arXiv:2304.00478v1 [math.OC] 2 Apr 2023

# Zermelo 最优控制轨迹的几何

Z. Fathi 和 B. Bidabad *

摘要

本文从几何学和微分方程的角度研究泽尔梅洛导航问题中的最优控制路径，而非最优控制的角度；后者已在我们近期的工作中加以研究。本文给出了系统的精确形式，其解即为泽尔梅洛导航问题的最优轨迹。精确的方程有助于更准确、高效地优化代价函数。这些方程的优势在于，对于一般情形，可通过外场的一阶近似来近似最优轨迹 $w$。由于我们得到了描述这些路径的较简单方程，因此可用数值方法求解后者。

2010年美国数学学会学科分类：53C60，53C44。
关键词：最优控制；Zermelo 导航；芬斯勒；兰德斯度量；测地线。

## 1 引言

最优控制问题自然产生于工程学领域，尤其是在机器人学和航空航天领域，这些领域需要进行路径优化。在一个

*通讯作者；bidabad@aut.ac.ir；behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr

最优控制问题旨在确定一个控制函数，使目标函数（也称为总成本函数）达到最小，从而使时间、路线和/或其他相关出行成本等物理量最小化。

泽尔梅洛导航问题被认为是最著名的时间最优控制问题之一。Zermelo 导航是变分法中的一个经典问题，可追溯至 Zermelo 于1931年的笔记。

设一个运动物体（船、船舶、飞机等）在外场（如风或水流）中航行，并要尽可能在最短时间内到达指定目的地。泽尔梅洛导航问题旨在刻画（求得/计算）最优路径。

在黎曼情形下的 Zermelo 导航问题中，导航所处的底层空间可建模为一个黎曼流形，而外部自然（扰动）力则由该流形上的一个向量场给出 $w$ 。黎曼几何中的 Zermelo 导航问题已在[2]中得到详细研究。此后，相关论文 [3], [5] 等重要研究对该问题作了进一步拓展。在这些研究中，人们揭示了它与几何学之间的优美联系。具体而言，研究表明，在弱外部场（向量场 $w$ 满足 $|w| < 1$）作用下的 Zermelo 导航，其路径是特定兰德斯型芬斯勒度量的测地线。稍后我们将进一步讨论这一点。

在[6], 中，作者从度量几何和最优控制的角度研究了有（移动）障碍物和无障碍物情况下的 Zermelo 导航问题，并着眼于改进现有的计算方法。具体而言，我们提出了对[12] 中先前考虑的优化方案进行修改，加入分段常数旋转。这一做法在某些情况下能够得到精确路径，因此优于现有方法。更多详情请参见[6] 。在 [4], 中，第二位署名作者与 Rafie-Rad 研究了无障碍追踪问题中的时间最优轨迹；从几何上看，该问题与 Zermelo 导航问题有相似之处。

作者在 [11] 中使用经典惩罚函数方法，将导航问题作为无障碍物的极小极大问题求解，以获得最优时间。

随后，他们允许更长的行驶时间（最多比最优时间多出一个小百分比），并考虑存在固定障碍物的情况。

该论文[10] 研究了一个受连续不等式约束和终端状态等式约束限制的最优 PID 控制问题；研究表明，该问题可以通过依次求解一系列非线性优化问题来解决。文中提出了一种高效的计算方法，随后将其应用于一个船舶操舵控制问题。所得结果表明，所提出的方法可靠且有效。

在 [8], 中，作者在连续不等式约束下将行驶时间最小化。停止时间由一个光滑超曲面确定。文献中已介绍了若干利用风力预报数据求解最优轨迹的方法，包括解析最优控制、[9], [13]。

本文的主要目标是研究生成最优路径的常微分方程组。这很有用，因为有时，数值求解一个精确的方程可能比优化代价函数更容易。

传统上，泽尔梅洛导航问题是在二维空间中提出的，因为它最初是为了规划船舶在海上的运动而引入的。然而，该问题的表述并不局限于二维。例如，在 [7], 中，研究了固定和移动障碍物存在时的 Dubins飞机导航问题，这是一个存在障碍物时的三维泽尔梅洛导航问题。

如前所述，黎曼流形上的 Zermelo 导航与兰德斯型芬斯勒度量及其测地线密切相关。我们将在下一节进一步说明这一点；此处值得一提的是，当所得的兰德斯型度量具有常旗曲率时，这些测地线已在 [14] 中得到完整分类。

定理 1. 设 $w$ 是扰动 $\mathbb{R}^2$ 中运动的弱动态线性向量场。由初始位置出发并到达目的地的最优控制路径（测地线）的微分方程由方程 *4.3*给出。

这些常微分方程很有用，因为一般情况下的最优轨迹可以通过外场 $w$ 的一阶近似来近似。

# 2 背景材料

## 2.1 芬斯勒结构

芬斯勒几何的基本概念和定义可在标准教材及许多论文中找到，因此我们不再详细回顾。本文采用[6]中使用的符号和定义。

简而言之，光滑流形上的芬斯勒结构是在切空间上依赖于基点和方向的范数 $F$，它在切丛的零截面之外 $C^\infty$ 光滑，并满足正齐次性和凸性；具体而言，若将基点记为 $x$，将切向量记为 $(x, \mathrm{y}) \in T_xM$，则芬斯勒度量 $F$ 必须满足以下条件：零截面之外的正则性： $F$ 在整个挖去零截面的切丛 $TM_0$ 上 $C^\infty$，即在切丛去掉零截面后处处光滑。正齐次性：对于所有 $\lambda > 0$, $F(x, \lambda \mathrm{y}) = \lambda F(x, \mathrm{y})$。零截面之外的强凸性：海森矩阵 $n \times n\, (g_{ij}) := \dfrac{\partial^2 F^2}{2\partial y^i \partial y^j}$在 $TM_0$ 的每一点都是正定的。给定这样的流形 $M$ 及其切空间上的芬斯勒结构 $F$， $TM$。有序对 $(M, F)$ 称为芬斯勒空间或芬斯勒流形。需要强调的是， $F$ 不仅依赖于基点 $x \in M$，还依赖于向量 $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$。更多细节请参阅标准教材 [1]。

在各种芬斯勒度量中，兰德斯型度量是一类重要的自然对象，因为它们是通过添加一个线性项从黎曼度量得到的；具体而言，兰德斯型度量是形如$F(x, \mathrm{y}) := \alpha(x, \mathrm{y}) + \beta(x, y)$的芬斯勒度量，其中 $\alpha(x, y) := \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ 是黎曼度量，而 $\beta(x, y) := b_i(x) y^i$ 是一形式。假设 $a(b, b) < 1$ 是为确保 $F$ 为正所必需的。这一简单条件也保证了度量具有强凸性。也就是说，对于所有非零的 $\mathrm{y} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$， Hessian 矩阵 $g_{ij}(x, y) := (\frac{1}{2} F^2)_{y^i y^j}$均为正定矩阵。

测地线是将“直线”（局部最短路径或切向加速度为零的路径）这一概念从欧几里得空间（以及更一般的黎曼流形）推广到芬斯勒空间的结果。与黎曼情形一样，从变分法的角度来看，极小化能量泛函将得到测地喷射；测地喷射是 $TTM$ 上的向量场，其积分曲线是测地线在 $TM$ 上的自然提升。

要表达测地线所满足的微分方程，需要选定一种联络。在芬斯勒结构中，芬斯勒范数不一定具有可逆性，也就是说，方向相反的向量长度可能不同。由于这一点，必须区分（局部）正向长度极小化曲线与（局部）反向长度极小化曲线。在本文中，芬斯勒测地线指正向测地线（局部正向长度极小化），而极小测地线则指在其端点之间实现正向长度极小值的正向测地线。

单位球丛在芬斯勒情形下的推广是指示曲面，它是集合 $S_F := \{\mathrm{y} \in V; F(\mathrm{y}) = 1\}$（范数中的依点而变的单位球）。容易验证，指示曲面的纤维是闭且凸的子集，包含原点但不经过原点。为简便起见，在不会引起混淆时，我们将其称为单位切球面。

## 2.2 兰德斯型度量的测地线

如前所述，研究泽尔梅洛导航问题中的时间最优路径，需要研究适当定义的兰德斯型度量的测地线。因此，我们先回顾如何计算兰德斯型度量的测地线。

### 2.2.1 测地喷射与方程

在黎曼和芬斯勒情形下，可以通过各种方式研究测地线。一种方式是将测地线（连同切向量）

视为切丛（在黎曼情形下）或挖去零截面的切丛（在芬斯勒情形下）上的向量场 $G$ 的积分曲线。这个向量场称为测地喷射。容易看出，测地喷射 $G$ 具有如下形式：$G = y^i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$，其中系数 $G^i$ 称为测地喷射系数。

如今已是公认的事实：芬斯勒结构（$M$， $F$）中的单位速测地线由芬斯勒测地喷射给出，其系数为

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \left( \left[ F^2 \right]_{x^k y^l} y^k - \left[ F^2 \right]_{x^l} \right) = \frac{1}{4} g^{il} \left( 2 \left( g_{jl} \right)_{x^k} - \left( g_{jk} \right)_{x^l} \right) y^j y^k.$$

更多详情请参见 [1]。

一旦知道了测地喷射系数（在局部坐标中），就可以用坐标形式写出测地线方程（对应单位速测地线 $\gamma$）：

$$\dot{\gamma} = \left( x, y^i \right), \quad \ddot{\gamma} = \left( \dot{\gamma}, y^i, -2G^i \right)$$

利用适当的联络，可以得到无坐标方程。下文将对此略作介绍。

## 2.3 Zermelo 导航所产生的兰德斯度量

如今已是公认的事实：Zermelo 导航问题中的最优路径是 Randers 型芬斯勒度量的测地线。这一几何视角有助于我们从多个角度研究最优路径，即从芬斯勒几何、度量几何和微分方程的角度，以及从最优控制理论的角度进行研究。

事实上，下文将给出这一几何图景。

命题 A（Shen[15]）。设 $M$ 为一个光滑流形，假设快速船只以单位速度从向量 y 的起点航行至其终点，且外部因素 $w$ 对 $M$ 产生了影响，使得 $\|w\| < 1$。切丛上的新芬斯勒结构 $F$ 用于测量运动时间，其形式为

$$F(\boldsymbol{y}) = \left( 1 - \|w\|^2 \right)^{-1} \left( \left( \langle \boldsymbol{y}, w \rangle^2 + (1 - \|w\|^2) \|\boldsymbol{y}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \langle \boldsymbol{y}, w \rangle \right) \tag{2.1}$$

其中 $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ 是黎曼范数。

证明。证明见 [15] ， 命题A的证明；另见 [2]。 □

更多详情和研究可参见[15] 以及 [6]等文献。

# 3 最优轨迹满足的精确常微分方程

正如我们所见，最优轨迹确实是某个特定兰德斯型芬斯勒度量的前向极小测地线。本节旨在计算底流形为平坦 $\mathbb{R}^2$时二维情形下任意外力对应的测地线方程。设 $u$为一个驱动船只、大小恒为 $\|u\| = 1$ 的内场。

在这种情况下，我们唯一的自由参数是向量场 $u$的角度。设 $w$ 为形式为 $w = (w^1, w^2)$的外部流动力。我们假设外力 $w$ 较弱，即假设 $\|w\| < 1$。

在这一设定下，船只的运动由以下常微分方程组支配

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta(t)) + w^1. \\ \dot{y} = \sin(\theta(t)) + w^2. \end{cases}$$

泽尔梅洛导航问题是求出控制量 $\theta$ ， 使船能以最短时间从给定的初始点到达给定的目的地。

正如我们在第2.3 节中提到的（另见 [14, 2]） ， 最短路径是（2.1）中的兰德斯型芬斯勒度量的一条极小测地线。

由（2.1） ， 不难看出，兰德斯度量的定义黎曼度量 $a$ 和 1-形式 $b$ 分别为

$$a_{ij} = \frac{\rho\delta_{ij} + w_i w_j}{\rho^2}, \quad b_i = -\frac{w_i}{\rho},$$

其中 $w_i := \delta_{ij} w^j$ ，且

$$\rho = 1 - \|w\|^2 = 1 - (w^1)^2 - (w^2)^2.$$

因此，在我们的情形下，有

$$b_1 = -\frac{w_1}{\rho} = -\frac{w_1}{1-(w^1)^2-(w^2)^2}, \quad b_2 = -\frac{w_2}{\rho} = -\frac{w_2}{1-(w^1)^2-(w^2)^2}$$

and

$$(a)_{2\times 2} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} \rho + (w_1)^2 & w_1 w_2 \\ w_1 w_2 & \rho + (w_2)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} 1 - (w_2)^2 & w_1 w_2 \\ w_1 w_2 & 1 - (w_1)^2 \end{pmatrix}.$$

现在我们计算测地喷射系数。注意，对我们而言，背景黎曼度量是 $\delta_{ij}$ ，其克里斯托费尔符号为零。因此，黎曼测地喷射系数为

$$\mathcal{G}^i = 0.$$

曲线 $\Gamma : [0,t] \to \mathbb{R}^2$ 若满足测地线方程，则是兰德斯度量 $F$ 的测地线

$$\ddot{\Gamma}^i + 2G^i(\Gamma, \dot{\Gamma}) = \frac{d}{dt}(\ln F(\dot{\Gamma}))\dot{\Gamma}^i,$$

（见 [1]）。 $F$的测地系数与黎曼度量 $a$ 的测地系数之间的关系由（11.3[1]的 $F$ 测地系数与 $g_{_{Euc}}$ 的测地系数之间的关系如下:

$$G^i = \mathcal{G}^i + \zeta^i,$$

其中

$$\zeta^i = \frac{1}{4}\left(\frac{y^i}{F} - w^i\right)\left(2FS_0 - L_{00} - F^2 L_{ww}\right) - \frac{1}{4}F^2\left(S^i + T^i\right) - \frac{1}{2}FC_0^i.$$

现在，我们希望精确计算问题中的这些组成部分。按照 [14] 及其中的记号，我们设

$$L_{ij} = w_{i:j} + w_{j:i}, \;\; S_i = w^s L_{si}, \;\; C_{ij} = w_{i:j} - w_{j:i}, \;\; T_i = w^s C_{si},$$

其中，冒号“:”表示协变微分，因此 $w_{i:j} = w_{i,\ x^j} - w_s\gamma^s_{ij}$ 其中 $\gamma^s_{ij}$ 表示 $g_{Euc}$ 的克里斯托费尔符号。这些张量上的指标通过 $g_{Euc}$的逆矩阵升高。例如，$S^i = \delta^{ij}S_j$。与前面一样，下标 0 表示与 y 缩并，$C^i_0 = \delta^{ij}C_{jk}y^k$。最后，$L_{ww} = w^iw^jL_{ij}$。

$$L_{11} = 2w_{1x_1}, \quad L_{22} = 2w_{2_{x_2}}, \quad L_{12} = L_{21} = w_{1_{x_2}} + w_{2_{x_1}}$$

$$C_{11} = C_{22} = 0, \quad C_{12} = w_{1_{x_2}} - w_{2_{x_1}}, \quad C_{21} = w_{2_{x_1}} - w_{1_{x_2}}$$

$$S_1 = w^1L_{11} + w^2L_{21} = 2w^1w^1{}_{x_1} + w^2(w^1{}_{x_2} + w^2{}_{x_1}).$$

$$S_2 = w^1L_{21} + w^2L_{22} = w^1(w^1{}_{x_2} + w^1{}_{x_1}) + 2w^2w^2{}_{x_2}.$$

$$T_1 = w^1C_{11} + w^2C_{21} = w^2(w^2{}_{x_1} - w^1{}_{x_2}).$$

$$T_2 = w^1C_{12} + w^2C_{22} = w^1(w^1{}_{x_2} - w^2{}_{x_1}).$$

现在，对于切向量 $\mathsf{y} = (y^1, y^2)$，我们有

$$\begin{aligned} S_0 &= S_1y^1 + S_2y^2 \\ &= \left[2w^1w^1{}_{x_1} + w^2(w^1{}_{x_2} + w^2{}_{x_1})\right] y^1 \\ &+ \left[w^1(w^1{}_{x_2} + w^2{}_{x_1}) + 2w^2w^2{}_{x_2}\right] y^2, \end{aligned}$$

对于 $C^i_0$，我们有

$$\begin{aligned} C^1_0 &= \delta^{11}C_{12}y^2 = (w^1{}_{x_2} - w^2{}_{x_1})y^2 \\ C^2_0 &= \delta^{22}C_{21}y^1 = (w^2{}_{x_1} - w^1{}_{x_2})y^1, \end{aligned}$$

以及最长的那些

$$\begin{aligned} L_{00} &= L_{11}y^1y^1 + L_{22}y^2y^2 + 2L_{12}y^1y^2, \\ &= 2w^1{}_{x_1}(y^1)^2 + 2(w^1{}_{x_2} + w^2{}_{x_1})y^1y^2 + 2w^2{}_{x_2}(y^2)^2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{ww} &= w_1^2 L_{11} + 2w_1 w_2 L_{12} + w_2^2 L_{22}, \\
&= 2(w^1)^2 {w^1}_{x_1} + 2w^1 w^2 ({w^1}_{x_2} + {w^2}_{x_1}) + 2(w^2)^2 {w^2}_{x_2}.
\end{aligned}
$$

现在我们可以写成

$$
G^i = \mathcal{G}^i + \zeta^i = \zeta^i,
$$

and

$$
\zeta^i = \frac{1}{4}\left(\frac{y^i}{F} - w^i\right)\left(2FS_0 - L_{00} - F^2 L_{ww}\right) - \frac{1}{4}F^2\left(S^i + T^i\right) - \frac{1}{2}FC_0^i.
$$

注意，由于背景度量是欧几里得度量，下指标与上指标之间没有区别。现在我们需要进行计算并化简。接下来计算所需的最复杂项。

$$
\begin{aligned}
2FS_0 - L_{00} - F^2 L_{ww} =& 2F[2w^1 {w^1}_{x_1} + w^2({w^1}_{x_2} + {w^2}_{x_1})]y^1 \\
&+ 2F[w^1({w^1}_{x_2} + {w^2}_{x_1}) + 2w^2 {w^2}_{x_2}]y^2 \\
&- 2{w^1}_{x_1}(y^1)^2 - 2({w^1}_{x_2} + {w^2}_{x_1})y^1 y^2 - 2{w^2}_{x_2}(y^2)^2 \\
&- F^2(2(w^1)^2 {w^1}_{x_1} + 2w^1 w^2({w^1}_{x_2} + {w^2}_{x_1}) \\
&+ 2(w^2)^2 {w^2}_{x_2}).
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
S_1 + T_1 &= 2w^1 {w^1}_{x_1} + 2w^2 {w^2}_{x_1} \\
&= ((w^1)^2 + (w^2)^2)_{x_1}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 + T_2 &= 2w^1 {w^1}_{x_2} + 2w^2 {w^2}_{x_2} \\
&= ((w^1)^2 + (w^2)^2)_{x_2}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

在这种情况下，所有项都已计算出来。可以看出，涉及的项变得非常繁琐，因此对于一般的外部向量场 $w$，测地线方程会变得非常复杂，从而妨碍数值求解最优控制轨迹。

一种补救方法是将测地线方程（关于 $\Gamma$）线性化，然后尝试求解，但这也很困难，因为正如我们所见，系数非常繁琐。解决办法是通过近似外场 $w$ 来近似最优轨迹。这正是我们希望在下一节开展的工作。

# 4 仿射自然场的测地线方程 s

为了得到更合理且更便于数值求解的方程，我们可以先用其一阶近似替代外场 $w$ （有时我们也称之为自然场）。

事实上，在 $\mathbb{R}^2$ 中足够小的矩形区域上，我们可以对弱外场 $w$ 取一阶近似。由于 $w$ 是弱外场（即 $\|w\| < 1$），只要在必要时缩小定义域，其一阶近似也仍然是弱外场。因此，本节将考虑一个仿射弱外部场，并求出该仿射近似下泽尔梅洛导航问题的最优轨迹。随后将证明，原始最优轨迹可以通过极限过程得到。

假设 $w^1$ 和 $w^2$ 在矩形区域 $A \leq x_1 \leq B$ 和 $C \leq x_2 \leq D$ 上是仿射函数。因此，

$$w^1 = c_1 + a_1 x_1 + b_1 x_2 \quad and \quad w^2 = c_2 + a_2 x_1 + b_2 x_2.$$

现在我们只关注这个区域。

命题 **4.1.** 假设 $w$ 如上所述是一个仿射弱外部场。那么，在泽尔梅洛导航问题中，给出最优控制轨迹（即相应兰德斯度量的测地线）的测地喷射系数为

$$\begin{aligned} G^1(x, \mathbf{y}) = &\left(FP_1^1\right) y^1 + \left(FP_2^1\right) y^2 + \left(L_1^1\right) \left(y^1\right)^2 + \left(L_2^1\right) \left(y^2\right)^2 + (Q_0^1) y^1 y^2 \\ &+ \left(\frac{A_0^1}{F}\right) \left(y^1\right)^3 + \left(\frac{B_0^1}{F}\right) \left(y^1\right)^2 y^2 + \left(\frac{D_0^1}{F}\right) y^1 \left(y^2\right)^2 + F^2 R_0^1. \quad (4.1) \end{aligned}$$

*And*

$$G^2(x,\mathbf{y}) = \left(FP_1^2\right) y^1 + (FP_2^2)y^2 + \left(L_1^2\right)\left(y^1\right)^2 + L_2^2\left(y^2\right)^2 + (Q_0^2)y^1y^2 + \left(\frac{A_0^2}{F}\right)\left(y^1\right)^3 + \left(\frac{B_0^2}{F}\right)\left(y^1\right)^2 y^2 + \left(\frac{D_0^2}{F}\right) y^1\left(y^2\right)^2 + F^2R_0^2, \quad (4.2)$$

其中 $F$ 是式（*2.1*）给出的兰德斯芬斯勒度量， $L$ 的各项以及 $Q$的各项都是关于空间变量的一次多项式 $P$的各项是二次多项式， $R$的各项是三次多项式，且都以空间变量 $x_i$ *(*$i = 1$,2*)* 表示，其余系数均为常数。当然，所有这些都取决于 $c_i$、 $a_i$、 $b_i$、 $i = 1$、2。这些多项式的精确表达式见证明。

证明。 根据公式（3.1）和（3.2），我们得到

$$S_1 + T_1 = 2a_1(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2) + 2a_2(c_2 + a_2x_1 + b_2x_2).$$

$$S_2 + T_2 = 2b_1(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2) + 2b_2(c_2 + a_2x_1 + b_2x_2).$$

因此， $S_i + T_i$、 $i = 1$、2 是仿射的。同理

$$L_{00} = 2a_1(y^1)^2 + 2(a_2 + b_1)y^1y^2 + 2b_2(y^2)^2,$$

这是关于 $y^1$ 和 $y^2$的二次型。还可以计算得出

$$\begin{aligned}
S_0 &= S_1y^1 + S_2y^2 \\
&= \left[2w^1w^1_{x_1} + w^2(w^1_{x_2} + w^2_{x_1})\right] y^1 \\
&\quad + \left[w^1(w^1_{x_2} + w^2_{x_1}) + 2w^2w^2_{x_2}\right] y^2 \\
&= \left[2(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2)a_1 + (c_2 + a_2x_1 + b_2x_2)(a_2 + b_1)\right] y^1 \\
&\quad + \left[(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2)(a_2 + b_1) + 2(c_2 + a_2x_1 + b_2x_2)b_2\right] y^2 \\
&= \left[(2a_1^2 + a_2^2 + a_2b_1)x_1 + (2a_1b_1 + a_2b_2 + b_1b_2)x_2 + (2c_1a_1 + c_2a_2 + c_2b_1)\right] y^1 \\
&\quad + \left[(a_1a_2 + a_1b_1 + 2a_2b_2)x_1 + (b_1a_2 + b_1^2 + 2b_2^2)x_2 + (c_1a_2 + c_1b_1 + 2c_2b_2)\right] y^2
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}L_{ww} &= 2(w^1)^2 w^1_{x_1} + 2w^1 w^2 (w^1_{x_2} + w^2_{x_1}) + 2(w^2)^2 w^2_{x_2} \\ &= 2(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2)^2 a_1 + 2(c_1 + a_1x_1 + b_1x_2)(c_2 + a_2x_1 + b_2x_2)(b_1 + a_2) \\ &\quad + 2(c_2 + a_2x_1 + b_2x_2)^2 b_2,\end{aligned}$$

这是关于 $x_i$、 $i = 1$、2 的二次型的仿射平移。

为使公式更简洁，我们设定（以下所有 $A$、 $M$ 和 $N$ 均为常数）

$$\begin{aligned}A_1 &= a_1,\ B_1 = b_1,\ C_1 = c_1, \\ A_2 &= a_2,\ B_2 = b_2,\ C_2 = c_2, \\ A_3 &= 2(a_1^2 + a_2^2),\ B_3 = 2(a_1b_1 + a_2b_2),\ C_3 = 2(a_1c_1 + a_2c_2), \\ A_4 &= 2(a_1b_1 + a_2b_2),\ B_4 = 2(b_1^2 + b_2^2),\ C_4 = 2(b_1c_1 + b_2c_2), \\ A_5 &= a_2^2 + b_1a_2 + 2a_1^2,\ B_5 = a_2b_2 + b_1b_2 + 2a_1b_1,\ C_5 = 2c_1a_1 + c_2a_2 + c_2b_1, \\ A_6 &= 2a_2b_2 + a_1b_1 + a_1a_2,\ B_6 = 2b_2^2 + b_1^2 + b_1a_2),\ C_6 = c_1a_2 + c_1b_1 + 2c_2b_2, \\ E &= 2a_1,\ J = 2(a_2 + b_1),\ K = 2b_2, \\ M_{11} &= 2(2a_1^2b_1 + a_1b_1b_2 + a_1a_2b_2 + b_1^2a_2 + b_1a_2^2 + 2a_2b_2^2), \\ M_{02} &= 2(b_1^2a_1 + b_1^2b_2 + a_2b_1b_2 + b_2^3), \\ M_{20} &= 2(a_1^3 + a_1b_1a_2 + a_1a_2^2 + a_2^2b_2), \\ M_{00} &= 2(c_1^2a_1 + c_1c_2b_1 + c_1c_2a_2 + b_2c_2^2) \\ M_{10} &= 2(2c_1a_1^2 + c_1a_2b_1 + a_1c_2b_1 + c_1a_2^2 + a_1a_2c_2 + 2c_2a_2b_2) \\ M_{01} &= 2(2c_1a_1b_1 + c_1b_2b_1 + b_1^2c_2 + c_1a_2b_2 + b_1c_2a_2 + 2c_2b_2^2) \\ N &= (b_1 - a_2).\end{aligned}$$

因此我们有

$$w^i = C_i + A_ix_1 + B_ix_2, \quad i = 1, 2,$$

$$S_{(i-2)} + T_{(i-2)} = A_ix_1 + B_ix_2 + C_i, \quad i = 3, 4,$$

$$S_0 = (A_5x_1 + B_5x_2 + C_5)\, y^1 + (A_6x_1 + B_6x_2 + C_6)\, y^2,$$

$$L_{00} = E(y^1)^2 + Jy^1y^2 + K(y^2)^2,$$

$$L_{ww} = \sum_{l+k\leq 2} M_{lk}x_1^l x_2^k,$$

$$C_0^1 = Ny^2,\ \ C_0^2 = -Ny^1.$$

$$\begin{aligned}\zeta^1 =&\frac{1}{4}\left(\frac{y^1}{F} - (C_1 + A_1x_1 + B_1x_2)\right)(2F((A_5x_1 + B_5x_2 + C_5)y^1 + (A_6x_1\\ &+ B_6x_2 + C_6)y^2) - (E(y^1)^2 + Jy^1y^2 + K(y^2)^2) - F^2\left(\sum_{l+k\leq 2} M_{lk}x_1^l x_2^k\right))\\ &- \frac{1}{4}F^2(A_3x_1 + B_3x_2 + C_3) - \frac{1}{2}FNy^2.\end{aligned}$$

我们设

$$\begin{aligned}P_1^1 =& -\frac{1}{2}(A_1A_5x_1^2 + A_1B_5x_1x_2 + B_1A_5x_1x_2 + B_1B_5x_2^2 + (A_5C_1\\ &+ A_1C_5)x_1 + (C_1B_5 + B_1C_5)x_2 + C_1C_5) - \frac{1}{4}\left(\sum_{l+k\leq 2} M_{lk}x_1^l x_2^k\right),\\ L_1^1 =& \frac{1}{2}(A_5x_1 + B_5x_2 + C_5) + \frac{1}{4}(A_1Ex_1 + B_1Ex_2 + C_1E),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_0^1 =& \frac{1}{2}(A_6x_1 + B_6x_2 + C_6) + \frac{1}{4}(A_1Jx_1 + B_1Jx_2 + C_1J),\\ P_2^1 =& -\frac{1}{2}(A_1A_6x_1^2 + (A_1B_6 + B_1A_6)x_1x_2 + B_1B_6x_2^2 + (C_1A_6 + A_1C_6)x_1\\ &+ (C_1B_6 + B_1C_6)x_2 + C_1C_6 + N),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_2^1 &= \frac{1}{4}(A_1Kx_1 + B_1Kx_2 + C_1K),\\
R_0^1 &= \frac{1}{4}(A_1x_1\sum_{l+k\le 2} M_{lk}x_1^l x_2^k + B_1x_2\sum_{l+k\le 2} M_{lk}x_1^l x_2^k + C_1\sum_{l+k\le 2} M_{lk}x_1^l x_2^k\\
&\quad - (A_3x_1 + B_3x_2 + C_3)),\\
A_0^1 &= -\frac{E}{4},\\
B_0^1 &= -\frac{J}{4},\\
D_0^1 &= -\frac{K}{4},
\end{aligned}
$$

其中， $A_0$、 $B_0$、 $D_0$ 为常数， $L_j^i(x_1, x_2)$为一次多项式， $P_j^i(x_1, x_2)$为二次多项式，而 $R_l^k$是关于 $x_1$、 $x_2$的三次多项式。

对于 $\zeta^2$ ，也有类似的结论。结合这些表达式，我们可以写出测地喷射系数，并得到公式4.1和4.2。

□

此时，我们已在命题4.1中计算出测地喷射系数，因此可以得出测地线的精确方程。

假设$(x_1(t)\ x_2(t))$是上述矩形区域中的一条测地线。方程 $x_i$ 如下所示。

定理 1.（扩展形式）设 $w$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中形式为 $w = (w^1, w^2) = (c_1 + a_1x_1 + b_1x_2, c_2 + a_2x_1 + b_2x_2)$ 的弱动态线性向量。以 F 为度量、从初始位置出发前往目的地的单位速测地线由下式给出

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x_1} + 2(\left(FP_1^1\right)\dot{x_1} + \left(FP_2^1\right)\dot{x_2} + \left(L_1^1\right)(\dot{x_1})^2 + (L_2^1)(\dot{x_2})^2 + (C_0^1)\dot{x_1}\dot{x_2} \qquad (4.3)\\
&+ \left(\frac{A_0^1}{F}\right)(\dot{x_1})^3 + \left(\frac{B_0^1}{F}\right)(\dot{x_1})^2\dot{x_2} + \left(\frac{D_0^1}{F}\right)\dot{x_1}(\dot{x_2})^2 + F^2R_0^1) = \frac{\dot{F}}{F}\dot{x}_1.
\end{aligned}
$$

*And*

$$\ddot{x_2} + 2(\left(FP_1^2\right)\dot{x_1} + (FP_2^2)\dot{x_2} + \left(L_1^2\right)(\dot{x_1})^2 + L_2^2(\dot{x_2})^2 + (C_0^2)\dot{x_1}\dot{x_2} \qquad (4.4)$$
$$+ \left(\frac{A_0^2}{F}\right)(\dot{x_1})^3 + \left(\frac{B_0^2}{F}\right)(\dot{x_1})^2\dot{x_2} + \left(\frac{D_0^2}{F}\right)\dot{x_1}(\dot{x_2})^2 + F^2R_0^2.) = \frac{\dot{F}}{F}\dot{x_2}.$$

证明。利用命题中的测地喷射系数 4.1 可得

$$\ddot{x_1} + 2(\left(FP_1^1\right)y^1 + \left(FP_2^1\right)y^2 + \left(L_1^1\right)\left(y^1\right)^2 + \left(L_2^1\right)\left(y^2\right)^2 + (Q_0^1)y^1y^2$$
$$+ \left(\frac{A_0^1}{F}\right)\left(y^1\right)^3 + \left(\frac{B_0^1}{F}\right)\left(y^1\right)^2y^2 + \left(\frac{D_0^1}{F}\right)y^1\left(y^2\right)^2 + F^2R_0^1) = \frac{\dot{F}}{F}\dot{x_1},$$

请注意，按照我们的记号， $\dot{x_i} = y^i$ 因此得到公式（4.3），类似地，得到公式（4.4）。 □

这里，我们得到两个非线性常微分方程，它们比一般外场 $w$ 下的测地线方程更简单。

## 4.1 关于应用的几点说明

这里，我们仅强调所得方程在计算最优轨迹方面的重要性。由于这是一项理论研究，我们没有给出所得到方程的数值解。数值方面的考量将在我们后续的工作中展开。

需要指出的是，由于系数更简单，用数值方法求解这些方程会比求解一般情形下的测地线方程更容易；此外，对这些方程进行数值求解，也比求解最优控制问题更简单（后者与一般情形下求解测地线问题的复杂度相同）。

当假设这些方程的定义域非常小时，可以进一步简化现有方程，假设 $F$ 仅取决于$y^i$s。这是合理的，因为芬斯勒流形上一点的切空间是闵可夫斯基空间，其中范数不依赖于基点。

# 参考文献

[1] D. Bao、S.S. Chern 和 Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何导论》。数学研究生教材，第200卷，施普林格，2000年。[2] D. Bao、C. Robles、Z. Shen，《黎曼流形上的泽尔梅洛导航问题》，《微分几何杂志》6，2004年，377–435。[3] E. Bakolas、P. Tsiotras，《泽尔梅洛-马尔可夫-杜宾斯问题的时间最优综合：恒定风场情形》，美国控制会议，伍德拉夫机械工程学院，佐治亚理工学院，亚特兰大，佐治亚州，美国，2010年6月30日至7月2日，第6163–6168页。[4]B. Bidabad、M. Rafie-Rad，《黎曼流形上的纯追踪导航》，《非线性分析：现实世界应用》10，2010年，1265–1269。[5] A. Enes、W. Book，《泽尔梅洛导航问题的融合式共享控制》，载于：美国控制会议，伍德拉夫机械工程学院，佐治亚理工学院，亚特兰大，佐治亚州，美国，2010年6月30日至7月2日，第4307–4312页[6] Z. Fathi、B. Bidabad，《存在障碍物时泽尔梅洛导航问题的时间最优解》，已提交。[7] Z. Fathi、B. Bidabad 和 M. Najafpour，《存在移动障碍物时杜宾斯飞机最优控制的精确罚函数法》，《优化快报》，2021年。[8] C. Jiang、Q. Lin、C. Yu、K.L. Teo 和 G.R. Duan，《具有连续不等式约束的自由终端时间最优控制问题的精确罚函数法》，《优化理论与应用杂志》154，2012年，30–53。

[9] M. R. Jardin, A. E. Bryson, 《强风条件下最短时间路径的计算方法》, 《制导、控制与动力学杂志》, 第 35 卷, 第 1 期, 2010年, 第 165–171 页。[10] B. Li, K.L. Teo, C.C. Lim 和 G.R. Duan, 《非线性最优约束控制问题的最优 PID 控制器设计》, 《离散与连续动力系统 B 辑》, 16（4）, 2011年, 第 1101–1117 页。[11] B. Li, K.L. Teo, G.H. Zhao 和 G.R. Duan, 《一类最小最大最优控制问题及其应用的高效计算方法》, 《澳大利亚与新西兰工业与应用数学杂志》, 51（2）, 2009年, 第 162–17 页。[12]B. Li, Ch. Xu, K.L. Teo, J. Chu, 《存在移动和固定障碍物时 Zermelo 导航问题的最短时间解》, 《应用数学与计算》, 爱思唯尔, 2013年, 第 866–875 页。[13] A. Marchidan, E. Bakolas, 《具有真实风场的球面最短时间路径规划数值方法》, 《制导、控制与动力学杂志》, 第 39 卷, 第 1 期, 2016年, 第 188–193 页。[14] C. Robles, 《常曲率兰德斯空间中的测地线》, 《美国数学会汇刊》, 2007年, 第 1633–1651 页。[15] Z. Shen, 《具有 $K = 0$ 和 $S = 0$ 的芬斯勒度量》, 《加拿大数学杂志》, 55（2003）, 第 112–132 页。

阿米尔卡比尔理工大学数学与计算机科学学院（德黑兰理工学院）, 伊朗德黑兰哈菲兹大道424号, 邮编15914。bidabad@aut.ac.ir;
z.fathi@aut.ac.ir

图卢兹数学研究所′, ′保罗·萨巴蒂埃大学, 法国图卢兹, 邮编F-31062。
behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr