arXiv:2304.00481v2 [math.AP] 6 Apr 2023

关于 Boussinesq方程的渐近性质

MUSTAFA SENCER AYDIN、IGOR KUKAVICA 和 MOHAMMED ZIANE

摘要。我们研究由密度驱动的 Navier-Stokes方程与密度的无扩散方程耦合而成的 Boussinesq系统的长时间行为。我们构造该系统的解，从而论证先前得到的先验界。

目录

1. 引言2. 预备知识与主要结果 3. 近似速度方程和密度方程 1
的存在性 3.1. 速度方程 3.2. 密度方程 4. 近似 Boussinesq 2
系统的存在性 5. Boussinesq系统的存在性 6. Boussinesq 4
系统的渐近性质 致谢 参考文献 4
7
8
10
13
14
15

1. 引言

本文探讨二维不可压缩黏性 Boussinesq方程（无热扩散率）的适定性和长时间行为，

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \rho e_2, \\ &\rho_t + u \cdot \nabla \rho = 0, \\ &\nabla \cdot u = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

and

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (u, \rho)(0) = (u_0, \rho_0) \in D(A) \times H^1,$$

其满足边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 和初始条件 $(u, \rho)(0) = (u_0, \rho_0) \in D(A) \times H^1$，其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个光滑、开且有界的区域。各种形式的 Boussinesq方程已有两个多世纪的历史。由于可用于模拟海洋波浪、生物物理学及其他领域中的行为，它们引起了物理学界和数学界的广泛关注。这些方程是一个耦合的偏微分方程系统，其未知量 u 表示速度场， p 表示压力， ρ 则根据具体情境表示流体的温度或密度。

在热扩散率为正的情况下，即 Boussinesq系统第二个方程中存在 $-\kappa\Delta\rho$ 时，整体存在性的结果已得到充分确立。另一方面，尽管已有若干结果证明了局部存在性、有限时间奇性和爆破判据等，但对于密度无扩散的无黏情形，系统 (1.1) 的整体适定性仍是一个未解问题；参见 [CH, EJ]。Chae [C] 和 Hou和Li [HL] 最先研究了黏性且零扩散情形，在周期区域上证明了具有 $H^s \times H^{s-1}$ 初始数据且 $s = 3, 4, \ldots$ 时整体存在性以及正则性的保持。随后， [LLT]和 [HL] 等研究进一步推广了这些结果。对于 $s = 2$, [HKZ1] 证明了在 Dirichlet 边界条件和周期边界条件下正则性的保持。Doering等人 [DWZZ], 的另一项整体适定性结果则是在 Lipschitz区域上施加 Lions边界条件得出的。关于整体适定性和

Sobolev 空间或 Besov 空间框架下正则性的其他研究，参见 [ACW, ACS.., BFL, BS, BrS, CD, CG, CN, CW, DP, HK1, HK2, HKR, HKZ2, HS, HW, HWW+, JK, JMWZ, KTW, KW1, KW2, KWZ, LPZ, SW]。

关于 Boussinesq系统解的长时间行为，Ju 在 [J] 中得到了密度的 H^1-范数上界，其形式为 Ce^{Ct^2}。随后，论文 [KW2] 将该上界降低至 e^{Ct}；而最近， [KMZ] 得到了更精确的上界，即 $C_\epsilon e^{\epsilon t}$，其中 $\epsilon > 0$ 为任意值。值得注意的是，在近期的一项研究 [KPY], 中，作者给出了一个代数下界的例子，其空间区域为 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{T}^2$。关于速度场 u的长时间行为， [DWZZ] 证明了其在 H^1 范数下的耗散；此外， [KMZ] 还证明了 u 的 H^2 范数全局有界。

本文通过详细构造一个全局时间解，为适定性相关研究作出了贡献，并补充了 [KMZ定理 2 中得到的先验估计。1]现有关于守恒律的研究，着重于由向量场 u 生成的流的连续性，因为这与常微分方程理论中的柯西问题有关（见[DL]）。而我们的工作关注如何获得 H^1 Boussinesq系统第二个方程解的空间正则性。因此，知道 Boussinesq系统第二个方程在分布意义或重整化意义下存在解，并不一定意味着该解具有 H^1 空间正则性。为克服这一困难，我们利用 Boussinesq系统未对密度施加任何边界条件这一事实，采用全 Sobolev 延拓论证。基本能量估计表明，为了控制密度的 H^1-范数，需要对速度的 $W^{1,\infty}$-范数进行估计。为此，我们采用 L^p 型的 Stokes 方程估计，该估计由 [GS]给出。这就是初始速度具有二阶可微性这一假设至关重要的原因。若假设速度的 H^1 初始数据，能否得到类似结果仍是一个开放问题。然而，在近期一篇论文中， [CEIM] 的作者构造了一个具有 Sobolev 正则性但非 Lipschitz 的向量场，使得相应输运方程的解在任何正时间都不 H^1 正则。若能证明这样的速度场与 ρ 共同构成 Boussinesq系统的一个解，那么上述问题便得到否定回答。

2. Preliminaries and the main result

假设 Ω 是一个有界的 C^∞ 区域，并且与 [CF,T1,T2], 表示

$$H = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega, u \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$
$$V = \{u \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega\},$$

其中 n 表示外向单位法向量，且

$$A = -\mathbb{P}\Delta$$

是斯托克斯算子，其定义域为 $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$，其中 $\mathbb{P}$: $L^2 \to H$ 是莱里投影算子。我们将密度平移 x_2，得到一个等价的方程组

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla P = \theta e_2, \\ &\theta_t + u \cdot \nabla \theta = -u \cdot e_2, \\ &\nabla \cdot u = 0, \\ &(u, \theta)(0) = (u_0, \theta_0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中

$$\theta(x_1, x_2, t) = \rho(x_1, x_2, t) - x_2 \tag{2.2}$$

以及 $P(x_1, x_2, t) = p(x_1, x_2, t) - x_2^2/2$。我们将 $\mathbb{P}$ 应用于方程（2.1），并写作

$$u_t + Au + \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) = \mathbb{P}(\theta e_2), \tag{2.3}$$

这是方程（2.1）中第一和第三个方程的通常等价表述。我们关于这些解的主要目标之一，是使其满足 [KMZ] 中陈述的渐近性质。为此，我们假设 $(u_0, \theta_0) \in D(A) \times H^1$，并构造一个解 (u, θ) 使得 u 属于

$$\mathcal{X}_T = L^\infty V \cap L^2 D(A) \cap L^3 W^{2,3} \cap W^{1,\infty} L^2 \cap H^1 V \cap H^2 V' \tag{2.4}$$

并 θ 至

$$\mathcal{Y}_T = L^\infty H^1 \cap H^1 L^2, \tag{2.5}$$

对每个 $T > 0$。请注意，对于空间 $\mathcal{X}_T$，有 $H^1V \subseteq CV$而对于空间 $\mathcal{Y}_T$，有 $H^1L^2 \subseteq CL^2$；对于这两类（2.4）和（2.5），我们始终假设取这样的连续代表。在（2.4）、（2.5）以及下文中，我们将

$$L^pX(\Omega \times [0,T]) = L^p([0,T],X)$$

and

$$CX(\Omega \times [0,T]) = C([0,T],X),$$

在可以理解的情况下省略对空间 $\Omega \times [0,T]$ 的标示；例如，在（2.4）和（2.5）中，时空域被理解为 $\Omega \times [0,T]$。类似地，$H^rX(\Omega \times [0,T]) = H^r([0,T],X)$，对于 $r \geq 0$，$W^{r,\infty}X$也有类似的定义。我们还记作

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_\infty = \bigcap_{T>0} \mathcal{X}_T$$

and

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_\infty = \bigcap_{T>0} \mathcal{Y}_T.$$

注意，如果一个函数属于 $\mathcal{X}_\infty$ 或 $\mathcal{Y}_\infty$，则它仅在区间 $[0,T]$ 上对 $T < \infty$ 有界，而对无穷远处不作任何控制。

下面给出本文的主要结果。

定理 2.1。设 $(u_0,\theta_0) \in D(A) \times H^1$。
(i) Boussinesq系统 （2.1）具有唯一的全局时间解 $(u, \theta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$。 (ii) 解 (u, θ) 满足

$$\lim_{t\to\infty} \|\nabla u\|_{L^2} = 0 \tag{2.6}$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \|Au - \mathbb{P}(\rho e_2)\|_{L^2} = 0, \tag{2.7}$$

其中 ρ与 (2.2)中相同。此外，

$$\|Au\|_{L^2} \leq C,$$

并且对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $C_\epsilon > 0$，使得

$$\|\rho\|_{H^1} \leq C_\epsilon e^{\epsilon t}, \tag{2.8}$$

其中两个常数 C 和 C_ϵ 都取决于初始数据的大小。
(iii) 函数 $\mathbb{P}(\theta e_2)$ 和 $\mathbb{P}(\rho e_2)$ 在 H 中弱收敛于 0，当 $t \to \infty$时。

为证明定理 2.1(i)，我们使用系统的线性化，并令（2.9）中的逼近方程的解趋于极限。完成构造后，我们简要证明 (ii)；随后即可由 (ii) 很快推出断言 (iii)。

定理 2.1 中的解通过以下逼近方案构造

$$\begin{aligned}
&u_t^n - \Delta u^n + u^{n-1}\cdot\nabla u^n + \nabla P^n = \theta^n e_2,\\
&\theta_t^n + u^{n-1}\cdot\nabla\theta^n = -u^n\cdot e_2,\\
&\nabla\cdot u^n = 0,\\
&(u^n,\theta^n)(0) = (u_0,\theta_0),\\
&u^n|_{\partial\Omega} = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，而对于 $n = 0$，我们求解

$$\begin{aligned}
&u_t^0 - \Delta u^0 + \nabla P^0 = \theta^0 e_2,\\
&\theta_t^0 = -u^0\cdot e_2,\\
&\nabla\cdot u^0 = 0,\\
&(u^0,\theta^0)(0) = (u_0,\theta_0)\\
&u^0|_{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

为论证这一过程，我们在第3 节分别求解线性化的 Navier-Stokes 方程和密度方程。为此，我们使用 Galerkin方法求解速度方程，其中关键步骤是 $L^3W^{2,\,3}$ 对速度的估计。另一方面，求解平移密度方程的主要方法是使用延拓算子，并在 $\mathbb{R}^2$中处理该方程。接着，在第4节，我们结合压缩映射和一致有界性论证，证明方程（2.9）存在唯一解。在第四节中，我们再次借助强收敛和弱收敛，证明方程（2.9）的解的极限给出方程（2.1）的解。最后，在第6节中，我们论证 [KMZ] 中所述的渐近性质适用于所构造的解。

3. 近似速度方程和密度方程的存在性

3.1. 速度方程。这里固定 $T\in(0,\infty]$，然后给定 $v\in\mathcal{X}_T$ 和 $\theta\in\mathcal{Y}_T$，我们旨在证明

$$\begin{aligned} &u_t-\Delta u+v\cdot\nabla u+\nabla P=\theta e_2,\\ &\nabla\cdot u=0,\\ &u(0)=u_0\in D(A),\\ &u|_{\partial\Omega}=0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

存在唯一解 $u\in\mathcal{X}_T$。

引理3.1。 设 $T\in(0,\ \infty]$，并假设 $u_0\in D(A)$。给定 $v\in\mathcal{X}_T$和 $\theta\in\mathcal{Y}_T$，该系统 (3.1) 存在唯一解 $u\in\mathcal{X}_T$。

引理 *3.1* 的证明。 通过对两个速度之差进行检验，很容易得到唯一性。因此，只需对固定的 $T\in(0,\ \infty)$证明该结论，也就是说，我们可以假设 T 有限。此外，时空中的所有 Lebesgue空间均指定义在 $\Omega\times[0,T]$上的空间，而时间上的 Lebesgue空间定义在 $[0,T]$上。除 $\|u_0\|_{D(A)}$、 $\|\theta\|_{\mathcal{Y}_T}$和 $\|v\|_{\mathcal{X}_T}$外，我们还允许本证明中的所有常数依赖于 T。

记 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的一个标准正交系，它由满足 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$的Stokes特征函数组成，其中$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$为相应的特征值。对于 $m\in\mathbb{N}$，令 P_m 为到由 $\{w_1,\dots,w_m\}$张成的 H 子空间上的正交投影。固定 $m\in\mathbb{N}$，考虑Galerkin系统

$$\begin{aligned} &u_t^m+Au^m+P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m)=P_m\mathbb{P}(\theta e_2),\\ &u^m(0)=P_mu_0,\\ &u^m|_{\partial\Omega}=0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

记 $\xi_j(t)=(u^m,\ w_j)$， $\beta_{ij}=(v\cdot\nabla w_j,\ w_i)$，以及 $\eta_j=(\theta e_2,\ w_j)$ 对于 $j\in\mathbb{N}$。将（3.2）中第一个方程与 w_k作内积，得到

$$\dot\xi_k+\lambda_k\xi_k+\sum_{j=1}^{m}\beta_{kj}\xi_j=\eta_k,$$

对于 $k=1,\dots,m$。为将该系统表示为向量形式，记 $\xi^m=(\xi_1,\dots,\xi_m)$， $\beta^m=(\beta_{ij})_{1\le i,\ j\le m}$，以及$\eta^m=(\eta_1,\dots,\eta_m)$。此外，令 Λ^m 为对角矩阵，其第 j 个对角元素为 λ_j，因此（ 3.2 ）可写成常微分方程组的形式:

$$\begin{aligned} &\dot\xi^m(t)+(\Lambda^m+\beta^m(t))\xi^m=\eta^m,\qquad 0\le t\le T,\\ &\xi^m(0)=\xi_0^m, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\xi_0^m=P_mu_0$。由于 $\int_0^T|\beta^m(s)|\,ds<\infty$根据 $\int_0^T\|v\|_{L^2}\,ds<\infty$，线性常微分方程组（3.3）在 $[0,T]$上有唯一解。现在我们需要证明 u^m 在 $\mathcal{X}_T$-范数下是一致有界的。将（3.2）中的第一个方程与 u^m相乘，得到

$$\frac12\frac{d}{dt}\|u^m\|_{L^2}^2+\|\nabla u^m\|_{L^2}^2=-(P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m),u^m)+(P_m\mathbb{P}\theta e_2,u^m)\lesssim\|\theta\|_{L^2}^2+\|u^m\|_{L^2}^2, \tag{3.4}$$

由于 $(P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m)\ u^m)=(\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m)\ u^m)=(v\cdot\nabla u^m,\ u^m)=0$。将格朗沃尔不等式应用于（3.4），可得

$$\|u^m(t)\|_{L^2}^2\lesssim\left(\|u_0\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\theta\|_{L^2}^2\,ds\right)e^{CT}\lesssim1,\qquad t\in[0,T],$$

回顾证明开始时关于常数的约定。因此，结合对（3.4）关于时间的积分，我们得到 $u^m \in L^\infty H \cap L^2 V$ 的一致有界性。

接下来（这些是经典估计），我们证明 ∇u^m 和 Au^m 在 $L^\infty L^2$ 和 $L^2 L^2$中分别一致有界。为此，令 $m \in \mathbb{N}$ 并在方程（3.2）的两边乘以 Au^m，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^m\|_{L^2}^2 + \|Au^m\|_{L^2}^2 = -(P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m), Au^m) + (P_m\mathbb{P}(\theta e_2), Au^m). \tag{3.5}$$

估计右端的第一项，得到

$$\begin{aligned} -(P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^m), Au^m) &\lesssim \|v\|_{L^4}\|\nabla u^m\|_{L^4}\|Au^m\|_{L^2} \lesssim \|v\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u^m\|_{L^2}^{1/2}\|Au^m\|_{L^2}^{3/2} \\ &\lesssim \epsilon\|Au^m\|_{L^2}^2 + C_\epsilon\|v\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^2}^2\|\nabla u^m\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

由此可迅速推出

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^m\|_{L^2}^2 + \|Au^m\|_{L^2}^2 \lesssim \|v\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^2}^2\|\nabla u^m\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2. \tag{3.7}$$

因此，由格朗沃尔不等式，

$$\|\nabla u^m(t)\|_{L^2}^2 \lesssim \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\theta\|_{L^2}\,ds\right)\exp\left(C\int_0^T \|v\|_{L^2}^2\|\nabla v\|_{L^2}^2\,ds\right) \lesssim 1, \qquad t\in[0,T], \tag{3.8}$$

回想 常数上的一致性。最后，对时间积分（3.5），并利用（3.8），可得

$$\|Au^m\|_{L^2L^2} \lesssim 1.$$

到目前为止，我们已获得 u^m 在 $L^\infty V \cap L^2 D(A)$中的一致有界性；在取极限之前，我们还需要获得其在 $W^{1,\infty}L^2 \cap H^1 V \cap H^2 V'$中的一致有界性。首先对（3.2）关于时间求导，得到

$$u_{tt}^m + Au_t^m + P_m\mathbb{P}(v_t\cdot\nabla u^m) + P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u_t^m) = P_m\mathbb{P}(\theta_t e_2). \tag{3.9}$$

用 3.9）检验（ u_t^m(注意，（3.9）是一个常微分方程组）可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t^m\|_{L^2}^2 &\lesssim \|v_t\cdot\nabla u^m\|_{L^2}\|u_t^m\|_{L^2} + \|\theta_t\|_{L^2}\|u_t^m\|_{L^2} \\ &\lesssim \epsilon\|u_t^m\|_{L^2}^2 + C_\epsilon(\|\theta_t\|_{L^2}^2 + \|v_t\cdot\nabla u^m\|_{L^2}^2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

对任意 $\epsilon > 0$。为估计括号中的第二项，注意到（注意， $v \in \mathcal{X}_T$）

$$\begin{aligned} \|v_t\cdot\nabla u^m\|_{L^2}^2 &\lesssim \|v_t\|_{L^4}^2\|\nabla u^m\|_{L^4}^2 \lesssim \|v_t\|_{L^2}\|\nabla v_t\|_{L^2}\|\nabla u^m\|_{L^2}\|Au^m\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\nabla v_t\|_{L^2}\|Au^m\|_{L^2} \lesssim \|\nabla v_t\|_{L^2}^2 + \|Au^m\|_{L^2}^2; \end{aligned} \tag{3.11}$$

在第三个不等式中，我们使用了（3.8）和$\|v_t\|_{L^\infty L^2} \lesssim 1$。因此，在（3.10）中吸收 $\epsilon\|u_t^m\|_{L^2}^2 \lesssim \epsilon\|\nabla u_t^m\|_{L^2}^2$，令 $\epsilon > 0$ 充分小，并利用（3.11），经时间积分后得到

$$\|u_t^m\|_{L^\infty L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_t^m\|_{L^2}^2\,ds \lesssim \|\theta_t\|_{L^2L^2}^2 + \|\nabla v_t\|_{L^2L^2}^2 + \|Au^m\|_{L^2L^2}^2 + \|u_t^m(0)\|_{L^2}^2, \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} u_t^m(0) &= -Au^m(0) - P_m\mathbb{P}(v(0)\cdot\nabla u^m(0)) + P_m\mathbb{P}(\theta(0)e_2) \\ &= -Au_0^m - P_m\mathbb{P}(v(0)\cdot\nabla u_0^m) + P_m\mathbb{P}(\theta_0 e_2) \in L^2 \end{aligned}$$

且 $\|u_t^m(0)\|_{L^2} \lesssim 1$。注意， $v(0)$ 有定义良好，并且由 $v \in \mathcal{X}_T$ 属于 V。因此， $u_t^m \in L^\infty L^2$ 和 $\nabla u_t^m \in L^2 L^2$ 在 m 中一致有界，即

$$\|u_t^m\|_{L^\infty L^2} + \|\nabla u_t^m\|_{L^2L^2} \lesssim 1.$$

现在，我们证明 u_{tt}^m在 $L^2 V'$ 中一致有界。为此，由（3.9）可得，对所有 $h \in V$

$$\begin{aligned} (u_{tt}^m, h) &= -(Au_t^m, h) - (P_m\mathbb{P}(v_t\cdot\nabla u^m), h) - (P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u_t^m), h) + (P_m\mathbb{P}(\theta_t e_2), h) \\ &\lesssim \|\nabla u_t^m\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2} + \|v_t\|_{L^2}\|u^m\|_{L^2}^{1/2}\|Au^m\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla h\|_{L^2} \\ &\quad + \|v\|_{L^2}^{1/2}\|Av\|_{L^2}^{1/2}\|u_t^m\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^2} + \|\theta_t\|_{L^2}\|h\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中我们用到了

$$(P_m\mathbb{P}(v_t\cdot\nabla u^m), h) = (v_t\cdot\nabla u^m, P_m h) = -(\partial_t v_j u_i^m, \partial_j (P_m h)_i)$$

and

$$(P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u_t^m),h)=(v\cdot\nabla u_t^m,P_mh)=-(v_j\partial_t u_i^m,\partial_j(P_mh)_i),$$

由于 $\mathbb{P}P_mh=P_mh$ 且 $\|\nabla P_mh\|_{L^2}=\|P_mh\|_V\lesssim\|h\|_V\lesssim\|\nabla h\|_{L^2}$。由（3.11）、（3.12），并对 $h\in V$ 取上确界，其中 $\|h\|_V\le 1$，可得

$$\int_0^T\|u_{tt}^m\|_{V'}^2\,ds\lesssim 1.$$

差值 $u^{m,\,n}=u^m-u^n$ 满足

$$\begin{aligned}&u_t^{m,n}+Au^{m,n}+P_m\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^{m,n})=(P_m-P_n)\mathbb{P}(\theta e_2)-(P_m-P_n)\mathbb{P}(v\cdot\nabla u^n),\\&u^{m,n}(0)=(P_m-P_n)u_0,\\&u^{m,n}|_{\partial\Omega}=0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\|u^{m,n}\|_{L^2}^2+\|\nabla u^{m,n}\|_{L^2}^2\lesssim(\|\theta\|_{L^2}+\|v\cdot\nabla u^n\|_{L^2})\|(P_m-P_n)u^{m,n}\|_{L^2}\\&\lesssim\frac{1}{\lambda_{m,n}^{1/2}}(1+\|v\|_{L^2}^{1/2}\|Av\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u^n\|_{L^2})\|\nabla(P_m-P_n)u^{m,n}\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{\lambda_{m,n}^{1/2}}(1+\|Av\|_{L^2}^{1/2})\|\nabla u^{m,n}\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中 $\lambda_{m,\,n}=\min\{\lambda_n,\lambda_m\}$。将 $\|\nabla u^{m,\,n}\|_{L^2}$ 移至左端，并应用格朗沃尔不等式，可得

$$\|u^{m,n}(t)\|_{L^2}^2\lesssim\|(P_m-P_n)u_0\|_{L^2}^2+\frac{1}{\lambda_{m,n}^{1/2}}\int_0^T(1+\|Av\|_{L^2})\,ds,$$

这表明，当 $m,n\to\infty$ 时，$u^{m,\,n}\to 0$ 在 $L^\infty H$ 中。

因此，通过取一个子列，我们得到存在 u 使得

$$u^m\to u\text{ uniformly in }L^\infty H$$

and

$$u^m\rightharpoonup u\text{ weakly-* in }L^2D(A)\cap L^\infty V\cap W^{1,\infty}L^2\cap H^1V\cap H^2V'.$$

运用经典解的论证，我们可以在（3.2）中取极限，得到

$$\begin{aligned}&u_t+Au+\mathbb{P}(v\cdot\nabla u)=\mathbb{P}(\theta e_2),\\&u(0)=u_0,\end{aligned}\tag{3.14}$$

这进而意味着存在 P 使得

$$u_t-\Delta u+v\cdot\nabla u+\nabla P=\theta e_2.$$

接下来，我们需要证明 $u\in L^3W^{2,\,3}$。为此，我们应用 $L^3W^{2,\,3}$ 估计（见 [GS，定理 2。8] 并得到

$$\int_0^T\|u\|_{W^{2,3}}^3\,ds\lesssim\|A_3^{5/6}u_0\|_{L^3}^3+\int_0^T(\|v\cdot\nabla u\|_{L^3}^3+\|\theta e_2\|_{L^3}^3)\,ds,\tag{3.15}$$

其中 A_3 表示斯托克斯算子的 L_3 版本。对于（3.15）右端的第一项，我们利用 [GS，第 82], 页中的嵌入性质，得到 $\|A_3^{5/6}u_0\|_{L^3}\lesssim\|Au_0\|_{L^2}$。类似地，对于第一个积分，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^T\|v\cdot\nabla u\|_{L^3}^3\,ds&\lesssim\int_0^T\|v\|_{L^6}^3\|\nabla u\|_{L^6}^3\,ds\lesssim\int_0^T\|v\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}\|Au\|_{L^2}^2\,ds\\&\lesssim\|v\|_{L^\infty L^2}\|\nabla v\|_{L^\infty L^2}^2\|\nabla u\|_{L^\infty L^2}\int_0^T\|Au\|_{L^2}^2\,ds\lesssim 1,\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\|v\|_{L^6}\lesssim\|v\|_{L^2}^{1/3}\|\nabla v\|_{L^2}^{2/3}$。同样，对于（3.15）中的第二个积分项，注意到

$$\int_0^T\|\theta e_2\|_{L^3}^3\,ds\lesssim\int_0^T(\|\theta\|_{L^2}^2\|\nabla\theta\|_{L^2}+\|\theta\|_{L^2}^3)\,ds\lesssim T(\|\theta\|_{L^\infty L^2}^2\|\nabla\theta\|_{L^\infty L^2}+\|\theta\|_{L^\infty L^2}^3)\lesssim T.$$

由（3.15）可知，解 u属于 $L^3W^{2,3}$。为便于后文参考，我们还注意到 $u \in L^1_{\text{loc}}W^{1,\infty}$，这是因为

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^{1/4}\|A_3 u\|_{L^3}^{3/4} + \|\nabla u\|_{L^2} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2} + \|A_3 u\|_{L^3}, \tag{3.16}$$

属于 $L^1(0,T)$；注意，在不等式（3.16）的第一项中，我们使用了 Sobolev嵌入 $W^{2,3} \subseteq W^{1,\infty}$以及 Stokes问题的 $W^{2,3}$ 正则性。□

3.2. 密度方程。现在，我们给出密度方程的存在性与唯一性结果。

引理3.2. 设 $T \in (0,\infty]$，并假设 $v \in L^3W^{2,3}(\Omega \times [0,T_0])$ 满足 $v \cdot n = 0$于 $\partial\Omega$ 上，且 $u \in L^2H^1(\Omega \times [0,T_0])$，对所有有限的 $T_0 \in (0,T]$。那么，

$$\begin{aligned} &\theta_t + v \cdot \nabla\theta = -u \cdot e_2, \\ &\theta(0) = \theta_0 \in H^1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

存在唯一解

$$\theta \in L^\infty H^1(\Omega \times [0,T_0]) \cap H^1L^2(\Omega \times [0,T_0]),$$

对所有有限的 $T_0 \in (0,T]$。此外，不等式

$$\|\nabla\theta\|_{L^2} \lesssim \left(\|\theta_0\|_{H^1} + \int_0^t \|u\|_{H^1}\,ds\right)\exp\left(C\int_0^t \|v\|_{W^{1,\infty}}\,ds\right), \tag{3.18}$$

对所有有限的 $t \in [0,T]$。

证明表明，假设 $v \in L^3W^{2,3}(\Omega \times [0,T_0])$可以减弱，但所述正则性已足以满足我们的需要。

引理的证明 *3.2*。 空间区域为 Ω 的方程具有唯一性，这可通过将两个解之差作为测试函数立即得出。因此，只需证明对固定的有限 $T > 0$，命题成立。与前面的证明一样，时空中的所有 Lebesgue空间均指定义在 $\Omega \times [0,T]$上的空间，而时间上的 Lebesgue空间定义在 $[0,T]$上。

考虑一个整体延拓算子 E，将 Ω 上的 Sobolev函数延拓到 $\mathbb{R}^2$；参见 [S，第 181]页。首先，记$\tilde{v} = E(v)$， $\tilde{u} = E(u)$，以及 $\theta_0 = E(\theta_0)$，然后考虑方程

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}_t + \tilde{v} \cdot \nabla\bar{\theta} = -\tilde{u} \cdot e_2, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T], \\ &\bar{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0 \end{aligned}$$

对 $\bar{\theta}$。我们通过取 $\tilde{v}^m$、 $\tilde{u}^m \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$和 $\tilde{\theta}_0^m \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$对 $\tilde{v}$、 $\tilde{u}$和 $\tilde{\theta}_0$进行正则化，使它们在空间上均具有紧支撑，并且 $\tilde{v}^m$、 $\tilde{u}^m$和 $\tilde{\theta}_0^m$分别在空间 $L^3W^{2,3}(\mathbb{R}^2)$、 $L^2H^1(\mathbb{R}^2)$和 $H^1(\mathbb{R}^2)$中收敛到 $\tilde{v}$、 $\tilde{u}$和 $\tilde{\theta}_0$。于是

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}_t^m + \tilde{v}^m \cdot \nabla\bar{\theta}^m = -\tilde{u}^m \cdot e_2, \\ &\bar{\theta}^m(0) = \tilde{\theta}_0^m, \end{aligned} \tag{3.19}$$

它现在定义在 $\mathbb{R}^2$上，而不是Ω上，并且具有唯一的光滑解 $\bar{\theta}^m$。为获得取极限所需的估计，我们将¯应用于 ∇ 方程（3.19）的第一个方程，并以 $\nabla\theta^m$ 作为检验函数，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\bar{\theta}^m\|_{L^2}^2 = -(\partial_j\tilde{v}_i^m\partial_i\bar{\theta}^m, \partial_j\bar{\theta}^m) - (\tilde{v}_i^m\partial_{ij}\bar{\theta}^m, \partial_j\bar{\theta}^m) - (\nabla\tilde{u}^m \cdot e_2, \nabla\bar{\theta}^m), \tag{3.20}$$

其中，内积均取在 L^2（$\mathbb{R}^2$）中。由于（$\tilde{v}_i^m\partial_{ij}\tilde{\theta}^m$， $\partial_j\bar{\theta}^m$）$= -\frac{1}{2}$（（散度 $\tilde{v}^m$）$\nabla\bar{\theta}^m$， $\nabla\bar{\theta}^m$），方程（3.20）推出

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\bar{\theta}^m\|_{L^2}^2 \lesssim \|\nabla\tilde{v}^m\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{\theta}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla\tilde{u}^m\|_{L^2}\|\nabla\bar{\theta}^m\|_{L^2}.$$

¯因此，消去 $\|\nabla\theta^m\|_{L^2}$ 并应用格朗沃尔不等式，可得

$$\|\nabla\bar{\theta}^m\|_{L^\infty L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \left(\|\nabla\tilde{\theta}_0^m\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^T \|\nabla\tilde{u}^m\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,ds\right)\exp\left(C\int_0^T \|\nabla\tilde{v}^m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,ds\right). \tag{3.21}$$

¯注意到，该不等式右端关于 $m \in \mathbb{N}$一致有界。事实上， θ_0^m和 $\nabla\tilde{u}^m$ 分别在 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $L^2H^1(\mathbb{R}^2)$ 中收敛，而 $\tilde{v}^m$ 在 L^1W^1 中收敛到 $\tilde{v}$，∞ 这归因于加利亚多-尼伦伯格不等式类型的

与（3.16）平行的不等式。取一个子列后，不妨设 $\bar{\theta}^m$ 具有弱-*极限 $\bar{\theta}$，且该极限位于 $L^\infty H^1(\mathbb{R}^2)$ 中。于是，对于 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$，有

$$\int_0^T (\tilde{v}^m \cdot \nabla \bar{\theta}^m - \tilde{v} \cdot \nabla \bar{\theta}, \phi)\, ds = \int_0^T \Big(((\tilde{v}^m - \tilde{v}) \cdot \nabla \theta^m, \phi) + (\tilde{v} \cdot \nabla (\bar{\theta}^m - \bar{\theta}), \phi) \Big)\, ds \to 0, \qquad k \to \infty,$$

由在 $\tilde{v}^m$ 和 θ^m 中的强收敛与弱-*收敛分别得到。以类似方式处理（3.19）的弱形式中的其他项，

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\theta}^m \phi_t \, dxds + \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\theta}^m(0)\phi(0)\, dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}_j \bar{\theta}^m \partial_j \phi \, dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_2^m \phi \, dxds = 0,$$

我们得到

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\theta} \phi_t \, dxds + \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\theta}(0)\phi(0)\, dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}_j \bar{\theta} \partial_j \phi \, dxds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_2 \phi \, dxds = 0, \tag{3.22}$$

因此，θ 是初值问题（3.19）的弱解。现在，限制 $\theta = \theta|_\Omega$ 满足（3.17），并且由（3.18）可知，利用延拓算子的连续性，从（3.21）得到，并在 m 中取极限。最后，这样的 θ 属于 H^1L^2，因为 $\|\theta_t\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}$，由此可得

$$\|\theta_t\|_{L^2L^2} \lesssim \|u\|_{L^2L^2} + \|v\|_{L^3W^{2,3}}\|\theta\|_{L^\infty H^1}, \tag{3.23}$$

证明至此完成。 □

4. 近似Boussinesq系统的存在性

本节中，我们证明，给定 $(u^{n-1}, \theta^{n-1}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$，系统（2.9）存在唯一的解 $(u^n, \theta^n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$。为此，我们采用归纳法。不过，我们只需证明归纳步骤，因为（2.10）与（2.9）是同一个系统，只是 $u^{n-1} = 0$。

命题4.1。 给定 $u^{n-1} \in \mathcal{X}$，存在唯一的解 $(u^n, \theta^n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 满足 (2.9).

为简化记号，假设 $v := u^{n-1} \in \mathcal{X}$ 已给定，并联立求解（3.1）和（3.17）。由于唯一性（将在下文证明），只需对固定的有限 $T \in (0,\infty)$ 证明该命题，并假设 $v \in \mathcal{X}_T$。本节中所有常数均可依赖于 $\|v\|_{\mathcal{X}_T}$。同时固定 $u_0 \in D(A)$，令

$$\begin{aligned} \phi_1 \colon L^\infty H^1 &\to L^2 D(A) \cap L^\infty V \\ \theta &\mapsto \text{(unique solution } u \text{ of (3.1))}. \end{aligned}$$

在 $L^2D(A) \cap L^\infty V$ 中，唯一解的存在性[CF, T1]. 这是经典结果；此外，该解满足 $u \in C([0,T],\ V)$ 且 $u(0) = u_0$。类似地，给定 $v \in \mathcal{X}$ 和 $\theta_0 \in H^1$，令

$$\begin{aligned} \phi_2 \colon L^2 D(A) \cap L^\infty V &\to L^\infty H^1 \\ u &\mapsto \text{(unique solution } \theta \text{ of (3.17))}. \end{aligned}$$

引理 3.2 表明，解 θ（3.17）满足 $\theta \in C([0,T],\ L^2)$，在一个零测集上作修改后，我们便可从弱形式（3.22）出发，利用标准论证证明 $\theta(0) = \theta_0$。

引理 4.2. 存在 $T_1 \in (0,T]$，其仅依赖于 $\|v\|_{\mathcal{X}_T}$，使得

$$\|\phi_1(\theta_1) - \phi_1(\theta_2)\|_{L^2(0,T_1;D(A))\cap L^\infty(0,T_1;V)} \le \frac{1}{2}\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(0,T_1;H^1)}, \tag{4.1}$$

对所有 $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(0,T_1;\ H^1,$ 均成立。

引理 4 的证明。 2. 令 $T_1 \in (0,T]$。记 $u_i = \phi_1(\theta_i)$。此外，写出 $\tilde{u} = u_1 - u_2$ 和 $\theta = \theta_1 - \theta_2$，我们有

$$\tilde{u}_t + A\tilde{u} = -\mathbb{P}(v \cdot \nabla \tilde{u}) + \mathbb{P}(\tilde{\theta} e_2). \tag{4.2}$$

以 $A\tilde{u}$ 为检验函数，并进行与（3.6）类似的估计，可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^2 + \|A\tilde{u}\|_{L^2}^2 \lesssim \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^2, \tag{4.3}$$

因此

$$\|\nabla \tilde{u}(t)\|_{L^2}^2 \lesssim \left(\int_0^{T_1} \|\tilde{\theta}\|_{L^2}^2 \, ds \right) \exp\left(C \int_0^{T_1} \|v\|_{L^2}^2 \|v\|_{H^1}^2 \, ds \right) \lesssim T_1 \|\tilde{\theta}\|_{L^\infty L^2}^2, \tag{4.4}$$

当 $t \in [0, T_1]$时，回顾一下约定，隐含常数依赖于 $\|v\|_{\mathcal{X}_T}$。不等式（4.3）和（4.4）推出

$$\|\tilde{u}\|^2_{L^\infty V} + \|\tilde{u}\|^2_{L^2 D(A)} \lesssim T_1 \|\tilde{\theta}\|^2_{L^\infty L^2},$$

其中区域 $\Omega \times [0, T_1]$ 已知。不等式（4.1）可通过选取 $T_1 \in (0, T]$ 充分小来得到。□

引理4.3. 存在 $T_2 \in (0, T]$，它仅依赖于 $\|v\|_{\mathcal{X}_T}$，使得

$$\|\phi_2(u_1) - \phi_2(u_2)\|_{L^\infty(0,T_2;H^1)} \le \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T_2;D(A))\cap L^\infty(0,T_2;V)\cap L^3(0,T_2;W^{2,3})},$$

对所有 $u_1, u_2 \in L^2(0, T_2; D(A)) \cap L^\infty(0, T_2; V) \cap L^3(0, T_2; W^{2,3})$.

˜ ˜引理4.3的证明。令 $\theta_i = \phi_2(u_i)$，并将 θ_1 和 θ_2 的相应方程相减，得到

$$\tilde{\theta}_t + v \cdot \nabla \tilde{\theta} = -\tilde{u} \cdot e_2, \tag{4.5}$$

˜其中 $u = u_1 - u_2$，且 $\theta(0) = 0$。因此，如（3.18）所示，我们有

$$\|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^\infty H^1} \lesssim T \|\tilde{u}\|_{L^\infty V},$$

允许隐含常数依赖于 v。然后，取 $T > 0$ 充分小并令其等于 T_2，即可得到所需结论。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

命题4.1的证明。如上所述，只需证明对固定的 $T \in (0, \infty)$，结论成立。为简化记号，我们考虑满足 (3.14) 和 (3.17) 的系统，其中 $v \in \mathcal{X}_T$ 已给定。

我们先证明唯一性。设 (u^1, θ^1) 和 (u^2, θ^2) 是 $\mathcal{X}_T \times \mathcal{Y}_T$ 中 (3.14),(3.17) 的任意两个解。˜将相应方程相减，并将两个解之差记为 $(\tilde{u}, \theta)$，容易˜验证，$(\tilde{u}, \theta)$ 满足由 (4.5) 耦合的 (4.2)，且初始数据为零。因此，分别以 $\tilde{u}$ ˜ 和 θ 检验 (4.2) 和 (4.5)，并将所得方程相加，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{u}\|^2_{L^2} + \|\tilde{\theta}\|^2_{L^2}) = -\|\nabla \tilde{u}\|^2_{L^2},$$

对时间积分后即可得出唯一性。

为证明存在性，我们在时间区间 $[0, T_0]$ 上进行，其中 $T_0 = \min\{T_1, T_2\}$。首先注意到 $\mathbb{X} = L^2 D(A) \cap L^\infty V$ 在两个范数之和的意义下构成一个巴拿赫空间，其中区域 $\Omega \times [0, T_0]$。定义 ϕ: $\mathbb{X} \times L^\infty H^1 \to \mathbb{X} \times L^\infty H^1$，使得 $\phi(u, \theta) = (\phi_1(\theta)\ \phi_2(u))$。记乘积空间上的范数为 $\|\cdot\|$，则对每一对 (u_1, θ_1)、$(u_2, \theta_2) \in \mathbb{X} \times L^\infty H^1$，有

$$\begin{aligned}\|\phi(u_1, \theta_1) - \phi(u_2, \theta_2)\| &= \|\phi_1(\theta_1) - \phi_2(\theta_2)\|_{\mathbb{X}} + \|\phi_2(u_1) - \phi_2(u_2)\|_{L^\infty H^1} \\ &\le \frac{1}{2}(\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty H^1} + \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{X}}),\end{aligned}$$

由引理 4.2 和 4.3 可知，这表明 ϕ 是一个压缩映射。应用巴拿赫不动点定理，便得到方程 (3.1) 与 (3.17) 在 $[0, T_0]$ 上耦合后的一个解 (u, θ)。为验证这一点，令迭代序列 $(u^m, \theta^m) = \phi(u^{m-1}, \theta^{m-1})$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $(u^0, \theta^0) \equiv (u_0, \theta_0)$。于是有

$$\begin{aligned}&u^m_t - \Delta u^m + v \cdot \nabla u^m + \nabla P = \theta^{m-1} e_2, \\ &\nabla \cdot u^m = 0 \\ &\theta_t + v \cdot \nabla \theta = -u \cdot e_2,\end{aligned}$$

其中 $(u^m(0)\ \theta^m(0)) = (u_0, \theta_0)$，而方程 $\phi(u, \theta) = (u, \theta)$ 化简为与 (3.17) 联立的 (3.1)。至此，我们证明了在 $[0, T_0]$ 上存在具有所需性质的解。注意，利用归纳法以及引理 3.1 和 3.2，我们得到在区间 $[0, T_0]$ 上 $(u^m, \theta^m) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$。

为了能够继续解，我们需要证明 $(u^m(T_0)\ \theta^m(T_0)) \in D(A) \times H^1$。注意，根据 (2.5) 后指出的 u^m 和 θ^m 的连续性性质，$u^m(T_0)$ 和 $\theta^m(T_0)$ 都是良定义的。对于θ^m，我们只需应用 $\theta^m \in C([0, T], L^2)$ 和 $\theta_m \in L^\infty([0, T], H^1)$，并利用范数关于弱收敛序列的下半连续性。对于 u^m，只需证明 $u^m \in L^\infty([0, T], D(A))$，同样利用范数关于弱收敛序列的下半

连续性。不过，这可由 $u^m \in \mathcal{X}_{T_0} \subseteq C([0,T_0],V)$ 得出，并且

$$Au^m = -u_t^m - \mathbb{P}(u^{m-1}\cdot\nabla u^m) + \mathbb{P}(\theta^m e_2),$$

并对 H 中的右端项进行估计。因此，$(u^m(T_0)\ \theta^m(T_0)) \in D(A)\times H^1$，如有必要，在区间 $[T_0,2T_0]$、$[2T_0,3T_0]$、.....上重复此过程，直到到达 T，从而完成证明。□

5. The existence for the Boussinesq system

在上一节中，我们已经证明了序列 (2.9) 的存在性、唯一性和连续性性质。本节旨在通过证明解 u^n （2.9）属于$\mathcal{X}_\infty \times \mathcal{Y}_\infty$，且其 n 范数 $\mathcal{X}_T \times \mathcal{Y}_T$对每个 $T\in(0,\infty)$均有一个与 n 无关的常数界，来证明定理 2.1(i)。

引理 5.1。 设 $T\in(0,\infty)$，并考虑序列 u^n，该序列由(2.9)给出，其中

$$\|\theta_0\|_{H^1}^2 + \|u_0\|_{D(A)}^2 \le K_0, \tag{5.1}$$

对某个 $K_0>0$。那么存在一个常数 K，它仅依赖于 K_0 和 T，使得对所有 $n\in\mathbb{N}_0$，$\|u^n\|_{\mathcal{X}_T}\le K$ 和 $\|\theta^n\|_{\mathcal{Y}_T}\le K$ 均成立。

引理的证明 5.1。 令 $n\in\mathbb{N}_0$。我们用 u^n 检验（2.9）中的第一个方程，用 θ^n 检验第二个方程，并将两者相加，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^n\|_{L^2}^2) = -\|\nabla u^n\|_{L^2}^2. \tag{5.2}$$

方程（5.2）意味着

$$\|u^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^n\|_{L^2}^2 \lesssim 1 \tag{5.3}$$

and

$$\|\nabla u^n\|_{L^2L^2}^2 \lesssim 1, \tag{5.4}$$

其中所有常数都允许依赖于 K_0 和 T，因此仅与 $n\in\mathbb{N}$无关。用 Au^n 检验（2.9）中的第一个方程，并采用推导（3.7）时的类似估计，可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^n\|_{L^2}^2 + \|Au^n\|_{L^2}^2 \lesssim \|u^{n-1}\|_{L^2}^2\|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^2\|\nabla u^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^n\|_{L^2}^2. \tag{5.5}$$

由格朗沃尔不等式可知

$$\begin{aligned}\|\nabla u^n\|_{L^2}^2 &\lesssim \left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\theta^n\|_{L^2}^2\,ds\right)\exp\left(\int_0^T \|u^{n-1}\|_{L^2}^2\|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^2\,ds\right)\\ &\lesssim \exp\left(C\int_0^T \|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^2\,ds\right)\lesssim 1,\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中，我们在第二个不等式中利用了 5.3）在 $k=n-1$、n 时的结果，并在最后一个不等式中利用了 5.4）在 $k=n-1$ 时的结果。不等式（5.5）和（5.6）于是推出

$$\|Au^n\|_{L^2L^2}^2 \lesssim \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + 1 \lesssim 1.$$

现在，我们用 2.9 中的第二个方程检验 $|\theta^n|\theta^n$，得到

$$\frac{d}{dt}\|\theta^n\|_{L^3}^3 = -(u^{n-1}\cdot e_2, |\theta^n|\theta^n) \lesssim \|u^{n-1}\|_{L^3}\|\theta^n\|_{L^3}^2.$$

消去$\|\theta^n\|_{L^3}^2$，然后从 0 积分到 T，得到

$$\begin{aligned}\|\theta^n\|_{L^3} &\lesssim \|\theta_0\|_{L^3} + \int_0^T \|u^{n-1}\|_{L^3}\,ds \lesssim \|\theta_0\|_{L^2}^{2/3}\|\nabla\theta_0\|_{L^2}^{1/3} + \int_0^T \|u^{n-1}\|_{L^2}^{2/3}\|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^{1/3}\,ds\\ &\lesssim \|\theta_0\|_{H^1} + \int_0^T (\|u^{n-1}\|_{L^2} + \|\nabla u^{n-1}\|_{L^2})\,ds \lesssim 1.\end{aligned}$$

估计$\|\theta^n\|_{L^\infty L^3}$的原因是再次借助 [GS定理 2。7] 以得到

$$\begin{aligned}\|u^n\|_{L^3W^{2,3}}^3 &\lesssim \|Au_0\|_{L^2}^3+\int_0^T \|u^{n-1}\|_{L^2}\|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^2\|\nabla u^n\|_{L^2}\|Au^n\|_{L^2}^2\,ds+\int_0^T\|\theta^n\|_{L^3}^3\,ds\\ &\lesssim \|Au_0\|_{L^2}^3+1\lesssim 1.\end{aligned}\tag{5.7}$$

因此，由（3.16）

$$\|u^n\|_{L^1W^{1,\infty}}\lesssim 1,$$

而引理 3.2，特别是（3.18），则可推出

$$\|\nabla\theta^n\|_{L^\infty L^2}\lesssim 1.$$

因此，由（3.23），

$$\|\theta_t^n\|_{L^2L^2}\le 1.$$

还需证明 u_t^n、 ∇u_t^n和 u_{tt}^n 分别在 $L^\infty L^2$、 L^2L^2 和 L^2V'中一致有界。首先，由 $u_t^n=-Au^n-u^{n-1}\cdot\nabla u^n+\mathbb{P}(\theta^n e_2)$，可得

$$\|u_t^n\|_{L^2L^2}^2\lesssim\|Au^n\|_{L^2L^2}^2+\|\theta^n\|_{L^2L^2}^2+\int_0^T\|u^{n-1}\|_{L^2}\|Au^{n-1}\|_{L^2}\|\nabla u^n\|_{L^2}^2\,ds\lesssim 1.$$

现在，对（2.9）中的速度方程关于时间求导，并以 u_t^n为检验函数，得到

$$\frac12\frac{d}{dt}\|u_t^n\|_{L^2}^2+\|\nabla u_t^n\|_{L^2}^2\lesssim\|u_t^{n-1}\|_{L^2}\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\|u_t^n\|_{L^2}+\|\theta_t^n\|_{L^2}\|u_t^n\|_{L^2}.\tag{5.8}$$

消去$\|u_t^n\|_{L^2}$并对时间积分后，得到

$$\|u_t^n\|_{L^\infty L^2}\lesssim\|u_t^n(0)\|_{L^2}+1+\int_0^T\|u_t^{n-1}\|_{L^2}\|\nabla u^n\|_{L^\infty}\,ds\lesssim 1+\int_0^T(\|\nabla u^n\|_{L^2}^2+\|A_3u^n\|_{L^3}^2)\,ds\lesssim 1,\tag{5.9}$$

其中我们在第二个不等式中用到了 (3.16) 和 $u_t^n(0)=-Au_0-\mathbb{P}(u_0\cdot\nabla u_0)+\mathbb{P}(\theta_0e_2)\in L^2$。接下来，由 (5.8)、(5.9) 和 $\int_0^T\|\nabla u^n\|_{L^\infty}^2\lesssim 1$ 可得

$$\|\nabla u_t^n\|_{L^2L^2}\lesssim 1.$$

最后，由 (3.13)，我们可以得到

$$\|u_{tt}^n\|_{L^2V'}\lesssim 1,$$

由此完成了关于近似解一致有界性的论证。 □

定理 2.1(i) 的证明。再次，只需考虑一个固定的有限 $T>0$。与上文一样，我们允许所有常数依赖于 K_0（定义见 (5.1)）和 T。引理 5.1 给出了 $\|u^n\|_{\mathcal{X}_T}$和 $\|\theta^n\|_{\mathcal{Y}_T}$的一个常数上界。接下来，我们证明序列 (u^n,θ^n)在充分小的时间区间$[0,T_0]$上，于 $(L^2D(A)\cap L^\infty V)\times L^\infty L^2$ 中是压缩的，其中 T_0 为常数，即它仅依赖于 K_0和 T。记 $U^n=u^n-u^{n-1}$和 $\theta^n=\theta^n-\theta^{n-1}$。对于固定的 $n\in\mathbb{N}$，函数 U^{n+1}和 θ^{n+1}满足

$$\begin{aligned}&U_t^{n+1}+AU^{n+1}=\mathbb{P}(\theta^{n+1}e_2)-\mathbb{P}(u^n\cdot\nabla U^{n+1})-\mathbb{P}(U^n\cdot\nabla u^n),\\&\theta_t^{n+1}=-U^{n+1}\cdot e_2-u^n\cdot\nabla\theta^{n+1}-U^n\cdot\nabla\theta^n,\end{aligned}\tag{5.10}$$

取零初始数据，即 $(U^{n+1}(0)\ \theta^{n+1}(0))=(0,0)$。用 AU^{n+1}测试 (5.10) 中的第一个方程，用 θ^{n+1}测试第二个方程，并将两式相加，得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}(\|\nabla U^{n+1}\|_{L^2}^2+\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2)+\|AU^{n+1}\|_{L^2}^2\\&\quad=(\theta^{n+1}e_2,AU^{n+1})-(u^n\cdot\nabla U^{n+1},AU^{n+1})\\&\qquad-(U^n\cdot\nabla u^n,AU^{n+1})-(U^{n+1}\cdot e_2,\theta^{n+1})-(U^n\cdot\nabla\theta^n,\theta^{n+1}),\end{aligned}$$

其中内积是在 $L^2(\Omega)$ 中取的。利用能量估计，我们由此得到（省略细节，因为这些不等式与上文类似）

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\nabla U^{n+1}\|_{L^2}^2+\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2)+\|AU^{n+1}\|_{L^2}^2\\&\quad\lesssim C_\epsilon\|\nabla U^n\|_{L^2}^2+C_\epsilon\|\nabla U^{n+1}\|_{L^2}^2+\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2+\epsilon\|AU^n\|_{L^2}^2;\end{aligned}\tag{5.11}$$

特别地，我们估计得

$$\begin{aligned}-(U^n\cdot\nabla\theta^n,\theta^{n+1}) &\lesssim \|U^n\|_{L^\infty}\|\nabla\theta^n\|_{L^2}\|\theta^{n+1}\|_{L^2}\lesssim \|U^n\|_{L^2}^{1/2}\|AU^n\|_{L^2}^{1/2}\|\theta\|_{L^2}\\ &\lesssim \epsilon\|AU^n\|_{L^2}^2+\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2+C_\epsilon\|U^n\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

对 $[0,T_0]$ 应用 Gronwall 引理，其中 $T_0\in[0,T]$ 有待确定，我们得到

$$\|\nabla U^{n+1}\|_{L^2}^2+\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2\lesssim \big(C_\epsilon T_0\|\nabla U^n\|_{L^\infty L^2}^2+\epsilon\|AU^n\|_{L^2L^2}^2\big)e^{C_\epsilon T_0},$$

其中，空间范数是指在 Ω 上的范数，时空范数是指在 $\Omega\times[0,T_0]$上。然后，对 (5.11) 关于时间积分，此外还得到

$$\begin{aligned}\|AU^{n+1}\|_{L^2L^2}^2\lesssim{}& C_\epsilon\|\nabla U^n\|_{L^2L^2}^2+\epsilon\|AU^n\|_{L^2L^2}^2\\ &+T_0\big(C_\epsilon T_0\|\nabla U^n\|_{L^\infty L^2}^2+\epsilon\|AU^n\|_{L^2L^2}^2\big)e^{C_\epsilon T_0}.\end{aligned}$$

记

$$\|(U,\theta)\|^2=\|\nabla U\|_{L^\infty L^2}^2+\|\theta\|_{L^\infty L^2}^2+\|AU\|_{L^2}^2.$$

取 $\epsilon>0$　　充分小，然后再取 $T_0\in[0,T]$ 充分小，我们得到压缩不等式

$$\|(U^{n+1},\theta^{n+1})\|\le\frac{1}{2}\|(U^n,\theta^n)\|$$

在 $[0,T_0]$ 上，对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 均成立。注意，$T_0>0$ 是常数，即它只依赖于 K_0 和 T。根据压缩原理，(u^n,θ^n) 在 $\Omega\times[0,T_0]$ 上的 $(L^2D(A)\cap L^\infty V)\times L^\infty L^2$ 中收敛到某个 (u,θ)。此外，近似解序列在 $\mathcal{X}_{T_0}\times\mathcal{Y}_{T_0}$ 中一致有界。因此，取子列并利用弱 -* 极限的唯一性，我们证明了存在 $(u,\theta)\in\mathcal{X}_{T_0}\times\mathcal{Y}_{T_0}$，使得

$$\begin{aligned}&u^n\to u \text{ strongly in } L^\infty H\cap L^2D(V),\\ &u^n\rightharpoonup u \text{ weakly in } L^3W^{2,3}\cap H^1V\cap H^1V',\\ &u^n\rightharpoonup u \text{ weakly-* in } W^{1,\infty}L^2,\\ &\theta^n\to\theta \text{ strongly in } L^\infty L^2,\\ &\theta^n\rightharpoonup\theta \text{ weakly in } H^1L^2,\\ &\theta^n\rightharpoonup\theta \text{ weakly-* in } L^\infty H^1\end{aligned}\tag{5.12}$$

在时间区间 $[0,T_0]$ 上。我们旨在证明 (u,θ) 是以下方程组的解

$$\begin{aligned}&u_t+Au+\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)=\mathbb{P}(\theta e_2),\\ &\theta_t+u\cdot\nabla\theta=-u\cdot e_2,\end{aligned}$$

其初　始数据 $(u(0)\ \theta(0))=(u_0,\theta_0)$。（2.9）中第一个方程的弱形式为

$$\int_0^{T_0}\Big((u_t^n,\psi)+(Au^n,\psi)+(u^{n-1}\cdot\nabla u^n,\psi)\Big)\,ds=\int_0^{T_0}(\theta e_2,\psi)\,ds,\qquad \psi\in C((0,T_0];V).$$

由于 $n\to\infty$，线性项可通过（5.12）直接收敛。对于非线性项，注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0}(u^{n-1}\cdot\nabla u^n-u\cdot\nabla u,\psi)\,ds=\int_0^{T_0}((u^{n-1}-u)\cdot\nabla u^n,\psi)\,ds+\int_0^{T_0}(u\cdot\nabla(u^n-u),\psi)\,ds\\ &=-\int_0^{T_0}((u^{n-1}-u)\cdot\nabla\psi,u^n)\,ds-\int_0^{T_0}(u\cdot\nabla\psi,u^n-u)\,ds\\ &\lesssim\int_0^{T_0}\|u^{n-1}-u\|_{L^2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\|u^n\|_{L^2}^{1/2}\|Au^n\|_{L^2}^{1/2}\,ds+\int_0^{T_0}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|Au\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla\psi\|_{L^2}\|u^n-u\|_{L^2}\,ds\\ &\lesssim\|\psi\|_{L^\infty V}^2\int_0^{T_0}\|u^{n-1}-u\|_{L^2}^2\,ds+\|\psi\|_{L^\infty V}^2\int_0^{T_0}\|u^n-u\|_{L^2}^2\,ds\to0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$，对于 $\psi\in C([0,T_0];\ V)$。此外，注意到由于 $u^n\in C([0,T_0],\ H)$ 且 $u^n(0)=u_0$ 根据（5.12）中的第一次收敛，我们得到 $u\in C([0,T_0],\ H)$ 且 $u(0)=u_0$。对于（2.9）中的第二个方程，令 $\phi\in C_c^\infty(\Omega\times$

$[0,T_0]$)，并考虑

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\theta^n\phi_t\,dxds+\int_{\mathbb{R}^2}\theta^n(0)\phi(0)\,dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\partial_j u_j^{n-1}\bar{\theta}^n\phi\,dxds-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}u_2^n\phi\,dxds=0.$$

同样，第一项、第二项和第四项的收敛性可直接由（5.12）得出。对于非线性项，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0}(u^{n-1}\cdot\nabla\theta^n-u\cdot\nabla\theta,\phi)\,ds&=\int_0^{T_0}\Big(((u^{n-1}-u)\cdot\nabla\theta^n,\phi)+(u\cdot\nabla(\theta^n-\theta),\phi)\Big)\,ds\\&=\int_0^{T_0}\Big(((u^{n-1}-u)\cdot\nabla\theta^n,\phi)-(u\cdot\nabla\phi,\theta^n-\theta)\Big)\,ds\\&\lesssim\|\phi\|_{L^\infty H^1}\int_0^{T_0}(\|u^{n-1}-u\|_{L^2}\|\nabla\theta^n\|_{L^2}+\|\theta^n-\theta\|_{L^2}\|u\|_{L^2})\,ds\\&\lesssim\|\phi\|_{L^\infty H^1}\int_0^{T_0}\Big(\|u^{n-1}-u\|_{L^2}+\|\theta^n-\theta\|_{L^2}\Big)\,ds\to0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，对于 $\phi\in C([0,T_0];H^1)$。

接下来，我们证明唯一性。设 (u,θ) 和 $(\tilde{u},\theta)$ 是具有相同初始数据的 Boussinesq系统的两个解，并将 $(U,\theta)=(u,\theta)-(\tilde{u},\theta)$ 的差记为。将 (u,η) 对应的（2.1）中的前两个方程与 $(\tilde{u},\theta)$ 对应的相同方程相减，可得这一对 (U,θ) 满足

$$\begin{aligned}&U_t+AU+\mathbb{P}(U\cdot\nabla u)+\mathbb{P}(\tilde{u}\cdot\nabla U)=\mathbb{P}(\theta e_2),\\&\theta_t+U\cdot\nabla\theta+\tilde{u}\cdot\nabla\theta=-U\cdot e_2.\end{aligned}\tag{5.13}$$

我们分别用 AU测试（5.13）中的第一个方程，用 θ测试第二个方程，并将二者相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}(\|\nabla U\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2)+\|AU\|_{L^2}^2\\&\quad=(\theta e_2,AU)-(U\cdot\nabla u,AU)-(\tilde{u}\cdot\nabla U,AU)-(U\cdot\nabla\theta,\theta)-(U\cdot e_2,\theta).\end{aligned}$$

对各项进行估计，并利用 ϵ-Young 不等式吸收 $\|AU\|_{L^2}^2$ 的因子，可得

$$\frac{d}{dt}(\|\nabla U\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2)+\|AU\|_{L^2}^2\lesssim(1+\|\nabla u\|_{L^\infty}^2+\|\tilde{u}\|_{L^\infty}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^4)\|\nabla U\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2,$$

并且，通过应用Gronwall不等式可得(u,θ)的唯一性。

剩下要证明$(u^n,\theta^n)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$。事实 $u^n\in\mathcal{X}$由引理3.1 得出， $\theta^n\in\mathcal{Y}$则由引理3.2得到。□

6. Boussinesq系统的渐近性质

现在，我们可以从定理2.1(i)中构造的解恢复其渐近性质。首先，我们回顾[KMZ] 中的一个结论，该结论将在证明中用到。

引理6.1。(i) 设 f: $[0,\infty)\to[0,\infty)$是在 $L^1(0,\infty)$上的可微函数，且满足 $f'\in L^\infty(0,\infty)$。则$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$。(ii) 设 f,g: $[0,\infty)\to[0,\infty)$为可测函数，其中f可微，且g属于 $L^1(0,\infty)$。假设存在$C>0$使得 $\dot{f}+g\le C(f^2+1)$且 $f\le Cg$。则 $\|f\|_{L^\infty}\le C$，并且$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$。(iii) 设 f,g,h: $[0,\infty)\to[0,\infty)$为可测函数，其中g可微，且对某个 $C>0$有 $\|h\|_{L^\infty}\le C$。此外，假设$\lim_{t\to\infty}h=0$。若 $f+g\le h(f+1)$，其中 $f\le Cg$且 $f(0)\le C$，则 $f\in L^\infty(0,\infty)$，且$\lim_{t\to\infty}f=0$。

引理的证明 *6.1*。 部分（i）是显然的。（ii）和（iii）的证明见 [KMZ]。 □

定理的证明 *2.1*(ii)。 不失一般性，由于（2.1）与（1.1）等价，我们研究（2.1）。首先，分别用 u 和 θ 测试速度方程和密度方程，然后将两式相加，得到

$$\frac12\frac{d}{dt}(\|u\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2})+\|\nabla u\|_{L^2}^2=0,$$

这意味着 L^2 范数意义下的 u 和 θ 随时间全局有界，且 u 的 V 范数在整个时间区间上可积。用 u 测试速度方程，立即可得，对所有 $t \geq 0$，均有 $\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \lesssim 1$。因此，由引理6.1(i)可知， u 的 L^2 范数趋于 0。接下来，我们证明速度的 V 范数趋于 0。为此，用 Au 测试速度方程，并进行类似估计，得到式（3.7），其中 u^m 和 v 分别取为 u，从而得到 $\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^4 + 1.$。因此，由引理 6.1(ii)，我们得到（2.6）。接下来，我们证明 u_t 的 L^2 范数趋于 0。首先，对速度方程取时间导数，然后用 u_t 对其进行测试，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 = (\theta_t e_2, u_t) - (u_t \cdot \nabla u, u_t). \tag{6.1}$$

注意，在右端第一项中使用密度方程，可得

$$\begin{aligned}(\theta_t e_2, u_t) &= -\int_\Omega (u\cdot\nabla\theta)(\partial_t u_2) - \int_\Omega u_2 \partial_t u_2 = \int_\Omega \theta u \cdot \nabla \partial_t u_2 - \int_\Omega u_2 \partial_t u_2 \\ &\lesssim \|\theta\|_{L^4}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u_t\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u_t\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中所有常数均可依赖于$\|Au_0\|_{L^2}$和$\|\theta_0\|_{L^2}$。注意，对于最后一个不等式，通过用 θ^3测试密度方程，可以证明$\|\theta\|_{L^4}$有界。最后，右端的最后一项（6.1）可由$\|u_t\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2}$控制。因此，由（6.1）可得

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \lesssim \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2 \lesssim \phi(t)(1 + \|u_t\|_{L^2}^2),$$

其中 $\phi = \|u\|_V^2 + \|u\|_V$ 满足引理6.1(iii)的假设。因此，$\lim_{t\to\infty}\|u_t(t)\|_{L^2} = 0$。此外，利用速度方程估计 Au，可推得$\|Au\|_{L^2} \lesssim \|u_t\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 1$，这意味着 $\|Au(t)\|_{L^2}$ 对所有 $t \geq 0$均有界。现在，对于 (2.7)，注意到 u、∇u 和 u_t 的 L^2-范数衰减已足够，因为 $\|Au - \mathbb{P}(\theta e_2)\|_{L^2} \lesssim \|u_t\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}\|Au\|_{L^2}^{1/2}$，且$\|Au\|_{L^2}$有界。

只需证明（2.8）成立。为此，令 $\epsilon > 0$ 和 $2 \leq t_0 \leq t$ 其中 t_0 需根据 ϵ确定。类似于（3.16），我们有

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_1+1}\|u\|_{W^{1,\infty}} &\leq \int_{t_1}^{t_1+1}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^{1/4}\|A_3 u\|_{L^3}^{3/4} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^{1/2}\|Au\|_{L^2}^{1/2}\right) ds \\ &\lesssim \epsilon + \left(\int_{t_1}^{t_1+1}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/3}\,ds\right)^{3/4}\left(\int_{t_1}^{t_1+1}\|A_3 u\|_{L^3}^3\,ds\right)^{1/4},\end{aligned}$$

当 t_0 充分大时。现在，我们通过取$u^n = u = u^{n-1}$，在时间区间 $[t_1, t_1+1]$ 上应用与（5.7）类似的估计，从而得到$\|A_3 u\|_{L^3(t_1,\,t_1+1)\,L^3}^3 \lesssim 1$。事实上，由于$\|\theta\|_{L^3}$和$\|Au\|_{L^2}$在时间上一致有界，且具有衰减性和可积性，该不等式中的隐常数与时间无关关于$\|u\|_{L^2}$和$\|\nabla u\|_{L^2}$。最后，注意到对所有 $\epsilon_0 > 0$，都存在 t_0 使得 $\left(\int_{t_1-1}^{t_1+1}\|\nabla u\|_{L^2}^{1/3}dt\right)^{3/4} \leq \epsilon_0\epsilon$.因此，取 $\epsilon_0 > 0$ 充分小，随后令 t_0 充分大，最后添加长度为一的区间，可得 $\int_{t_0}^{t}\|u\|_{W^{1,\infty}}\,ds \leq \epsilon(t - t_0)$，对所有 $t \geq t_0$均成立。因此，由（2.8）可由（3.18）推出，证明完毕。□

最后，我们讨论密度的渐近行为。

定理 2.1(iii) 的证明。由于当 $t \to \infty$ 属于 V 时 $u \to 0$，我们得到 $Au \to 0$ 在 H 中弱收敛。由（2.7），我们得到 $\mathbb{P}(\rho e_2)$ 在 H 中弱收敛于 $\to 0$，又由于 $\mathbb{P}(\theta e_2) = \mathbb{P}(\rho e_2)$，根据 $x_2 e_2 = \nabla(x_2^2/2)$，我们还得到 $\mathbb{P}(\theta e_2)$ 在 H 中弱收敛于 $\to 0$。□

致谢

M.S.A. 和 I.K. 获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2205493 的部分资助。

参考文献

[ACW] D. Adhikari、C. Cao 和 J. Wu，《具有垂直耗散的二维布oussinesq方程的整体正则性结果》，《微分方程杂志》251（2011），第6期，1637–1655。[ACS..] D. Adhikari、C. Cao、H. Shang、J. Wu、X. Xu 和 Z. Ye，《具有部分耗散的二维布oussinesq方程的整体正则性结果》，《微分方程杂志》260（2016），第2期，1893–1917。[BS] L.C. Berselli 和 S. Spirito，《论 Boussinesq系统：正则性判据与奇异极限》，Methods Appl. Anal. 18（2011），第4期，391–416。[BFL] A. Biswas、C. Foias 和 A. Larios，《半耗散Boussinesq方程组的吸引子》，Ann. Inst. H. P. Anal. Non Linéaire 34（2017），第2期，381–405。[BrS] L. Brandolese 和 M.E. Schonbek，《黏性Boussinesq系统解的大时间衰减与增长》，Trans. Amer. Math. Soc. 364（2012），第10期，5057–5090。[C] D. Chae，《具有部分黏性项的二维Boussinesq方程的整体正则性》，微分方程进展（2006），第203卷，第2期，497–513。[CD] J.R. Cannon 和 E. DiBenedetto，《数据属于 L^p 的 Boussinesq方程初值问题》，《Navier-Stokes问题的近似方法》（研讨会论文集，帕德博恩大学，帕德博恩，1979），数学讲义，第771卷，施普林格，柏林，1980，第129–144页。[CEIM] G. Crippa、T. Elgindi、G. Iyer 和 A. Mazzucato，《输运方程中 Sobolev范数的增长与正则性丧失》，Philos. Trans. Roy. Soc. A. **380**，2022 24, 12 CF P. Constantin 和 C. Foias，《[ ] Navier-Stokes方程》，《芝加哥数学讲座》，芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1988。[CG] M. Chen 和 O. Goubet，《二维耗散Boussinesq系统的长时间渐近行为》，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 2（2009），第1期，37–53。[CH] J. Chen 和 T.Y. Hou，《具有 C^1 的二维Boussinesq方程与三维Euler方程的有限时间爆破》，$^\alpha$ 速度与边界，Comm. Math. Phys. 383（2021），第3期，1559–1667。[CN] D. Chae 和 H.-S. Nam，《Boussinesq方程的局部存在性与爆破判据》，Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127（1997），第5期，935–946。[CW] C. Cao 和 J. Wu，《具有垂直耗散的二维各向异性Boussinesq方程组的整体正则性》，理性力学与分析档案 208（2013），第3期，985–1004。[DL] R. DiPerna 和 P. Lions，《常微分方程、输运理论与 Sobolev空间》，Invent. Math. 98，511–547（1989）。[DP] R. Danchin 和 M. Paicu，《部分黏性Boussinesq系统的 Leray 与 Fujita-Kato 定理》，Bull. Soc. Math. France 136（2008），第2期，261–309。[DWZZ] C.R. Doering、J. Wu、K. Zhao 和 X. Zheng，《无浮力扩散的二维Boussinesq方程的长时间行为》，Phys. D 376/377（2018），144–159。[KMZ] I. Kukavica、D. Massatt 和 M. Ziane，《具有 Dirichlet边界条件的 Boussinesq方程的渐近性质》，arXiv:2109.14672，20214[EJ] T.M. Elgindi 和 I.-J. Jeong，《Boussinesq系统强解的有限时间奇点形成》，Ann. PDE 6（2020），第1期，论文编号5，共50页。[GS] Y. Giga 和 H. Sohr，《柯西问题的抽象 L^p 估计及其在外部区域中 Navier-Stokes方程上的应用》，J. Funct. Anal. 102，（1991）72–94。[HK1] T. Hmidi 和 S. Keraani，《零扩散率二维Boussinesq系统的整体适定性》，微分方程进展 12（2007），第4期，461–480。[HK2] T. Hmidi 和 S. Keraani，《零黏性Boussinesq系统的整体适定性》，Indiana Univ. Math. J. 58（2009），第4期，1591–1618。[HKR] T. Hmidi、S. Keraani 和 F. Rousset，《具有临界耗散的 Euler-Boussinesq系统的整体适定性》，Comm. Partial Differential Equations 36（2011），第3期，420–445。[HL] T.Y. Hou 和 C. Li，《黏性Boussinesq方程组的整体适定性》，Discrete Contin. Dyn. Syst. 12（2005），第1期，1–12。[HKZ1] W. Hu、I. Kukavica 和 M. Ziane，《有界区域中 Boussinesq方程的正则性》，J. Math. Phys. 54（2013），第8期，081507，共10页。[HKZ2] W. Hu、I. Kukavica 和 M. Ziane，《零扩散率黏性 Boussinesq方程组的正则性保持》，Asymptot. Anal. 91（2015），第2期，111–124。[HW] W. Hu 和 J. Wu，《通过 Navier-Stokes流对最优混合进行边界控制的逼近方法》，《微分方程杂志》267（2019），第10期，5809–5850。[HWW+] W. Hu、Y. Wang、J. Wu、B. Xiao 和 J. Yuan，《具有 Navier 型边界条件的部分耗散二维Boussinesq方程》，Phys. D 376/377（2018），39–48。[HS] F. Hadadifard 和 A. Stefanov，《具有 $\alpha > 2/3$ 的二维临界Boussinesq系统的整体正则性》，Comm. Math. Sci. 15（2017），第5期，1325–1351。

[JK] J. Jang 和 J. Kim，线性分层 Boussinesq 方程的渐近稳定性与精确衰减率（水平周期条带区域），arXiv:2211.13404。[JMWZ] Q. Jiu、C. Miao、J. Wu 和 Z. Zhang，具有一般临界耗散的二维不可压缩 Boussinesq 方程，SIAM数学分析杂志 46 (2014)，第 5 期，3426–3454。[J] N. Ju，有界区域内无扩散二维 Boussinesq 方程解的整体正则性与长时间行为，《数学与流体力学杂志》19 (2017)，第 1 期，105–121。[KTW] J.P. Kelliher、R. Temam 和 X. Wang，多孔介质对流 Darcy-Brinkman-Boussinesq 模型相关的边界层，Phys. D 240 (2011)，第 7 期，619–628。[KW1] I. Kukavica 和 W. Wang，零扩散分数阶 Boussinesq 方程的整体 Sobolev 持久性，纯粹与应用泛函分析 5 (2020)，第 1 期，27–45。[KW2] I. Kukavica 和 W. Wang，零扩散二维 Boussinesq 方程解的长时间行为，动力学与微分方程杂志 32 (2020)，第 4 期，2061–2077。[KWZ] I. Kukavica、F. Wang 和 M. Ziane，Sobolev 空间中 Boussinesq 方程解的正则性保持，微分方程进展 21 (2016)，第 1/2 期，85–108。[KPY] A. Kiselev、J. Park 和 Y. Yao，二维 Boussinesq 方程的小尺度形成，arXiv:2211.05070，2022。[LLT] A. Larios、E. Lunasin 和 E.S. Titi，具有各向异性黏性且无热扩散的二维 Boussinesq 系统的整体适定性，《微分方程杂志》255 (2013)，第 9 期，2636–2654。[LPZ] M.-J. Lai、R. Pan 和 K. Zhao，二维黏性 Boussinesq 方程的初边值问题，理性力学与分析档案 199 (2011)，第 3 期，739–760。[S] E. Stein，奇异积分与函数的可微性，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[SW] A. Stefanov 和 J. Wu，具有临界耗散的二维 Boussinesq 方程的整体正则性结果，分析与数学杂志 137 (2019)，第 1 期，269–290。[T1] R. Temam，Navier-Stokes 方程，AMS Chelsea出版社，普罗维登斯，罗德岛州，2001；理论与数值分析，1984 年版重印。[T2] R. Temam，Navier-Stokes 方程与非线性泛函分析，第二版，CBMS-NSF应用数学区域会议系列，第 66 卷，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1995。

数学系 , 南加州大学 , 洛杉矶 , 加利福尼亚州 90089
电子邮箱：maydin@usc.edu

数学系，南加州大学，洛杉矶，加利福尼亚州 90089 电子邮箱：kukavica@usc.edu

数学系 , 南加州大学 , 洛杉矶 , 加利福尼亚州 90089
电子邮箱：ziane@usc.edu