arXiv:2304.00480v1 [math.DG] 2 Apr 2023

常曲率芬斯勒流形上的施瓦茨导数

B. BIDABAD*、F. SEDIGHI

摘要

拉格朗日引入了施瓦茨导数的概念，而 Thurston 发现了它的神秘性质：它在黎曼流形上发挥着类似曲率的作用。在此，我们继续研究芬斯勒流形上施瓦茨导数的发展。首先，我们得到莫比乌斯方程的一个可积条件。随后，我们得到如下刚性结果：设 (M, F) 是一个连通的、具有正常里奇曲率的完备芬斯勒流形。若它存在非平凡的莫比乌斯映射，则 M 同胚于 n-球面。最后，我们再次确认了完备芬斯勒流形上的 Thurston 猜想，并表明射影参数的施瓦茨导数在这些流形上发挥着与里奇曲率相同的作用，并可刻画一种邦内-迈耶型定理。

美国数学学会主题分类 2010年：53C60，58B20。
关键词：芬斯勒；施瓦茨导数；M¨obius；常曲率；共形；完全可积。

1 引言

从历史上看，施瓦茨导数的定义及其基本性质最早由拉格朗日于1781年发现。单射实函数g 在 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨导数定义为

$$S(g) = \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2}(\frac{g''}{g'})^2,$$

*通讯作者，bidabad@aut.ac.ir

其中， g'、g''、g'''分别是 g 关于 $x \in \mathbb{R}$的一阶、二阶和三阶导数。复平面上有一类特殊的共形变换，记作 $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$，其中 $ad - bc \neq 0$称为M¨比乌斯变换。它们的特征是 T的施瓦茨导数 $S(T)$为零，即 $S(T) = 0$。

Carne [9], Os- good 和 Stowe [12], 等人将施瓦茨导数推广到了黎曼流形上。Thurston 发现，映入黎曼球面的共形映射若其施瓦茨导数一致地接近于零，则必为 M¨obius 变换 [17]。

最近，我们讨论了施瓦茨导数在芬斯勒几何中的若干应用，这些应用印证了 Thurston 关于该导数神秘作用的观点。例如，本文作者研究了射影参数 p的施瓦茨导数，并对一些 Randers 流形进行了分类。

定理 A. *[5]* 设 (M, F) 是一个紧致无边界的爱因斯坦 Randers 流形，其里奇标量为常数，且具有射影参数 p。
•若 $S(p) = 0$，则 (M, F) 是 Berwald 型。
•若 $S(p) < 0$，则 (M, F) 是黎曼型。

定理 A 在一个特例中印证了 Thurston 的猜想。事实上，它表明，射影参数 p的施瓦茨导数 $S(p)$ 在爱因斯坦 Randers 流形上发挥着与里奇曲率类似的作用，见 [5, 命题 A]。

作为另一项应用，我们为 Z. Shen 在《数学年刊》 [15] 中给出的一个已知结果提供了简短证明： [14], 在该文中，我们证明了两个具有常负里奇标量的射影相关完备爱因斯坦芬斯勒空间是位似的。我们还利用施瓦茨导数得到了以下结果；

定理 B. *[7]* 每个具有常负里奇曲率（特别是具有常负旗曲率）的完备 Randers 度量都是黎曼型的。

关于施瓦茨导数在芬斯勒几何中的更多性质，参见例如[5, 6, 7, 14], 等。利用关于 [13] 和 [16] 的一些结果，我们发现莫比乌斯映射保持爱因斯坦芬斯勒空间和具有数量曲率的芬斯勒空间不变。

本文讨论芬斯勒流形上的施瓦茨导数，并得到以下结果。设张量场 Z 的分量为

$$Z^h_{ijk} := R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(g_{ij}R^h_k - g_{ik}R^h_j). \tag{1}$$

定理 1.1. 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形。共形因子 φ 的莫比乌斯偏微分方程组完全可积，当且仅当张量 Z 消失。

定理 1.1 得出以下结果。

定理1.2. 设 (M,F) 是常里奇曲率为 c^2 的完备连通芬斯勒流形。若 M 存在非平凡的莫比乌斯映射，则它与 n 维球面同胚。

下述定理再次证实了 Thurston 猜想，并表明，在完备芬斯勒流形上，射影参数的施瓦茨导数与里奇曲率发挥着相同的作用。

定理 1.3. 设 (M,F) 是具有常里奇标量的连通正向完备芬斯勒流形。若射影参数 p 的施瓦茨导数 $S(p)$ 满足 $S(p) \geqslant 2F^2\lambda$，对 $\lambda > 0$ 均成立，则 M 是紧的，且有以下结论：

(i) 每条长度至少为 $\pi/\sqrt{\lambda}$ 的测地线都包含共轭点。(ii) M 的直径至多为 $\pi/\sqrt{\lambda}$。(iii) 基本群 $\pi(M,x)$ 是有限群。

2 预备知识

2.1 符号与基本定义

设 (M,F) 是一个 n 维连通光滑芬斯勒流形。记 TM 为切丛，π：$TM_0 \to M$ 为非零切向量的纤维丛。设 (x^i,U) 是 M 上的一个局部坐标系，(x^i,y^i) 是 TM 的一个元素。每个芬斯勒结构 F 都诱导出一个喷射向量场 $G := y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$，定义在 TM 上，其中 $G^i(x,y) = \frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k - [F^2]_{x^l}\}$。向量场 G 在 TM 上全局定义，其意义在于它的分量在坐标变换后保持不变。用 TTM_0 表示 TM_0 的切丛，用 π^*TM 表示 π 的拉回丛。

考虑典范线性映射 ϱ: $TTM_0 \to \pi^*TM$，其中 $\varrho = \pi_*$ 和 ϱ $X \in TTM_0$。我们将其中 TM 记为 π $\in TM_0$ 等价地，$V_zTM = ker\pi_*$ 和 $VTM := \bigcup_{z\in TM_0} V_zTM$ 垂直向量丛。存在一个水平分布 HTM，使得我们有惠特尼和 $TTM_0 = HTM \oplus VTM$。这一分解允许以唯一的方式将向量场 $X \in TTM_0$ 写成水平与垂直形式 $X = HX + VX$。

可以观察到，由 $\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - G_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}$ 定义的这一对 $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ 中，$G_i^j := \frac{\partial G^j}{\partial y^i}$ 构成了 TTM 的水平与垂直标架。水平与垂直对偶标架由这一对 $\{dx^i, \delta y^i\}$ 给出。可以证明，$2G^i = \gamma^i_{jk}y^jy^k$，其中 $\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ih}(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h})$，是形式上的克里斯托费尔符号。嘉当联络的 1-形式记为

由 $\omega^i_j := \Gamma^i_{jk}dx^k + C^i_{jk}\delta y^k$ 表示，其中

$$\Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}(\delta_j g_{lk} + \delta_k g_{jl} - \delta_l g_{jk}), \quad C^i_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}\dot{\partial}_l g_{jk}, \tag{2}$$

以及 $\delta_i := \frac{\delta}{\delta x^i}$, $\dot{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial y^i}$. 在局部坐标系中，任意 (1, 1)-张量场在 π^*TM 上的分量为 T^j_i，其水平和垂直嘉当协变导数在此记为

$$^c\nabla_k T^j_i = \delta_k T^j_i - T^j_r\Gamma^r_{ik} + T^r_i\Gamma^j_{rk}, \qquad ^c\dot{\nabla}_k T^j_i = \dot{\partial}_k T^j_i - T^j_r C^r_{ik} + T^r_i C^j_{rk}.$$

$^*i$在此用 R_{jkm} 表示嘉当水平水平曲率张量的分量。它们与 Chern 水平水平曲率张量的分量 R^i_{jkm} 之间满足以下关系 [11]。

$$\overset{*}{R}{}^i_{jkm} = R^i_{jkm} + R^s_{km}C^i_{sj}, \tag{3}$$

其中，$R^i_{km} := y^j R^i_{jkm} = \frac{\delta G^i_k}{\delta x^m} - \frac{\delta G^i_m}{\delta x^k}$和 $R^i_{jkm} = \frac{\delta\Gamma^i_{jm}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^m} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{jk}$。对于非零的 $y \in T_xM$，称水平水平曲率的迹为黎曼曲率，其表达式为$R_y(u) = R^i_k u^k \frac{\partial}{\partial x^i}$，其中 $R^i_k := g^{mj}R^i_{mjk}$。将式 (3) 中嘉当联络的水平水平曲率张量分量 $\overset{*}{R}{}^i_{jkm}$ 乘以 y^j，得到 $\overset{*}{R}{}^i_{km} = R^i_{km} + 0$。再次用 y^k 对此式缩并，得到

$$\overset{*}{R}{}^i_m = R^i_m. \tag{4}$$

里奇标量定义为 $Ric := R^i_i$，见 [4, p.331]。这里，我们采用 Akbar-Zadeh 对里奇张量的定义如下 $Ric_{ik} := 1/2(F^2Ric)_{y^iy^k}$，见 [1]。设 $l^i := \frac{y^i}{F}$ 为一个 0 次齐次单位向量场，由齐次性可得 $Ric_{ij}l^il^j = Ric$。若芬斯勒结构 F 的每条测地线都能从开区间 (a, b) 延拓为定义在 (a, ∞)（分别为 $(-\infty, b)$）上的测地线，则称其正向（分别为反向）测地完备。若芬斯勒结构正向和反向都完备，则称其为“完备”。

Let $\tilde{F}$ 是 M 上的另一个芬斯勒结构。若 (M, F) 的任意测地线都与 (M, F) 的一条 $\tilde{}$ $\tilde{}$测地线作为点集重合，反之亦然，则称度量$\tilde{}$的变换 $F \to F$为射影变换，并称 F 与 F射影等价。在射影变换的定义中，我们讨论正向测地线，且“测地线”一词指正向$\tilde{}$测地线。当且仅当存在满足 $\tilde{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + p(x, y)y^i$ 的 1 次齐次标量场 $p(x, y)$ 时，芬斯勒空间 (M, F) 与另一个芬斯勒空间 (M, F) 射影等价。标量场 $p(x, y)$ 称为所讨论的射影变换的射影因子。

$^-$设 F 和 F 是 n 维流形 M上的两个芬斯勒结构。若且唯若存在一个定义在 F 上的标量函数 $^-(F)$，称为共形因子，使得 $M(^-, f)M(F, \to)$，则微分同胚 $f: (M, F) \to (M, F)$ 称为共形变换，或简称度量变换

。假设 $\bar{F}(x,y) = e^{\varphi(x)}F(x,y)$，等价地有 $\bar{g}_{ij}(x,y) = e^{2\varphi(x)}g_{ij}(x,y)$ 和 $\bar{g}^{ij}(x,y) = e^{-2\varphi(x)}g^{ij}(x,y)$，其中 g^{ij}是由 $g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j$定义的逆矩阵。若微分同胚 f 的 φ 为常数，则称其为位似；若它在 M的每一点都使 φ 为零，则称其为等距。若满足以下条件 $\varphi_h C^h_{ij} = 0$，则称共形变换为 C-共形，其中 $\varphi_h = \frac{\partial\varphi}{\partial x^h}$。

¯本文中，(M,F)中的对象均加上上横线标记，并且我们将¯始终假设，除非明确作出相反假设，(M,F)和(M,F)上的线元(x,y)和$(\bar{x},\bar{y})$满足 $x^i = x^i$ 和 $y^i = y^i$ 。

设(x,y)是TM中的一个元素，且 $P(y,X) \subset T_xM$是 T_xM中由向量y和 X张成的一个二维平面。在点 $x \in M$ 处，相对于平面 $P(y,X)$的旗曲率 $\kappa(x,y,X)$定义为

$$\kappa(x,y,X) := \frac{g_(R(X,y)y,X)}{g(X,X)g(y,y) - g(X,y)^2},$$

其中， $R(X,y)y$是 hh-曲率张量。若 κ与 X无关，则称(M,F)为标量曲率空间。若 κ 不依赖于 x 或 y，则称其具有常曲率，参见[4]。光滑的 n维流形 M 上的芬斯勒结构 F 称为 Randers 度量，如果 $F = \alpha + \beta$，其中 $\alpha(x,y) := \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$是一个黎曼度量，而 $\beta(x,y) := b_i(x)y^i$是一个 1-形式。关于芬斯勒几何中 Randers 度量的详细研究，可参阅著作 [10]。

固定一个切向量场 $T \in T_pM$ ，并考虑常速测地线 $\sigma(t) = exp_p(tT)$， $0 \leqslant t \leqslant r$ ，它从 $p = \sigma(0)$ 出发，并在 $q = \sigma(r)$ 终止。若不致混淆，我们也用 T 表示其速度场。令 D_T 表示沿 σ、以 T 为参考向量的协变微分。回忆一下，沿 σ 的向量场 J 称为雅可比场，如果它满足方程 $D_TD_TJ + R(J,T)T = 0.$。如果存在一个沿 σ 的非零雅可比场 J ，它在两点 p 和 q 处都消失，我们就称点 $q \in M$ 沿测地线 σ 与点 $p \in M$ 共轭。参见 [4, 第 173,174] 页。固定点 $x \in M$ 处的基本群是一个自然且富有信息的群，由底层拓扑空间中环路的同伦等价类组成。它包含有关该空间拓扑的基本信息，例如形状或孔洞数量。我们用 $\pi(M,x)$ 表示固定点 $x \in M$ 处的基本群。

2.2 施瓦茨张量与莫比乌斯映射

设 $h: M \to \mathbb{R}$ 是在一个 n 维（$n \geqslant 2$）芬斯勒流形（M,F）上的光滑实函数。在点 p 处，我们将 h 的向量场梯度记为 $\nabla h(p) = grad\, h(p) \in \pi^*TM$，它对所有 $v \in T_pM$ 都有定义，其定义为 $g_{grad\, h(p)}(v, grad\, h(p)) = dh_p(v)$，其中 $dh: =$

— $\frac{\partial h}{\partial x^i}dx^i$是 h 的微分。用局部坐标系表示，我们有 $grad\,h$: $=$
$h^i\ x\ \frac{\partial}{\partial x^i} \in \pi^*TM$ $h^i\ x\ = g^{ij}\ x\ grad\,h\ x\ \frac{\partial h}{\partial x^j}$ ( )，其中 ( ) (，( ))。

对于每个向量场 $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \pi^*TM$， Y 的水平散度和垂直散度是定义在 M 上的标量函数，分别由其协变导数的缩并给出： $div^hY := \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij}Y^j$和 $div^vY := C^i_{ij}Y^j$，其中采用局部坐标系。

对于 M上的实光滑函数 h ，我们在 Cartan 情形下定义了 h 的赫essian，如下所示，参见 [5, 第 883] 页。

$$Hess(h)(\hat{X}, Y) = (\hat{X}Y)h - ({}^c\nabla_{\hat{X}}Y)h.$$

在局部坐标系中，它写作

$$\big(Hess(h)\big)_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma^k_{ij} + C^k_{ij})\frac{\partial h}{\partial x^k},$$

其中，克里斯托费尔符号 Γ^h_{ij} 和 Cartan 挠率 C^h_{ij} 由式（2）给出。按照惯例，在芬斯勒空间中，定义在 M 上的实函数 h的拉普拉斯算子为赫essian$\Delta h = g^{ij}\{\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma^k_{ij} + C^k_{ij})\ \frac{\partial h}{\partial x^k}\}$的迹。

设 $f: (M, F) \to (M, F)$ 是一个共形变换，使得 $F(x, y) = e^{\varphi(x)}F(x, y)$，其中 φ 是定义在 M 上的光滑函数。共形映射 $f: (M, F) \to (M, F)$（其中 $F = e^{\varphi}F$）在点 $x \in M$ 处的施瓦茨导数是一个线性映射

$$S_F(f) : \Gamma(TM_0) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM),$$
$$S_F(f)\hat{X} = {}^c\nabla_{\hat{X}}(\nabla\varphi) - g(\nabla\varphi, \varrho\hat{X})\nabla\varphi - \frac{1}{n}(\Delta\varphi - \|\nabla\varphi\|^2)\varrho\hat{X},$$

ˆ ˆ 其中 $X \in \Gamma(TM_0)$ 且 $\varrho X = X$。更多详情请参见 [5]。

我们称方程 $S_F(f)$ $\hat{X} = 0$ 或等价地

$${}^c\nabla_{\hat{X}}(Y) - g(Y, \varrho\hat{X})Y - \frac{1}{n}(divY - \|Y\|^2)\varrho\hat{X} = 0,$$

在 $x \in M$ 处完全可积，当且仅当对每个 $Y \in T_xM$，都存在一个局部解 $\varphi(x)$，其中 $grad\ \varphi(x) = Y$。

光滑函数 φ： $M \to \mathbb{R}$ 在 (M, F) 上的施瓦茨张量 $B_F(\varphi)$ 是一个对称无迹的 (0,2) 阶张量场，定义为

$$B_F(\varphi)(\hat{X}, Y) = \mathrm{Hess}(\varphi)(\hat{X}, Y) - (d\varphi \otimes d\varphi)(\varrho\hat{X}, Y) - \frac{1}{n}(\Delta\varphi - \|grad\varphi\|^2)g(\varrho\hat{X}, Y), \quad (5)$$

对所有的ˆ $X \in \Gamma(TM_0)$和 $Y \in \Gamma(\pi^*TM)$，其中 $\|grad\varphi\|^2 = \varphi^i\varphi_i$、 $\varphi^i = g^{ij}\varphi_j$和 g是由芬斯勒结构 F导出的 π^*TM上的内积，参见 [5, 第885]页。

¯共形微分同胚 f: $(M, F) \to (M, F)$称为莫比乌斯映射，当施瓦茨导数 $S_{_F}(f)$为零时。借助 $S_F(f) = B_F(\varphi)$，可以证明 f是莫比乌斯映射，当且仅当施瓦茨张量 $B_F(\varphi)$为零。在局部坐标系中，式（5）变为

$$\big(B_F(\varphi)\big)_{ij} = {}^c\nabla_i\varphi_j - \varphi_i\varphi_j - \frac{1}{n}(\Delta\varphi - \|grad\varphi\|^2)g_{ij}, \tag{6}$$

其中， ${}^c\nabla_i\varphi_j$ ： $= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j} - (\Gamma^h_{ij} + C^h_{ij})\varphi_h$ 是嘉当水平协变导数的分量。

3 具有常曲率的芬斯勒流形

在此，我们为 M¨obius 偏微分方程组（$B(\varphi)$）$_{ij} = 0$找到了一个可积条件。

定理 1.1 的证明。设 (M, F) 是一个允许非平凡 M¨obius 映射的芬斯勒流形。根据定义，施瓦茨导数为零，而 (6) 导出

$${}^c\nabla_j\varphi_i - \varphi_i\varphi_j = \Phi g_{ij},$$

其中，我们令 $\Phi = \frac{1}{n}(\Delta\varphi - ||grad\varphi||^2)$。对上一个方程的两边应用嘉当水平导数，并再次代入 ${}^c\nabla_j\varphi_i$ yields

$${}^c\nabla_k{}^c\nabla_j\varphi_i = 2\varphi_i\varphi_j\varphi_k + \Phi(g_{ik}\varphi_j + g_{jk}\varphi_i) + \Phi_k g_{ij}, \tag{7}$$

其中， Φ_k ： $= {}^c\nabla_k\Phi = \delta\Phi/\delta x^k$。考虑以下众所周知的里奇恒等式：参见 [2,p.121],

$${}^c\nabla_k{}^c\nabla_j\varphi_i - {}^c\nabla_j{}^c\nabla_k\varphi_i = -\overset{*}{R}{}^h_{ijk}\varphi_h - R^h_{jk}\varphi_{h;i}, \tag{8}$$

¨其中， $\varphi_{h;i} = \partial_i\varphi_h - C^s_{hi}\varphi_s = -C^s_{hi}\varphi_s$。将（7）代入里奇恒等式，得到

$$g_{ij}(\Phi_k - \varphi_k\Phi) - g_{ik}(\Phi_j - \varphi_j\Phi) = -\overset{*}{R}{}^h_{ijk}\varphi_h - R^h_{jk}\varphi_{h;i}. \tag{9}$$

将 $\varphi_{h;i}$ 和（3）代入（9），得到

$$g_{ij}(\Phi_k - \varphi_k\Phi) - g_{ik}(\Phi_j - \varphi_j\Phi) = -R^h_{ijk}\varphi_h. \tag{10}$$

缩并 由 g^{ij} 可得 $(n-1)(\Phi_k - \varphi_k\Phi) = -R^h{}_k\varphi_h$。代入（10）式得到 s

$$\frac{1}{n-1}(g_{ij}R^h_k - g_{ik}R^h_j)\varphi_h = R^h_{ijk}\varphi_h. \tag{11}$$

利用上一个方程，我们考虑一个张量场 Z，其分量 Z^h_{ijk} 由方程（1）定义，其中，R^h_{ijk} 是 Chern联络的 hh-曲率。方程（11）给出 $Z^h_{ijk}\varphi_h = 0$。M¨obius 偏微分方程 ${}^c\nabla_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j + \Phi g_{ij}$ 完全可积，当且仅当

$$ {}^c\nabla_k {}^c\nabla_j\varphi_i - {}^c\nabla_j {}^c\nabla_k\varphi_i = 0. $$

将（3）代入里奇恒等式（8），得到

$$ {}^c\nabla_k {}^c\nabla_j\varphi_i - {}^c\nabla_j {}^c\nabla_k\varphi_i = -R^h_{ijk}\varphi_h. \tag{12} $$

由最后两个方程可得 $R^h_{ijk}\varphi_h = 0$。根据完全可积的定义，这个关系对任意初始数据 $\varphi_h(x)$ 都成立，因此 $R^h_{ijk} = 0$。所以 $R^h_j = 0$，且$Z^h_{ijk} = 0$。

反过来，设 $Z = 0$，根据定义有

$$ R^h_{ijk} = \frac{1}{n-1}(g_{ij}R^h_k - g_{ik}R^h_j). \tag{13} $$

将（13）两边与 y^i 收缩，并利用 $R^i_{km} := y^j R^i_{jkm}$，可得 s

$$ R^h_{jk} = \frac{1}{n-1}(y_j R^h_k - y_k R^h_j). $$

再次与 y^k 收缩，并利用 $R^h_k y^k = 0$（参见 $[4, \text{第 } 55,57], \text{页}$），得到

$$ R^h_j = \frac{-F^2 R^h_j}{n-1}, $$

因此 $R^h_j = 0$。由（13）可得$R^h_{ijk} = 0$，而（12）推出 ${}^c\nabla_k {}^c\nabla_j\varphi_i - {}^c\nabla_j {}^c\nabla_k\varphi_i = 0$。因此，M¨öbius 偏微分方程（$B(\varphi)$）$_{ij} = 0$ 是完全可积的，定理 1.1 的证明也就完成了。□

推论 3.1. 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形。若其具有常曲率，则Z 张量为零。

证明. 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形，Cartan hh-曲率张量的分量 ${}^*R_{ijkl}$ 由下式给出

$$ \overset{*}{R}_{ijkl} = \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \kappa F^2 Q_{ijkl} + 1/2\nabla_0\nabla_0 Q_{ijkl}, $$

其中，Q_{ijkl} 是嘉当联络的 vv-曲率分量。若旗曲率κ 为常数，则可见 $Q_{ijkl} = 0$，参见 $[1, \text{第 } 26]$ 页，并且我们有

$$ \overset{*}{R}{}^h_{ijk} = \kappa(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j). \tag{14} $$

将上一个方程两边与 g^{ij}缩并，并利用（4），得到

$$\overset{*}{R}{}^h_k = R^h_k = \kappa(n-1)\delta^h_k. \tag{15}$$

方程（14）对于 Chern（Rund）联络的 hh-曲率张量成立， [2,p.109]。将（14）和（15）这最后两个方程代入（1），得到

$$Z^h_{ijk} = \kappa(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j) - \kappa(g_{ij}\delta^h_k - g_{ik}\delta^h_j) = 0,$$

由此即得该推论的证明。 □

4 施瓦茨导数可积条件的应用

通过研究可积条件，得到以下结果。

定理1.2的证明。设 (M, F) 是一个具有常里奇曲率 c^2 的连通完备 Finsler n-流形，并且存在一个非平凡的 M¨obius 映射。施瓦茨导数的可积条件 $S_F(f)X = 0$ 与（6）给出

$$^c\nabla_i\varphi_j - \varphi_i\varphi_j = \Phi g_{ij}, \tag{16}$$

其中记 $\Phi = 1/n(\Delta\varphi - ||grad\varphi||^2)$。因此，$(M, F)$ 存在一个非平凡的 M¨obius 映射，它是一个非平凡的度量共形变换 $\bar{g} = e^{2\varphi}g$，满足 M¨obius 方程（16）。在方程（16）中作变量替换 $\rho = e^{-\varphi}$ 后，简单计算可得 $\varphi_l = -\rho_l/\rho$，其中 ρ 是 M 和 $\rho_l = \partial\rho/\partial x^l$ 上的正实函数。因此，我们有

$$^c\nabla_k\varphi_l = -\frac{\rho\,{}^c\nabla_k\rho_l - \rho_k\rho_l}{\rho^2}.$$

将这两个项代入莫比乌斯方程（16），得到,

$$^c\nabla_k\rho_l = \phi g_{lk}, \tag{17}$$

其中 $\phi = -\rho\Phi$。因此，莫比乌斯方程 $B_F(\varphi) = 0$ 的消失等价于方程（16）和（17）。代入 $\phi = -c^2\rho$ 后，方程（17）变为 $^c\nabla_j\rho_k + c^2\rho g_{jk} = 0$。 [11] 中的以下定理完成了定理1.2的证明。 □

定理C。 *[11]* 设 (M, g) 是一个具有常里奇曲率 c^2 的完备连通芬斯勒流形。若 M 存在一个满足常微分方程的非恒定函数 ρ；

$$^c\nabla_i{}^c\nabla_j\rho + c^2\rho g_{ij} = 0,$$

那么， M 与n维球面同胚。

4.1 数量曲率芬斯勒流形的一个可积条件

本文研究与具有数量曲率的芬斯勒流形相关的施瓦茨张量 $B_F(\varphi)$ 的一个可积条件。

定理 4.1. Möbius 偏微分方程 $B_F(\varphi) = 0$ 当且仅当 $Z^h_{jk} = 0$ 时完全可积，其中

$$Z^h_{jk} = R^h_{jk} - F^{-2}(y_j R^h_k - y_k R^h_j). \tag{18}$$

证明. 考虑偏微分方程 $B_{ij}(\varphi) = 0$，它等价于方程 (16)。对 ${}^c\nabla_i\varphi_j - \varphi_i\varphi_j = \Phi g_{ij}$ 取水平 Cartan 协变导数，并结合里奇恒等式 (8) 以及与定理 1.1 证明中类似的步骤，可得 (10)。用 y^i 对 (10) 缩并，得到

$$y_j(\Phi_k - \varphi_k\Phi) - y_k(\Phi_j - \varphi_j\Phi) = -R^h_{jk}\varphi_h, \tag{19}$$

其中，$y_i = g_{ij}y^j$。再次用 y^j 对 (19) 缩并，得

$$(\Phi_k - \varphi_k\Phi) = F^{-2}(y_k(\Phi_0 - \varphi_0\Phi) - R^h{}_k\varphi_h), \tag{20}$$

w这里 $\Phi_0 = \Phi_j y^j$、$\varphi_0 = \varphi_j y^j$ 和 $R^i_k = R^i_{0k}$。将 (20) 代入 (19)，得

$$(R^h_{jk} - F^{-2}(y_j R^h_k - y_k R^h_j))\varphi_h = 0.$$

由 (18) 可得 $Z^h_{jk}\varphi_h = 0$。若偏微分方程 $B_{ij}(\varphi) = 0$ 完全可积，则关系 $Z^h_{jk}\varphi_h = 0$ 对任意初始数据 φ_h 均成立，因此 $Z^h_{jk} = 0$。反之，设 $Z^h_{jk} = 0$，由方程 (18) 得

$$R^h_{jk} = F^{-2}(y_j R^h_k - y_k R^h_j).$$

将最后一个方程的两边与 y^k 缩并，并利用可得 $y^k R^h_k = 0$ $R^h_j = -F^2 R^h_j$，因此 $R^h_j = 0$。由[13]得 $R^h_{ijk} = 0$，而[12]导出莫比乌斯偏微分方程 $B_F(\varphi) = 0$ 完全可积，证明得证。

□

现在我们可以证明以下推论。

推论4.1. 设(M, F)是一个标量曲率的连通完备芬斯勒n维流形。若(M, F)存在一个莫比乌斯映射，则它共形于以下空间之一；

(a) 实数直线的一个开区间 I 与一个 $(n-1)$ 维完备芬斯勒流形 N 的直积 $I \times N$。(b) 一个 n 维欧几里得空间；(c) 欧几里得空间中的一个 n 维单位球面。

证明。设 (M, F) 是一个具有非位似共形变换的数量曲率芬斯勒流形，也就是说，存在一个定义在 M 上的非恒定标量函数 φ ，满足$\bar{g_{ij}} = e^{\varphi(x)} g_{ij}$。芬斯勒流形是各向同性的或具有数量曲率，当且仅当我们有

$$\overset{*}{R}{}^h_j = \kappa F^2(\delta^h_j - l^h l_j), \tag{21}$$

wher e， κ 是旗曲率，且 $l^i = \frac{y^i}{F}$、 $l_i = \frac{y_i}{F}$，或者等价地，当且仅当

$$\overset{*}{R}{}^h_{jk} = \kappa F(l_k \delta^h_j - l_j \delta^h_k), \tag{22}$$

其中 $R^h_j = R^h_{jk} y^k$ 和 $R^h_{jk} = R^h_{jkm} y^m$，参见 [13, 第 133 页-147]。回想一下，(4) 声称 $\overset{*}{R}{}^h_j = R^h_j$和 $\overset{*}{R}{}^h_{jk} = R^h_{jk}$。事实上，利用 (22) 可得

$$R^h_j = R^h_{jk} y^k = y^k \kappa F(l_k \delta^h_j - l_j \delta^h_k) = \kappa F(F\delta^h_j - y^h l_j) = \kappa F(F\delta^h_j - l_j l^h F) = \kappa F^2(\delta^h_j - l_j l^h).$$

将 (21) 和 (22) 代入 (18)，得到

$$Z^h_{jk} = \kappa F(l_k \delta^h_j - l_j \delta^h_k) - F^{-2}(y_j(\kappa F^2(\delta^h_k - l^h l_k)) - y_k(\kappa F^2(\delta^h_j - l^h l_j)) = 0.$$

我们有 $Z^h_{jk} = 0$，并且根据定理 4.1，偏微分方程 (16) 存在非平凡解。接下来，由 (17) 考虑莫比乌斯方程 ${}^c\nabla_k \rho_l = \phi g_{lk}$，其中$\phi = -\rho\Phi$。因此，若在 (M, F) 上存在共形变换，则 (17) 在 M上有一个非平凡解 ρ。现在，若假设 (M, F) 连通且完备，则由定理 D 可得推论得证。 □

定理 D. *[3]*设 (M, F) 是一个维数为 $n \geqslant 2$ 的连通完备芬斯勒流形。若 M 存在一个非平凡解

$${}^c\nabla_j \rho_k = \phi g_{jk},$$

其中 ϕ 是定义在 M 上的某个函数，那么根据 ρ 的临界点个数（分别为零个、一个或两个），它共形于
(a) 实数直线的一个开区间 I 与一个 $(n-1)$ 维完备芬斯勒流形 N 的直积 $I \times N$。

(b) 一个 n 维欧几里得空间；(c) 欧几里得空间中的一个
n 维单位球面。

以下命题揭示了莫比乌斯映射与 C-共形变换之间的关系。

P命题 4.2. 每个 M ¨obius 映射都是 C-共形变换。

¯证明。设 $f\colon (M,F) \to (M,F)$ 是一个 M¨obius 映射。根据定义 $B_{ij}(\varphi) = 0$ 即

$$\varphi_{ij} - (\Gamma^h_{ij} + C^h_{ij})\varphi_h - \varphi_i\varphi_j - \Phi g_{ij} = 0, \tag{23}$$

其中 $\Phi = \frac{1}{n}(\Delta\varphi - \|\nabla\varphi\|^2)$、$\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ 以及 $\varphi_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}$。对 (23) 关于 y^k 求导，得到

$$-\Gamma^h_{ijk}\varphi_h - C^h_{ijk}\varphi_h - \dot{\Phi}_k g_{ij} - \Phi(2C_{ijk}) = 0,$$

其中 $\dot{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial y^k}$、 $\Gamma^h_{ijk} := \frac{\partial}{\partial y^k}\Gamma^h_{ij}$ 以及 $C^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial y^k}C^h_{ij}$。将上式两边与 y^k 缩并，得到

$$-\Gamma^h_{ijk}\varphi_h y^k - C^h_{ijk}\varphi_h y^k - \dot{\Phi}_k g_{ij} y^k = 0. \tag{24}$$

稍加思考即可看出，由 (2) 给出的克里斯托费尔符号 Γ^h_{ij} 的分量是 0 次正齐次的，因为其三个项 $\delta_k g_{jh} = \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} - G^i_k \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^i}$均为 0 次的。事实上， g_{jh} 及其关于 x^k 的导数均为 0 次齐次的，而 G^i_k 为 1 次齐次的。因此，$\Gamma^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial y^k}\Gamma^h_{ij}$ 为 (-1) 次齐次的。同样，嘉当张量 C_{ijk} 的分量为 (-1) 次正齐次的，且 C^h_{ijk} 为 (-2) 次正齐次的。因此，由欧拉定理可知 $\Gamma^h_{ijk}y^k = 0 = C_{ijk}y^k$ 和 $-C^h_{ijk}y^k = C^h_{ij}$，从而由 (24) 得到

$$C^h_{ij}\varphi_h - \dot{\Phi}_k g_{ij} y^k = 0. \tag{25}$$

将上式两边与 $y^i y^j$ 收缩，并利用 $g_{ij}y^i y^j = F^2$，得到 $F^2\dot{\Phi}_k y^k = 0$，因此 $\dot{\Phi}_k y^k = 0$。于是，由（25）可得 $C^h_{ij}\varphi_h = 0$，证明完毕。

□

5 施瓦茨导数与 Bonnet-Myers定理

下述 Bonnet-Myers 型定理证实了 Thurston 猜想，并表明在完备芬斯勒流形上，射影参数的施瓦茨导数与里奇曲率起着相同的作用。

定理E. *[4, p.194]* 设 (M,F) 是一个 n 维前向完备连通芬斯勒流形。假设其里奇曲率具有如下统一正下界

$$Ric \geqslant (n-1)\lambda > 0;$$

等价地， $y^i y^j Ric_{ij}(x,y) \geqslant (n-1)\lambda F^2(x,y)$，其中 $\lambda > 0$。则：
(i) 每条长度至少为$\pi/\sqrt{\lambda}$ 的测地线都包含共轭点。(ii) M 的直径至多为 $\pi/\sqrt{\lambda}$。(iii) M 实际上是紧致的。(iv) 基本群 $\pi(M,x)$是有限群。

利用施瓦茨导数的近似，我们可以刻画正向完备的芬斯勒流形。

定理 1.3 的证明。设 (M, F) 是一个 n 维连通芬斯勒流形，$\gamma(t)$ 是 (M, F) 上的一条测地线。一般而言，参数 t 在 $\gamma(t)$ 中不会在 F 的射影变换下保持不变。存在一个参数，除线性分式变换外唯一，且在芬斯勒结构的射影变换下保持不变，称为射影参数，见 [14]。事实上，设 $p(s)$ 是 (M, F) 上的一个射影参数，其中 s 是测地线 γ 的弧长参数。射影参数 $p(s)$ 的施瓦茨导数为：

$$S(p(s)) = \frac{\frac{d^3p}{ds^3}}{\frac{dp}{ds}} - \frac{3}{2}\Big[\frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\frac{dp}{ds}}\Big]^2,$$

且射影参数 p 是上述常微分方程的一个解。可以证明，射影参数 $p(s)$ 除线性分式变换外唯一，即

$$S(p \circ T) = S(p),$$

其中 $T = \frac{ax+b}{cx+d}$ 和 $ad - bc \neq 0$。众所周知，

$$S\big(p(s)\big) = \frac{2}{n-1} Ric_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{2}{n-1} F^2 Ric, \tag{26}$$

其中 $S\big(p(s)\big)$ 是“$p(s)$”的施瓦茨导数，而“s”是弧长参数，参见 [6]。

当里奇张量相对于 Berwald、Chern 或 Cartan 联络中的任意一种是平行的时，它沿测地线保持常数，因此我们可以轻松求解方程（26）；更多详情请参见 [6, 第 5]页。

设射影参数 p 的施瓦茨导数满足 $S(p) \geqslant 2F^2\lambda$，其中 $\lambda > 0$是一个正数。方程（26）给出

$$\frac{2}{n-1} F^2 Ric \geqslant 2F^2\lambda,$$

因此 $Ric \geqslant (n-1)\lambda > 0$. 假设 (M, F) 是前向完备的，证明可由 Bonnet-Myers定理 E. □直接得出。
为了在带紧支集的芬斯勒流形上逼近其他光滑函数，可以使用 [8] 中说明的方法。

致谢。第一作者谨向图卢兹保罗·萨巴蒂埃大学的“图卢兹数学研究所”（ITM）表示感谢，本文部分内容在此完成。

参考文献

[1] H. Akbar-Zadeh，关于具有常截面曲率的芬斯勒空间， 比利时皇家科学院《通报·科学部》（第5辑）74（1988），281-322。[2] P. L. Antonelli、R. S. Ingarden 和 M. Matsumoto，《喷射理论与芬斯勒空间：物理学和生物学中的应用》，FTPH 58，Kluwer Academic Publishers，1993。[3] A. Asanjarani 和 B. Bidabad，通过二阶微分方程对完备芬斯勒流形进行分类，《微分几何及其应用》26（2008），434-444。[4]D. Bao、S. Chern 和 Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何导论》，施普林格出版社，2000。[5] B. Bidabad 和 F. Sedighi，芬斯勒流形上的施瓦茨导数与共形变换，《韩国数学会杂志》57，第4期（2020），873–892。[6] B. Bidabad 和 M. Sepasi，关于芬斯勒几何中的射影不变伪距离，《国际几何方法与现代物理学杂志》12(4)（2015），1550043。[7] B. Bidabad 和 M. Sepasi，关于具有常负里奇曲率的完备芬斯勒空间，《国际几何方法与现代物理学杂志》17(3)（2020），2050041。[8] B. Bidabad 和 A. Shahi，关于芬斯勒流形上的索伯列夫空间与稠密性定理，《AUT数学与计算杂志》1(1)（2020），37-45。[9] K. Carne，共形映射的施瓦茨导数，《纯粹与应用数学杂志》408（1990），10-33。[10] X. Cheng 和 Z. Shen，《芬斯勒几何：兰德斯空间方法》，北京科学出版社；施普林格出版社，海德堡，2012。[11] P. Joharinad 和 B. Bidabad，具有常里奇曲率的完备芬斯勒空间上的共形向量场，《微分几何及其应用》33（2014），75-84。[12] B. Osgood 和 D. Stowe，黎曼流形的施瓦茨导数与共形映射，《杜克数学杂志》67（1992），57-99。[13] H. Rund，《芬斯勒空间微分几何》，施普林格出版社，1959。[14] M. Sepasi、B. Bidabad，关于芬斯勒空间上的射影不变距离，《巴黎科学院报告》I辑352（2014），999–1003。

[15] Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何中的射影相关爱因斯坦度量》，Math. Ann. 320，625–647（2001）。

[16] Z. Shen 和 G. Yang，《芬斯勒几何中的保圆变换》，Results Math. 74,4（2019），25页。

[17] W.P. Thurston，《拉链与单叶函数》，《比伯巴赫猜想》（美国印第安纳州西拉斐特，1985），Math. Surveys Monogr.，21，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1986），185–197。

Behroz Bidabad，阿米尔卡比尔理工大学数学与计算机科学系（德黑兰理工学院），Hafez大道424号，邮编15914，德黑兰，伊朗。电子邮箱：bidabad@aut.ac.ir
Faranak Seddighi，德黑兰帕亚姆努尔大学数学学院，德黑兰，伊朗。
f-seddighi@student.pnu.ac.ir