arXiv:2304.00496v1 [math.DG] 2 Apr 2023

芬斯勒空间上的射影对称性

B. Lajmiri, B. Bidabad*, M. Rafie-Rad, Y. Aryanejad-Keshavarzi

摘要

Akbar-Zadeh 提出了爱因斯坦-芬斯勒空间的两种定义，我们将证明这两种定义沿着I-不变射影向量场的积分曲线是等价的。保持 H-曲率不变的 C-射影向量场子代数已得到广泛研究。本文证明，在具有负定里奇曲率的闭芬斯勒空间上，该子代数退化为 Killing 向量场的子代数。此外，如果一个爱因斯坦-芬斯勒空间存在这样的射影向量场，那么其旗曲率为常数。最后，根据里奇曲率的符号，对允许某些射影向量场存在的紧致各向同性平均Landsberg流形进行了分类。

关键词：射影向量、对称性、射影李代数的物理意义、芬斯勒、Landsberg、各向同性平均Landsberg。AMS主题分类 53B40，53C60。

1 引言

各向同性平均 Landsberg 流形这一类，近年来已成为芬斯勒几何理论及其应用中无处不在的一类度量。它在揭示该几何的一些模糊特征方面发挥着重要作用。此处不求面面俱到，我们列举其中一些较为重要的例子，参见 [5, 7, 8, 11, 14, 17, 18, 19],等。

芬斯勒空间（M, F）上所有射影向量场的集合在通常的李括号运算下构成一个有限维李代数，称为射影代数，记为 $p(M, F)$。它是射影群 $P(M, F)$ 的李代数。近年来，人们研究了保持嘉当曲率和 H- 曲率不变的射影向量场子代数。该子代数包含保持平均嘉当张量 I 不变的向量场。我们证明，在一个闭芬斯勒空间上，

*通讯作者，bidabad@aut.ac.ir；behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr

若其里奇曲率负定，则该子代数缩减为 Killing 向量场子代数。

这一类中有多种芬斯勒度量，例如 $\mathbb{R}^n$中强凸区域上的 Funk 度量。若 g_{ij} 是芬斯勒结构 F 的基本张量，则对 g_{ij} 取垂直导数可得到嘉当张量 C，而沿测地线对 C 取水平导数则称为兰德斯伯格张量 L。

为什么研究 I-不变射影向量场?

作为研究射影对称性的物理动机，我们回顾一下：相对论由爱因斯坦的两种相互依存的理论构成，即狭义相对论和广义相对论。狭义相对论适用于不存在引力时的所有物理现象，而广义相对论则解释引力定律及其与自然界其他力的关系。它涵盖天文学、宇宙学和天体物理学等领域。爱因斯坦的理论目前被认为是关于时空和引力的最恰当模型；牛顿理论和狭义相对论仅在特定情形下是有效的近似理论。其主要目标是从不同视角、以系统的方式阐明：哪些数学事实以及对事实的理念足以支撑广义相对论理论大厦。为此，物理学家可以从爱因斯坦理论中分离出若干相对独立的子结构，包括拓扑、共形、射影、仿射和度量微分结构；这些结构分别与不同的可观测现象或从这些现象推断出的不同关系有关。

特别是，自由落体粒子的运动为空间—时间定义了一种射影结构。这提供了一种射影联络，或一类对称仿射联络的等价类，其中所有联络都具有相同的非参数化测地线曲线。

这可以视为弱等效原理的一种数学表述，该原理适用于牛顿时空以及相对论时空与引力理论，参见 [10]。当前许多研究者的一个研究方向，是寻求芬斯勒方法，以利用量子技术和经典场论的优势。例如，迄今为止，诸如非常特殊相对论和非常特殊广义相对论等对相对论的违背，均已得到表述。另一方面，局部各向异性可以通过一种非线性联络结构来建模，该结构是仿射联络的推广。度量-仿射引力包含各种类型的广义芬斯勒-拉格朗日-Hamilton-Cartan几何，这些几何由适配于非线性联络结构的度量和线性联络加以区分。

平均嘉当张量 I 可以测量底层芬斯勒时空的局部几何各向异性，以及其他非黎曼量——

量 **S**、**E**、**H**等，也被视为局部各向异性的表征（参见定义1 和 3）。然而，只有当它们在时空的芬斯勒宇宙学度量之间保持不变时，才具有物理意义。这在某种程度上类似于 Nurowski 在其研究中所做的工作：让黑暗成为宇宙学中的一个重要议题。因此，为了获得一致的局部各向异性度量，我们应假设它是一个射影不变量。另一方面，根据物理学中的广义协变性公理，各种量和张量必须具有统一的形式，并在观察者变换下保持不变。从数学上说，这意味着我们只允许考虑那些保持所有由度量导出的量不变的变换，例如嘉当张量**C** 和平均嘉当张量 **I**。

射影对称性的研究旨在考察保持 I 不变的射影向量场。

在命题 1中，我们阐明了 **I**-对称性的本质。更直观地说，我们证明，如果 I 是射影不变的，那么 E 和 H也是射影不变的。

此外，本研究过程中还得到了以下结果。

定理 1. 设 (M, F) 是一个爱因斯坦芬斯勒空间，满足 $Ric_{ij} = (n-1)kg_{ij}$，其中 k 为某个常数。若 (M, F) 存在一个非仿射 I-不变射影向量场，则其在每一点的旗曲率 k 均为常数。

定理2. 如果一个 Landsberg空间存在非仿射 I-射影向量场，那么它就是黎曼空间。

定理 3. 设 (M, F) 是一个紧致各向同性平均 Landsberg 流形，且X 是一个保持挠率的对偶迹不变的射影向量场。

1. 若 $R(X, X)$ 负定，则与 X 对应的射影变换化为恒等变换；2. 若 $R(X, X)$ 半负定，则 X 是 Killing向量场，且其水平导数为零，其中 R 是 Cartan hh-曲率张量的迹。

2 预备知识与记号

设 M 为一个 n 维 C^∞ 流形。记 T_xM 为 $x \in M$处的切空间， $TM := \cup_{x\in M} T_xM$为 M的切丛，且 $TM_0 = TM \setminus \{0\}$为切丛的切片。 TM中的每个元素都具有$z = (x, y)$的形式，其中 $x \in M$且 $y \in T_xM$.。自然投影 $\pi : TM \to M$由 $\pi(x, y) := x$给出。拉回切丛 π^*TM是 TM_0上的一个向量丛，且 $v \in TM_0$处的纤维 π_v^*TM是 T_xM的一个副本，其中$\pi(v) = x$。因此，我们有 $\pi^*TM = \{(x, y, v)|y \in T_xM_0, v \in T_xM\}$.

可微流形 M 上的芬斯勒结构是一个连续函数F: $TM \to [0,\infty)$，满足以下性质: F在TM_0:= $TM\backslash\{0\}$上可微，并且在 TM的纤维上正 1 次齐次。具有以下分量的 F^2 的垂直海森矩阵在TM_0上正定，$(g_{ij}) := \left(\left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^iy^j}\right)$.

芬斯勒结构 F定义了基本张量 g: $\pi^*TM\otimes\pi^*TM \to[0,\infty)$，称为芬斯勒度量，其分量为 $g(\partial_i|_v,\partial_j|_v) = g_{ij}(x,y)$，其中 $V = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是 $\pi^\star TM$的截面，且 $v = V|_x = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$。本文中，除非另有明确定义，芬斯勒流形记为对 (M, F) 或 (M, g_{ij})。若分量 $g_{ij}(x,y)$ 与 $y \neq 0$无关，则芬斯勒度量退化为黎曼度量。容易证明$g_{ij}(x,y) = FF_{y^iy^j} + F_{y^i}F_{y^j}$，其中 $F_{y^i} = \frac{\partial F}{\partial y^i}$。因此 (π^*TM, g) 成为 TM_0上的黎曼向量丛。我们将嘉当张量的分量记为 $A_{ijk}(x,y) := \frac{1}{2}F(x, y)\,\dot\partial_k g_{ij}(x,y)$，其中 $\dot\partial_k := \frac{\partial}{\partial y^k}$。嘉当张量 A: $\pi^*TM\otimes\pi^*TM\otimes\pi^*TM \to \mathbb{R}$定义为 $A(\partial_i|_v,\partial_j|_v,\partial_k|_v) = A_{ijk}(x,y)$，其中 $v = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$和 A_{ijk}关于 i、j、k对称。令 $C^i_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}\dot\partial_l g_{jk}$，则有 $C_{ijk} = \frac{A_{ijk}}{F}$。 F的正齐次性与欧拉定理导出 $y^i\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x,y) = 0$. 我们回顾一下，典范截面 $\ell := \ell^i\frac{\partial}{\partial x^i}$的分量定义为 $\ell^i(x,y) := {}_F{}^{y^i}_x(\,,y)$·令 ℓ_i: $= g_{ij}\ell^j = F_{y^i}$，典范截面 ℓ满足 $g(\ell,\ell) = 1$和$A(X,Y,\ell) = 0$。 ——

设 M为一个连通光滑流形，(TM,π,M) 为其去掉零截面的切丛。 M 上的每个局部坐标图都会在 TM上诱导出一个局部坐标图。线性映射 π_*: $TTM \to TM$的核称为垂直分布，记作 VTM。对于每个 $u \in TM$， $Ker\ \pi_{*,u} = V_uTM$由 $\{\frac{\partial}{\partial y^i}|_u\}$张成。水平分布 H: $u \in TM \to H_uTM$是垂直分布的一个补分布。因此，我们有分解 $T_u(TM) = H_uTM \oplus V_uTM$， $\forall u \in TM.$

芬斯勒流形 (M, g_{ij}) 的测地线由方程 $\ddot C^i(t) + 2G^i\Big(C(t)\ \dot C(t)\Big) = 0$刻画，其中， $\dot C(t) = \frac{dC}{dt}$， $\ddot C = \frac{d\dot C}{dt}$以及 $G^i = G^i(x,y)$ 是由 $G^i = \frac{1}{4}g^{il}\Big\{[F^2]_{x^ky^l}y^k - [F^2]_{x^l}\Big\}$给出的喷射系数。这里以及本文其他地方，下标“$x^k$”和“$y^k$”分别表示偏导数 $\frac{\partial}{\partial x^k}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y^k}$。如果 F 是黎曼的，那么 g_{ij} 仅是 x 的函数，并且 $G^i(x,y) = \frac{1}{2}\gamma^i_{jk}(x)y^jy^k$关于 $y = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$是二次的，其中 $\gamma^i_{jk}(x)$ 是通常的克里斯托费尔符号。

可以观察到，由 $\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - G^j_i\frac{\partial}{\partial y^j}$ 定义的数对 $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ 中，$G^j_i := \frac{\partial G^j}{\partial y^i}$ 构成了 TTM 的水平标架和垂直标架。水平对偶标架和垂直对偶标架由数对 $\{dx^i,\delta y^i\}$ 给出。我们还将 $\frac{\delta}{\delta x^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y^i}$ 分别称为水平（偏）导数和垂直（偏）导数。

设 M 为一个光滑流形，将芬斯勒结构 F 限制到任意给定的切空间 T_xM 上，便得到 T_xM 上所谓的闵可夫斯基范数。芬斯勒流形（M, F）称为局部闵可夫斯基的，若对每一点 $x \in M$，都存在一个局部坐标图（x^i, U），其诱导的切空间坐标为 y^i，使得芬斯勒结构 F（x, y）不依赖于 x。

考虑量 $B^i_{jkl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}$，以及定义在$TM_0$上的良定义张量场 B : $= B^i_{jkl} dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \partial_i$，称为伯瓦尔德曲率。众所周知，$F$ 是 Berwald度量当且仅当 B 为零。

Berwald联络是无挠的，但不一定是度量相容联络。我们分别用 D_k 和 D_k 表示向量场的水平和垂直 Berwald 协变导数，在局部坐标系中则记为；

$$\begin{aligned} D_k X^i &= \tfrac{\delta X^i}{\delta x^k} + X^r G^i_{rk}, \\ \dot{D}_k X^i &= \tfrac{\partial X^i}{\partial y^k} + X^r C^i_{rk}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $G^i_{rk} := \frac{\partial G^i_r}{\partial y^k}$。Berwald联络的联络 $1-$ 形式为 ${}^b\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^j + \dot{A}^i{}_{jk} dx^k$，其中， $\Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2} g^{il}(\frac{\delta g_{lk}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^l})$，且 $\dot{A}^i_{jk}$: $= A^i_{jk|s}\ell^s$。

Cartan联络是一种度量相容的水平无挠联络，其联络 $1-$ 形式为 ${}^c\omega^l_i$: $= \Gamma^l_{ij} dx^j + C^l{}_{ij} \delta y^j$.

任意(1, 1)型张量场 S 的水平和垂直 Cartan 协变导数分别记为 $\nabla_k S$ 和 $\nabla_k S$ ，在局部坐标系中，我们有

$$\begin{aligned} \nabla_k S^j_i &= \delta_k S^j_i - S^j_r \Gamma^r_{ik} + S^r_i \Gamma^j_{rk}, \\ \dot{\nabla}_k S^j_i &= \dot{\partial}_k S^j_i - S^j_r C^r_{ik} + S^r_i C^j_{rk}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

分别，其中 $\dot{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial y^k}$ 和 $\delta_i := \frac{\delta}{\delta x^i}$。在局部坐标系中，Cartan hh-曲率张量的分量为

$$R^i_{jkm} = \delta_k \Gamma^i_{jm} - \delta_m \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{jk} + R^s_{km} C^i_{sj},$$

其中， $R^i_{km} := y^p R^i_{pkm}$。在局部坐标系中，Cartan hv-曲率张量和 Cartan vv-曲率张量分别定义为

$$P^i_{jkl} = \nabla^i C_{kjl} - \nabla_j C^i_{kl} + C^i_{kr} \nabla_0 C^r_{jl} - C^r_{kj} \nabla_0 C^i_{rl}, \tag{2.3}$$

$$Q^i_{jkl} = C^i_{lr} C^r_{jk} - C^i_{rk} C^r_{jl}, \tag{2.4}$$

其中， $\nabla_0 := y^i \nabla_i$。Cartan联络还满足以下 Ricci恒等式。

$$\nabla_k \nabla_l \Psi^i - \nabla_l \nabla_k \Psi^i = \Psi^r R^i_{rkl} - \dot{\nabla}_r \Psi^i R^r_{0kl} - \nabla_r \Psi^i S^r_{kl}, \tag{2.5}$$

其中 $S^r_{kl} = C^r_{kl} - C^r_{lk}$，参见 [3, 第 19 页，公式 (9.4)]。Berwald联络的水平-水平曲率张量分量定义为

$$K^i_{jkl} = (\delta_k G^i_{jl} - G^i_{jls} G^s_k) - (\delta_l G^i_{jk} - G^i_{jks} G^s_l) + G^i_{rk} G^r_{jl} - G^i_{lr} G^r_{jk}, \tag{2.6}$$

其中 $G^i_{jks} := \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial y^s}$，见 [3, 第 205] 页。对 $i = k$ 进行缩并，得到 K_{jl} : $= K^i_{jil}$。对于每个 $y \in T_x M$，我们将 Cartan hh-曲率张量的迹记为

$$\mathbf{R}_y(u) := R^i{}_k(y) u^k \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.7}$$

其中各分量为

$$R^i{}_k(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

给定任意平面 $P = span\{y, v\} \subset T_xM$，该平面 P 在旗极 y 下的旗曲率定义为

$$\mathbf{K}(p, y) := \frac{\mathbf{g}_y(\mathbf{R}_y(v), v)}{\mathbf{g}_y(y, y)\mathbf{g}_y(v, v) - \mathbf{g}_y(v, y)\mathbf{g}_y(v, y)}. \tag{2.8}$$

若芬斯勒结构 F 具有标量旗曲率，或称具有各向同性的 K =K(y)，则对于任意非零切向量 $y \in T_xM$ 以及任何包含y的旗 P，K(p, y)均与平面 P无关。在这种情况下，我们有

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{K}(y)\Big\{\mathbf{g}_y(y, y)\mathrm{I}_y - \mathbf{g}_y(y, .)y\Big\},\ y \in T_xM,\ x \in M,$$

其中 I_y: $T_xM \longrightarrow T_xM$表示恒等映射，且 $\mathbf{g}_y(y, .) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i}dx^i$.

引理 1. 设 (M, F) 为一个芬斯勒流形。对于 Berwlad 联络，我们有如下关系

$$D_mD_k\Psi - D_kD_m\Psi = K^r_{0mk}\dot{\partial}_r\Psi,$$

其中 Ψ 是一个 1-次齐次函数， K 是 Berwald联络中的 hh-曲率。

证明。 将 Berwald 协变导数的公式（2.1）使用两次，我们得到

$$\begin{aligned} D_mD_k\Psi - D_kD_m\Psi &= (\delta_m\delta_k\Psi - \delta_r\Psi G^r_{mk}) - (\delta_k\delta_m\Psi - \delta_r\Psi G^r_{km}) \\ &= \delta_m\delta_k\Psi - \delta_k\delta_m\Psi = (\delta_m\delta_k - \delta_k\delta_m)\Psi = [\delta_m, \delta_k]\,\Psi. \end{aligned}$$

使用括号 $[\delta_m, \delta_k] = K^r_{0mk}\dot{\partial}_r$，其中 $K^r_{0mk} := y^jK^r_{jmk}$ 是 Berwald hh-曲率张量的分量，参见例如[4]。

$$D_mD_k\Psi - D_kD_m\Psi = K^r_{0mk}\dot{\partial}_r\Psi.$$

因此，证明得证。 □

接下来需要用到以下定理;

定理 A。 *[4]*(Deicke) 设 F 是 T_xM上的一个闵可夫斯基范数。以下三个陈述等价:
(a) F 是欧几里得的。也就是说，它源自一个内积。(b) 对所有 i、j、k， $C_{ijk} = 0$。(c) 对所有 k， $C^k := g^{ij}C_{ijk} = 0$。

2.1 非黎曼量与特殊芬斯勒空间

利用 $\mathbb{R}^n$ 上的体积形式，可以定义畸变标量函数$\tau(x,\ y)$，其定义在 TM_0 上，定义如下，参见 [15]。

$$\tau(x,y) := \ln\Big[\frac{\sqrt{\det\Big(g_{ij}(x,y)\Big)}}{\mathrm{Vol}(\mathrm{B}^n(1))}\mathrm{Vol}\Big\{(y^i)\in\mathbb{R}^n\Big|\ F\Big(y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\Big)<1\Big\}\Big].$$

考虑由 $\mathbf{I}_y := I_i(x,y)dx^i$ 定义的平均卡当挠率，其中

$$I_i(x,y) := \frac{\partial\tau}{\partial y^j}(x,y) = \frac{1}{2}g^{jk}(x,y)\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}(x,y).$$

根据 Deicke 定理 A，F_x 在 $x\in M$ 处是欧几里得的，当且仅当$\mathbf{I}_y=0$，或等价地，$\tau=\tau(x)$ 在 $x\in M$处，见 [4]。

考虑张量场 L，其分量为 $L_{ijk} := \nabla_0 C_{ijk}$，称为兰德斯伯格张量，并回忆在此情形下 $\nabla_0 = D_0$。记张量场 J 的分量为$J_i := g^{jk}L_{ijk}$，称为平均兰德斯伯格张量。

若 $\mathbf{L}=\mathbf{0}$（分别为 $\mathbf{J}=\mathbf{0}$），则称芬斯勒度量为兰德斯伯格度量（分别称为弱兰德斯伯格度量）。

作为各向同性平均兰德斯伯格度量的一个例子，单位球 $\mathrm{B}^n\subset I\!R^n$ 上的广义 Funk 度量满足 $\mathbf{J}+cF\mathbf{I}=0$，其中 $c\neq 0$ 为某个常数，见 [9, 16]。一般相对各向同性平均兰德斯伯格度量是一种更一般的芬斯勒结构，定义如下

$$J_i + \lambda(x,y)I_i = 0.$$

我们可以利用 Akbar-Zadeh 的一种技巧轻松证明以下定理，该技巧由本文作者之一在 [5] 中使用。

定理 4. 设 (M,F) 为紧致的一般相对各向同性平均Landsberg空间，即 $\mathbf{J}=\lambda F\mathbf{I}$，其中 λ 为某个常数。那么，(M,F) 要么是黎曼空间，要么是弱兰德斯伯格空间。

研究畸变沿测地线 $\sigma(t)$ 变化的速率是一个自然的问题。

定义 1. S曲率 $\mathbf{S}=\mathbf{S}(x,y)$ 定义为

$$\boldsymbol{S}(x,y) := \frac{d}{dt}\left[\tau(\sigma(t),\dot\sigma(t))\right]|_{t=0}. \tag{2.9}$$

它关于 y 正齐次，次数为一，即 $\mathbf{S}(x,\lambda y)=\lambda\mathbf{S}(x,y),\lambda>0$. 对于测地线 $\sigma(t)$，定义 $\tau(t) := \tau(\sigma(t)\ \dot\sigma(t))$，以及 $\mathbf{S}(t) := \mathbf{S}(\sigma(t)\ \dot\sigma(t))$。

根据 (2.9)，S(t) $= \tau'$(t)，且若 S $= 0$，则 $\tau(t) = constant$。直观而言，畸变 $\dot{\sigma}(t)$ 中无穷小颜色模式的畸变沿测地线 $\sigma = \sigma(t)$ 保持不变。然而，不同测地线上的畸变可能取不同的值。当 F 是 Berwald度量 时，无穷小颜色模式在整个流形 [17], 上保持不变，因此，方向 $\dot{\sigma}(t)$ 上模式的畸变沿任意测地线 $\sigma = \sigma(t)$ 都保持不变。若芬斯勒结构 F 满足 S $= (n+1)cF$，其中 $c = c(x)$ 是 M 上的标量函数，则称其具有各向同性S曲率。对 S 曲率求两次导数，可得到以下量。

$$E_{ij} := \frac{1}{2}\mathbf{S}_{y^i y^j}(x,y) := \frac{1}{2}\mathbf{S}_{.i.j}(x,y). \tag{2.10}$$

对于所有 $y \in T_x M \backslash 0$，$\mathbf{E}_y = E_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$是$T_x M$ [17]上的对称双线性形式。若$\mathbf{E} = 0$，则称芬斯勒结构 F 为弱Berwald度量。我们来考察非黎曼量 $\mathbf{H}_y := \mathbf{H}_{ij}(y)dx^i \otimes dx^j$，其分量为$\mathbf{H}_{ij} := \nabla_0 E_{ij} = y^k \nabla_k E_{ij}$。

2.2 芬斯勒几何中Akbar-Zadeh的两个里奇张量

芬斯勒几何中有两种由Akbar-Zadeh引入的Ricci张量定义，它们用于定义爱因斯坦空间。简要回顾这些定义所采用的方法后，我们将研究二者之间的关系，并证明这两个Ricci张量沿 I-射影向量场的李导数相等。

回顾一下，我们将Berwald联络的水平-水平曲率及其缩并分别记作 K^m_{jkl} 和 $K_{jl} := K^m_{jml}$。Akbar-Zadeh首先将下列对称张量视为芬斯勒几何中的Ricci张量。

$$\tilde{R}_{ij} := \frac{1}{2}(K_{ij} + K_{ji}). \tag{2.11}$$

接下来，他通过对 Cartan hh-曲率的迹作垂直偏导，引入了第二个 Ricci张量:

$$Ric_{ij} := (\frac{1}{2}F^2\mathcal{R}ic)_{y^i y^j} = \frac{1}{2}(y^j R^m_{jml} y^l)_{y^i y^j}, \tag{2.12}$$

其中 $\mathcal{R}ic(x,y) := R^i_i$。最后，他考虑了定义在 M 上的所有芬斯勒度量 g，并运用广义相对论中的 Einstein-Hilbert 泛函方法。继承 Hamilton 在黎曼几何中的工作，Akbar-Zadeh 将 Einstein-Finsler度量定义为 Einstein-Hilbert泛函的临界点。更直观地说，他考虑了 $S(M)$上的标量函数 $\hat{} H = \tilde{H} - \lambda(x)\mathcal{R}ic$，其中 $\tilde{H} = g^{jk}Ric_{jk}$和 λ是可微的

定义在 M上的函数。Akbar-Zadeh 考虑能量泛函

$$E(g) = \int_{S(M)} \hat{H} d\mu,$$

并将度量 g 作为 $E'(g) = 0$的解。此方法中得到的定义与上文提到的第二种 Ricci 张量定义一致。第二种 Ricci 张量定义的优点之一是其不依赖于 Cartan、Berwald 或 Chern（Rund）联络的选择。

第二种里奇张量用于定义里奇流，并证明其解在芬斯勒曲面上的存在性和唯一性，见 [6]。第二种定义具有与里奇标量类似的几何应用，经过简单计算可得

$$\mathcal{R}ic = \ell^i \ell^k Ric_{ik}. \tag{2.13}$$

考虑第一种和第二种里奇张量，可以给出以下两种芬斯勒-爱因斯坦度量的定义。

$$\tilde{R}_{ij} = c(x) g_{ij}, \tag{2.14}$$
$$Ric_{ij} = (n-1) k(x) g_{ij}, \tag{2.15}$$

分别地，其中 $c(x)$ 和 $k(x)$ 是定义在 M 上的函数。

利用（2.13）可知 $\mathcal{R}ic = (n-1)\, k\,(x)$，因此定义（2.15）等价于

$$Ric_{ij} = \mathcal{R}ic\ g_{ij}. \tag{2.16}$$

请注意，在本文中，我们采用与第一种Ricci张量定义相对应的芬斯勒-爱因斯坦度量。

引理 2. 设 (M, F) 为一个芬斯勒流形。Akbar-Zadeh 的两种里奇曲率，即 $\tilde{Ric}_{ij}$ 和 R_{ij}，它们之间的关系为

$$Ric_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \boldsymbol{H}_{ij}. \tag{2.17}$$

证明。回顾一下，我们有 $Ric = R^m_m = K_{00} = K_{ij} y^i y^j$，且 $K_{jl} := K^m_{jml}$，其中 K^i_{jkl}是 Berwald联络的水平-水平曲率。考虑先前定义的非黎曼量 $\mathbf{H}_{ij} = \nabla_0 E_{ij}$。对 Berwald联络中的比安基恒等式进行缩并，并考虑到方程 $G^i_{jil} = 2E_{jl}$ 可得以下方程，详见 [13,第4] 页。

$$y^j K_{jl}.m = 0, \qquad y^l K_{jl}.m = -2\mathbf{H}_{jm}. \tag{2.18}$$

因此，

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Ric}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} K_{00} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial}{\partial y^j}(K_{kl}y^k y^l) = \frac{1}{2}\dot{\partial}_i\{K_{kl.j}y^k y^l + K_{jl}y^l + K_{kj}y^k\} \\ &= \frac{1}{2}\{K_{jl.i}y^l + K_{ji} + K_{kj.l}y^k + K_{ij}\} \\ &= \frac{1}{2}(K_{ij} + K_{ji}) - \mathbf{H_{ij}} = \tilde{R}_{ij} - \mathbf{H_{ij}}. \end{aligned}$$

因此，证明得证。 □

2.3 芬斯勒几何中的体积形式与格林定理

因此，我们将 $p: TM_0 \longrightarrow M$ 称为M 的非零切向量纤维丛。那么，对于固定点 $x = x_0 \in M$，纤维流形 $V_n = p^{-1}(x_0)$ 将配备黎曼度量 $g(X, Y)$，其中 X 和 Y是 $z \in p^{-1}(x_0)$中 V_n 上的切向量场。S_{x_0} 中满足$F(x, v) = 1$的超曲面 V_n 称为 $x_0 \in M$中的指标曲面。

设球面丛 SM 为 TM_0上所有方向或射线构成的丛。集合 $SM = \{(x, y) \in TM_0 | F(x, y) = 1\}$ 称为单位球面丛或指标曲面丛。稍加思考即可看出，它与指标曲面丛微分同胚，后者是 TM_0的一个（$2n-1$）维子丛。

在每一点 $z \in SM$，我们将一个水平向量场 $X : M \to SM$记为 $X := X^i(z)\frac{\delta}{\delta x^i}$；如果不存在歧义，相应的定义在 SM 上的水平1-形式也记为$X := X_i(z)dx^i$ 。

我们在每一点 $z \in SM$ 取一个单位水平向量场及其定义在 SM上的相应水平1-形式，分别记为 $U = U^i(z)\frac{\delta}{\delta x^i}$和 $\omega = U_i(z)dx^i$。我们用$(d\omega)^{n-1}$ 表示 $d\omega$的$(n-1)$次外幂。Akbar-Zadeh 在纤维丛 SM 上使用的体积元是定义在 SM 上的一个$(2n-1)$-形式，定义如下：

$$\eta = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}\omega \wedge (d\omega)^{n-1}. \tag{2.19}$$

如果流形 M 是紧致的，球面丛 SM 也是紧致的。由于 SM 总是可定向的，在芬斯勒几何中，要在SM上积分，我们无需假设 M 是可定向的。

对于 SM 上任意给定的张量场 W 和 T，在 SM 上定义了一个全局标量积：$\langle W, T\rangle := \int W^{r_1 r_2 \ldots r_k} T_{r_1 r_2 \ldots r_k}\eta$，其中 $W^{r_1 r_2 \ldots r_k} =_{SM} g^{r_1 s_1} g^{r_2 s_2} \ldots g^{r_k s_k} W_{r_1 r_2 \ldots r_k}$。

在 $S(M)$ 上定义的微分形式的余微分算子 δ，关于定义在 $S(M)$ 上的全局标量积，与微分算子 d 互为伴随。水平1-形式 $X = X_i(z)dx^i$ 的水平和垂直微分算子及余微分算子定义如下:

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{2}(D_iX_j - D_jX_i)\ dx^i \wedge dx^j, \\
\dot{d}x &= (-\frac{\partial X_i}{\partial y^j}dx^i \wedge dy^j), \\
\delta X &= -(\nabla^j X_j - X_j\nabla_0 T^j) = -g^{ij}D_iX_j, \qquad (2.20) \\
\dot{\delta}X &= -Fg^{ij}\frac{\partial X_i}{\partial y^j}, \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

分别地，其中 ∇_i 是Cartan水平协变导数，$\nabla_0 := y^i\nabla_i$，而D_i 是伯瓦尔德水平协变导数。这里，余微分算子 $\dot{\delta}$ 和 δ 分别是上述 SM上的全局标量积中 d 和 $\dot{d}$ 的形式伴随算子。

设(M, F)是一个带有体积元 η的芬斯勒流形。散度算子div: $T(M) \mapsto C^\infty(SM)$由 $d(i_X\eta) = (divX)\eta$定义，其中 i_X 表示与 X的内积；对于任意 k形式 ω，$i_X\omega$ 是由 $i_X\omega(V_1, ..., V_{(k-1)}) = \omega(X, V_1, ..., V_{(k-1)})$定义的$(k-1)$形式。可以验证，对于光滑函数 $u \in C^\infty(SM)$ $div(uX) = u\ divX + < grad\ u$，散度算子满足以下乘积法则: $X >$。本文中，如果一个标量函数由其所有形式中的指标缩并得到，我们就称它为散度项。下文中，我们将利用格林定理的以下推论，通过积分略去散度项。例如，回顾一下，向量场 X的水平散度为 $divX = (\nabla_i X^i - X^i\nabla_0 C_i)$，其中 $\nabla_0 = y^j\nabla_j$，并且有以下定理。

推论B。*[1]*（格林定理）设 （M， F）是一个无边界的紧芬斯勒流形。若 X 是 SM 的一个截面，则其散度的积分为零，即

$$\int_{SM}(divX)\eta = 0,$$

其中 η 是 SM 上由下式给出的体积形式 （2.19）。

设 (M, F) 是一个无边界的紧芬斯勒流形。上述推论称为水平1-形式的散度公式，其定义为

$$\int_{SM}(\delta X)\eta = -\int_{SM}(g^{ij}D_iX_j)\eta = 0, \text{ and } \int_{SM}(\dot{\delta}X)\eta = -\int_{SM}Fg^{ij}\frac{\partial X_i}{\partial y^j}\eta = 0,$$

˙其中，余微分算子 δ 和 δ 分别由 (2.20) 定义。 (2.21)

令 $\pi_1 = a_i(z)dx^i$是 $S(M$上的一个水平1-形式。在 [3] 中已证明

$$\delta\pi_1 = -(\nabla^j a_j - a_j \nabla_0 C^j), \tag{2.22}$$

其中 $\nabla^j := g^{ij}\nabla_i$ 是 Cartan水平协变导数， $\nabla_0 := y^i\nabla_i$ ，向量场 $C^j := g^{ik}C^j_{ik}$ 是挠率张量的迹。类似地，设 $\pi_2 = b_j\delta y^j$是 SM上的一个垂直1-形式，则有 [3]

$$\delta\pi_2 = -Fg^{ij}\frac{\partial b_i}{\partial y^j}. \tag{2.23}$$

U利用体积形式，可以定义“平均 Ricci 曲率”如下。

˜定义 2. 平均 Ricci 曲率 $R(X, X)$ 定义为

$$\tilde{R}(X, X) = \frac{\int\limits_{SM} R_{ij}X^iX^j\eta(g)}{\int\limits_{SM}\eta(g)},$$

其中

$$\int\limits_{SM}\eta(g) := Vol(SM),$$

是 SM的体积。

2.4 芬斯勒空间上的射影向量场

可微流形 M 上的每个向量场 X 都自然地诱导出无穷小坐标变换 (x^i, y^i) $\longrightarrow (\bar{x}^i, \bar{y}^i)$，其定义于 TM 上，由 $\bar{x}^i = x^i + X^i dt$ 给出，且 $\bar{y}^i = y^i + y^k\frac{\partial X^i}{\partial x^k}dt.$。由此引出了向量场 X 在 M 上的完全提升 $\hat{}X$ ，它是 TM_0 上的向量场 $\hat{}X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + y^k\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^i}$ ，例如参见 [20]。

设 X 是芬斯勒流形 (M, F) 上的向量场。相对于水平与垂直基标架 $\frac{\delta}{\delta x^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y^i}$，我们将其提升到 TM_0 的完全提升记作 $\hat{}X$，其中，$\hat{}X = X^i + y^j\nabla_j X^i\frac{\partial}{\partial y^i}$，而 ∇^i 是 Cartan联络的水平协变导数。值得注意的是，£ $_{\hat{}X}y^i = 0$、£ $_{\hat{}X}dx^i$ =0，以及微分算子 £ $_{\hat{}X}$，$\frac{\partial}{\partial x^i}$、外微分算子 d 和 $\frac{\partial}{\partial y^i}$ 彼此可交换，例如参见 [3, 20]。

在芬斯勒几何中，几乎所有几何对象都同时依赖于位置和方向。因此，必须相对于完全提升向量场 X，考虑向量场 X 在 M 上的李导数。

¯如果微分同胚将芬斯勒流形 (M, F) 与 (M, F) 之间的每条正向（分别地，反向）测地线映射为正向（分别地，反向）测地线，则称其为射影变换。如果射影变换保持联络系数不变，则称其为仿射变换。

若相应的局部流分别是射影变换或仿射变换，则称光滑向量场 X 是 (M, F) 上的射影向量场或仿射向量场。定义芬斯勒流形上的射影向量场有几种方法。我们经常使用以下引理。

引理 C. *[19]*向量场 X 在芬斯勒流形 (M, F) 是 射影向量场 当且仅当存在函数 $\Psi = \Psi(x, y)$ 定义在 TM_0上，在 y上正 1次齐次，且

$$\pounds_{\hat{X}} G^i = \Psi(x, y) y^i. \tag{2.24}$$

当且仅当 $\Psi(x, y) = 0$ 时，X 是仿射向量场。

射影向量场还可以用以下引理来刻画。

引理 D. *[2]* X 是芬斯勒流形 (M, F) 上的射影向量场，当且仅当

$$\nabla_0(\pounds_{\hat{X}} g_{ij}) = 2\Psi g_{ij} + \Psi_i y_j + \Psi_j y_i, \tag{2.25}$$

其中 $\nabla_0(\pounds_{\hat{X}} g_{ij}) := y^r \nabla_r(\pounds_{\hat{X}} g_{ij})$。

引理 E. *[3]*设 (M, F) 是一个芬斯勒流形。射影向量场满足；

$$\mathcal{L}_{\hat{X}} \nabla_0 C^i_{jk} = \nabla_0 \mathcal{L}_{\hat{X}} C^i_{jk} + \Psi C^i_{jk} + y^i C^s_{jk} \Psi_s, \tag{2.26}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\hat{X}} C^i_{jk} = \dot{\nabla}_k(\nabla_j X^i + C^i_{jh} \nabla_0 X^h) + X^h P^i{}_{jhk} + \nabla_0 X^h Q^i{}_{jhk}. \tag{2.27}$$

3 关于射影向量场的一些公式

在此，我们明确推导了沿射影向量场对一些重要几何对象求李导数的若干公式。

引理 3. 设 (M, F) 为芬斯勒流形。对于 (M, F) 上的射影向量场 X，有

$$1.\ \mathcal{L}_{\hat{X}} G^i_k = \Psi_k y^i + \Psi\delta^i_k \qquad where \quad \Psi_k := \Psi_{.k} := \frac{\partial \Psi}{\partial y^k}. \tag{3.28}$$

$$2.\ \pounds_{\hat{X}} G^i_{jk} = \delta^i{}_j \Psi_k + \delta^i_k \Psi_j + y^i \Psi_{k.j}. \tag{3.29}$$

$$3.\ \pounds_{\hat{X}} G^i_{jkl} = \delta^i_j \Psi_{k.l} + \delta^i_k \Psi_{j.l} + \delta^i_l \Psi_{k.j} + y^i \Psi_{k.j.l}. \tag{3.30}$$

$$4.\ \pounds_{\hat{X}} E_{jl} = \frac{1}{2}(n+1)\Psi_{j.l}. \tag{3.31}$$

$$5.\ \pounds_{\hat{X}} I_k = f_{.k},\ \ where\ f = \nabla_i X^i + I_i \nabla_0 X^i. \tag{3.32}$$

$$6.\ \pounds_{\hat{X}} J_k = \nabla_0 f_{.k} + \Psi I_k. \tag{3.33}$$

$$7.\ (n+1)\Psi_k = \nabla_k f + \nabla_0 f_{.k}, where\ \Psi = (\frac{1}{n+1})\nabla_0 f. \tag{3.34}$$

$$8.\ \pounds_{\hat{X}} K^i_{jkl} = \delta^i_j(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k) + \delta^i_l D_k \Psi_j - \delta^i_k D_l \Psi_j + y^i(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k)_{.j} \tag{3.35}$$

$$9.\ \pounds_{\hat{X}} K_{jl} = D_j\Psi_l - nD_l\Psi_j + y^i D_i \Psi_{l.j}. \tag{3.36}$$

证明。设 (M, F) 是一个非黎曼芬斯勒流形，且 X 是 (M, F) 上的射影向量场。根据引理 C，特征函数 $\Psi(x, y)$ 在 TM_0 上关于 y 正齐次，次数为 1。对 (2.24) 取垂直导数，得到第一个断言 (3.28)。再次对 (3.28) 取垂直导数，得到第二个断言 (3.29)。再对 (3.29) 取垂直导数，得到第三个断言 (3.30)。根据 E 曲率的定义，我们有 $E_{ij} := \frac{1}{2}G^r_{irj}$，因此 £ ˆ$_X E_{ij} = \frac{1}{2}$£ ˆ$_X G^r_{irj}$。在 (3.30) 中缩并指标 i 和 k，并利用欧拉定理，可得

$$2\pounds_{\hat{X}} E_{jl} = \pounds_{\hat{X}} G^i_{jil} = \Psi_{i.j.l} y^i + \Psi_{i.j}\delta^i_l + \Psi_{i.l}\delta^i_j + \Psi_{j.l}\delta^i_i,$$

或 $2\pounds_{\hat{X}} E_{jl} = \Psi_{l.j} + (n+1)\Psi_{j.l}$ 这证明了 4th 引理的陈述。缩并 i和 k 于 (2.27) 中，得到

$$\pounds_{\hat{X}} I_k = (\nabla_i X^i + I_h \nabla_0 X^h)_{.k} + X^h P^i_{ihk} + \nabla_0 X^h Q^i_{ihk}. \tag{3.37}$$

利用（2.3）和（2.4）分别表示 Cartan联络的第二和第三曲率张量，我们看到（3.37）右端的第二项和第三项消失，因此 $\pounds_{\hat{X}} I_k = (\nabla_i X^i + I_h \nabla_0 X^h)_{.k}$. 令 $f := (\nabla_i X^i + I_h \nabla_0 X^h)$，则 $\pounds_{\hat{X}} I_k = f_{.k}$，这就是引理陈述中的方程（3.32）。在（3）中对 i 和 k 在（2.26）中缩并，得到

$$\pounds_{\hat{X}} \nabla_0 I_k = \nabla_0(\pounds_{\hat{X}} I_k) + \Psi I_k. \tag{3.38}$$

利用定义 $J_k := \nabla_0 I_k$、(3.32) 和 (3.38) 可得引理 3 的陈述 (3.33)。经过简单变形可得

$$\Psi = (\frac{1}{n+1})\nabla_0(\nabla_i X^i + I_i \nabla_0 X^i) = \frac{1}{n+1}\nabla_0 f.$$

对最后一个方程求垂直偏导数，可得引理 3 的陈述 (3.34)。对曲率张量 (2.6) 求李导数，并利用 (3.29) 和 (3.30)，可得

$$\pounds_{\hat{X}} K^i_{jkl} = \delta^i_j(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k) + \delta^i_l D_k\Psi_j - \delta^i_k D_l\Psi_j + y^i(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k)_{.j}.$$

因此，我们得到陈述（3.35）。在最后一个方程中对 i 和 k 进行缩并，得到引理 3.36）中的陈述。这就完成了引理3的证明。

□

回想一下，在黎曼几何中，射影向量场的定义里，函数 $\Psi = \Psi(x, y)$ 关于 y是线性的；而在芬斯勒几何情形中，所提及的线性性取决于一个量，这是该空间的非黎曼特征，正如我们在引理 7th 3 的陈述3中所见。

下文将给出向量场 X 的以下定义。

定义 3. 设 (M, F) 为一个芬斯勒流形，且 X 是 (M, F) 上的一个射影向量场。采用上一个引理中的记号，我们称 X 为；

- I-不变射影向量场，或简称 I-射影向量场，若 $\pounds_X \mathrm{I} = 0$，等价地，$f_{.k} = 0$。
- 若 $\pounds_X \mathrm{E} = 0$，则称为 E-不变射影向量场；等价地，$\Psi_{k.j} = 0$。
- 若 $\nabla_k\Psi_j = \nabla_j\Psi_k$，则称为 C-射影向量场。
- 若 $\nabla_l\Psi_{jk} = \nabla_k\Psi_{jl}$，则称为 H-不变射影向量场。

对于 E-不变射影向量场，函数 $\Psi(x, y)$ 在任意点 x处关于 y 是线性的。

3.1 I-射影向量场

如前所述，为了获得能够衡量局部各向异性的相容量，我们必须假设它是一个射影不变量。研究 I 的射影对称性，就是考察使 I 保持不变的射影向量场 X 。

这些I-射影向量场在[12, 13] 中以特殊射影向量场之名被广泛研究。

以下命题强调了对称性的关键作用。

命题 1. 若芬斯勒流形 (M, F) 存在一个 I-射影向量场 X，则 $\pounds_X \mathrm{E} = 0, \pounds_X \mathrm{H} = 0, \pounds_X \mathrm{B} = 0$。

证明。设 X 是一个 I-不变射影向量场，即 £ ˆ$_X$I $=0$。根据 (3.32)，得 $f_{.k}=0$，因此 f 仅依赖于 x 。由 (3.33) 得 $(n+1)\Psi_k=\nabla_k f$ 和 $\Psi=\Psi_k y^k=f_k y^k$，其中 Ψ 是 f 的微分。根据 (3.31)，有 £ ˆ$_X E_{ij}=\frac{1}{2}(n+1)\Psi_{j.l}=\frac{1}{2}(n+1)f_{j.l}=0$，$f$ 与 y 无关，且 Ψ 是 y 上的线性函数。现在，令 $J=0$，由 (3.33) 和 $f_{.k}$ 得 £ ˆ$_X J_k=\Psi I_k=0$。若 $\Psi\neq 0$，则 $I=0$；若 $I\neq 0$，则 $\Psi=0$。我们知道 £ ˆ$_X$Hij $=_{(n+1)_2}\Psi_{ij}$，因为 Ψ 是 y 上的线性函数，二阶导数为零，且 $\Psi_{ij}=0$，因此 £ ˆ$_X$H$_{ij}=0$。利用 (3.30)，由 Ψ 在 y 上的线性性可得 £ ˆ$_X$B $=0$。

□

作为上述命题的一个应用，我们得到以下引理。

引理 4. 设 (M,F) 是一个芬斯勒流形。沿 I-射影向量场的两个里奇˜张量 Ric_{ij} 和 R_{ij} 的李导数相同，即

$$\mathcal{L}_{\hat{X}}Ric_{ij}=\mathcal{L}_{\hat{X}}\tilde{R}_{ij}.$$

证明. 回顾 Akbar-Zadeh 关于里奇曲率的两种定义˜之间的关系，即 Ric_{ij} 和由 (2.14) 与 (2.15) 定义的 R_{ij} ，可表示为 ˜ $Ric_{ij}=R_{ij}-$Hij，参见 (2.17)。设 X 是 (M,F) 上的一个 I-射影向量场。命题1 告诉我们， $\mathcal{L}$ ˆ $_X Hij=0$。由此，(2.17) 得出 $\mathcal{L}$ ˆ$_X Ric_{ij}=\mathcal{L}$ ˆ$_X R_{ij}$. 证明完毕。

□

引理 3 给出了定理 1的证明。

定理 1 的证明。设 X 是一个 I-不变射影向量场，因此$\Psi=y^k\nabla_k f(x)$、$\nabla_l\Psi_k=\nabla_k\Psi_l$和 $\Psi_{i.k}=0$。根据定义 $\tilde{R}_{ij}=\frac{1}{2}(K_{ij}+K_{ji})$，于是 £ ˆ$_X(\tilde{R}_{ij})=\frac{1}{2}$ (£ ˆ$_X K_{ij}+$£ ˆ$_X K_{ji}$)。由于 $\Psi_{i.j}=0$，根据上一条引理中的 (3.36)，我们有

$$\pounds_{\hat{X}}(\tilde{R}_{ij})=\frac{1}{2}(D_i\Psi_j-nD_j\Psi_i+D_j\Psi_i-nD_i\Psi_j)=(1-n)(D_i\Psi_j). \tag{3.39}$$

另一方面，(M,F) 是一个爱因斯坦空间，根据定义 $Ric_{ij}=(n-1)kg_{ij}$，其中根据假设， k 是一个常数。因此，沿着 X 的李导数 ˆ 为

$$\pounds_{\hat{X}}(Ric_{ij})=k(n-1)\pounds_{\hat{X}}g_{ij}. \tag{3.40}$$

根据引理 (4) 方程 (3.39) 和 (3.40) 可得

$$(1-n)(D_i\Psi_j)=k(n-1)t_{ij}, \tag{3.41}$$

其中 $t_{ij}:=\pounds$ ˆ$_X g_{ij}$。缩并的伯瓦尔德导数 D_0等于缩并的嘉当导数 ∇_0，而（3.41）可推出（$1-n$）$D_0D_i\Psi_j=k$（$n-$1）（D_0t_{ij}）。因此，由（2.25）可得

$$(1-n)D_0D_i\Psi_j=k(n-1)(2\Psi g_{ij}+\Psi_i y_j+\Psi_j y_i). \tag{3.42}$$

($\frac{\partial}{\partial y^m}$ 3.42）的偏导数给出

$$(1-n)D_mD_i\Psi_j+(1-n)y^l\dot{\partial}_m(D_lD_i\Psi_j)$$
$$=k(n-1)(2\Psi_m g_{ij}+4C_{ijm}\Psi+\Psi_i g_{jm}+\Psi_j g_{im}).$$

同样，由最后一个方程可得

$$\begin{aligned}(1-n)D_mD_i\Psi_j =&k(n-1)(2\Psi_m g_{ij}+4C_{ijm}\Psi+\Psi_i g_{jm}+\Psi_j g_{im})\\ &-(1-n)y^l\dot{\partial}_m(D_lD_i\Psi_j).\end{aligned}\tag{3.43}$$

我们很容易看出，上述方程中的最后一项，即 $\partial_i(D_lD_m\Psi_j)$，关于三个指标 i、m 和 j 对称。事实上，令 $M_{ij}:=D_i\Psi_j$，并使用水平 Berwald 导数，可得

$$\begin{aligned}M_{ij.m}=\dot{\partial}_mD_i\Psi_j&=\dot{\partial}_m((\partial_i-G_i^r\dot{\partial}_r)\Psi_j-\Psi_rG_{ij}^r)\\ &=\dot{\partial}_m(\partial_i\Psi_j-G_i^r\Psi_{j.r}-\Psi_rG_{ij}^r)=-\Psi_rG_{ijm}^r.\end{aligned}$$

因此 $M_{ij.m}$ 关于 i、j 和 m对称。将（3.43）使用两次，可得

$$D_iD_m\Psi_j-D_mD_i\Psi_j=k(\Psi_m g_{ij}-\Psi_i g_{jm}).\tag{3.44}$$

回想一下，Ψ 是 1 次齐次的。根据欧拉定理，有$y^i\Psi_i=\Psi$。将（3.44）与 y^i 和 y^j 缩并，得到

$$D_0D_m\Psi-D_mD_0\Psi=k(\Psi_mF^2-\Psi y_m).\tag{3.45}$$

利用引理（1），得到

$$\begin{aligned}D_0D_m\Psi-D_mD_0\Psi&=y^k(D_kD_m\Psi-D_mD_k\Psi)=y^k(K_{0mk}^r\dot{\partial}_r\Psi)\\ &=K_{0m0}^r\Psi_r=R_m^r\Psi_r.\end{aligned}\tag{3.46}$$

将上述方程沿梯度向量场 $\Psi^m=g^{im}\Psi_i$ 求协变导数，并利用（3.45），得到

$$R_r^m\Psi_r\Psi^m=k\{\Psi_m\Psi^mF^2-\Psi_iy^i\Psi^my_m\}.$$

上述方程以自由指标形式在全局范围内写为

$$g_y(\mathbf{R}_y(\nabla\Psi),\nabla\Psi)=k\{F^2(y)g_y(\nabla\Psi,\nabla\Psi)-g_y(\nabla\Psi,y)^2\},\tag{3.47}$$

其中 $g_y(.,.)$ 是由 F 诱导的内积，$\mathbf{R}_y$ 是黎曼曲率算子（2.7），而 $\nabla\Psi|_{(x,y)}=g^{im}\frac{\partial\Psi}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^m}|_{(x,y)}\in\Gamma(\pi^*TM)$ 是梯度向量场。

另一方面，存在一个切平面 $P = span\{y, \nabla\Psi\} \in T_xM$，使得旗曲率（2.8）由下式给出

$$\mathbf{K}(P,y) = \frac{g_y(\mathbf{R}_y(\nabla\Psi), \nabla\Psi)}{g_y(y,y)g_y(\nabla\Psi,\nabla\Psi) - g_y(\nabla\Psi, y)^2}. \tag{3.48}$$

需要指出的是，给定任意一点 $(x,y) \in TM_0$，我们有 $\nabla\Psi|_{(x,y)} \neq 0$。事实上，若 $\nabla\Psi = g^{il}\frac{\partial\Psi}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^m} = 0$，则 $g^{im}\frac{\partial\Psi}{\partial y^i} = 0$，并且由于 g^{im} 正定，我们有 $\frac{\partial\Psi}{\partial y^i} = 0$。根据 Ψ 的一次齐次性，欧拉定理断言 $y^i\frac{\partial\Psi}{\partial y^i} = \Psi$。因此，$\Psi = 0$，且 X 成为仿射向量场。根据定理的假设，X 是非仿射的，因此 $\nabla\Psi \neq 0$。将 (3.47) 中的 $F^2(y)$ 替换为 $= g_y(y,y)$，并与 (3.48) 比较，得到 $\mathbf{K}(p,y) = k$。定理 1 的证明至此完成。□

定理2的证明。设 (M,F) 是一个非黎曼 Landsberg空间，且 X 是 (M,F) 上一个非仿射的 I-不变射影向量场。对于 Landsberg空间，我们有 £ˆ$_X$J $= 0$，因此 £ˆ$_X J_k = 0$，其中 $J_k = \nabla_0 I_k$。等式 (3.33) 得出 $\nabla_0 f_{.k} + \Psi I_k = 0$。由等式 (3.32) 和 I- 射影向量场的定义可得 $f_{.k} = 0$。因此 $\Psi I_k = 0$。若 $I_k \neq 0$，则有 $\Psi = 0$，且 X 是一个仿射向量场，这与假设矛盾。否则 $I_k = 0$，根据 Diecke定理A，可知 F 是黎曼的。定理2的证明至此完成。□

根据 [11], 任意紧致常数S-曲率芬斯勒空间都自动具有零 S-曲率这一结果可知。因此，每个紧致爱因斯坦Randers空间都具有零 S-曲率。由此得到以下推论。

推论1. 在维数为 $n > 2$的紧致爱因斯坦Randers空间上，每个射影向量场都是 E-不变的。

现在，我们可以将Akbar-Zadeh关于各向同性平均Landsberg空间的以下定理推广。

定理F. *[3]* 设(M,F)是一个紧致Landsberg流形，且 $X \in P_0(M,r)$。若 $R(X,X)$ 负定，则对应于 X 的射影变换化为恒等变换。若 $R(X,X)$非正定，则 X 是一个Killing向量场，且 X 的水平协变导数为零。

定理 *3*的证明。 设 X 是芬斯勒流形(M,F)上的一个射影向量场。引理 D 断言

$$\nabla_0 t_{ij} = 2\Psi g_{ij} + y_i\Psi_j + y_j\Psi_i, \tag{3.49}$$

其中，$t_{ij} =$£ˆ$_X g_{ij}$。对（3.49）求垂直导数，并利用 £ˆ$_X E_{jk} =$0，可得

$$\nabla_k(\nabla_j X^i + C^i_{jh}\nabla_0 X^h) + X^h R^i_{jhk} = \delta^i_j\Psi_k + \delta^i_k\Psi_j + C^i_{jk}\Psi, \tag{3.50}$$

例如，参见 [2, 第59]页。设一个 2-形式 $a(X)$定义在 SM上。

$$a(X) := (1/2)(\nabla_i X_j - \nabla_j X_i)dx^i \wedge dx^j. \tag{3.51}$$

令 $i_{(X)}$ 为 X 的内积算子，并利用（3.50）和（3.51）得到 et

$$\delta(i_{(X)}a(X)) = g(a(X), a(X)) - [2R_{ij}X^iX^j + (n-1)X^i\Psi_i], \tag{3.52}$$

其中 R_{ij} 是 Cartan 水平-水平曲率的迹，参见（2.7）； δ 表示由（2.22）给出的余微分算子。回顾一下，对于射影向量场X ，由引理（E）可得

$$\mathcal{L}_{\hat{X}}\nabla_0 C^i_{jk} = \nabla_0(\mathcal{L}_{\hat{X}}C^i_{jk}) + \Psi C^i_{jk} + y^i C^s_{jk}\Psi_s, \tag{3.53}$$

其中，其中

$$\mathcal{L}_{\hat{X}}C^i_{jk} = \dot{\nabla}_k(\nabla_j X^i + C^i_{jh}\nabla_0 X^h) + X^h P^i{}_{jhk} + \nabla_0 X^h Q^i{}_{jhk}. \tag{3.54}$$

在（ i 和 j ）中收缩指标（3.54）可得

$$\pounds_{\hat{X}} I_k = (\nabla_i X^i + I_i\nabla_0 X^i)_{.k}) = f_{.k}, \tag{3.55}$$

在（ i 和 j ）中收缩指标（2.26），得到

$$\pounds_{\hat{X}}\nabla_0 I_k = \pounds_{\hat{X}} J_k = \nabla_0 f_{.k} + \Psi I_k. \tag{3.56}$$

考虑到 $f = \nabla_i X^i + I_i\nabla_0 X^i$，对（3.32）应用垂直导数$\Psi = \frac{1}{n+1}\nabla_0 f = \frac{1}{n+1}\nabla_0$（$\nabla_i X^i + I_i\nabla_0 X^i$），可得

$$(n+1)\Psi_i = \nabla_i f + \nabla_0 f_{.i}. \tag{3.57}$$

设 (M, F) 是一个各向同性平均 Landsberg 流形。根据定义，TM 上存在一个函数 $\lambda(x, y)$，使得 $\nabla_0 I_k = J_k = \lambda(x, y)I_k$。李导数

$$\pounds_{\hat{X}} J_k = \pounds_{\hat{X}}\lambda(x, y)I_k = (\pounds_{\hat{X}}\lambda(x, y))I_k + \lambda(x, y)\pounds_{\hat{X}} I_k. \tag{3.58}$$

根据假设，$\pounds_{\hat{X}} I_k = 0$，且（3.58）变为

$$\pounds_{\hat{X}} J_k = (\pounds_{\hat{X}}\lambda(x, y))I_k = \hat{X}.(\lambda(x, y))I_k, \tag{3.59}$$

并利用（3.56）可得

$$\nabla_0 f_{.k} = \hat{X}.\lambda(x, y)I_k - \Psi I_k. \tag{3.60}$$

设定 $h(x, y) := X.\lambda(x, y)$，并利用 (3.57) 和 (3.60)，可得

$$(n+1)\Psi_i = \nabla_i f + hI_i - \Psi I_i. \tag{3.61}$$

将 X^i 移至 (3.61) 等式两边，可得

$$(n+1)X^i\Psi_i = X^i\nabla_i f + hI_iX^i - \Psi X^iI_i = \nabla_i\left(X^if\right) - f\nabla_iX^i + h\rho - \Psi\rho, \quad (3.62)$$

其中我们置 $\rho := X^iI_i := g(X, I^*)$。添加并减去项$I_i\nabla_0X^i$，得到

$$(n+1)X^i\Psi_i = \nabla_i\left(X^if\right) - f(\nabla_iX^i + I_i\nabla_0X^i) + f\nabla_0\rho + h\rho - \rho\Psi. \quad (3.63)$$

回顾一下，$f\nabla_0\rho = \delta(f\rho V) - (n+1)\rho\Psi$，其中 $\Psi = (\frac{1}{n+1})\nabla_0(\nabla_iX^i + I_i\nabla_0X^i)$。因此，(3.63) 可写为

$$(n+1)X^i\Psi_i = -\delta((X+\rho V)f) - f^2 + h\rho - fg\rho - (n+2)\Psi\rho. \quad (3.64)$$

为了计算 $X^i\psi_i$ 在 (3.52) 中的值，我们证明 $\Psi\rho$ 在上述方程中是 SM上的一个散度项。令

$$Y_i = g(X,l)\Psi_i - F^{-1}g(X,l)\Psi l_i,$$

其中 Y_i 是 SM上的垂直1-形式的分量。我们将详细证明，垂直1-形式 Y_i 在 SM上的散度算子 δ 给出

$$-\dot{\delta}Y = X^i\Psi_i - nF^{-1}g(X,l)\Psi. \quad (3.65)$$

若 $Y = Y_k\frac{\delta y^k}{F}$ 是一个垂直1-形式，则由 (2.21) 定义的 Y 的垂直散度 $\dot{\delta}Y$ 为 $\dot{\delta}Y = -Fg^{ij}\frac{\partial Y_j}{\partial y^i}$。设 $Y_i = g(X,l)\Psi_i - {}^{g_{(X,l)}}{}_F\ \Psi l_i$，其中$l^i = \frac{y^i}{F}$，$g(X,l) = g_{km}X^k\frac{y^m}{F} = g_{km}X^kl^m$。我们有，

$$\begin{aligned}\dot{\partial}_j(g(X,l)) =& \dot{\partial}_j(g_{km}X^kl^m) = 2C_{kmj}X^kl^m + g_{km}\dot{\partial}_jX^kl^m + g_{km}X^k\dot{\partial}_jl^m\\ =& g_{kl}X^k(\frac{\delta^m_j - l^ml_j}{F}) = \frac{X_j - g(X,l)l_j}{F}.\end{aligned}$$

因此，

$$l_j = g_{ij}\frac{y^i}{F} = (\frac{1}{2}F^2)_{.i.j}\frac{y^i}{F} = \frac{(\frac{1}{2}F^2)_{.j}}{F} = \frac{FF_{y^j}}{F} = F_{.j},$$

，由此得到 $l_j = \partial_jF$。此外，我们还有

$$g_{ij} = (\frac{1}{2}F^2)_{.i.j} = F_{.i}F_{.j} + FF_{.i.j} = l_il_j + F\dot{\partial}_jl_i.$$

因此，$\dot{\partial}_j l_i = \frac{g_{ij}-l_i l_j}{F}$。接下来我们计算这一项 $\dot{\delta}Y$：

$$\begin{aligned}\dot{\delta}Y =& -Fg^{ij}\dot{\partial}_j(g(X,l)\Psi_i) + Fg^{ij}\dot{\partial}_j(\frac{g(X,l)}{F}\Psi l_i)\\ =& -Fg^{ij}\dot{\partial}_j(g(X,l))\Psi_i - Fg^{ij}g(X,l)\Psi_{ij} + Fg^{ij}\dot{\partial}_j(g(X,l))\frac{1}{F}\Psi l^i\\ &+ Fg^{ij}\frac{g(X,l)}{F}\dot{\partial}_j\Psi l_i + Fg^{ij}\frac{g(X,l)}{F}\dot{\partial}_j l_i\Psi + Fg^{ij}\dot{\partial}_j(\frac{1}{F})g(X,l)\Psi l_i.\end{aligned}$$

将上式中的各项 $\dot{\partial}_j(g(X,l)) = \frac{X_j - g_{(X,l)}\dot{\partial}_j F}{F} = l_j$和 $\dot{\partial}_j l_i = \frac{g_{ij}-l_i l_j}{F}$代入，得到

$$\begin{aligned}\dot{\delta}Y =& -Fg_{ij}(\frac{X_j - g(X,l)l_j}{F})\Psi_i - Fg^{ij}g(X,l)\Psi_{ij} + Fg^{ij}(\frac{X_j - g(X,l)l_j}{F})\frac{1}{F}\Psi l_i\\ &+ Fg^{ij}\frac{g(X,l)}{F}\Psi_j l_i + Fg^{ij}\frac{g(X,l)}{F}\Psi\dot{\partial}_j l_i + Fg^{ij}\frac{(-\dot{\partial}_j F)}{F^2}g(X,l)\Psi l^i\\ =& -X^i\Psi_i + g(X,l)\Psi_i l^i - Fg(X,l)g^{ij}\Psi_{ij} + F^{-1}X^i\Psi l_i +\\ & F^{-1}g(X,l)\Psi(g^{ij}g_{ij} - l^j l_j) - F^{-1}g(X,l)\Psi\\ =& -X^i\Psi_i + F^{-1}g(X,l)\Psi + F^{-1}g(X,l)\Psi - 2F^{-1}g(X,l)\Psi + nF^{-1}g(X,l)\Psi\\ =& -X^i\Psi_i + nF^{-1}g(X,l)\Psi.\end{aligned}$$

因此，我们有（3.65）。类似地，若令 $Z_i = F^{-1}\left[\Psi.X_i - g(X,l)\Psi l_i\right]$，则应用散度算子可得

$$-\dot{\delta}Z = nF^{-1}g(X,l)\Psi - X^i\Psi_i - 2g(X,I^*)\Psi, \tag{3.66}$$

其中我们采用了记号 $g(X,I^*) := X^i I_i = \rho$。将（3.65）与（3.66）相加，得到

$$\dot{\delta}(Y-Z) = 2g(X,I^*)\Psi = 2\rho\Psi.$$

接下来我们证明， $h\rho$和 $fg\rho$是 SM上的散度项。令

$$W_i := g(X,u)\dot{\delta}_i h - F^{-1}g(X,l)h.l_i,$$

其中 Y_i 是垂直1-形式的分量。我们有

$$-\dot{\delta}W = X^i\dot{\delta}_i h - nF^{-1}g(X,l)h. \tag{3.67}$$

如果我们设定

$$U_i = F^{-1}hX_i - F^{-1}g(X,l)hl_i,$$

那么我们得到

$$-\dot{\delta}U = X^i\dot{\delta}_i h + 2g(X, I^*)h - nF^{-1}g(X, l)h. \tag{3.68}$$

由（3.67）和（3.68），我们得出

$$\dot{\delta}(W - U) = 2g(X, I^*)h = 2\rho h, \tag{3.69}$$

是一个散度项。同理，可以证明 $fg\rho$ 是一个散度。利用（3.69），将（3.64）改写为以下形式

$$\begin{aligned}(n+1)X^i\Psi_i &= -\delta((X+\rho V)f) - \frac{1}{2}\dot{\delta}(W-U) - \frac{(n+2)}{2}\,\dot{\delta}(Y-Z) - f^2\\ &= Div - f^2.\end{aligned} \tag{3.70}$$

将（3.70）代入（3.52），得到

$$\delta(i_{(X)}a(X)) = g(a(X), a(X)) + \frac{n-1}{n+1}\delta((X+\rho V)f)^2 - 2R_{ij}X^iX^j + Div, \tag{3.71}$$

其中 R_{ij} 是 Cartan hh-曲率的迹。在 SM上对（3.71）积分，并利用格林定理的推论B 略去散度项，便得到

$$< a(X), a(X)) > + \frac{n-1}{n+1}\int_{SM}\delta(X+\rho V)^2\eta = 2\int_{SM}R_{ij}X^iX^j\eta.$$

若 $R(X, X) = R_{ij}X^iX^j < 0$ 为负，由于上述等式左边为正，故当 $X = 0$ 时等号成立，而与 X 对应的无穷小射影变换化为恒等变换。

若 $R(X,\ X) \le 0$，则 $\delta(X + \rho V) = 0$ 且 $a(X) = 0$. 由于 $\delta(X + \rho V) = 0$, X 是一个 Killing 向量场，且其水平协变导数为零。定理 3 的证明至此完成。□

按照定理 3 的类似证明，并运用定义2 ，可得如下推论。

推论 2. 设 (M, F) 是一个紧致各向同性平均 Landsberg 流形，X 是一个保持挠率的对偶迹不变的射影向量场。˜1. 若平均 Ricci 曲率 $R(X, X)$ 负定，则与 X 对应的射影变换约化为恒等变换。˜2. 若平均 Ricci 曲率 $R(X, X)$ 半负定，则 X 是 Killing向量场，且其水平导数为零。

致谢。第二作者谨向ITM（图卢兹数学研究所）致以诚挚谢意，本文的部分内容是在该所撰写的。

参考文献

[1]H. Akbar-Zadeh，芬斯勒空间及其若干推$\acute{e}$广$\acute{e}$，高等师范学院科学年鉴，第 3^{e} 辑，第80卷（1963），1-79。[2] H. Akbar-Zadeh，单位丛$\acute{e}$ 上的射影向量场，纯粹与应用数学杂志，65（1986），47-79。[3]H. Akbar-Zadeh，整体芬斯勒几何入门，北荷兰数学文库，2006。[4] D. Bao、S. S. Chern和Z. Shen，黎曼-芬斯勒几何导论，施普林格出版社，2000。[5] B. Bidabad，关于芬斯勒几何中高斯-博内定理的一则注记，BSG会议论文集，罗马尼亚曼加利亚，16（2009），42–46。[6] Bidabad, B.、Sedeghat, M.K.，芬斯勒曲面上的里奇流，几何与物理学杂志，第129卷，2018年7月，第238-254页。[7] B. Bidabad和M. Sepasi，论芬斯勒几何中的射影不变伪距离，现代物理几何方法国际期刊，第12卷，第04期，（2015），1550043–1550055。[8] B. Bidabad和M. Sepasi，论完备的负常里奇曲率芬斯勒空间，现代物理几何方法国际期刊，第17卷，第03期，（2020），2050041-1,10。[9] X. Cheng和Z. Shen，芬斯勒几何：通过兰德斯空间研究的方法，北京科学出版社；施普林格，海德堡，2012。[10] W. Israel，相对论、天体物理学与宇宙学，多德雷赫特-霍拉，美国波士顿，1973。[11] X. Mo，论芬斯勒度量的非黎曼量H，微分几何及其应用，27（2009），7-14。[12] M. Rafie-Rad，兰德斯空间的特殊射影 Lichnrowicz-Obata 定理，巴黎科学院会议录，I辑，351（2013年），927-930。[13] M. Rafie-Rad、B. Rezaei，论常旗曲率兰德斯度量的射影代数，SIGMA，7（2011），085，12页。[14] M. Sepasi、B. Bidabad，论芬斯勒空间上的射影不变距离，巴黎科学院会议录，I辑，352（2014年），999-1003。

[15] Z. Shen，《喷射与芬斯勒空间微分几何》，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2001年。[16] Z. Shen，具有常旗曲率的射影平坦兰德斯度量，《数学年刊》325（2003），19-30。[17] Z. Shen，兰德斯伯格曲率、S曲率与黎曼曲率，载于：《芬斯勒几何选集》，数学科学研究所出版物，第50卷，剑桥大学出版社，2004年。[18]A. Tayebi，H Sadeghi，E Peyghan，《广义道格拉斯-韦尔空间》，《马来西亚数学科学学会通报》（2）36，第3期，587-594（2013年）。[19] H. Tian，芬斯勒流形上的射影向量场，《中国高校应用数学学报》，施普林格，29（2），2014年，217-229。[20] K. Yano，《李导数理论及其应用》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，（1957年）。

Behnaz Lajmiri[1], Behroz Bidabad[1,3], Mehdi Rafie-Rad[2], Yadollah Keshavarzi[11]
德黑兰理工学院数学与计算机科学系，阿米尔卡比尔理工大学，Hafez大道424号，邮编15914，伊朗德黑兰。[2] 马赞德兰大学数学系，伊朗巴博勒萨尔。[3] 图卢兹数学研究所，保罗·萨巴蒂埃大学，纳博讷路118号，邮编F-31062，法国图卢兹。电子邮箱：behnaz.lajmiri@aut.ac.ir；bidabad@aut.ac.ir；behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr；rafie-rad@umz.ac.ir；y.keshavarz@aut.ac.ir。