈半周旋转对称，且入口和出口方向仍然相同。现在可以运用数学归纳法原理完成证明。□

3.4 路径是分形吗?

为进一步说明引理 3.1，下一页的图 3.7 展示了此前讨论的两个例子以及接下来的两个斐波那契词的简化路径（其中各个瓦片以隐含方式表示，而非明确画出），对于这些例子，斐波那契词中的 n 满足 $n \equiv 1$ (模 3)，以及 。这些图像进一步表明，绘图规则所生成的路径具有分形性质。本章节旨在证明这一点。本节中的若干思路受到 Alexis Monnerot-Dumaine 于2009年发表的论文《斐波那契词分形》的启发 [Mon09]，该文将这些思路应用于另一种相关但不同的分形。 $\mathcal{F}_4$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_n$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_{13}$

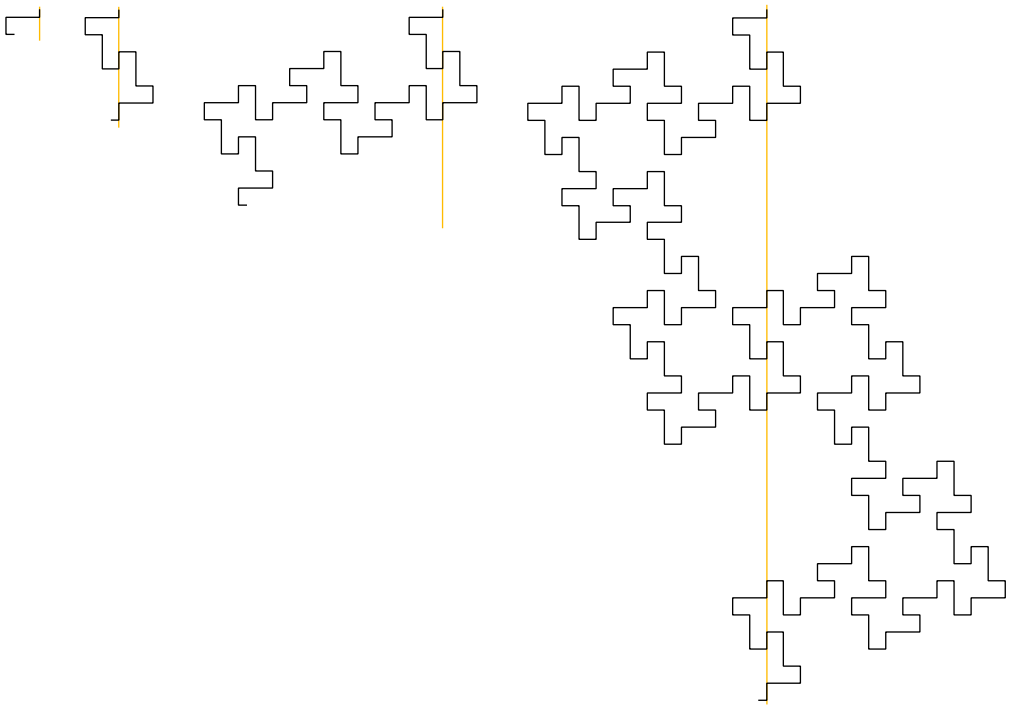


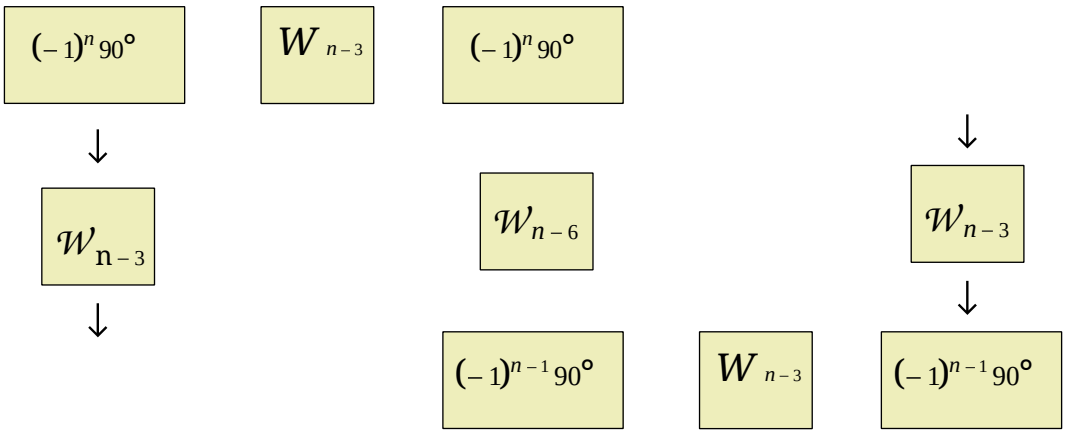
图 3.7：从左到右，分别是在双字母绘制规则下与 、 和 相关联的铺砌路径。路径从图的顶部开始，在底部结束。移除最后一块瓦片后，这些路径表示 和 $\mathcal{F}_4\,\mathcal{F}_7\,\mathcal{F}_{10}\,\mathcal{F}_{13}\,\mathcal{W}_4$，$\mathcal{W}_7$，$\mathcal{W}_{10}$ $\mathcal{W}_{13}$。

现陈述定理 3.1；这是支撑我们后续工作的关键结果。

定理 3.1：(Monnerot-Dumaine [Mon09]) $\mathcal{W}_n$斐波那契词去掉最后两个字母后记作 和；根据引理 2.1，它们是回文的，$n \geqslant 1$。设去掉的两个字母为 uv，其中 uv 是两种可能结尾之一：ab（当 n 为奇数时，$u = a$ 且 $v = b$），或 ba（当 n 为偶数时，$u = b$ 且 $v = a$）。$\mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_n$

那么，对于 $n \geqslant 6$,

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-6}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}$$



特别地，当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 时，对于符合双字母绘制规则的斐波那契词，这一结论成立。

直观地说，分形通常被视为一种无穷且重复（或“几乎”重复）的模式，其中可以在不同尺度下找到其组成部分的回声。事实上，整体也许可以在自身中以缩小的尺度找到。定理 3.1 表明，斐波那契词在双字母绘制规则下会产生这样一种实体。证明定理 3.1 需要先建立若干引理，这些引理将在下文给出。不过，首先，图 3.8 给出了定理 3.1 的一个示例，其中与 相关联的铺砌路径被分解为其组成部分，如下所示 = $\mathcal{W}^{10}\ \mathcal{W}_{10}\ \mathcal{W}_7\ (ab)\ \mathcal{W}_7\ (ab)\mathcal{W}_4\ (ba)\ \mathcal{W}_7\ (ba)\ \mathcal{W}_7$.

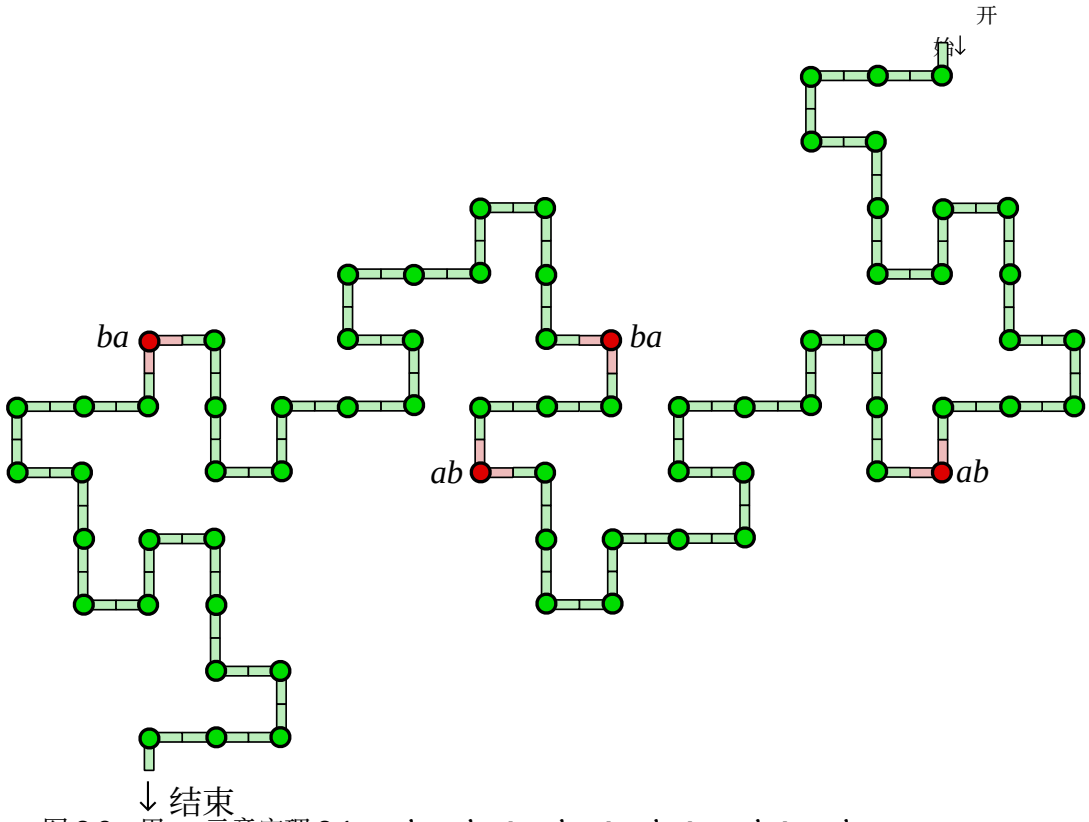


图 3.8：用 = 示意定理 3.1。$\mathcal{W}_{10}\ \mathcal{W}_7(ab)\,\mathcal{W}_7\ (ab)\mathcal{W}_4\ (ba)\ \mathcal{W}_7(ba)\mathcal{W}_7$

引理 3.2：末尾字母对反转规则（Monnerot-Dumaine [Mon09]）
设 = uv 其中 u 和 v分别表示 Let = vu 中倒数第二个和最后一个字母，且末尾两个字母的位置已互换。于是，$\mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_n(\,)\mathcal{F}_n$。 $\mathcal{T}_n\ \mathcal{W}_n(\,)$

$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{F}_n\,\mathcal{T}_{n-1}$$

证明
斐波那契词根据定义满足以下关系，

$$F_{n+1} = F_n F_{n-1}$$

$$\mathcal{W}_{n+1}(vu) = \mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_{n-1}(vu)$$

$$\mathcal{W}_{n+1}(uv) = \mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_{n-1}\,(uv)$$

$$\mathcal{T}\mathrm{n}_{+1} = \mathcal{F}_n\,\mathcal{T}\mathrm{n}_{-1}$$

$_0$ $\mathcal{F}_1$ 当 n ⩾ 1 时，$\mathcal{F}$ = a、= ab

$\mathcal{F}_{n+1}$、$\mathcal{F}_{n-1}$ 具有相同的末尾两个字母

将两侧末尾的两个字母反转

□

引理 3.3：“几乎”交换性（Monnerot-Dumaine [Mon09]）
令= *uv* 其中*u* 和*v*分别表示令= *vu* 其中两个末尾字母交换了位置。于是，$\mathcal{F}_n\mathcal{W}_n()\mathcal{F}_n$。$\mathcal{T}_n\mathcal{W}_n()$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-2}\mathcal{T}_{n-1} \text{ and } \mathcal{T}_n = \mathcal{F}_{n-2}\mathcal{F}_{n-1}$$

证明
由= *uv* 可知，例如，=，因为斐波那契词的两个字母结尾在 ab 和 ba 之间交替。由 = 可知，例如，= *uv* ，原因相同。F n W n ( ) F n +1 W n +1(*vu*) T n W n (*vu*) T n +1 W n +1( ) 根据斐波那契替换反复作用于 =a 的定义，对于 1 ⩽ n ⩽ 4 ，相应的 F n T n 如下

- = ab, = ba斐$_1$ $\mathcal{T}_1$
- = aba, = aab$\mathcal{F}_2$ $\mathcal{T}_2$
- = abaab, = ababa $\mathcal{F}_3$ $\mathcal{T}_3$
- = abaababa, = abaabaab $\mathcal{F}_4\mathcal{T}_4$

为建立归纳证明的基础，考虑 n = 3 的情形。此时，= *ab* *aab* = 这与引理的第一个结论相符，同时 = = *ab* *aba* = 这与 $\mathcal{F}_{3-2}\mathcal{T}_{3-1} = \mathcal{F}_1\mathcal{T}_2()()\mathcal{F}^3\mathcal{F}_{3-2}\mathcal{F}_{3-1}\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2()()\mathcal{T}_3$第二个结论相符。
现在假设，对于某个 k ∈ ℤ，k ⩾ 4 时，结果对 n = k 成立。
In other words, $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-2}\mathcal{T}_{k-1}$ and $\mathcal{T}_k = \mathcal{F}_{k-2}\mathcal{F}_{k-1}$ by assumption.
对于归纳步骤，考虑 n = k + 1，此时，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1} &= \mathcal{F}_k\mathcal{F}_{k-1} && \text{(By definition)}\\ &= \mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_{k-2}\mathcal{F}_{k-1}\\ &= \mathcal{F}_{k-1}\mathcal{T}_k && \text{(From the assumptive step)}\end{aligned}$$

这就是将 n 替换为 k + 1 后得到的第一个结果。
此外，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_k &= \mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_{k-2}\mathcal{T}_{k-1} && \text{(From the assumptive step)}\\ &= \mathcal{F}_k\mathcal{T}_{k-1} && \text{(By definition)}\\ &= \mathcal{T}_{k+1} && \text{(By Lemma 3.1)}\end{aligned}$$

这就是将 n 替换为 k + 1 后得到的第二个结果，
由数学归纳法即可得到所需的一对结果。 □

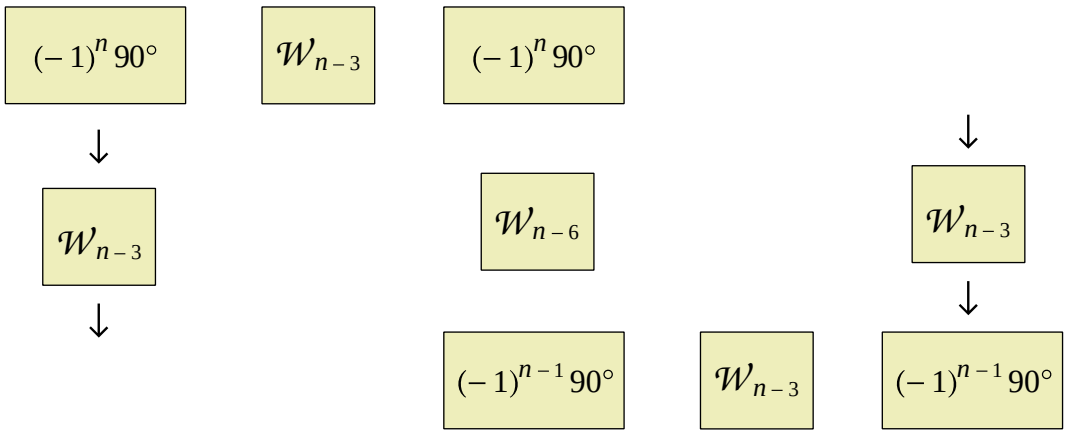
引理 3.3 告诉我们，如果把两个连续的斐波那契词连接起来（其结果等于 ），再以相反的顺序将它们连接起来，那么所得的词几乎仍然是 。事实上，引理告诉我们，所得的词是 ，只是最后两个字母互换了。记住这一点的一种方法是把两个连续的斐波那契词看作“几乎可交换”。$\mathcal{F}_{n-1}\mathcal{F}_{n-2}\mathcal{F}_n\ \mathcal{F}_{n-2}\ \mathcal{F}_{n-1}$其中 $\mathcal{F}_n\mathcal{F}_n$

准备工作已经完成，现在我们可以证明定理 3.1。

定理 3.1：去掉最后两个字母后的（Monnerot-Dumaine [Mon09]）$\mathcal{W}_n$斐波那契词记作；根据引理 2.1，它们是回文的，n ⩾ 1。设去掉的两个字母为 uv，其中 uv 是两种可能的结尾之一：当 n 为奇数时为 ab（u = a，v = b），当 n 为偶数时为 ba（u = b，v = a）。$\mathcal{F}_n\,\mathcal{W}_n$

于是，对于 n ⩾ 6，

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-6}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}$$



特别地，当 n ≡ 1 (模 3) 时，这一结论成立；它对应于满足双字母绘制规则的斐波那契词。

证明

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \mathcal{F}_{n-1}\,\mathcal{F}_{n-2} && \text{(By definition)}\\
&= \mathcal{F}_{n-2}\,\mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-4}\\
&= \mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-4}\,\mathcal{F}_{n-4}\,\mathcal{F}_{n-5}\,\mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-4}\\
&= \mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-4}\,\mathcal{F}_{n-5}\,\mathcal{F}_{n-6}\,\mathcal{F}_{n-5}\,\mathcal{F}_{n-4}\,\mathcal{F}_{n-5}\,\mathcal{F}_{n-4}\\
&= \mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-3}\,\mathcal{F}_{n-6}\,\mathcal{T}_{n-3}\,\mathcal{T}_{n-3} && \text{(By Lemma 3.3)}\\
&= \mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{F}_{n-6}\,\mathcal{W}_{n-3}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}(uv)
\end{aligned}$$

$\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-3}(vu)\,\mathcal{W}_{n-6}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}(uv)\,\mathcal{W}_{n-3}$

因此，□

3.5 铺砌路径之间的向量关系

定理 3.1 证明，双字母绘制规则产生了一个分形。它也是探索蜿蜒线其他方面的关键。图 3.7 的一个显著特点是，与之关联的铺砌路径的出口正好位于入口的正下方。图3.9 和图 3.10 扩展了图 3.7 所示的分形序列，并表明 是下一个具有这种铺砌路径的词。 $\mathcal{W}_7\,\mathcal{W}_{13}\,\mathcal{W}_{19}$

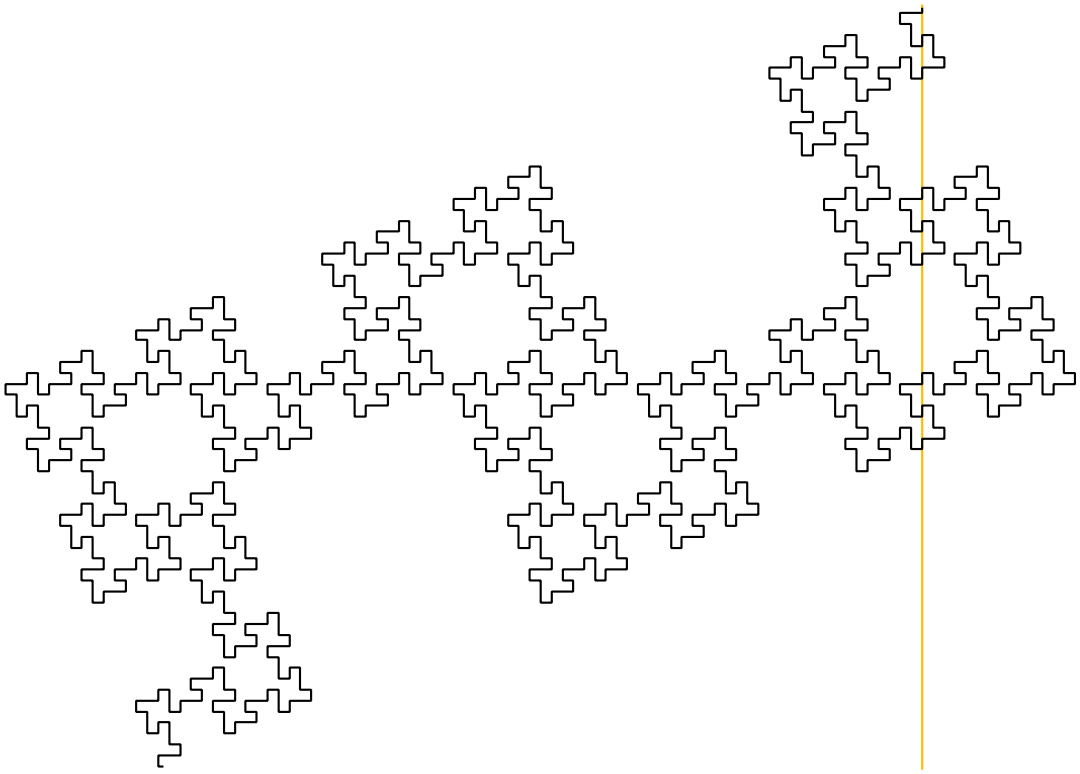


图3.9：与双字母绘制规则相关的铺砌路径。路径从顶部开始，到底部结束。去掉最后一块瓦片后，路径保持不变。$\mathcal{F}^{16}\,\mathcal{W}_{16}$

设 为一个向量，其尾端位于 的铺砌路径起点，头端位于终点。表3.3 给出了若干 值对应的 n。$W_n \overrightarrow{\quad} W_n \overrightarrow{W_n}$

$\mathcal{W}_n$	N° 个图块	$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$		$\mathcal{W}_n$	N° 个图块	$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$
$\mathcal{W}_4$	3	$\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$		$\mathcal{W}_{13}$	304	$\begin{pmatrix}0\\-40\end{pmatrix}$
$\mathcal{W}_7$	16	$\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$		$\mathcal{W}_{16}$	1291	$\begin{pmatrix}-70\\-69\end{pmatrix}$
$\mathcal{W}_{10}$	71	$\begin{pmatrix}-12\\-11\end{pmatrix}$		$\mathcal{W}_{19}$	5472	$\begin{pmatrix}0\\-238\end{pmatrix}$

表3.3：仔细统计图3.7、3.9和3.10所得的观测值。$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$

利用定理 3.1，并注意 90° 转向如何翻转向量，即可用表3.3中的前两个向量确定后续向量。例如，对于 $n \equiv 1 \pmod 6$，可由 和 通过以下方式得到：$\mathcal{W}_{13}\,\mathcal{W}_{10}\,\mathcal{W}_7$

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_{13}} = \begin{pmatrix}-12\\-11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\\-11\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\-40\end{pmatrix}$$

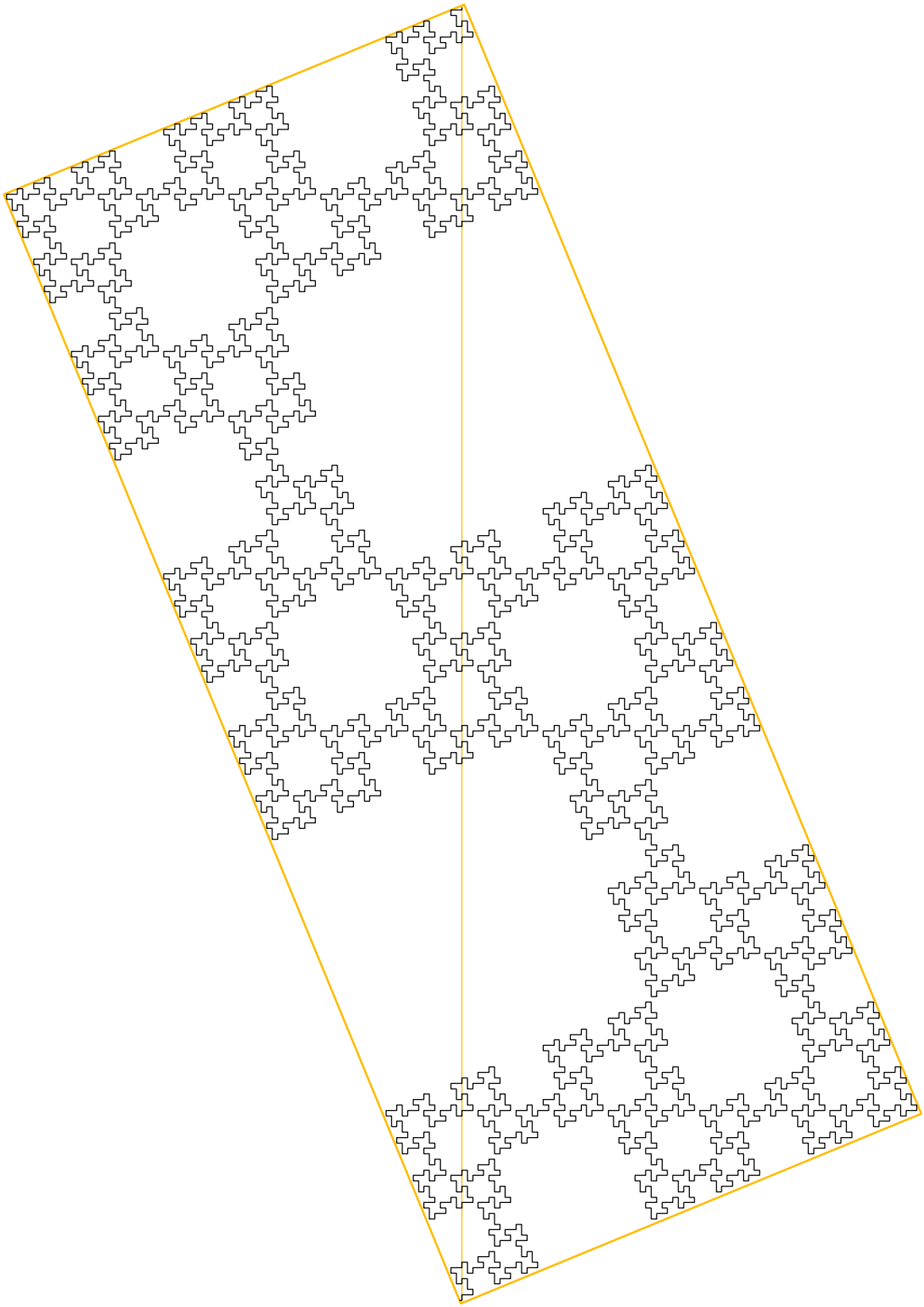


图 3.10：双字母绘制规则下对应的铺砌路径。路径从图示顶部开始，在底部结束。分形外接矩形的对角线为垂直方向，表明铺砌路径的入口正好位于出口正上方。移除最后一块瓦片后，这也是$\mathcal{F}_{19}$ $\mathcal{W}_{19}$。

作为进一步的例子，对于 $n \equiv 4$（模 6），由和通过以下方式得到，W_{10} W_7 W_4

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_{10}} = \begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-12\\-11\end{pmatrix}$$

引理 3.4 给出了此类计算的一般公式。

引理 3.4：$\mathcal{W}_n$ 的迭代公式

设 = 和 = r，其中 p、q、r 和 s 为整数常数，且 n ≡ 1（模 3），使得这些向量表示斐波那契词上的双字母绘制规则下，相关铺砌路径的入口与出口之间的位移。那么，$\mathcal{W}_n$ -3 q $\mathcal{W}_n$ -6 s

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_n} = \begin{cases} \begin{pmatrix}2p - 2q - r + 2\\2p + 2q - s\end{pmatrix} & \text{for } n \equiv 1 \pmod 6 \\ \begin{pmatrix}2p + 2q - r - 2\\-2p + 2q - s\end{pmatrix} & \text{for } n \equiv 4 \pmod 6 \end{cases}$$

证明

由定理 3.1 可得，注意到 90°转向所隐含的向量方向，并根据上文的定义，$\mathcal{W}$n -3 $\mathcal{W}$n -6

情况1：对于 n ≡ 1 (模 6),

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_n} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-q\\p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\\-s\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-q\\p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2p - 2q - r + 2\\2p + 2q - s\end{pmatrix} \text{as claimed.}$$

情形 2：对于 n ≡ 4（模 6），

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_n} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\\-s\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2p + 2q - r - 2\\-2p + 2q - s\end{pmatrix} \text{as claimed.}$$

□

此前，在表3.3中，似乎出现了如下向量交替的现象：当 n ≡ 1 （模 6）时为 = ，当 n ≡ 4 （模 6）时为 =。我们的下一个结果——引理 3.5——表明，随着 n 趋于无穷大，这种交替仍然存在。$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$

引理 3.5：$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ 的交替性质

对于所有满足 n ≡ 1 (mod 3) 的情况，该向量的形式为：当 n ≡ 1 (mod 6) 时为一种形式，当 n ≡ 4 (mod 6) 时为另一种形式。换言之，随着 n 趋于无穷大，$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ 会在这两种形式之间反复交替。

证明

情况1：对于 n ≡ 1 (mod 6)，$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ 具有一种形式，而 $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ 具有另一种形式。

$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 4, \\ 2 \end{pmatrix}$ = 根据引理 3，$\begin{pmatrix} p-2-\ +2 \\ 2+2- \end{pmatrix}$ q r p q s，其中 p = x，q = x + 1，r = 0，s = w

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x+2-w \end{pmatrix}$$

这是所需的形式，其中 $w' = 4x + 2 - w$。$\begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}$

情形 2：对于 n ≡ 4 （模 6），$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ 其形式为，且其形式为。

$\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$ $\begin{pmatrix} 4, \\ 2 \end{pmatrix}$ = 由引理 3 得，$\begin{pmatrix} p+2-\ -2 \\ -2+2- \end{pmatrix}$ q r p q s，其中 p = 0，q = w，r = x，s = x + 1

$$\overrightarrow{\mathcal{W}_n} = \begin{pmatrix} (2w-x-2) \\ (2w-x-2)+1 \end{pmatrix}$$

这是所需的形式 $\begin{pmatrix} x' \\ x'+1 \end{pmatrix}$ 其中 x′ = 2w − x − 2。

已知其形式为以 x = 2 开头，后接 $\overrightarrow{\mathcal{W}_4}$ $\begin{pmatrix} x' \\ x+1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathcal{W}_7}$ 形式为以 w = 0 开头，我们有一个初始交替基，随后应用归纳论证。$\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$

酌情交替运用情况1和情形 2的结果可证明，当 n 趋于无穷大时，两种向量形式之间所声称的交替会继续成立 $\overrightarrow{\mathcal{W}_n}$. □

3.6 确定分形维数

分形的一个重要度量是其维数。常用的维数度量有几种，针对特定分形选择最合适的度量是一门技巧。对于相对简单的分形，其组成部分（例如线段）之间没有过度重叠，有时会使用“分形维数”这一通用术语，尤其是在不同维数度量得出相同数值结果时。对于我们的分形，可以使用第 3.2 节前面给出的公式的一个修正版来确定其维数；

$$dim_{SYM} = \frac{\log m}{\log s} \quad \left(\text{where } s \text{ is } \frac{1}{r} \text{ for the } r \text{ of the earlier formula}\right)$$

在此，m是线段数量与（在极限情况下）增长速率之间的比率，而s是扩张长度尺度因子，即（在极限情况下）分形外接矩形包围盒（例如）对应对角线的增长速率。随着迭代次数增加，这个矩形包围盒会更加直观地呈现出来；图 3.10 中以橙色轮廓明确标出，并显示了对应于的对角线。对于我们的分形，相似维数与通过更复杂测量方法得到的值相同。在 Kenneth Falconer 的《《分形几何》，[Fal03], 例如，盒维数，维数$_B$，以及豪斯多夫维数，维数$_H$，都将取相同的值。事实上，对于前文图 3.1 中的示例，维数$_B$ = 维数$_H$ = 维数$_{SYM}$ = 1.5。 $F_{n-3} F_n W \xrightarrow[13]{}$

命题 3.1：m 的值

对于与双字母绘制规则相关的分形，在极限情况下，维数$_{SYM}$ 对数 m 对数 s ϕ^3, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ m 的值 m 在 = ——

为，且 m是 和 之间线段数量增长的极限比率。$F_{n-3} F_n$

证明

斐波那契词中的字母数量（见表 1.1）由斐波那契数给出，而斐波那契数根据定义为：$\mathcal{F}_n f(n)$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ for } n \geqslant 2 \text{ with } f(0) = 1,\ f(1) = 2$$

In consequence, $\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{f(n-1)+f(n-2)}{f(n-1)} = 1 + \frac{f(n-2)}{f(n-1)}$

Taking limits, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{f(n-2)}{f(n-1)}$.

Let $x = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n-1)}$ in which case the above becomes $x = 1 + \frac{1}{x}$.

Solving gives the expansive value of x sought. It is, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Hence, $m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n-3)} = \phi^3$. □

请注意，在命题 3.1 中，产生线段数量的是成对的字母这一点并不重要，因为我们要计算的是比率。另请注意，由于我们在取 n 趋于无穷大时的极限，因此，两个量之间相差一块瓦片（两个字母）也无妨。$\mathcal{F}_n$ $\mathcal{W}_n$

命题 3.2：s 的值

对于与双字母绘制规则相关的分形，在极限情况下，维数$_{SYM}$ = log m log s $1+\sqrt{2}$ s 的值为，其中 s 是极限情况下 和 之间的扩张长度尺度因子。$\mathcal{W}_n$ $\mathcal{W}_n$

证明 考虑两个连续向量 = 和 W n ( ) x x + 1 W n ( ) w 属于 W n ( ) 。此时 (2w − x − 2) (2w − x − 2) + 1 由引理 3.4 得出。由于我们处理的是一个扩张迭代过程，随着迭代次数增加，w 和 x 变大，且 → 。这三个向量的长度趋于以下值：W n ( ) x x 和 W n ( ) x 2w − x W n → $\sqrt{2}$ x, → w W n → $\sqrt{2}$ (2w − x) 。因此，W n 和 在极限情况下，扩张长度尺度因子为，$\sqrt{2}$ x = $\sqrt{2}$ (2w − x) w w^2 − 4wx + 2 x ^{2} = 0。由此可得，w = $\sqrt{2}$ x (2 ± 1). 解这个二次方程可得，s = w 2 x = $1+\sqrt{2}$ □ 对于扩张值，可知，

本章节以定理 3.2 所陈述的重要结果作结；

定理 3.2：豪斯多夫维数的值 ϕ^3

与双字母相关的分形的豪斯多夫维数维数$_H$ = log log($1+\sqrt{2}$) = 1。 6379 绘图规则为

证明

分别取命题 3.1 和命题 3.2 中的 m 和 s 的值，

$$dim_H = dim_{SYM} = = \frac{log\, m}{log\, s} = \frac{log\, \phi^3}{log\, (1+\sqrt{2})} = 1.6379 \quad \square$$

3.7 第3章作者注释

文献中称为“斐波那契词分形”的分形 [Wik21b] 源自所谓的“奇偶绘图规则”，该规则直接应用于斐波那契词，为每个字母分配一条指令。绘制分形的指令告诉绘图笔从 的第一个字母之前开始，$\mathcal{F}$

- 取下一个字母，并向前画一条单位线段
- 如果这个字母是 a，那么，
  - 如果 a 在$\mathcal{F}$中的位置为偶数，则向左转°90
  - 如果 a 在$\mathcal{F}$中的位置为奇数，则向右转°90
- 无限重复这一过程

图 3.11 展示了生成的路径示例。

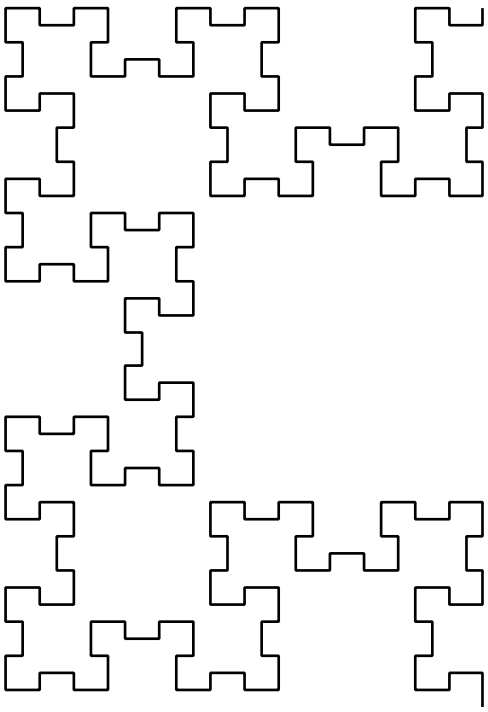


图 3.11：对斐波那契词应用奇偶绘图规则所生成的曲折路径，。路径从图的顶部开始，在底部结束。$\mathcal{F}_{12}$

奇偶绘图规则并非一种显而易见、容易应用的绘图规则，因为必须知道每个字母a所在的位置是奇数位还是偶数位。然而，这条规则的优点在于，它绘制出的分形更容易进行直接分析。对我来说，把字母两两成对似乎更自然。我很好奇，由此得到的“另一种”分形是否适合进行相对直接的数学分析；能找到确定豪斯多夫维数的方法，着实令人欣慰！在某些方面，这两种分形有所不同。例如，奇偶分形的宽高极限比为1：，而双字母分形的比率为1$\sqrt{1}+\sqrt{}$（感兴趣的读者不妨验证这一结果）。然而，它们的豪斯多夫维数恰好完全相同。 2 2

第4章

未来方向

4.1 广义往返

受篇幅所限（全文不到12,000词），我们只能从这棵大树低垂的枝头采撷几颗滋味鲜美的果实。第2章中的思想显然可以推广到二维，无须采用像第3章那样截然不同的绘图规则。表4.1给出了一种广义往返绘图规则。当 $\varphi = 180°$ 时，情况与之前相同，但 φ 的其他取值仍有待探索。例如，当 $\varphi = 108°$ 时，会得到图4.1左侧所示的迷人图案，其生成自 。将n增加到18，会产生大量重复描绘，但也会显现出同一幅图右侧所示的路径，整体上呈现平缓的弯曲。继续增大n，路径最终会绕回自身，但最终形态会是一个环带吗？沿着这个思路再探索一些，图4.2展示了类似的圆形路径，其中当 $\varphi = 136°$ 时，（左）和（右）。计算机探索表明，可能存在一个特殊的“消防水带”角度，约为 $\varphi = 137.4°$，能使路径整体向前延伸。这个名称源于：寻找这一临界角，就像握住软管的水龙头一端。软管上下蜿蜒，想要反向绕回，水从自由端向各个方向喷射，唯独不朝前。用数学方法寻找这样的“消防水带”角度（如果确实存在）或许会很有趣。$\mathcal{F}_{12}\,\mathcal{F}_n\,\mathcal{F}_{13}\,\mathcal{F}_{18}$

符号	操作
a	前进 ϕ
b	前进 0.5，转向 $\varphi°$, 前进 0.5

表4.1：使用角度 φ 而非180°.的广义往返绘图规则

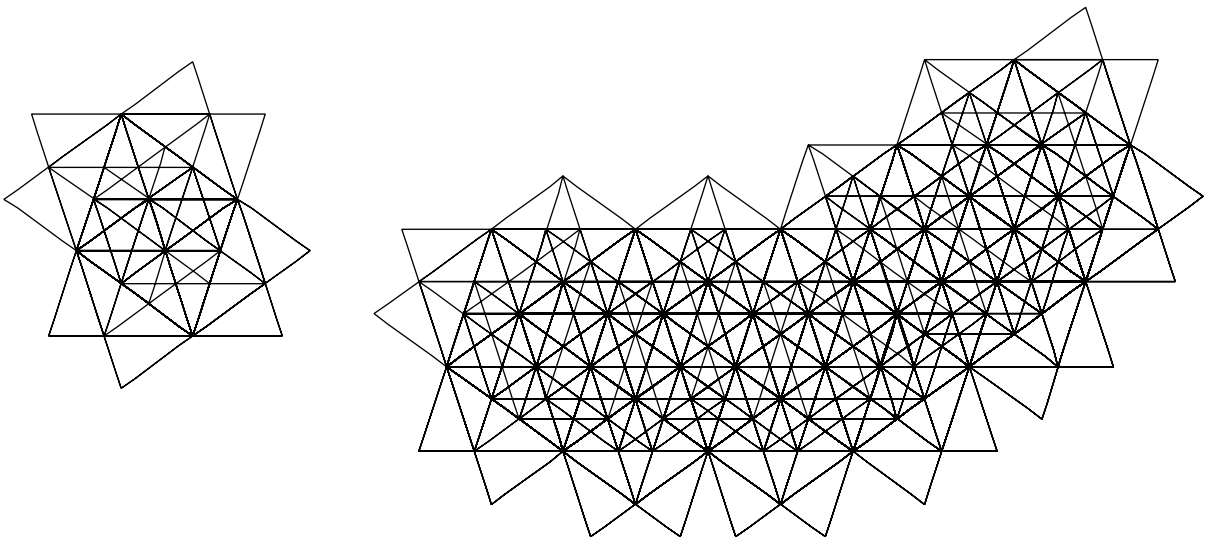


图4.1：左：将 $\varphi = 108°$ 绘图规则应用于 $\mathcal{F}_{12}$。 时的铺砌路径。右：随着 n 的增大，这条路径会整体弯折。$\mathcal{F}_n$

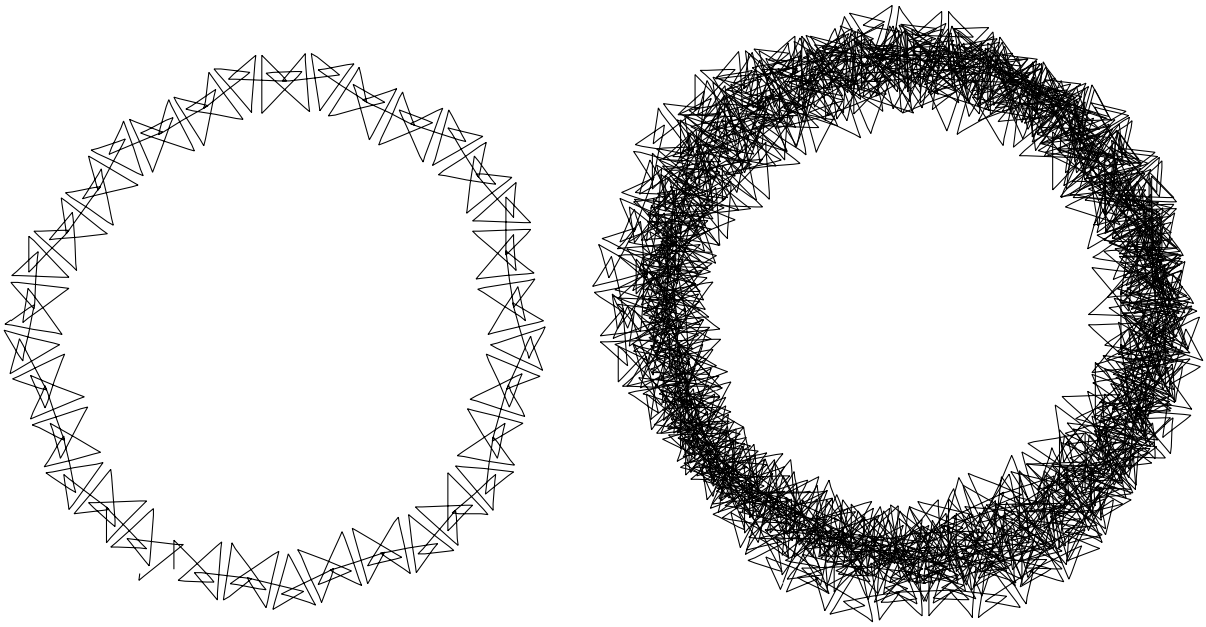


图4.2：左：对 $\varphi = 136°$ 绘图规则应用于 $\mathcal{F}_{13}$。 时得到的铺砌路径。右：将相同规则应用于 $.\mathcal{F}_{18}$

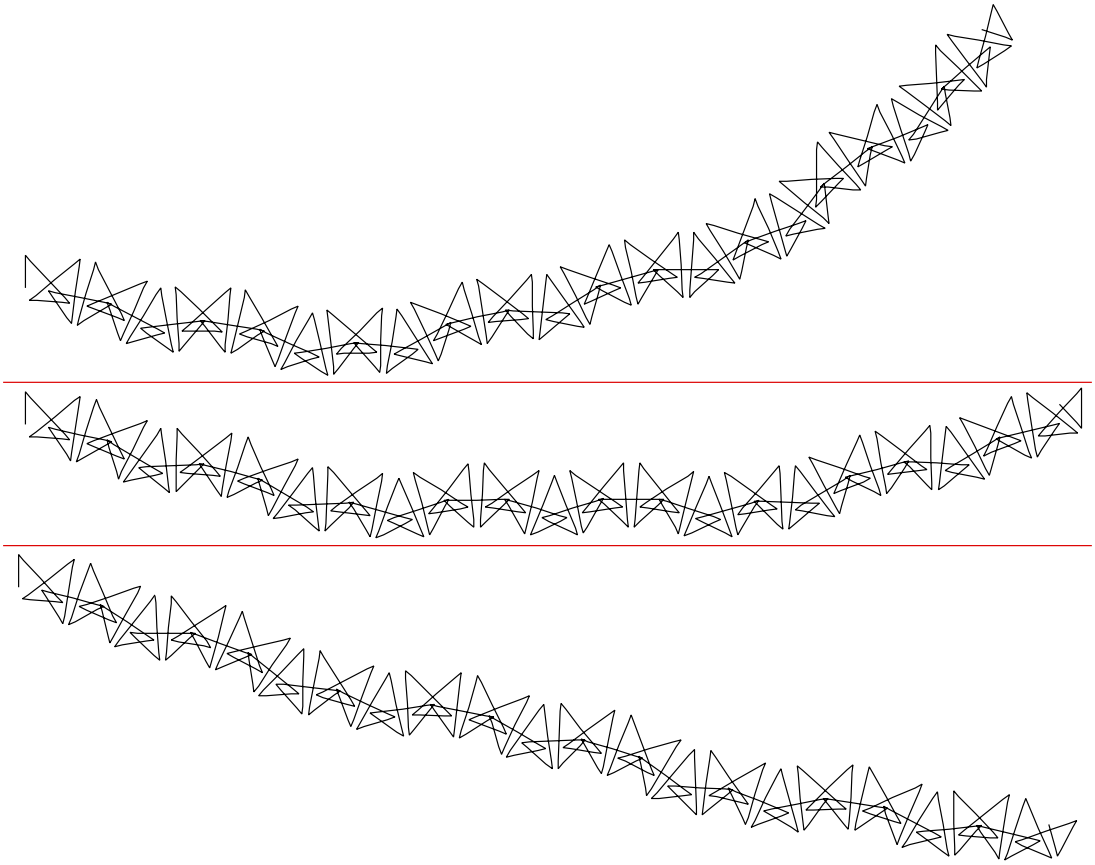


图4.3：利用计算机探索广义往复式绘图规则中是否存在某个 φ 值，使铺砌路径整体沿直线方向延伸。这里，词表明所求角度大于 $\varphi = 137.0°$（上图），也大于 $\varphi = 137.2°$（中图）；这两种情况下，铺砌路径整体上似乎都呈逆时针弯曲，而 $\varphi = 137.4°$ 则使路径整体上的投影几乎呈直线（下图）。路径的一个显著特点是，它似乎由两个图案组成，从而呈现了$\mathcal{F}_{12}\mathcal{F}$的因子分解。

4.2 自避行走

在 Monnerot-Dumaine 论文中， [Mon09], 证明斐波那契分形不与自身相交被确定为一个开放问题。关于自回避游走已有大量研究，或许能提供一些思路。作为对这个问题的初步探讨，图 4.4 展示了一个分形，其初始元为一条长度为 1 个单位的直线段 A_1, 。生成元是 A_2 折线形。支撑该分形迭代生成的替换 Ω, 为:

$$\Omega \ : \begin{cases} F \ \rightarrow \ F\,L\,F\,R\,F\,R\,F\,L\,F \\ L \ \rightarrow \ L \\ R \ \rightarrow \ R \end{cases}$$

而所关注的迭代不动点为 $n \rightarrow \infty$ 。 $\Omega^n(F)$
绘图规则如表 4.2 所示。

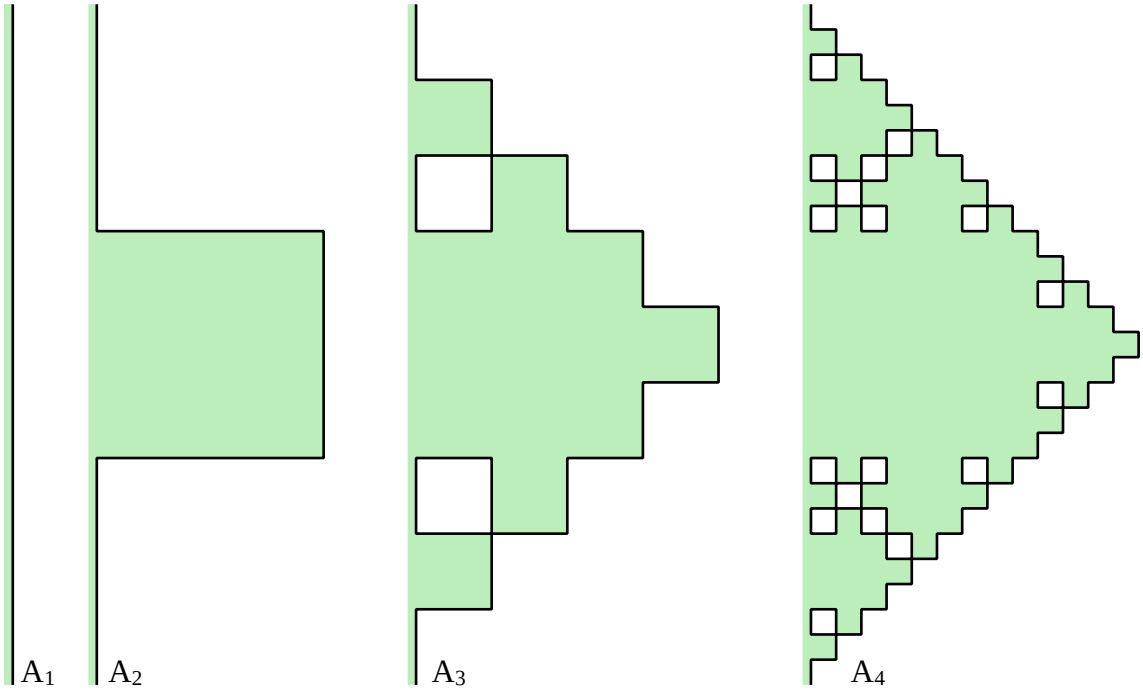


图 4.4：自相交分形示例。

符号	动作
F	前进 1
L	顺时针左转 90°
R	逆时针右转 90°

表 4.2：作用于替换以生成图 4.4 的分形的绘图规则。$\Omega^{\infty}(F)$

这个无限词以 *F L F R F R F L F L F L F* R F R F L F R ... 开始，但 $\Omega^{\infty}(F)$以红色突出显示的嵌入词是一个会自相交的回路。这证明这种分形不是自回避游走。一般来说，判断无限行走是否为自回避游走很困难；不过，斐波那契词几乎周期性的特性或许意味着，在这个特殊情形下，这个问题可以解决。值得对此展开研究。

4.3 字母频率分析

判断双字母分形是否为自回避游走，似乎与分析三个字母对 *ab*、*aa* 和 *ba* 出现频率的问题密切相关。不深入细节的话，结果表明 *ab* 和 *ba* 的相对频率约为 38%，而 *aa* 占其余的 24%。然而，重要的不只是这些频率；当我们从左向右阅读时，一种字母对的计数最多会领先或落后其他字母对多少？此外，研究可能的因子分解，以及各因子内部和因子之间字母（或双字母）的频率，似乎也很有价值。定理 2.1 证明了这样一种因子分解确实存在；其他因子分解还有很多。$F\,F$

4.4 对非周期对象的周期近似

图 4.5 展示了一个分形，其初始元是一条长度为 1 个单位的直线段，A_1, 。生成元是 A_2 蜿蜒线。其灵感来自双字母绘图规则下的铺砌路径。这个分形可以看作是双字母绘图规则下我们所研究的非周期分形的周期近似。这个近似有 17 条线段，缩放因子为七分之一，因此分形维数为 1.46。基于 , 构造一系列这样的近似分形，似乎可以提供越来越好的周期近似。例如，包含 1762289 条线段，缩放因子为 ，分形维数为 1.60，正逐渐接近双字母分形的 1.64。有没有这样的情形：相比非周期的实际分形 ，使用这些周期近似会更容易？$\mathcal{F}^{7}\ \mathcal{F}\mathcal{F}_{13}\,\mathcal{F}_{19},\mathcal{F}_{25}\,,\ldots\mathcal{F}_{8119^{-1}}^{31}$ 。

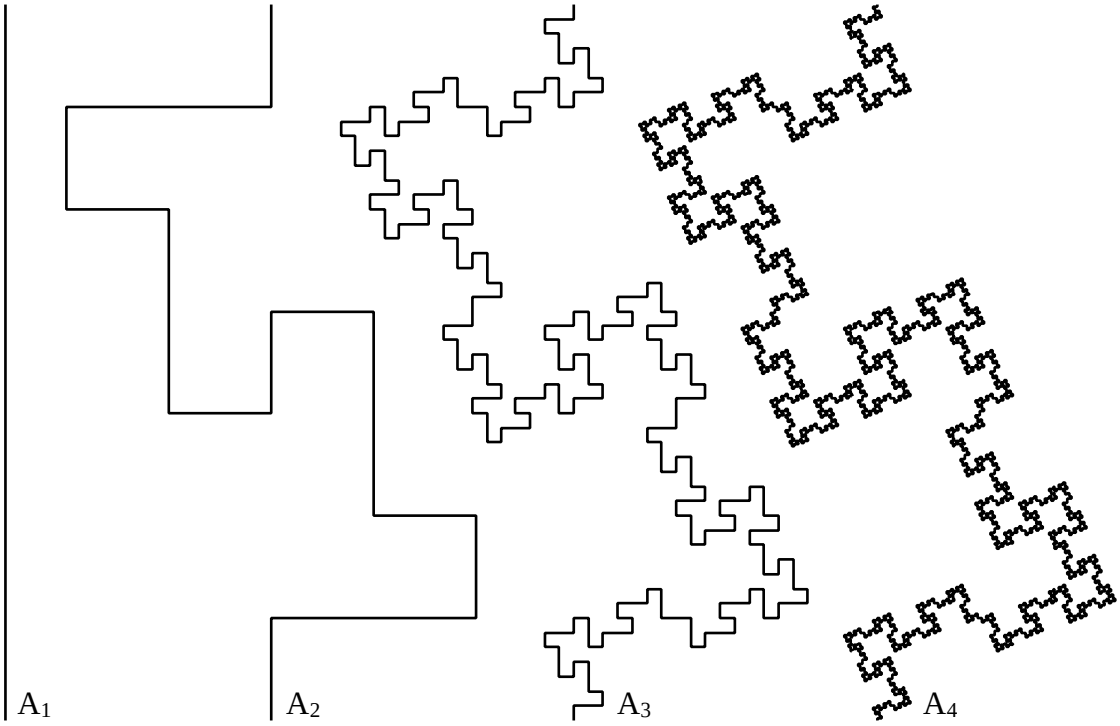


图 4.5： 以一条直线作为初始元，使用受启发的生成元得到周期分形，以 F_7 近似斐波那契词对应的非周期分形；该分形由双字母绘制规则生成： F ， 其分形维数为 1.46，而非 1.64；不过，通过参考……，可以获得越来越好的F近似。$F_{13},F_{19},F_{25},F_{31},$

4.5 第4章作者注释

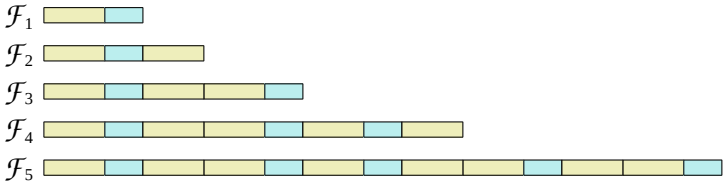
研究斐波那契词的一大魅力，在于其中丰富的模式为数学研究提供了立足点，也启发了可能的探索方向。在现有文献中，斐波那契替换及其生成的词已通过几种不同方式得到推广，进一步拓展这项工作以涵盖这些推广，无疑会很有趣。另一个可能的后续项目是在每章末尾添加一道练习，以拓展并进一步探究该章的内容。

在研究这个主题时，我深刻意识到，关于斐波那契词的数学研究成果十分丰富，远比本文所涉及的内容精深得多，并且从愈发细致、愈发一般的视角加以分析。不过，想要沿着这个方向继续深入的愿望，目前不得不暂且搁置，因为学位论文的截止日期已近；该停笔了！

附录 A1：缅怀 Uwe Grimm教授

是 Uwe 向我介绍了这个最令人着迷的数学玩具——无限斐波那契词。这是一种看似简单的替换， θ，作用于仅含两个字母的字母表 $\mathcal{A}${a,b}，由 $\rightarrow$ab 和 b $\rightarrow$ a 定义。它生成有限斐波那契词，$_n = \theta^n$。前几个 $\mathcal{F}(a)$是：=a、=ab、=aba、=abaab，等等。$\mathcal{F}_0$ $\mathcal{F}_1$ $\mathcal{F}^2$ $\mathcal{F}_3$从任意一个词中删去最后几个字母，剩下的部分就是回文。例如，=abaababa$\mathcal{F}_4$去掉最右边的两个字母后，就得到 abaaba。这种回文性质，加上显著的连接性质，即 =for n $\geqslant$ 3, $\mathcal{F}_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$ $\mathcal{F}_{n-2}$，保证了斐波那契词具有丰富的对称性。当 n $\rightarrow\infty$ 时，无限斐波那契词作为迭代的不动点出现。

Uwe乐于寻找几何可视化，以补充他的代数研究。这些作品往往美得令人惊叹，连非数学家也会赞叹不已。他去世时，我刚开始学习开放大学的 M840研究生课程《非周期铺砌与符号动力系统》。在课程专题指南中，他与 Reem Yassawi 合著，展示了如何通过斐波那契词的替换关联矩阵，由左特征向量导出实数集上的非周期铺砌。实数集$^+$

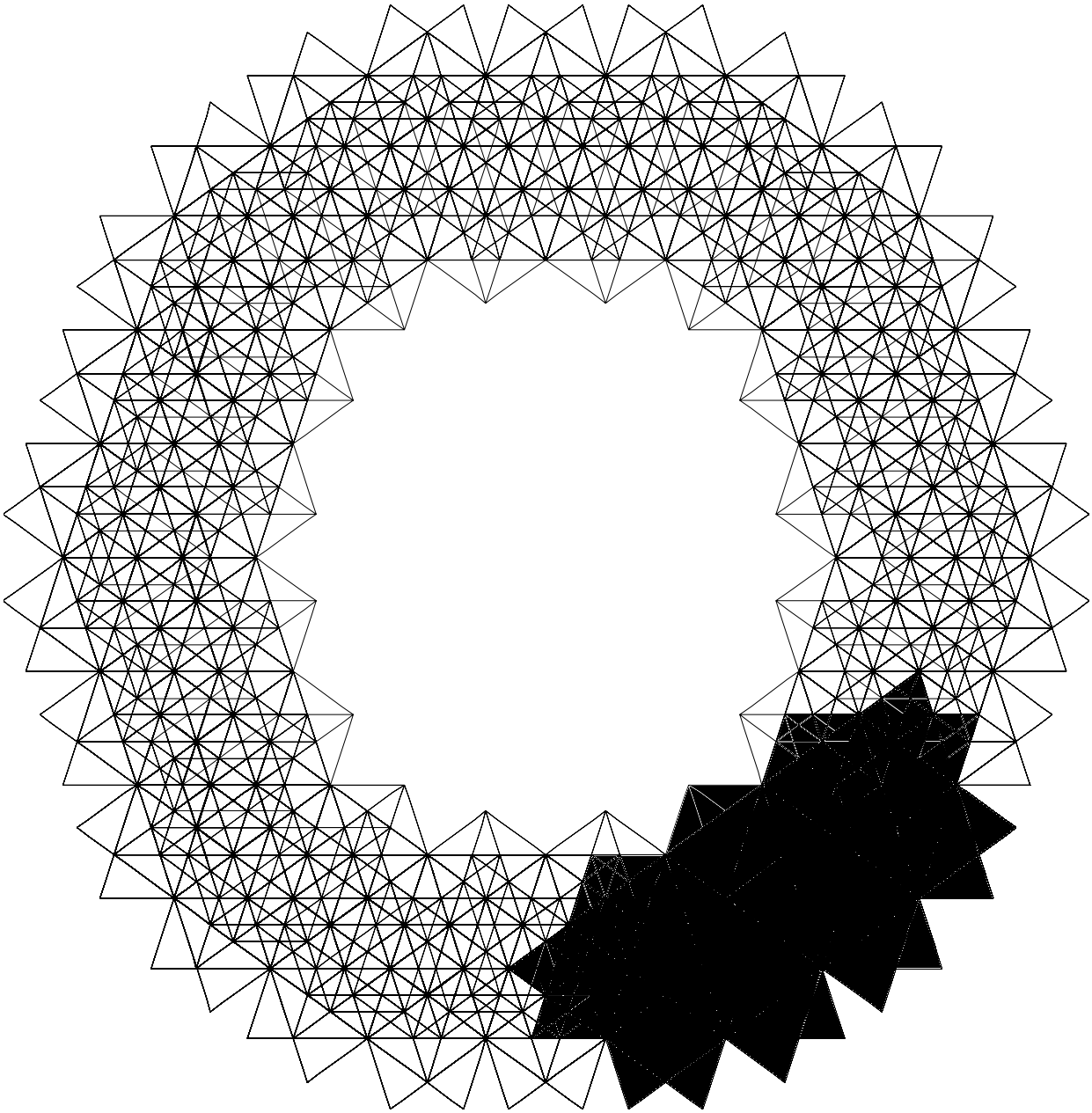


我的学位论文最终沿着这个思路展开，在 Dan Rust 的悉心指导下完成。他好心地接手指导 Uwe 留下的学生，并让课程继续开办。我采用了 Uwe 的铺砌路径，让它来回扭转，常常使它在自身之上铺砌，并研究由此形成图形的性质。扭转是通过一条绘图规则实现的：依次取斐波那契词中的每个字母，并将其用作指令，规定下一个瓦片应如何放置。由此产生了一些颇具美感的图像。为展示可能出现的效果，旁边的图像对应以下绘图规则，其中 $\mathcal{F}_{22}$

符号	动作
a	前进 ϕ （黄金比例，约为 1.618）
b	前进 0.5 ，转向 108° ，前进 0.5

我愿意认为，我对$\mathcal{F}_{22}$的可视化秉承了启发它的数学思想；也就是 Uwe 的数学思想。我想他会认可这种做法。

Martin Hansen，2022年6月



“纪念乌韦·格林教授”海报是为纪念 Uwe Grimm 而举办的会议 The Aperiodic 制作的，该会议于2022年6月在米尔顿凯恩斯的开放大学举行。随后，这张海报刊登于2022年12月号的 M500（开放大学的数学杂志）。

附录 A2：程序

A2.1 往复绘图：简化 Logo 程序代码示例

to Fib01right：程序名称，此程序将绘制 = ab$\mathcal{F}_1$前进 1.618：A 瓷砖的长度，黄金比例取三位小数 前进 0.5：B 瓷砖的前半段长度 右转 90 前进 0.4：使 B 瓷砖中心处形成一个向下的人工台阶 右转 90 前进 0.5：B 瓷砖的后半段长度 结束

to Fib01left：与 Fib01right 类似，只需将右转 90 替换为左转 90：无论向右还是向左移动，线条都需要：向下呈之字形

to Fib02right ：程序名称，此程序将绘制 = aba$\mathcal{F}_2$
Fib01right ：调用名为 Fib01right 的程序
前进 1.618：刚绘制完 $\mathcal{F}_2$ $\mathcal{F}_1$后末尾多出的 A 型砖块

to Fib02left：Fib02right 的向左移动版本

to Fib03right：使用关系 = $\mathcal{F}_3\mathcal{F}_3\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$Fib02right：调用名为 Fib02right 的程序 Fib01left：调用名为 Fib01left 的程序 end

到 Fib03left：与 Fib03right 类似，但将 Fib02right 替换为 Fib02left，并将 Fib01left 替换为 Fib01right

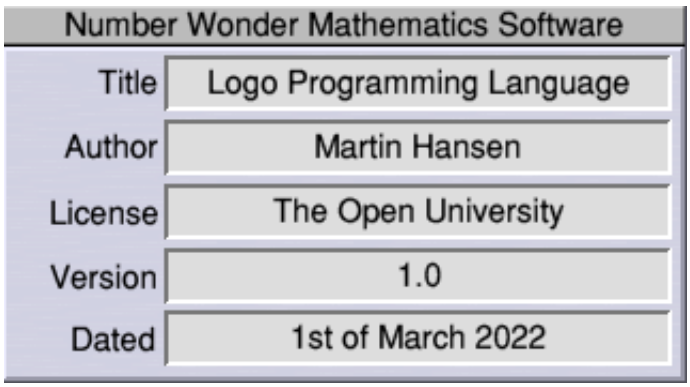


图 A2.1：一个用 LOGO 编程语言编写的解释器，可用于编写简短的“海龟图形”程序，以实现并探索各种绘制规则。本学位论文中的许多图表都是使用该软件绘制的。

参考文献

[ASh03] Allouche J-P 和 Shallit J.（2003）。《自动序列》。剑桥大学出版社。[BGr13] Baake M 和 Grimm U.（2013）。《非周期序：数学导论》第 1 卷。数学及其应用百科全书第 149 卷，剑桥大学出版社。[GY21] Grimm U 和 Yassawi R.（2021）。专题指南：非周期铺砌与符号动力系统。第二版，开放大学，米尔顿凯恩斯，英国。[CRR14] Castro R、Ramírez JL 和 Rubiano GN.（2014）。斐波那契词分形与斐波那契雪花的一种推广。《理论计算机科学》，第 528 卷，第 40–56 页。[Fal03] Falconer K.（2003）。《分形几何：数学基础与应用》（第二版）。约翰·威立父子有限公司，奇切斯特，英格兰。[Fogg] Fogg NP.（2002）。《动力学、算术与组合学中的替换》。施普林格。[Gle06] Glen A.（2006）。关于斯特姆词、扩展斯特姆词及相关主题。博士论文，阿德莱德大学。[Kar83] Karhumäki J.（1983）。关于由二元态射生成的无立方词。《离散应用数学》，第 5 卷，第 279–297 页。[Kyr19] Kyriakoglou R.（2019）。迭代态射、词组合学与符号动力系统。博士论文，巴黎东部大学。[Lot83] Lothaire M.（1983）。《词组合学》。艾迪生-韦斯利出版公司。[Lot02] Lothaire M.（2002）。《词的代数组合学》。艾迪生-韦斯利出版公司。[Man82] Mandelbrot BB.（1982）。《自然界的分形几何》。WH Freeman and Company，纽约。[Mon09] Monnerot-Dumaine A.（2009）。《斐波那契词分形》。HAL开放科学。[PM16] Pitici M（编者）。（2016）。《2016年数学最佳文章》。普林斯顿大学出版社。第 3 页。[Prz86] Prusinkiewicz P.（1986）。L系统的图形应用。《图形界面／视觉界面会议论文集》，第 247–253 页。[Q95] Queffélec M.（1995）。《替换动力系统：谱分析》。数学讲义第 1294 卷（第二版），施普林格，柏林。[Ram04] Rampersad N.（2004）。《无限序列与模式回避》。数学硕士论文，滑铁卢大学，加拿大安大略省。[Ram12] Rampersad N.（2012）。《词中的重复：第一部分》。马赛，法国。[Rob99] Robonson EA.（1999）。《论桌子与椅子》。《Indag Mathem NS》，第 10 卷，第 4 期，第 581–599 页。[Wik21a] 维基百科。（2021）。非周期铺砌。最后编辑于17th 2021年12月。[Wik21b] 维基百科。（2021）。斐波那契词分形。页面最后编辑于1st 2021年6月。[Wik21c] 维基百科。（2021）。皮萨诺周期。页面最后编辑于9th 2021年11月。