arXiv:2304.00465v1 [math.GR] 2 Apr 2023

同构不变度量

P. A. BROOKSBANK、J. F. MAGLIONE、E. A. O'BRIEN 和 J. B. WILSON

Abstract. 在一个具有对象 $\mathtt{C}_0$ 的范畴 $\mathtt{C}$ 中，了解两个对象不同构或许还不够；知道它们距离同构有多远，也可能很有启发性。我们引入伪度量 $d\colon x \cong y$ 蕴含 $d(x,y) = 0$。我们还给出一种典范构造，它为每个同构不变量赋予一个满足该条件的伪度量。这为同构不变伪度量提供了丰富的来源。我们考察了若干范畴中各类不变量对应的这类伪度量。

1. Introduction

同构不变量广泛用于区分各种类型的结构（按某种合适的等价概念）。图的色数和群的阶是常见的同构不变量例子。更精细的例子包括群的共轭类大小以及拓扑空间的基本群。同构不变量的效用主要取决于两个关键特性：它的辨别能力（区分非等价结构的有效程度），以及它的计算难易程度（无论手工还是借助计算机）。迄今为止，不变量的效用主要在于其区分能力：如果它在给定对象x 和 y 上的取值不同，那么它的任务就完成了。我们探讨的是：对于给定的不变量，对象 与y 对象之间有何差异。我们证明，每个定义在某个范畴上的同构不变量都包含额外信息：它在该范畴的对象上诱导出一个泛偏序（定理 3）。由此又可导出一种结构间距离的概念（推论4）。

提纲。 第 2 节介绍我们所需的背景。第 3 节证明我们的核心主张：同构不变量可以普遍地丰富为一个取值于薄范畴的函子。第 4 节提出从这一丰富后的同构不变量结构中提取信息的策略。最后，第 5 节探讨将我们的结果应用于当代研究中使用的同构不变量。

2. Preliminaries

同构不变量是一个函数 $\mathtt{I}$，满足

$$\text{objects } x \text{ and } y \text{ are isomorphic} \quad \Longrightarrow \quad \mathtt{I}(x) = \mathtt{I}(y). \tag{1}$$

“同构”的确切含义因语境而异，但我们将在范畴的一般框架下使用这个术语。我们的相等概念 $\mathtt{I}(x) = \mathtt{I}(y)$ 有些灵活。例如，通过基本群来比较两个拓扑时，我们需要判断群是否同构。从技术上说，这本身就是一个同构问题，但我们可以简单地假设存在一个“黑箱”，其中同构的群

Date: 2023年4月4日。

会被视为相等。图和模也有类似情况，人们常分别使用自同构和自同态等不变量来比较它们。即使是集合的基数这类基本不变量，判断相等也不总是显而易见——事实上，写下 $|X| = |Y|$ 仅仅是在陈述存在一个双射 $X \to Y$。

近来，一个研究领域兴起，旨在以不会导致悖论或产生结构过大而无法成为集合等问题的方式，将"识别同构"这一概念形式化。这个领域称为单值基础，它建立在近一个世纪以来对集合论的不断完善之上：这一历程始于 Bishop 集合，发展到 Martin-L¨of 集合，并通过同伦论的思想形成了如今的面貌。尽管其目标是完善集合概念，如今这一领域的总体研究称为同伦类型论。虽然它的记号略有不同，但仍保留了集合论的大部分熟悉特征。下面简要概述与本文目的相关的内容。

2.1. 作为广义集合的类型。 形式上，类型使用逻辑中的语法规则来定义 [6, 第 10 章至 13]。非正式地说，类型是用于标注数据的标签。写作$a : A$ 表示 a 仅以所有标注为 A 的数据都能使用的方式来使用。例如，我们写作 $a : \mathbb{R}$ 表示 a 仅作为实数使用。写作$a : A$ 与 $a \in A$ 在集合论中类似，但我们不再使用集合公理。事实上，所有集合都是类型，但类型未必是集合。写作 $A : \mathfrak{U}$表示 A 是类型宇宙 $\mathfrak{U}$ 中的一个类型。

可以由已有类型构造新类型。给定类型 A 和 B，就有函数类型 $A \to B$。类型为 $A \to B$ 的项 f 记作 $f : A \to B$。正如记号所示，类型为 $A \to B$ 的项 f 遵循这样的规则：给定 $a : A$，就有一个与之对应的项 $f(a) : B$。集合论中函数 f 的数据是它的图 $\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$。在类型论中，数据 $f : A \to B$可以是一个将 a 变换为 $f(a)$的程序（例如通过图灵机、λ-演算，或关于存在性的公理），因此即使 A 和B 不是集合， $f : A \to B$ 也有意义。类型 A 和 B之间的同构，记作 $A \cong B$，由函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$ 组成；它们各自的复合 gf 和 fg作为程序规约为恒等函数 $\mathrm{id}_A : A \to A$ 和 $\mathrm{id}_B : B \to B$。

在集合论中，对于每个集合的"指标族" $\{C_i \mid i \in I\}$，都存在一个笛卡尔积 $\prod_{i \in I} C_i$，其元素是元组 $c = (c_i)_{i \in I}$，其中每个 $c_i \in C_i$。考虑它在类型论中的对应物。首先，取 $I : \mathfrak{U}$。接下来，定义一个函数 $C : I \to \mathfrak{U}$，它将 $i : I$ 映射到 $C_i : \mathfrak{U}$。与函数类似，积类型 $\prod_{i : I} C_i$的项 c 取 $i : I$，并赋予一个项 $c_i : C_i$。

类型是对朴素集合的一种温和的概念性推广，非常适合计算。事实上，类型是即将发表的文章 [3] 中的重要特征；该文提出了一种基于高阶范畴的代数数据类型新计算模型。此外，类型也见于 [4]，该文旨在为代数中的同构检验发展一种分治机制。

2.2. 相等。类型论中的相等不同于朴素集合论中的相等，因为它基于数据的使用方式，而不是关于集合是否包含彼此元素的判断。这个概念是莱布尼茨定律的一种形式：

$$(a = b) \Longrightarrow (\forall P)(P(a) \Leftrightarrow P(b)). \tag{2}$$

为了定义类型 A 中项 a 和 b 之间的相等，命题 $P(a)$ 被替换为类型 $X_a : \mathfrak{U}$，其中项 $p : X_a$ 用来证明 $P(a)$ 成立。举例来说，

假设 $P(m,n)$ 表示“$m \leqslant n$ 对于自然数 m,n”这一命题。我们定义一个类型 $m \leqslant_{\mathbb{N}} n$，其中 $p : (m \leqslant_{\mathbb{N}} n)$ 存储满足 $m+k=n$ 的自然数 k。我们不说“真/假”，而是说，若存在某些数据（或“证明”） $p:\ X_a$，则 X_a 是有元素的；若已知其中没有数据，则称其为空（类似于空集）。例如，$5 \leqslant_{\mathbb{N}} 3$ 作为一个类型存在，但它没有元素，因为不存在满足 $5+k=3$ 的 $k:\ \mathbb{N}$。

蕴含 $P(a) \Rightarrow P(b)$ 对应于函数类型 $X_a \to X_b$。如果 X_b没有元素，而 $f:\ X_a \to X_b$，那么 X_a 也必定没有元素（类似于 $True \not\Rightarrow False$）。因此，$P(a) \iff P(b)$ 对应于 $(f,g) : (X_a \to X_b) \times (X_b \to X_a)$。

式（2）中的莱布尼茨定律现在对应于一种用于表示相等的新类型，记作$a =_A b$。类型为 $a =_A b$ 的数据会转换为类型为

$$\prod_{X:A\to\mathfrak{U}} (X_a \to X_b) \times (X_b \to X_a),$$

其中 $X:\ A \to \mathfrak{U}$ 是一个函数，它将 $a:\ A$ 映射到 $X_a:\ \mathfrak{U}$。“$=_A$”是 Martin-L¨of 恒等类型；相关技术细节见 [6, 第 13] 章。

2.3. 序。与相等一样，类型 A 上的序关系 $a \preccurlyeq b$ 确定一个新类型，记作 $\preccurlyeq_A$，其中数据 $\mathsf{rel}_{ab} : (a \preccurlyeq_A b)$ 被解释为命题 $P(a,b) :\equiv (a \preccurlyeq b)$ 的“证明”。为说明其工作方式，考虑一个预序 4，即同时满足自反性和传递性的序。每个命题都对应于一个类型：自反命题 $R_{\preccurlyeq} :\equiv ((\forall a)(a \preccurlyeq a))$ 对应于类型$X_{\preccurlyeq} :\equiv \prod_{a:A}(a \preccurlyeq_A a)$，而传递命题 $T_{\preccurlyeq} :\equiv ((\forall a,b,c)(a \preccurlyeq b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c))$ 对应于类型

$$Z_{\preccurlyeq} := \prod_{a,b,c:A} \Big((b \preccurlyeq_A c) \times (a \preccurlyeq_A b) \to (a \preccurlyeq_A c) \Big). \tag{3}$$

组合 $X_{\preccurlyeq} \times Z_{\preccurlyeq}$ 将自反和传递条件合并为一种数据类型，我们用 $\preccurlyeq_A$ 这个贴切的名称来表示。再说一次，$a \preccurlyeq_A b$ 并不是在断言 $a \preccurlyeq b$。相反，它是一种数据类型；若其中存在某种证据 e：$a \preccurlyeq_A b$，我们便可据此得出结论 $a \preccurlyeq b$。如果证明 $a \preccurlyeq_A b$ 中没有任何元素，那么我们就得出结论 $a \not\preccurlyeq b$。

偏序是满足反对称律 $S_{\leqslant} :\equiv ((\forall a,b)(a \leqslant b \leqslant a \Rightarrow a = b))$ 的预序 6，其关联类型为

$$Y_{\leqslant} := \prod_{a,b:A} \Big((b \leqslant_A a) \times (a \leqslant_A b) \to (a =_A b) \Big). \tag{4}$$

2.4. 单值性。 仿照相等和预序的例子，每个关系都可以转化为一种类型。例如，我们可以定义一种类型 $A \cong_{\mathfrak{U}} B$，其中该类型的数据刻画了一个同构 $A \to B$，其定义见第 2.1 节。如果这些类型相等，那么我们就有 Martin-L¨恒等类型 $A =_{\mathfrak{U}} B$，这简单地意味着 A 和 B 在解释莱布尼茨定律时可以互换使用。因此，类型为 $(A =_{\mathfrak{U}} B)$ 的证据 可用于定义恒等函数 $\mathsf{id}_e :\ A \to B$，它现在是一个类型为 $(A \cong_{\mathfrak{U}} B)$ 的同构 [15, 引理 2.10。1]。称 $e \mapsto \mathrm{id}_e$ 为 恒等映射。现在可以用以下公理对单值性原理作形式化概述。

单值性公理：恒等映射（$A =_{\mathfrak{U}} B$） $\longrightarrow$ （$A \cong_{\mathfrak{U}} B$）可逆。

单值性并不会使同构过时——恰恰相反，它意味着只有在展示了一个同构之后，才能将数据视为相同。关于单值性的全面论述见 [15, 第 2]章。

单值性与同构研究密切相关，因为它有助于进行约化。例如，带基点拓扑空间 $(A, a_0) \cong (B, b_0)$ 的每个同胚都会诱导基本群 $\pi_1(A, a_0) \cong \pi_1(B, b_0)$ 的一个同构。因此，在单值性框架下，

$$(A, a_0) \cong (B, b_0) \to \pi_1(A, a_0) =_{\mathfrak{U}} \pi_1(B, b_0).$$

同样，自同构群和集合的基数等构造现在可以在精确意义上视为同构不变量。

2.5. 范畴。我们对范畴的阐述借鉴了标准论述（如 [7, Chapter 8]），并将其调整为类型和单值性的语境，详见 [15, Chapter 9]。一个范畴结构 C 由对象 $\mathsf{C}_0 : \mathfrak{U}$、态射 $\mathsf{C}_1 : \mathsf{C}_0 \times \mathsf{C}_0 \to \mathfrak{U}$、恒等态射 $\mathsf{id} : \prod_{x:\mathsf{C}_0} \mathsf{C}_1(x, x)$ 以及一个复合

$$* : \prod_{x,y,z:\mathsf{C}_0} \Big(\mathsf{C}_1(y, z) \times \mathsf{C}_1(x, y) \to \mathsf{C}_1(x, z) \Big).$$

我们将 $f * g$ 简记为 fg。预范畴是满足以下条件的范畴结构：

$$(\forall f : \mathsf{C}_1(x, y), \forall g : \mathsf{C}_1(y, z), \forall h : \mathsf{C}_1(z, w)) \qquad h(gf) = (hg)f$$
$$(\forall f : \mathsf{C}_1(x, y)) \qquad \mathrm{id}_y f = f = f \,\mathrm{id}_x .$$

态射 $f : \mathsf{C}_1(x, y)$ 是同构，如果存在态射 $g : \mathsf{C}_1(y, x)$，使得 $\mathsf{id}_x = gf$ 和 $\mathsf{id}_y = fg$。此时我们记作 $x \cong y$。

每个预序 $(X, 4)$ 都是一个预范畴，其态射为类型为 $x \preccurlyeq_X y$ 的项，复合直接取自传递律，恒等映射则取自自反律。为强调这一视角，我们将此预范畴记为 $\mathrm{LT}_X^{\preccurlyeq}$，以唤起"less than"（小于）的含义。注意，$\mathrm{LT}_X^{\preccurlyeq}$ 是一个薄预范畴，也就是说，每对对象之间至多有一个态射。事实上，每个薄预范畴都可以视为一个预序，其中若存在从 x 到 y 的态射，则 $x \preccurlyeq y$。因此，预序和薄预范畴是相同的概念。

函子 $\mathsf{F} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是预范畴之间的同态，即由一对函数 $\mathsf{F}_0 : \mathsf{C}_0 \to \mathsf{D}_0$ 和 $\mathsf{F}_1 : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{D}_1$，组成，其中 $\mathsf{F}_1(\mathsf{id}_x) = \mathsf{id}_{\mathsf{F}_0(x)}$，且它或者是协变的，即 $\mathsf{F}_1(gf) = \mathsf{F}_1(g)\mathsf{F}_1(f)$；或者是反变的，即 $\mathsf{F}_1(gf) = \mathsf{F}_1(f)\mathsf{F}_1(g)$为了避免符号过于繁杂，在上下文明确时，我们用 $\mathsf{F}(x)$ 表示 $\mathsf{F}_0(x)$，并用 $\mathsf{F}(f)$ 表示 $\mathsf{F}_1(f)$。两个预范畴之间的同构是一对函子 (F, G)，满足 $\mathsf{FG} = \mathsf{id}$ 且 $\mathsf{GF} = \mathsf{id}$。

函子 $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 之间的自然变换 $\nu : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$，由 C 的每个对象 x 对应的一个态射 $\nu_x : \mathsf{F}(x) \to \mathsf{G}(x)$（属于 D）构成，并且对于 C 中的每个态射 $f : x \to y$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(x) & \xrightarrow{\nu_x} & \mathbf{G}(x) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{F}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{G}(f)} \\ \mathbf{F}(y) & \xrightarrow{\nu_y} & \mathbf{G}(y) \end{array} \tag{5}$$

预范畴的等价是一对函子 (F, G)，其中存在自然变换 $\mathsf{id} \Rightarrow \mathsf{FG}$ 和 $\mathsf{id} \Rightarrow \mathsf{GF}$。

我们对对象为 C_0 的预范畴 C 的描述中，一个重要因素是，Martin-L¨of 恒等类型 $=_{\mathsf{C}_0}$ 在公理中不起作用。这使我们能够通过定义引入最适合在单值化语境中使用范畴的相等关系。

单值性条件：单价范畴 C 是满足以下条件的预范畴

对于所有 $x, y : \mathsf{C}_0$, , 存在一个函数 $(x \cong_{\mathsf{C}_0} y) \to (x =_{\mathsf{C}_0} y)$。

诸如群、拓扑空间和图等熟悉的范畴，已按照刚才所述的方式建模为带类型的范畴 [15, §§ 6.1 和 9。1]。我们再次强调，我们并未忽略这些范畴中的同构。相反，如果给出两个对象之间的同构，那么单值性就允许我们将它们视为相等。这些同构的作用，是按照莱布尼茨定律的要求，实现元素之间的替换。

例如，给定 Δ 上的一个预序 4，其关联的预范畴 $\mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta}$ 通过规定每个同构 $a \cong b$ 都是类型 $a =_{\Delta} b$ 的证据，从而诱导出一个范畴。注意，在 $\mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta}$ 中，$a \cong b$ 的含义恰好是 $a \preccurlyeq b \preccurlyeq a$。换句话说，在这种相等概念下，预序 4 就成为一个偏序，我们记作 6。这是一个一般事实的例证：每个不满足单值性条件的预范畴，都可以通过弱等价函子映射到一个称为 Rezk 完备化 [15, § 9.9] 的范畴。

备注 1. 这种情况类似于在 Δ 上诱导一个等价关系 $(a \sim b) \Leftrightarrow (a \preccurlyeq b \preccurlyeq a)$，并从 4 在由此得到的划分$\Delta/_{\sim}$上诱导一个偏序 6。然而，单价的形式体系使我们能够避免划分，以及在对象的等价类之间新诱导出的态射。

备注 2. 在基于其他基础的范畴论中——例如冯·诺依曼–伯奈斯–戈德尔 Set-类理论或格罗滕迪克宇宙——预范畴与范畴的概念是一致的。这类基础通过取范畴的骨架，允许引入与单价性类似的概念：借助足够强的选择公理版本，我们从范畴的每个同构类型中选取一个代表元。骨架本质上是通过援引一条公理来解决同构问题的——因此，出于研究同构的目的，我们避免使用骨架。

3.

范畴为我们讨论的问题提供了足够一般的框架，也为呈现本研究的主要成果提供了基础。现在，我们将说明范畴上的每个同构不变量如何产生一个泛偏序，而这又引出了范畴中对象之间距离的概念。

取一个单价范畴 C，其对象为 C_0。C 上的伪度量是一个函数$d : \mathsf{C}_0 \times \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$，满足对所有 x、y、$z : \mathsf{C}_0$，以下条件成立：

(i) $d(x, x) = 0$，(ii) $d(x, y) = d(y, x)$，以及 (iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$。

若 $x = y$ 当且仅当 $d(x, y) = 0$时，度量就是一种伪度量。每个伪度量只需将满足 $d(x, y) = 0$ 的点 x, y 视为同一点，并改在商度量拓扑中讨论，即可诱导出一个度量。度量通常还要求满足条件 $d(x, y) < \infty$；通过将 (C_0, d) 规范地分解为仅具有有限度量的子空间 [5, Ch. 1]，即可达到这一条件。

条件 (i)–(iii) 是传统距离概念的标准要求。条件 (i) 等价地可写为：若 $x = y$，则 $d(x, y) = 0$；因此，在我们的单价背景下

$$x \cong y \quad \Longrightarrow \quad x = y \quad \Longrightarrow \quad d(x, y) = 0.$$

因此，在我们的语境中，伪度量将同构对象之间的距离视为 0。从这个意义上说，大于 0 的距离衡量的是非同构性。

3.1. 同构不变量的特征度量。同构不变量与伪度量密切相关。事实上，每个从范畴 C 到某个类型的同构不变量 $\mathtt{I} : \mathsf{C}_0 \to \Delta$ 都有一个特征伪度量 $c_{\mathtt{I}} : \mathsf{C}_0 \times \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$，对于对象 x, y，

$$c_{\mathtt{I}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathtt{I}(x) = \mathtt{I}(y) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

反过来，假设给定一个伪度量 $d : \mathsf{C}_0 \times \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$。令 $[0, \infty]^{\mathsf{C}_0}$ 表示函数 $\mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$。对于每个 $x : \mathsf{C}_0$，定义 $\mathtt{I}_d(x) : \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$，其中 $\mathtt{I}_d(x)(z) = d(x, z)$。如果 $x \cong y$，那么对于所有对象 z，

$$\mathtt{I}_d(x)(z) = d(x, z) = d(y, x) + d(x, z) \geqslant d(y, z) = \mathtt{I}_d(y)(z).$$

同样，$\mathtt{I}_d(y)(z) = d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z) = \mathtt{I}_d(x)(z)$，因此 $\mathtt{I}_d(x) = \mathtt{I}_d(y)$ 在 $[0, \infty]^{\mathsf{C}_0}$ 中成立。因此，$\mathtt{I}_d : \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]^{\mathsf{C}_0}$ 将 $x \mapsto \mathtt{I}_d(x)$ 映射为一个同构不变量。

如果 $\mathtt{I} : \mathsf{C}_0 \to \Delta$ 是一个同构不变量，且 x 是一个对象，那么

$$\mathtt{I}_{c_{\mathtt{I}}}(x)(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathtt{I}(x) = \mathtt{I}(y) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此可以从 $\mathtt{I}_{c_{\mathtt{I}}}(x)$ 中恢复 $\mathtt{I}(x)$。另一方面，如果 $d : \mathsf{C}_0 \times \mathsf{C}_0 \to [0, \infty]$ 是一个伪度量，那么 $\mathtt{I}_d(x) = \mathtt{I}_d(y)$ 意味着对于每个对象 z，$d(x, z) = d(y, z)$；特别是，如果 $z = y$，那么 $d(x, y) = d(y, y) = 0$。因此

$$c_{\mathtt{I}_d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } d(x, y) = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

而且 $d(x, y)$ 的值丢失了。因此，$\mathtt{I} \mapsto c_{\mathtt{I}}$ 和 $d \mapsto \mathtt{I}_d$ 只是部分逆。

总之，特征度量所包含的信息并不超过同构不变量。然而，下一节的主结果表明，每个同构不变量都有一种辨识能力更强的度量，通常可以从中提取有用信息。

3.2. 主定理。以下结果断言，同构不变量对应于映入薄范畴的函子。证明使用了第 2.3 节引入的序记号。

定理 3。设 C 为一个范畴。设 $\mathtt{I} : \mathsf{C}_0 \to \Delta$ 是一个满射同构不变量，它将 C 的对象映到某个类型 Δ。在 Δ 上存在一个偏序 $\mathsf{6}$，以及一个函子 $\mathtt{J} : \mathsf{C} \to \mathrm{LT}_{\Delta}^{\leqslant}$，使得对于每个 $x : \mathsf{C}_0$，$\mathtt{J}(x) = \mathtt{I}(x)$。此外，$(\mathrm{LT}_{\Delta}^{\leqslant}, \mathtt{J})$ 在以下意义下是泛的：

> 对于任意对象为 Δ 的薄范畴 R，以及任意函子 $\mathtt{K} : \mathsf{C} \to \mathsf{R}$，其中对每个 $x : \mathsf{C}_0$，$\mathtt{K}(x) = \mathtt{I}(x)$，都存在唯一的函子 $\mathtt{L} : \mathrm{LT}_{\Delta}^{\leqslant} \to \mathsf{R}$，以及从 $\mathtt{LJ}$ 到 $\mathtt{K}$ 的自然变换。

回顾一下，范畴中对象之间的相等由该范畴中的同构决定。特别地，类型 Δ 在定理3 中的项之间的相等由 $\mathtt{LT}^{\leqslant}_{\Delta}$ 中的同构决定。

证明。对于 Δ 的项 δ、ϵ，若存在一列由 C 中态射组成的序列 $(f_i\colon x_i \to y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n)$，使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 都有 $\mathrm{I}(y_i) = \mathrm{I}(x_{i+1})$，且 $\delta = \mathrm{I}(x_1)$ 和 $\epsilon = \mathrm{I}(y_n)$，则记作 $\delta \preccurlyeq \epsilon$。

固定 $\delta\colon \Delta$。由于 I 是满射，存在 C 的一个对象 x，使得 $\mathrm{I}(x) = \delta$。因此，利用序列 (id_x) 可得 $\delta \preccurlyeq \delta$，所以 4 是自反的。此外，若 $\delta \preccurlyeq \epsilon$ 是通过 $(f_i\colon x_i \to y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n)$ 得到的，且 $\epsilon \preccurlyeq \phi$ 是通过 $(g_i\colon z_i \to w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m)$ 得到的，则 $\delta = \mathrm{I}(x_1)$、$\mathrm{I}(y_n) = \epsilon = \mathrm{I}(z_1)$，并且 $\mathrm{I}(w_m) = \phi$。因此，序列 $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$ 表明 $\epsilon \preccurlyeq \phi$，所以 4 是传递的。由此，4 是一个预序。

接下来我们定义一个函子 $\mathrm{J} : \mathrm{C} \to \mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta}$。对于每个 $x : \mathrm{C}_0$，我们要求 $\mathrm{J}(x) = \mathrm{I}(x)$。若 $f\colon x \to y$ 是 C 中的一个态射，那么根据定义，$\mathrm{I}(x)$ 4 $\mathrm{I}(y)$，因此我们定义 $\mathrm{J}(f) = \mathrm{rel}_{\mathrm{I}(x)\,\mathrm{I}(y)}$。特别地，$\mathrm{J}(\mathrm{id}_x) = \mathrm{rel}_{\mathrm{I}(x)\,\mathrm{I}(x)}$。若 $f\colon x \to y$和 $g\colon y \to z$是态射，那么

$$\mathbf{J}(g)\mathbf{J}(f) = (\mathrm{rel}_{\mathrm{I}(y)\,\mathrm{I}(z)})(\mathrm{rel}_{\mathrm{I}(x)\,\mathrm{I}(y)}) = \mathrm{rel}_{\mathrm{I}(x)\,\mathrm{I}(z)} = \mathbf{J}(gf),$$

因此 J 是一个函子。

还需证明所述泛性质。假设 $\mathrm{K} : \mathrm{C} \to \mathrm{R}$ 是一个函子，其中 R 是一个薄预范畴，其对象为 Δ，且 K 在 C 的对象上与 I 一致。我们定义一个函子 $\mathrm{L} : \mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta} \to \mathrm{R}$，使其满足所述性质。对于 $\mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta}$ 的每个对象 δ，令 $\mathrm{L}(\delta) = \delta$。设 $\mathrm{rel}_{\delta\epsilon}$ 是 $\mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta}$ 的一个态射，因此 $\delta \preccurlyeq \epsilon$ 可由某个序列 $(f_i\colon x_i \to y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n)$ 得到。由于 f_i 是 C 中的一个态射，且 K 是函子，对于每个 i，$\mathrm{K}(f_i) : \mathrm{I}(x_i) \to \mathrm{I}(y_i)$。又由于对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，$\mathrm{I}(y_i) = \mathrm{I}(x_{i+1})$，态射 $\mathrm{K}(f_i)$ 可复合，并且 $\mathrm{K}(f_n)\cdots\mathrm{K}(f_1)\colon \delta \to \epsilon$。由于 R 是薄的，这就是 R 中定义域为 δ、陪域为 ϵ的唯一态射，因此我们定义 $\mathrm{L}(\mathrm{rel}_{\delta\epsilon}) = \mathrm{K}(f_n)\cdots\mathrm{K}(f_1)$。于是 L 是一个函子 $\mathrm{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta} \to \mathrm{R}$，因此 $\mathrm{K}(x) = \mathrm{LJ}(x)$ 且 $\mathrm{K}(f) = \mathrm{LJ}(f)$，如所要求的。

最后，正如备注1中所述，令 $\mathbf{J}' : \mathtt{LT}^{\preccurlyeq}_{\Delta} \to \mathtt{LT}^{\leqslant}_{\Delta}$ 为函子，它将预序 $\preccurlyeq$ 的预范畴映射到具有偏序 $\leqslant$的关联范畴。若 R是一个范畴，则上述构造可经由 $\mathbf{J}'$分解。证明至此完成。□

3.3. 从序到距离。 现在我们证明，定理3 中的 I 所关联的偏序会导出一种辨别力更强的度量。我们对偏序集上的度量的处理沿用 [9]。

令 6 为类型 P上的一个偏序。若 $p \leqslant q$ 和 $p \neq q$，则 $p < q$。若 $p < r \leqslant q$ 蕴含 $q = r$，则 q 覆盖 p。$(P,6)$ 的哈斯图是一个有向图，其顶点为 P，边为 $\mathcal{E} = \{(p,q) \mid q \text{ 覆盖 } p\}$.。覆盖图 $\mathcal{C}(P)$ 是由哈斯图生成的无向图。定义图度量 $d_{\leqslant}\colon P \times P \to [0,\infty]$，使得 $d_{\leqslant}(p,q)$ 等于 $\mathcal{C}(P)$ 中所有连接 p 与 q 的有限路径的最小长度；若不存在这样的路径，则其值为无穷大。

推论 4. 设 C 为一个范畴。设 $\mathrm{I} : \mathrm{C}_0 \to \Delta$ 是从 C 的对象到某个类型 Δ 的满射同构不变量。存在 Δ 上的一个偏序 6，并且由 $(x,y) \mapsto d_{\leqslant}(\mathrm{I}(x), \mathrm{I}(y))$ 给出的 $d_{\mathrm{I}}\colon \mathrm{C}_0 \times \mathrm{C}_0 \to [0,\infty]$ 是一个伪度量。

4. A User's Guide

定理 3 和推论4 中的构造具有一般性——它们可应用于任意范畴上的任意同构不变量。然而，不加区分地这样做可能会导致结果不尽如人意。为了提取有意义的信息，我们通常必须对范畴施加限制，例如仅考虑范畴中的满态射或单态射。这与当代同构检验策略类似：这些策略将对象视为较大结构的商。本节将揭示使用同构不变度量时遇到的各种障碍，并讨论克服这些障碍的一些方法。

4.1. 循环。考虑范畴 Vect，其对象是有限维向量空间，态射是线性映射。维数函数 $\dim : \mathsf{Vect}_0 \to \mathbb{N}$ 是一个同构不变量。根据定理 3，存在一个与之关联的偏序 $\sqsubseteq$，定义在 $\mathbb{N}$上。然而，这并不是我们通常预期的后继序。如果 U 和 V 是向量空间，那么存在满足 $U \to 0 \to V$的线性映射。将函子 J 应用于 $\mathbf{LT}_{\mathbb{N}}^{\sqsubseteq}$，可得 $\dim U \sqsubseteq 0 \sqsubseteq \dim V$，因此在这个范畴中所有对象都同构。由于 $\mathbf{LT}_{\mathbb{N}}^{\sqsubseteq}$ 是单价的，这个范畴中的所有对象都相等。换言之，正如备注 1 所述，$(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$定义在 $\mathbb{N}/_{\sim}$ 的平凡划分上，其中所有自然数都相等。这在态射丰富的范畴中很常见，其成因是以下现象。

定义 5. 范畴 C 中的一个循环是由态射 $f_i\colon x_i \to x_{i+1}$（对所有 $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$）组成的序列 $(f_0, \ldots, f_{n-1})$，其中 $n \geqslant 2$。如果 $x_0 \cong \cdots \cong x_{n-1}$，则称该循环为平凡循环。

例如，$0 \to \mathbb{Z} \to 0$ 是阿贝尔群范畴中的一个循环，但 $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ 则不是。如果 C 含有一个循环，那么从 C 到薄范畴的函子必然会将该循环中的所有项都映射到同一个点。对于非平凡循环，这可能导致不必要的等同。

4.2. 限制态射。通常可以移除导致循环的部分态射来打破循环。例如，阿贝尔群范畴中的循环 $0 \to \mathbb{Z} \to 0$ 由一个单射函数和一个满射函数依次组成。若仅限于一类函数（例如单射函数），就会去掉其中一条边，从而打破循环。

定义 6. 设 C 为一个范畴。

若态射 f 属于 C，且对于 C 中所有可复合态射 g、h，$fg = fh$ 蕴含 $g = h$，则称 f 为单态射。令 $\hookrightarrow$C 为 C 的子范畴，它与 C 具有相同的对象，且其态射为 C 中的单态射。

类似地，若 f 满足 $gf = hf$ 蕴含 $g = h$，则称其为满态射。令 $\twoheadrightarrow$C 为 C 的子范畴，它与 C 具有相同的对象，且其态射为 C 中的满态射。

我们将定理 3 应用于不变量 $\dim : \hookrightarrow \mathtt{Vect}_0 \to \mathbb{N}$。令 $\leqslant$ 表示 $\mathbb{N}$ 上的通常后继序：

$$m \leqslant n \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\exists k)(m + k = n).$$

若 $f\colon U \hookrightarrow V$，其中 $m = \dim U$ 且 $n = \dim V$，则 $m \leqslant n$，因为 $f(U)$ 的每个基都可以扩展为 V 的一个基。因此，$\mathrm{J}(f) = \mathrm{rel}_{mn}$ 是类型为 $m \leqslant_{\mathbb{N}} n$ 的唯一态射。此外，只要 $m \leqslant n$，就存在一个向量空间U，其 $m = \dim$ 为 U；还存在一个向量空间 V，其 $n = \dim$ 为 V；并且存在一个单态射$f\colon U \to V$，因此不能省略任何关系。于是，若 P 是一个薄范畴，且

$\mathsf{P}_0 = \mathbb{N}$，并且 $\mathsf{K} : \hookrightarrow\mathsf{Vect} \to \mathsf{P}$ 是一个函子，满足 $\mathsf{K}(V) = \dim V$，那么 $\mathsf{K}(f)$ 是 P 中定义域为 m、陪域为 n 的唯一态射。因此，$\mathsf{LT}_{\mathbb{N}}^{\leqslant}$ 通过唯一函数 $\mathsf{J}(f) = \mathrm{rel}_{mn} \mapsto \mathsf{K}(f)$ 映入 P。最后，由推论 4 可知，由维数不变量诱导的伪度量为

$$d_{\dim}(U, V) = |\dim U - \dim V|.$$

4.3. Cantor–Schr¨oder–Bernstein 范畴。仅仅限制态射并不总能打破循环。比如，考虑由 n 个字母生成的自由群 F_n。对于每个 $n > 2$，只使用两个 n 变量中的词，我们就得到一个单态射 $F_2 \hookrightarrow F_n$。Dehn 的一项结果表明，还存在一个单态射 $F_n \hookrightarrow F_2$，因此在群范畴中存在非平凡循环 $F_2 \hookrightarrow F_n \hookrightarrow F_2$，其态射均为单态射。对于具体范畴（即存在到 Set 的忠实函子的范畴），这种情况只会出现在无限集合中。这表明，为了避免循环，我们应当对范畴施加“类似集合”的条件。

定义 7. 若范畴 C 的单态射满足以下条件，则称 C 为单态 Cantor–Schr ¨oder–Bernstein（CSB）范畴：

$$\text{if } f : x \hookrightarrow y \text{ and } g : y \hookrightarrow x, \text{ then } x \cong y.$$

满态射型 CSB 范畴在满态射上满足类似的条件：

$$\text{if } f : x \twoheadrightarrow y \text{ and } g : y \twoheadrightarrow x, \text{ then } x \cong y.$$

许多常见的具体范畴——例如有限群和有限图——都是 CSB 范畴，规模更大的范畴也同样如此（前提是采用足够强的选择公理）。下面这个初等结果展示了 CSB 范畴对于定理 3.

命题 8. 在单态射型 CSB 范畴 C 中，$\hookrightarrow$C 中的所有循环都是平凡的。在满态射型 CSB 范畴 C 中，$\twoheadrightarrow$C 中的所有循环都是平凡的。

证明。考虑单态射型 CSB 范畴 C 中由态射构成的一个循环 $(f_0, \dots, f_{n-1})$，其中属于 $\hookrightarrow$C。则 $f_{n-2} \cdots f_1 f_0 \colon x_0 \to x_{n-1}$ 和 $f_{n-1} \colon x_{n-1} \to x_0$ 都是单态射。根据 CSB 性质，这意味着 $x_{n-1} \cong x_0$。由此通过归纳即可得出结论。满态射型 CSB 范畴的证明几乎完全相同。□

4.4. 虚拟循环。定义有用的距离还可能面临其他障碍，并非所有障碍都能通过限制态射来消除。回到基本群，考虑以下带基点拓扑空间之间的连续满射：

$$(\mathbb{R}^1, 0) \xrightarrow{e^{i\theta}} (S^1, 1) \longrightarrow (\mathrm{pt}, \mathrm{pt}).$$

应用 π_1，我们得到群同态 $1 \to \mathbb{Z} \to 1$。因此，$1 \leqslant \mathbb{Z} \leqslant 1$，进而可得 $1 = \mathbb{Z}$。这一现象会出现在每个万有覆叠空间中。

定义 9。设 C 为一个范畴，I 为 C 上的一个同构不变量。虚拟 I-循环是由态射 $f_i : x_i \to y_i$ 组成的序列 $(f_0, \dots, f_{n-1})$，其中 $n \geqslant 2$，且对所有 $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，均有 $\mathsf{I}(x_{i+1}) = \mathsf{I}(y_i)$。若 $\mathsf{I}(x_0) = \cdots = \mathsf{I}(x_{n-1})$，则称该虚拟 I-循环为平凡的。

取基本群作为不变量，在我们前面的例子中，$\pi_1(\mathbb{R}^1, 0) = 1 = \pi_1(\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$，而 $\pi_1(S^1, 1) \ncong 1$。因此，我们有一个非平凡虚循环。有时这些虚循环可能会被破坏。

命题 10. 设 C 和 D 为范畴，且存在函子 $\mathsf{G}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$。若 I_1 和 I_2 分别是 C 和 D 上的同构不变量，则

$$(\mathtt{I}_1 \cup \mathtt{I}_2)(x) := (\mathtt{I}_1(x), \mathtt{I}_2(\mathbf{G}(x)))$$

是 C 的一个同构不变量。

这一观察可用于打破我们基本群示例中的虚循环。令 C 和 D 都为带基点拓扑空间范畴，并令 G 为恒等函子。令 $\mathsf{I}_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ 和 $\mathsf{I}_2(X, x_0) = \dim X$，即 X 的拓扑维数。不变量 $\mathsf{I}_1 \cup \mathsf{I}_2$ 打破了虚循环：

$$(\mathtt{I}_1 \cup \mathtt{I}_2)(\mathbb{R}^1, 0) = (0, 1) \geqslant (\mathtt{I}_1 \cup \mathtt{I}_2)(S^1, 0) = (\mathbb{Z}, 1) \geqslant (\mathtt{I}_1 \cup \mathtt{I}_2)(\mathrm{pt}, \mathrm{pt}) = (0, 0).$$

定义 11. 若范畴 C 是具体的，且 C 中每个满足 $|x| = |y|$ 的态射 $f\colon x \to y$ 都是同构，则称 C 为鸽巢范畴。

$\overset{\hookrightarrow}{}$FinSet 和 $\overset{\twoheadrightarrow}{}$FinSet 都是鸽巢范畴。

命题 12. 设 $|\cdot|$ 是 Set 上的基数不变量。若 I 是鸽巢范畴 C 上的同构不变量，则所有虚循环 $(\mathsf{I} \cup |\cdot|)$ 都是平凡的。

证明. 由于 C 是具体范畴，根据命题 10，$\tilde{\mathsf{I}} = \mathsf{I} \cup |\cdot|$ 是 C 上的同构不变量。考虑虚 $\tilde{\mathsf{I}}$-循环 $(f_0, \dots, f_{n-1})$，其中 $f_i\colon x_i \to y_i$ 对于 $0 \leqslant i \leqslant n-1$。因此 $\tilde{\mathsf{I}}(x_0) \leqslant \tilde{\mathsf{I}}(y_0) = \tilde{\mathsf{I}}(x_1) \leqslant \cdots \leqslant \tilde{\mathsf{I}}(y_{n-1}) = \tilde{\mathsf{I}}(x_0)$。所以

$$(\mathtt{I}(x_0), |x_0|) \leqslant (\mathtt{I}(y_0), |y_0|) = (\mathtt{I}(x_1), |x_1|) \leqslant \cdots \leqslant (\mathtt{I}(y_{n-1}), |y_{n-1}|) = (\mathtt{I}(x_0), |x_0|).$$

由此可得

$$|x_0| \leqslant |y_0| = |x_1| \leqslant |y_1| = |x_2| \leqslant \cdots \leqslant |y_{n-1}| = |x_0|.$$

由于 C 是鸽巢范畴，每个 f_i 都是同构，因此对所有 $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$，$\mathsf{I}(x_i) = \mathsf{I}(y_j)$。于是，$\tilde{\mathsf{I}}(x_i) = \tilde{\mathsf{I}}(y_j)$，且该虚循环是平凡的。□

5. Examples

在上一节中，我们讨论了可能妨碍对同构不变量赋予有意义的距离的一般现象。即使在存在有意义的伪度量的情形下，仍需明确找出定理 3 所保证存在的泛偏序。能否做到这一点，既取决于范畴的性质，也取决于不变量的复杂程度。通过一系列复杂性逐步增加的案例，我们展示了几种解决这一识别问题的方法。

5.1. 图的色数。对于 $\mathcal{G}$ 有限简单图范畴 Grph 中的图，色数 $\chi(\mathcal{G})$ 是对 $\mathcal{G}$ 的顶点进行着色、使任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。这是一个取值于 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ 的 Grph 上的同构不变量。

若 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ 是图的一个单射，并且在顶点集和边集上诱导出单射，那么 $\mathcal{G}$ 的一个着色会诱导出 $\mathcal{H}$的一个着色。因此，在 $\mathbb{Z}^+$的后继序 6 下，$\chi(\mathcal{H}) \leqslant \chi(\mathcal{G})$。具有 n 个顶点的完全图 K_n的色数为 n。对于每个 $1 \leqslant i \leqslant n$，都存在一个单射 $K_i \hookrightarrow K_n$，它由 K_n 中最初的 i 个顶点及其关联边得到。因此，色数不变量是满射的，并且每个关系 $m \leqslant n$ 都被某个单态射覆盖。

根据定理3，（$\mathbb{Z}^+$，$\leqslant$）是色数不变量在 $\hookrightarrow$Grph上的泛序。图 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{H}$ 之间的相应距离为

$$d_\chi(\mathcal{G},\mathcal{H}) = |\chi(\mathcal{G}) - \chi(\mathcal{H})|.$$

图 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{J}$ 图 1 中的色数均为 3，因此 $d_\chi(\mathcal{J},\mathcal{H}) = 0$。此外 $\chi(\mathcal{K}) = 4$，所以 $d_\chi(\mathcal{J},\mathcal{K}) = 1 = d_\chi(\mathcal{H},\mathcal{K})$，这进一步印证了色数是一种粗略的不变量。

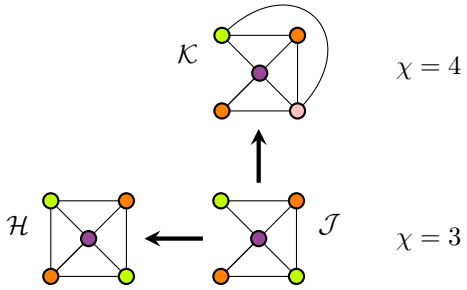


FIGURE 1. 色数距离示意图

5.2. 有限群的阶。 $\mathbb{Z}^+$ 上的后继序并非对每个取值于 $\Delta = \mathbb{Z}^+$ 的同构不变量而言都是泛序。令 $\hookrightarrow$FinGrp 为一个范畴，其对象是有限群，态射是群单态射。考虑由群的阶生成的偏序和伪度量，即函数 $|\cdot| : \hookrightarrow\text{FinGrp} \to \mathbb{Z}^+$，将 $G \mapsto |G|$映射至相应值。由于该范畴中的单态射是集合之间的单射，因此可得 $H \hookrightarrow G$ 诱导出 $|H| \leqslant |G|$，但这一偏序并非泛偏序。泛偏序可由拉格朗日定理推得：

$$m|n \iff (\exists k)(mk = n).$$

这确实等价于定理 3 中的偏序，并且在 $\hookrightarrow$FinGrp 上诱导的伪度量为

$$d(G,H) = \sum_{p \text{ prime}} |\nu_p(|G|) - \nu_p(|H|)|, \qquad \text{where } n = \prod_p p^{\nu_p(n)}.$$

特别地，阶为 n 的每个群与其各个西洛子群的距离，都小于它与任意一个阶为 $n \pm 1$ 的群的距离。

5.3. 阿贝尔不变量。与图的色数一样，有限群的阶是一个非常粗略的不变量。例如，阶为 1024 [1]的群中，非同构的群几乎有500亿个。如果我们只考虑有限阿贝尔群，那么稍加深入的分析便能得到这类群的一个定义性不变量——它可以判定同构问题。

令 Δ 为因子链的集合 $(d_1,\dots,d_n)$，其中 $d_i \in \mathbb{N}$ 和 $d_1 \mid \cdots \mid d_n$。存在一个函数 div，从有限阿贝尔群范畴 FinAb 的对象映射到 Δ，其中 $\operatorname{div} A = (d_1,\dots,d_n)$ 表示阿贝尔群 $A \cong \mathbb{Z}/d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n$。从这个意义上说，div 是 FinAb 的一个定义性同构不变量。$\operatorname{div} A$ 中的各项是 A的阿贝尔不变量。

应用定理 3 于 $\twoheadrightarrow$FinAb 可得关于 Δ的偏序：

$(d_1,\dots,d_n) \leqslant (e_1,\dots,e_m)$ 当且仅当 $m \leqslant n$ and $e_i \mid d_{n-m+i}$ for all i。

考虑 $A_1 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$、 $A_2 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 和 $A_3 = \mathbb{Z}/8$，于是 div $A_1 = (2, 2, 4)$、div $A_2 = (2, 2, 2)$ 和 div $A_3 = (8)$。这些群之间的距离可见图2，但我们简要考察一下原因。显然，这些群之间的两两距离至少为 1。由于 A_1 映射到 A_2，且其核的阶为 2，因此 (2, 2, 4) 被 (2, 2, 2) 覆盖，所以 $d(A_1, A_2) = 1$。不存在从 A_1 到 A_3的满射，反之亦然，所以 $d(A_1, A_3) \geqslant 2$。因此， A_1比起 A_3，与 A_2 更接近。事实上，$(2, 2, 4) < (2, 4) < (4)$，而 $(8) < (4)$。 A_3 在 A_1 中的最大像与 $\mathbb{Z}/4$同构，因此 $d(A_1, A_3) = d(A_1, \mathbb{Z}/4) + 1 = 3$.

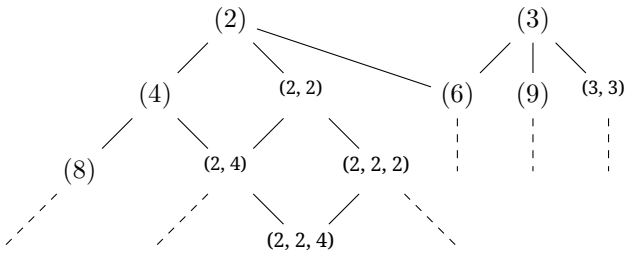


FIGURE 2. 因子链偏序的覆盖图

5.4. 图的色多项式。 回到范畴Grph，我们考虑一个更具辨别力的不变量。令 $\chi_{\mathcal{G}}(t)$ 为色多项式 [13]，其中有限简单图 $\mathcal{G}$。那么$\mathtt{I} : \mathtt{Grph}_0 \to \mathbb{Z}[t]$，其中 $\mathcal{G} \mapsto \chi_{\mathcal{G}}(t)$，是 $\hookrightarrow$Grph的同构不变量。

若 $\mathcal{G}$ 是一个有 n 个顶点和 m 条边的图，则 $\chi_{\mathcal{G}}(t)$的次数为 n，且首项系数为 1。令 $[t^k]\chi_{\mathcal{G}}(t)$为 t^k的系数。这些系数的符号交替变化，且 $[t^{n-1}]\chi_{\mathcal{G}}(t) = -m$。此外， $\chi_{\mathcal{G}}(t)$等于 $\mathcal{G}$的各个连通分支的色多项式之积。

我们在 $\mathbb{Z}[t]$ 上定义如下偏序 6：

$$f(t) \leqslant g(t) \implies \begin{cases} \deg f < \deg g, \text{ or} \\ \deg f = \deg g \text{ and } (\forall k) \left(\left| [t^k] f(t) \right| \leqslant \left| [t^k] g(t) \right| \right). \end{cases}$$

对于图 $\mathcal{G}$ 的边 e，记 $\mathcal{G} \setminus e$ 为从 $\mathcal{G}$ 中删除边 e 后得到的图，记 $\mathcal{G}/e$ 为从 $\mathcal{G}$ 中收缩边 e 后得到的图。回顾删边缩边公式： $\chi_{\mathcal{G}}(t) = \chi_{\mathcal{G}\setminus e}(t) - \chi_{\mathcal{G}/e}(t)$。我们利用这一观察推导出以下结果。

命题13。若 $\phi : \mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}_2$，则 $\chi_{\mathcal{G}_1}(t) \leqslant \chi_{\mathcal{G}_2}(t)$。

如图3所示，命题13 的逆命题并不成立。因此，偏序$\leqslant$ 严格细于由定理I 诱导的偏序（见定理3）。此外，我们并不清楚哪些多项式可以成为色多项式，但可以推知I 不是满射。

对于图 $\mathcal{G}$，令 $\mathcal{G}'$ 由 $\mathcal{G}$ 添加一个孤立顶点得到。因此，$\chi_{\mathcal{G}'}(t) = t \cdot \chi_{\mathcal{G}}(t)$，并且若 $\mathcal{H}$是满足 $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}'$的图，则 $\mathcal{H}$同构于 $\mathcal{G}$ 或 $\mathcal{G}'$。因此， $\chi_{\mathcal{G}'}(t)$覆盖 $\chi_{\mathcal{G}}(t)$。对于具有 n_1 和 n_2的图 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$



$\chi_1(t) = t^4 - 3t^3 + 2t^2$ $\chi_2(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 3t$

FIGURE 3. $\chi_1(t) \leqslant \chi_2(t)$，但 $\mathcal{G}_1$ 不能嵌入 $\mathcal{G}_2$

个顶点，伪度量 d 在与 6 对应的 $\hookrightarrow$Grph 上定义为

$$d(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = |n_1 - n_2| + \sum_{k \geqslant 0} \left| [t^k] \left((-t)^{n_1} \chi_{\mathcal{G}_1}(-t^{-1}) - (-t)^{n_2} \chi_{\mathcal{G}_2}(-t^{-1}) \right) \right|.$$

5.5. 共轭类大小。最后，我们考察一个在近期有限 p-群分类中发挥了重要作用的不变量。

为了在同构意义下区分群，比较元素的共轭类大小通常很有用。对于幂零群，我们通常将群论性质转化为李环中的相应性质。因此，群的共轭类大小转化为由伴随表示给出的线性映射的秩；参见 [8, 第 6] 章和 [12, 14]。这些秩就是李环元素的宽度，并且在某些阶整除 p^8 [10, 11, 16]的群族分类中发挥了决定性作用。

固定一个域 K。非结合 K代数 A 是一个带有 K-双线性乘积 $[x, y]$的向量空间。设 A 为 2 阶幂零，即 A 中任意三个元素的乘积均为 0。令 $[A, A]$ 为由所有满足 x、$y \in A$的 $[x, y]$ 生成的 A 的子代数。我们选取 $A/[A, A]$的一组基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，从而（通过单值性）将 $A/[A, A]$ 与K^n对应起来。同样，选取一组基 $\{f_1, \ldots, f_m\}$后，我们将 $[A, A]$ 与 K^m 对应起来。对于每个 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$，都存在 $\lambda_{ij}^{(k)} \in K$ 使得 $[e_i, e_j] = \lambda_{ij}^{(1)} f_1 + \cdots + \lambda_{ij}^{(m)} f_m$。令 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 为不定元，并定义一个 $m \times n$ 矩阵 $M = M_A(\boldsymbol{x}) = (m_{ij}(\boldsymbol{x}))$，其元素是 $K[x_1, \ldots, x_n]$ 中的线性形式，使得

$$m_{ij}(\boldsymbol{x}) = \lambda_{1j}^{(i)} x_1 + \cdots + \lambda_{nj}^{(i)} x_n. \tag{6}$$

对于 $r \geqslant 1$，令 $\mathcal{P}_r(M) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$为 M 的 $r \times r$ 子式集合，并令 $\mathcal{I}_r(M)$ 为 $K[x_1, \ldots, x_n]$ 中由 $\mathcal{P}_r(M)$ 生成的理想。我们将由 $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 对所有 $f \in \mathcal{P}_r(M)$ 给出的 $\mathbb{P}_K^{n-1}$ 的闭射影子概形定义为 $\mathcal{B}_r(M)$。

注意，$\mathcal{B}_r(M)$ 不是 A 的同构不变量，因为描述 M 必须选择基。若 $\Phi \in \mathrm{GL}_n(K)$ 且 $\Gamma \in \mathrm{GL}_m(K)$，则 (Φ, Γ) 通过 $\Gamma^{\mathrm{tr}} M(\Phi \boldsymbol{x}) \Phi$ 作用于 $M(\boldsymbol{x})$。因此，在 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的作用下，变量的线性代换所得理想 $\mathcal{I}_r(M)$ 是 A 的一个同构不变量。我们可以考察 $\mathcal{B}_r(M)$ 的几何性质，例如维数或 $\mathbb{F}_p$-有理点的数量。

固定一个素数 $p > 2$。令 pGroup2 为由 p 阶、G 为 2 阶幂零且指数为 p的群构成的范畴。Lazard 对应给出一个函子 L，将 pGroup2 映到分次李 $\mathbb{F}_p$代数的范畴。令 Δ 为 $K[x_1, \ldots, x_n]$ 的理想，按 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的作用取等价类。对于某个 $r \geqslant 1$，我们通过将 G 映射到 $\mathcal{I}_r(M_{\mathbf{L}(G)})$，在 pGroup2 上定义一个同构不变量 I。由于理想是按 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的作用取等价类的，我们改写为 $\mathcal{I}_r(G)$。

例如，我们仿照第5.3 节中的阿贝尔群同构不变量偏序，使用多项式理想的初等分解。设 $\mathfrak{p}$是 $K[x_1, \ldots, x_n]$的一个素理想。对于一个 $\mathfrak{p}$-初等理想 Q，定义 $\nu_{\mathfrak{p}}(Q) = \sup\{\ell \mid Q \subset \mathfrak{p}^\ell\}$。若理想 J属于 $K[x_1, \ldots, x_n]$，且具有唯一的极小初等分解

$J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$，则定义$\hat{\nu}_{\mathfrak{p}}(J) = \nu_{\mathfrak{p}}(Q_i)$，若 $\mathfrak{p} = \sqrt{Q_i}$则取此值，否则为0。我们通过以下方式在 pGroup2 上定义一个伪度量 d：

$$d(G,H) = \sum_{\mathfrak{p}} \left| \hat{\nu}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_r(G)) - \hat{\nu}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_r(H)) \right|, \tag{7}$$

其中求和遍历所有素理想 $\mathfrak{p}$ 属于 $K[x_1, \ldots, x_n]$。注意，在（7）中，$\hat{\nu}_{\mathfrak{p}}$（$\mathcal{I}_r$（G））是针对 $\mathcal{I}_r$（G的特定代表元确定的，但其选择不会影响距离。

考虑以下群族。固定一个次数为d 的多项式 $f(t) \in \mathbb{F}_p[t]$，并定义一个阶为 p^{3d}的群：

$$H(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{F}_p[t]/(f(t)) \right\}.$$

在[17]中，证明了 $H(f) \cong H(g)$当且仅当 $\mathbb{F}_p[t]/(f) \cong \mathbb{F}_p[t]/(g)$。我们探讨该群族中不同构群之间的距离。利用 Magma [2]可以验证以下结论，因此我们仅给出一个示例计算。

例14. 假设 $p > 2$ 和 f（t）$\in \mathbb{F}_p[t]$ 是二次的。因此，根据 f（t）的分裂行为，$\mathbb{F}_p[t]/$（f（t））同构于以下三种情形之一。在这三种情形中，$G = H$（f）的阶为 p^6，且 L（G）$\cong \mathbb{F}_p^4 \oplus \mathbb{F}_p^2$。因此，由（6）定义的矩阵 M是 $\mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]$上线性形式的 2×4 矩阵。我们为这三种情形分别构造 $\mathcal{I}_2$（G）的一个代表。

$\mathbb{F}_p$中的互异根：令 $f_1 = t^2 - 1$。对于某个基的选取，

$$M = \begin{bmatrix} -x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_4 & 0 & x_2 \end{bmatrix}.$$

令 $\mathfrak{p}_1 =$（x_1，x_3）和 $\mathfrak{p}_2 =$（x_2，x_4）为 $\mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]$的理想。则

$$\mathcal{I}_2(H(f_1)) = (x_1x_2,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_3x_4) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2.$$

$\mathbb{F}_p$中的重根：令 $f_2 = t^2$。则

$$\mathcal{I}_2(H(f_2)) = (x_3^2,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_1^2) \subset \mathfrak{p}_1,$$

因此 $\mathcal{I}_2(H(f_2))$是 $\mathfrak{p}_1$-primary。

在 $\mathbb{F}_p$中无根：令 $f_3 = t^2 - \omega$为某个非平方元 $\omega \in \mathbb{F}_p$对应的 Set。那么

$$\mathcal{I}_2(H(f_3)) = (x_3^2 - \omega x_4^2,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_1x_3 - \omega x_2x_4,\ x_1^2 - \omega x_2^2)$$

是一个素理想。记作 $\mathfrak{p}_3 = \mathcal{I}_2(H(f_3))$。

在 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_p)$ 对 $\mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]$的素理想的作用下，$\mathfrak{p}_1$和 $\mathfrak{p}_2$ 属于同一轨道，而 $\mathfrak{p}_3$ 属于不同轨道。为说明这一点，注意到，经过无关紧要的变量重标记后，$\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_p)$的作用将 $\mathfrak{p}_1$ 映射为$(x_1 + ax_3 + bx_4,\ x_2 + cx_3 + dx_4)$，其中 a、b、c、$d \in \mathbb{F}_p$满足相应条件；即使重标记变量，这样的理想也永远不会等于 $\mathfrak{p}_3$。

令 $G_i = H(f_i)$，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$。根据 (7)，我们推得

$$d(G_1, G_2) = |\hat{\nu}_{\mathfrak{p}_1}(\mathcal{I}_2(G_1)) - \hat{\nu}_{\mathfrak{p}_1}(\mathcal{I}_2(G_2))| + |\hat{\nu}_{\mathfrak{p}_2}(\mathcal{I}_2(G_1)) - \hat{\nu}_{\mathfrak{p}_2}(\mathcal{I}_2(G_2))| = 1.$$

其他距离的计算方法类似：$d(G_2, G_3) = 2$ 和 $d(G_1, G_3) = 3$。

总之，在同构不变量中加入偏序和距离，不仅能够区分各个群，还能依据距离对它们进行几何组织。例如，群 G_1 和 G_2 彼此之间的距离比它们各自到 G_3的距离都近，但后者到 G_2 的距离比到 G_1的距离近。

Acknowledgements

我们感谢 Michael Shulman 对同伦类型论提出的意见，也感谢 Anton Baykalov 和 Tobias Rossmann 对论文草稿提出的评论。Maglione 得到了德国科学基金会资助，资助编号为 VO 1248/4-1 （项目编号 373111162 ）和德国科学基金会研究生院项目 2297。O'Brien 得到了新西兰马斯登基金资助，资助编号为 UOA 107。Wilson 得到了西蒙斯基金会资助，项目编号为 #636189。

References

[1] Hans Ulrich Besche、Bettina Eick 和 E. A. O'Brien, *A millennium project: constructing small groups* **12** 2002 5, 623 644 , 《国际代数与计算杂志》 1935567 （），第 – 期。MR[2] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The* , 《符号计算杂志》（），第 - *user language* **24** 1997 3 4, 235 265 – 期。计算代数与数论（伦敦, 1993 1484478 ）。MR Peter A. Brooksbank 、 Heiko Dietrich、Joshua F. Maglione、[3] E. A. O'Brien 和 James B. Wil- son, *Computer algebra systems as higher categories: a computational model*。编写中。[4] Peter A. Brooksbank、Joshua F. Maglione、E. A. O'Brien 和 James B. Wilson, *Fully in- variant structures in algebra are categorical counits* 。编写中。[5] Dmitri Burago、Yuri Burago 和 Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, 《数学研究生系列》第 33 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年。MR1835418[6] J. Roger Hindley, *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*, 剑桥大学出版社，剑桥，2008 年。[7] Nathan Jacobson, *Basic Algebra. II*，第二版，W. H. Freeman and Company，纽约，1989 年。MR1009787[8] E. I. Khukhro, *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, 《伦敦数学会讲义系列》第 246 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998 年。MR1615819[9] B. Monjardet, *Metrics on partially ordered sets—a survey*, 《离散数学》35（1981），173–184。MR620670[10] M. F. Newman、E. A. O'Brien 和 M. R. Vaughan-Lee, *Groups that imbed- Lie rings whose order is the sixth power of a prime* **278** 2004 1, 383 401 , 《代数杂志》（），第 – 期。 2068084 MR[11] *The groups with order p^7 for odd prime p* E. A. O'Brien 和 M. R. Vaughan-Lee, , 《代数杂志》 **292** 2005 1, 243 258 2166803 （），第 – 期。MR E. A. O'Brien 和 C. Voll, [12] *Enumerating classes and characters of p-groups*, 《美国数学学会汇刊》 **367** 2015 11, 7775 7796 3391899 （），第 – 期。MR Ronald C. Read, , 《组合理论杂志》[13] *An introduction to chromatic polynomials* 4（1968），52–71。MR224505[14] Tobias Rossmann, *The average size of the kernel of a matrix and orbits of linear groups*, 《伦敦数学会会刊》（3）117（2018），第3期，574–616。MR3857694[15] 单值基础项目, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics* 2013 , https://homotopytypetheory.org/book, 高等研究院, 。[16] Michael Vaughan-Lee, *Groups of order p^8 and exponent p*, 《国际群论杂志》4（2015），第4期，25–42。MR3416635[17] James B. Wilson, *On automorphisms of groups, rings, and algebras*, 《代数通讯》45（2017），第4期，1452–1478。MR3576669

Department of Mathematics, Bucknell University, Lewisburg, PA 17837, USA*Email address*: pbrooksb@bucknell.edu

Faculty of Mathematics, Otto von Guericke University Magdeburg, 39106 Magde-burg, Germany*Email address*: joshua.maglione@ovgu.de
Department of Mathematics, University of Auckland, Private Bag 92019, Auckland, New Zealand*Email address*: e.obrien@auckland.ac.nzDepartment of Mathematics, Colorado State University, Fort Collins, Colorado,80523-1874, USA*Email address*: James.Wilson@ColoState.Edu