arXiv:2304.00497v1 [cs.CE] 2 Apr 2023

用于调控声传播的可变形结构基于水平集的形状优化

Yuki Noguchi[a, b, *], Takayuki Yamada[a, b]

[a]东京大学工学研究生院工程创新研究所战略研究系，日本东京文京区弥生*2-11-16*，邮编*113-8656*。[b]东京大学工学研究生院机械工程系，日本东京文京区弥生*2-11-16*，邮编*113-8656*。

摘要

本文针对含可变形结构的声波传播问题，提出一种基于水平集的形状优化方法。首先，基于坐标变换和欧拉方法，建立含变形结构的声波传播数学模型。接着，构建形状优化问题，并基于形状导数概念进行灵敏度分析。随后，基于水平集的形状与拓扑优化方法框架，构建优化算法。最后，给出二维优化示例，展示所提方法在考虑结构变形的同时，获得具有预期功能的优化设计的有效性。

关键词：形状优化，水平集方法，声波传播，可变形结构，形状敏感性

1. 引言

结构优化涵盖尺寸优化、形状优化和拓扑优化，已广泛应用于各个领域，尤其是结构力学领域。其中，形状与拓扑优化因能够生成可灵活设计、使结构性能最大化的方案，而受到研究人员和工程师的广泛关注。

*通讯作者。电话：+81-3-5841-0294；传真：+81-3-5841-0294。电子邮箱：noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp（Yuki Noguchi）

随着增材制造的兴起，采用这些方法获得的优化结构越来越具有可行性 [1]。增材制造流程可以纳入优化方法 [2], ，从而拓展其实际应用。

自 Bendsøe 和 Kikuchi 的开创性工作以来， [3], 人们提出了多种成熟的方法，包括基于密度的方法 [4, 5]和基于水平集的方法 [6, 7]。最初，这些方法应用于线弹性问题；此后，研究人员将其拓展到更复杂的问题，例如非线性弹性 [8] 和流体动力学 [9]。声波传播也是结构优化的研究对象。例如，B¨angtsson 等人 [10] 提出了一种形状优化方法，用于设计能够高效传声的声号角。近年来，Wadbro 和 Berggren [11] 开展了拓扑优化，以实现声号角的最优设计。D¨uhring 等人 [12] 开展了拓扑优化，以获得能够降低噪声的结构。尽管这些研究关注的是空气传播声，Shu 等人的一项研究 [13]还将空气传播声与结构振荡之间的相互作用纳入了结构优化方法。形状优化 [14, 15]和拓扑优化 [16, 17]也考虑了黏性和热边界层的影响。近年来，声学超材料 [18]因其独特的声学特性而受到研究人员关注，例如负折射率 [19], 使其能够以传统材料无法实现的方式弯曲和聚焦声波。结构优化方法已应用于声学超材料的最优设计 [20, 21, 22]。

上述所有示例都旨在以被动方式最大化声学性能，并假设结构构型固定。然而，结构往往会受到机械载荷、热源和电磁场等外部因素的影响而发生变形。变形结构的声学特性与未变形结构不同，这意味着优化设计在发生变形时可能无法表现出预期的声学性能。因此，设计时必须考虑由外部因素引起的结构变形，以实现结构的稳健功能。相反，结构发生变形时声学性能的变化，也可用于实现一种多功能声学器件，使其能够根据变形状态展现不同功能。一个突出的例子是可编程超材料，

它们通过晶胞变形，在外力作用下呈现经过设计的特性。因此，纳入结构变形的最优设计方法使我们能够实现多种预期的声学性能；与固定几何形状的情形相比，优化设计有望实现更加丰富的功能。

关于结构变形的最优设计，相关研究可见于软体机器人和4D打印领域。已有针对因驱动器或热源而发生变形的结构的拓扑优化方法 [25, 26]。然而，这些方法旨在实现结构的特定变形或运动，并未针对变形几何下其他物理场的响应。目前，考虑结构变形的波传播问题的结构优化方法研究实例仍然有限。Dalklint等人[27] 提出了一种针对声子晶体晶胞的拓扑优化方法，通过单轴和双轴拉伸获得可调带隙结构。为实现可调带隙超材料设计，Luo和Li [28] 提出了一种基于材料场级数展开法的无梯度拓扑优化算法。然而，这些方法均假设声子晶体由无限周期排列的晶胞构成，且从宏观角度看，每个晶胞均匀变形。

在本研究中，我们提出了一种针对含可变形结构的声波传播问题的形状优化方法。与 [27, 28],旨在处理周期结构的方法不同，我们考虑的是由满足特定边界条件的非均匀位移场表示的结构变形。首先，我们基于坐标变换，为含变形结构的声波传播建立了数学模型。基于该模型，可采用欧拉方法下的有限元法（FEM）对变形几何的声学性能进行数值分析。欧拉方法很有用，因为分析变形几何中的波传播时，无需改变网格。此外，灵敏度分析也可以像无变形的情况一样进行。接下来，我们在基于水平集的方法框架下建立形状优化问题。具体而言，我们引入了 Feppon 等人提出的水平集方法 [29]。在他们的方法中，使用反应–扩散方程更新由水平集函数表示的形状，以控制其周长。我们引入该方法，是因为与经典的基于水平集的形状和

拓扑优化中的哈密顿–雅可比方程 [6], 相比，使用反应–扩散方程能够简化有限元法中的数值处理。

在流固相互作用问题中，也有采用坐标变换配合欧拉网格进行数值分析的类似方法[30, 31]。据报道，作为形状优化设计指标的形状导数可以基于该模型推导得出 [32]。然而，目前尚无关于声波传播问题的相关报道，也尚未针对这类问题开展结构优化。

本文其余部分安排如下。第 2 节阐述含可变形结构的声波传播问题，并构建用于有限元法分析的弱形式。在此基础上，第 3 节以一般形式构建形状优化问题。第 4 节详细介绍形状导数的灵敏度分析。第 5 节介绍 Feppon 等人提出的基于水平集的形状与拓扑优化方法 [29] ，用于求解该优化问题。第 6 节列出数值实现方面的若干说明，包括优化算法。第 7 节给出二维数值算例，以验证所提出优化方法的有效性。本文给出了两类问题：最大化管道的传输损失，以及设计声学透镜；并展示了所提出的最优设计方法如何处理结构变形。最后，第 8 节总结全文。

2. 可变形结构中的声波传播

2.1. 声压的数学模型

本节简要介绍声波传播问题的数学模型。

声波传播问题的几何和边界条件如图 1 所示。具体而言，如图 1(a) 所示，我们旨在研究由两个不同区域 Ω_a 和 Ω_b组成的两相材料系统中的波传播。区域 Ω_a 代表固体材料，而区域 Ω_b 对应充气区域。两个区域之间的界面用 Γ表示。在 $\partial\Omega_b$的一部分上施加入口边界条件 Γ_{in}，使入射波朝向该系统传播。随后，入射波穿过两个区域 Ω_a 和 Ω_b，最终到达出口边界 Γ_{out}，该边界与自由空间相连。

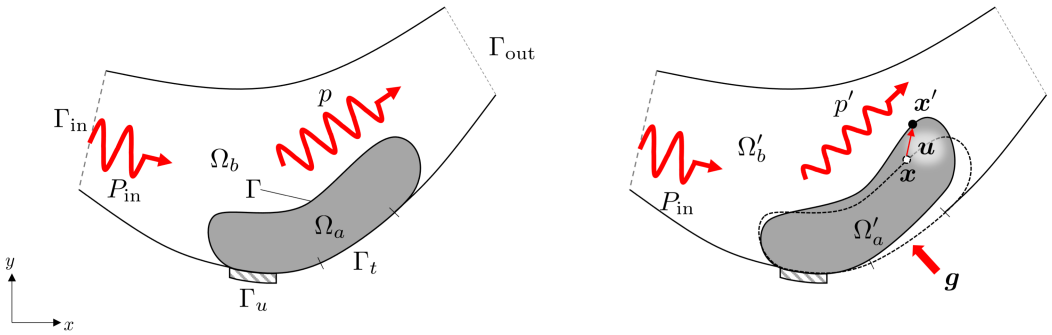


图 1： 几何与边界条件。(a) 未发生变形时的声波传播。(b) 发生变形时的声波传播。

我们考虑角频率为 ω的时谐波传播。此外，我们仅考虑空气和弹性介质中的纵波运动；当两者之间的阻抗比较高时，这一假设是合理的。因此，声波传播问题的边值问题可表述如下：

$$-\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})}\nabla p\right)-\frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x})}p=0\quad\text{in }\Omega_{\text{all}},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{\rho_b}\nabla p\right)+\frac{ik_b}{\rho_b}p=\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}}{k_b}\right)\frac{ik_b}{\rho_b}P_{\text{in}}\quad\text{on }\Gamma_{\text{in}},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{\rho_b}\nabla p\right)+\frac{ik_b}{\rho_b}p=0\quad\text{on }\Gamma_{\text{out}},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})}\nabla p\right)=0\quad\text{on }\partial\Omega_{\text{all}}\setminus(\Gamma_{\text{in}}\cup\Gamma_{\text{out}}),\tag{4}$$

其中，p 表示声压的复振幅。$\Omega_{\text{all}}=\Omega_a\cup\Omega_b$ 表示整个区域，$\boldsymbol{n}$ 为外法向单位向量。质量密度和体积模量分别表示为 $\rho(\boldsymbol{x})$和$K(\boldsymbol{x})$，并且它们根据位置 $\boldsymbol{x}$呈分段分布，如下所示：

$$\rho(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\rho_a & \text{if }\ \boldsymbol{x}\in\Omega_a\\ \rho_b & \text{if }\ \boldsymbol{x}\in\Omega_b\end{cases},\tag{5}$$

$$K(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} K_a & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_a \\ K_b & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_b \end{cases}, \tag{6}$$

其中， ρ_a 和 ρ_b 分别表示固体材料和空气的质量密度。同样地， K_a 和 K_b 分别表示固体材料和空气的体积模量。式（2）表示 Γ_{out}上的入射波条件。k_b 是空气中的波数， P_{in} 是入射波。我们考虑输入具有给定波矢 $\boldsymbol{k}$的平面波 $P_{\text{in}} = \exp（-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}）$。式（3）表示 Γ_{out}上的出口条件。在该边界上施加无反射边界条件。对于Ω_{all} 的其他外边界，即除入口和出口边界以外的边界，施加硬声边界条件，如式（4）所示。

基于公式 (1)–公式 (4)，可以 formulate 出关于 p 的以下弱形式:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\text{all}}} \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} \nabla p \cdot \nabla \tilde{p} - \frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x})} p\tilde{p} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}} \frac{ik_b}{\rho_b} p\tilde{p} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{\text{in}}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}}{k_b} \right) \frac{ik_b}{\rho_a} P_{\text{in}} \tilde{p} d\Gamma \quad \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega_{\text{all}}), \end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\tilde{p}$ 是定义在索 Sobole夫空间 H^1(Ω_{all})中的检验函数。

现在，我们考虑结构域 Ω_a 的变形及其对声波传播的影响。由于变形，Ω_a 中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 在给定位移向量 $\boldsymbol{u}$的作用下移动到新的材料点 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，如图 1(b)所示。变形后的结构域 Ω'_a 可使用恒等映射 Id 表示为 $\Omega'_a = (\text{Id} + \boldsymbol{u})(\Omega_a)$。类似地，界面 Γ 变形为 $(\text{Id} + \boldsymbol{u})(\Gamma)$。

充气区域 Ω'_b 也会因结构变形而发生变形。我们将位移场 $\boldsymbol{u}$ 从 Ω_a 延拓至整个区域 Ω_{all}，并将变形后的充气区域 Ω'_b 定义为 $\Omega'_b = (\text{Id} + \boldsymbol{u})(\Omega_b)$。我们假设 $\boldsymbol{u}$ 足够光滑，从而可以定义逆映射。此外，我们假设边界 $\partial\Omega_b \backslash \Gamma$ 上的 $\boldsymbol{u} = 0$，以确保声学区域的外部边界保持不变。

令 p' 表示变形构型中的声压，该构型采用与式 (2)、式 (3) 和式 (4) 相同的边界条件。由物质坐标定义的 p' 所满足的弱形式

$\boldsymbol{x'}$ 为:

$$\int_{\Omega'_{\text{all}}} \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x'})} \nabla' p' \cdot \nabla' \tilde{p} - \frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x'})} p' \tilde{p} \right) d\Omega(\boldsymbol{x'}) + \int_{\Gamma'_{\text{in}} \cup \Gamma'_{\text{out}}} \frac{ik_b}{\rho_b} p' \tilde{p} d\Gamma(\boldsymbol{x'})$$
$$= \int_{\Gamma'_{\text{in}}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}}{k_b} \right) \frac{ik_b}{\rho_b} P_{\text{in}} \tilde{p} d\Gamma(\boldsymbol{x'}) \quad \forall \tilde{p} \in H^1(\Omega'_{\text{all}}), \tag{8}$$

其中，符号 ∇' 表示相对于 $\boldsymbol{x'}$的空间梯度。变形域包含在整个区域 $\Omega'_{\text{all}} = \Omega'_a \cup \Omega'_e$内。同样，变形后的入口和出口边界分别表示为 Γ'_{in} 和 Γ'_{out}。但是，由于假设位移场 $\boldsymbol{u}$ 在 $\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}$上等于零，这些边界仍保持在其原始位置。

通过引入表示为 $\boldsymbol{F(u)} = \frac{\partial \boldsymbol{x'}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}$的变形梯度，可将式（8）改写为空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 下的形式，其中 $\boldsymbol{I}$ 表示二阶单位张量。随后，式（8）可变换为以下形式:

$$\int_{\Omega_{\text{all}}} \left\{ \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}) \nabla p') \cdot (\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}) \nabla \tilde{p}) - \frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x})} p' \tilde{p} \right\} \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) d\Omega$$
$$+ \int_{\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}}} \frac{ik_b}{\rho_b} p' \tilde{p} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{in}}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}}{k_b} \right) \frac{ik_b}{\rho_b} P_{\text{in}} \tilde{p} d\Gamma, \tag{9}$$

由于假设 $\boldsymbol{u} = 0$在 Γ_{in} 和 Γ_{out}上均成立，式（9）中的边界项与式（7）中的形式相同。此外，值得注意的是，当整个区域 Ω_{all} 内不存在变形（$\boldsymbol{u} = 0$）时，式（9）的解 p' 与式（7）中的 p 相同，因为此时$\boldsymbol{F(u)} = \boldsymbol{I}$ 成立。

2.2. 位移场的边值问题

在第 2.1 节中，我们将位移场 $\boldsymbol{u}$ 视为已知场。本节将定义与变形这一物理情形相对应的 $\boldsymbol{u}$ 边值问题。

作为典型示例，我们考虑在结构域 Ω_a的边界上施加牵引力所产生的变形，如图 1(b) 所示。我们假设 Ω_a 中的固体材料为各向同性线弹性材料。在 Γ_t上施加牵引力，而位移固定

在 Γ_u上。无牵引条件施加于 $\partial\Omega_a \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u)$。于是，我们可以将 $\boldsymbol{u}$ 的边值问题表述如下：

$$-\nabla \cdot \sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega_a, \tag{10}$$

$$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \quad \text{on } \Gamma_t, \tag{11}$$

$$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_a \setminus (\Gamma \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u. \tag{13}$$

此处，$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{C}^{(a)} : \varepsilon(\boldsymbol{u})$表示应力张量，其中 $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = (\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T)/2$ 是应变张量。固体材料的弹性张量记为 $\boldsymbol{C}^{(a)}$。式（11）施加给定牵引向量 $\boldsymbol{g}$对应的牵引边界条件。式（12）给出了$\partial\Omega_a \setminus(\Gamma \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u)$上的无牵引条件。式（13）表示对 Γ_u施加固定约束。与式（10）至式（13）相对应的弱形式如下：

$$\int_{\Omega_a} \sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{g} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} d\Gamma \quad \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in V(\Omega_a), \tag{14}$$

其中，$V(\Omega_a) = \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}} \in \{H^1(\Omega_a)\}^d \mid \tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ 上的} \Gamma_u \right\}$ 表示检验函数 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的函数空间，空间维数为 d。

如第 2.1 节所述，为了构建式（9），需要在 Ω_a 和 Ω_b 中定义位移场 $\boldsymbol{u}$ 。为此，我们引入 Ersatz方法，将空域模拟为具有较小杨氏模量的弹性介质。需要指出的是，在 Ω_b 中定义$\boldsymbol{u}$ 并不局限于此方法；另一种方法是外推式（14）的解，这种方法已用于在全欧拉框架下求解流固相互作用问题 [33]。我们选择 Ersatz方法是因为它简单易用。

在我们的公式中，我们将充气区域 Ω_b 视为空域，并采用弱弹性材料对其进行建模。此外，不仅在 Γ_u 上施加固定约束，也在 $\partial\Omega_b \setminus \Gamma$ 上施加固定约束，以确保 $\boldsymbol{u} = 0$ 在这些边界上。考虑到这些因素，式（14）中的弱形式可修改如下：

$$\int_{\Omega_{\text{all}}} \sigma(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{g} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} d\Gamma \quad \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in W(\Omega_{\text{all}}), \tag{15}$$

其中 $W(\Omega_{\text{all}}) = \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}} \in \{H^1(\Omega_{\text{all}})\}^d \mid \tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \text{在 } \Gamma_u \cup (\partial\Omega_b \setminus \Gamma) \right\}$上。应力张量 $\sigma(\boldsymbol{u})$ 定义为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \varepsilon(\boldsymbol{u})$，其中 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 为弹性张量

其分布为分段常数，定义如下：

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{C}^{(a)} & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_a \\ \boldsymbol{C}^{(b)} = \varepsilon_u \boldsymbol{C}^{(a)} & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_b \end{cases}, \tag{16}$$

其中，ε_u 是用于表示 Ω_b 中弱材料的小正系数，且 $\varepsilon_u \ll 1$。

获取 p' 的过程基于这些公式，由两个阶梯组成。首先，通过在 Ω_{all} 中求解式（15）得到 $\boldsymbol{u}$。接下来，使用所得到的 $\boldsymbol{u}$求解式（9）。

3. 优化问题的表述

本节介绍优化问题的一般框架，旨在优化结构域 Ω_a 的形状，使目标函数 J 最小化；该目标函数用于衡量结构控制声波行为的性能。我们假设，目标函数 J 通过两个状态变量，即声压 p' 和位移向量 $\boldsymbol{u}$，隐式依赖于 Ω_a。为强调这种依赖关系，我们使用记号 $p'(\Omega_a)$ 和 $\boldsymbol{u}(\Omega_a)$。于是，优化问题可表述如下：

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_a} \quad & J\left(p'(\Omega_a), \boldsymbol{u}(\Omega_a)\right) \\ \text{subject to} \quad & \text{Governing equation for } p', \\ & \text{Governing equation for } \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{17}$$

目标函数 J 的详细定义见第 7 节。请注意，即使 J 仅依赖于 $p'(\Omega_a)$，优化问题仍受到关于 p' 和 $\boldsymbol{u}$ 的两个控制方程的约束，这是由于 p' 通过式（9）依赖于 $\boldsymbol{u}$。

4. 灵敏度分析

为了求解式 (17) 中提出的优化问题，需要计算设计灵敏度。为优化结构域 Ω_a 的形状，我们引入形状导数的概念。形状导数表示结构域发生微小变形时目标函数的变化。在本例中，形状

导数衡量界面 Γ 在 Ω_a 与 Ω_b 之间发生微小移动时 J 的变化，同时整个区域 Ω_{all} 保持固定。根据第 7 节中的数值算例，我们仅考虑满足 $d = 2$ 的二维情形。形状变分由向量 $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\Omega_{\text{all}}; \mathbb{R}^2)$ 表示，使得 $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 在 $\partial\Omega_{\text{all}}$ 上成立。随后，J 的形状导数记为 $DJ \cdot \boldsymbol{\theta}$，定义为 [34],

$$J((\mathrm{Id} + \boldsymbol{\theta})(\Omega_a)) = J(\Omega_a) + DJ \cdot \boldsymbol{\theta} + o(\boldsymbol{\theta}), \tag{18}$$

满足 $\lim_{\boldsymbol{\theta}\to\mathbf{0}} \frac{|o(\boldsymbol{\theta}|),\infty}{\|\boldsymbol{\theta}\|_{W^1}} = 0$。$J((\mathrm{Id} + \boldsymbol{\theta})(\Omega_a))$ 表示由向量 $\boldsymbol{\theta}$ 引入形状变分后的目标函数，而 $J(\Omega_a)$ 则表示不含任何形状变分的目标函数。

对于我们在第 7 节中定义的目标函数，我们推导出 J 的形状导数，其形式如下:

$$J(p', \boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_{\text{meas}}} f_1(p') d\Gamma + \int_{\Omega_{\text{all}}} f_2(p') h(\boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}) d\Omega, \tag{19}$$

其中，$\Gamma_{\text{meas}} \subset (\partial\Omega_b \setminus \Gamma)$，且 f_1、f_2 和 h 为实值光滑函数。

为推导式（19）中的 $DJ \cdot \boldsymbol{\theta}$ J，我们采用 C´ea 的方法 [35]，并基于 p' 和 $\boldsymbol{u}$ 的边值问题构建拉格朗日函数。它们的边值问题如下所示，分别对应式（9）和式（15）的弱形式:

$$\left\{-(\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(m)})\nabla)\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(m)}}\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(m)})\nabla p'^{(m)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\omega^2}{K^{(m)}}p'^{(m)}\right\}\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(m)})=0\quad\text{in }\Omega_m, \tag{20}$$
$$p'^{(a)}=p'^{(b)}\quad\text{关于 }\Gamma, \tag{21}$$
$$(\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(a)})\boldsymbol{n}^{(a)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(a)}}\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(a)})\nabla p'^{(a)}\right)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(a)})$$
$$+(\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(b)})\boldsymbol{n}^{(b)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(b)})\nabla p'^{(b)}\right)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(b)})=0\quad\text{on }\Gamma, \tag{22}$$
$$\boldsymbol{n}^{(b)}\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\nabla p'^{(b)}\right)+\frac{ik_b}{\rho_b}p'^{(b)}=\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}}{k_b}\right)\frac{ik_b}{\rho_b}P_{\text{in}}\quad\text{on }\Gamma_{\text{in}}, \tag{23}$$
$$\boldsymbol{n}^{(b)}\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\nabla p'^{(b)}\right)+\frac{ik_b}{\rho_b}p'^{(b)}=0\quad\text{on }\Gamma_{\text{out}}, \tag{24}$$
$$\boldsymbol{n}^{(b)}\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\nabla p'^{(b)}\right)=0\quad\text{on }\partial\Omega_b\setminus(\Gamma\cup\Gamma_{\text{in}}\cup\Gamma_{\text{out}}), \tag{25}$$
$$(\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(a)})\boldsymbol{n}^{(a)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(a)}}\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}^{(a)})\nabla p'^{(a)}\right)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(a)})=0\quad\text{on }\partial\Omega_a\setminus\Gamma, \tag{26}$$

$$-\nabla\cdot\sigma^{(m)}(\boldsymbol{u}^{(m)})=0\quad\text{in }\Omega_m, \tag{27}$$
$$\boldsymbol{u}^{(a)}=\boldsymbol{u}^{(b)}\quad\text{on }\Gamma, \tag{28}$$
$$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}^{(a)})\cdot\boldsymbol{n}^{(a)}+\sigma^{(b)}(\boldsymbol{u}^{(b)})\cdot\boldsymbol{n}^{(b)}=0\quad\text{on }\Gamma, \tag{29}$$
$$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}^{(a)})\cdot\boldsymbol{n}^{(a)}=\boldsymbol{g}\quad\text{on }\Gamma_t, \tag{30}$$
$$\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}^{(a)})\cdot\boldsymbol{n}^{(a)}=0\quad\text{on }\partial\Omega_a\setminus(\Gamma\cup\Gamma_u\cup\Gamma_t), \tag{31}$$
$$\boldsymbol{u}^{(a)}=0\quad\text{on }\Gamma_u, \tag{32}$$
$$\boldsymbol{u}^{(b)}=0\quad\text{on }\partial\Omega_b\setminus\Gamma, \tag{33}$$

其中，索引 $m=a$，b 用于分别表示各个区域 Ω_a 和 Ω_b。用 (m) 表示的量对应于区域 Ω_m中的量。根据 C´ea 的方法 [35], , 拉格朗日函数可表示为

如下:

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{\theta}, \hat{p'}, \hat{q'}, \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}) \\
&= J(\hat{p'}, \hat{\boldsymbol{u}}) \\
&+ \mathrm{Re}\left[\sum_{m=a,b} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Omega_m} \left\{ \frac{1}{\rho^{(m)}} (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)}) \nabla \hat{p'}^{(m)}) \cdot (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)}) \nabla \hat{q'}^{(m)}) \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{\omega^2}{K^{(m)}} \hat{p'}^{(m)} \hat{q'}^{(m)} \right\} \det \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)}) d\Omega \right. \\
&- \frac{1}{2} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Gamma} (\hat{p'}^{(a)} - \hat{p'}^{(b)}) \left\{ \det \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \boldsymbol{n}^{(a)}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(a)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \nabla \hat{q'}^{(a)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \det \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \boldsymbol{n}^{(b)}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(b)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \nabla \hat{q'}^{(b)} \right) \right\} d\Gamma \\
&- \frac{1}{2} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Gamma} (\hat{q'}^{(a)} - \hat{q'}^{(b)}) \left\{ \det \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \boldsymbol{n}^{(a)}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(a)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \nabla \hat{p'}^{(a)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \det \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \boldsymbol{n}^{(b)}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(b)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \nabla \hat{p'}^{(b)} \right) \right\} d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} \left\{ \frac{ik_b}{\rho_b} \hat{p'} - \left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}^{(b)}}{k_b} \right) \frac{ik_b}{\rho_b} P_{\mathrm{in}} \right\} \hat{q'} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \frac{ik_b}{\rho_b} \hat{p'} \hat{q'} d\Gamma \\
&+ \sum_{m=a,b} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Omega_m} \sigma^{(m)}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)}) : \varepsilon(\hat{\boldsymbol{v}}^{(m)}) d\Omega \\
&- \frac{1}{2} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Gamma} (\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \cdot \{ \sigma^{(a)}(\hat{\boldsymbol{v}}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} - \sigma^{(b)}(\hat{\boldsymbol{v}}^{(b)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(b)} \} d\Gamma \\
&- \frac{1}{2} \int_{(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Gamma} (\hat{\boldsymbol{v}}^{(a)} - \hat{\boldsymbol{v}}^{(b)}) \cdot \{ \sigma^{(a)}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)} - \sigma^{(b)}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(b)} \} d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{g} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^{(a)} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left\{ (\sigma^{(a)}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)}) \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^{(a)} + (\sigma^{(a)}(\hat{\boldsymbol{v}}^{(a)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(a)}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}^{(a)} \right\} d\Gamma \\
&\left. - \int_{\partial\Omega_b \setminus \Gamma} \left\{ (\sigma^{(b)}(\hat{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(b)}) \cdot \hat{\boldsymbol{v}}^{(b)} + (\sigma^{(b)}(\hat{\boldsymbol{v}}^{(b)}) \cdot \boldsymbol{n}^{(b)}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}^{(b)} \right\} d\Gamma \right], \qquad (34)
\end{aligned}
$$

其中，界面 Γ 上的边界积分表示传输条件。

在拉格朗日函数 L 的最优点处，以下最优性条

件成立：

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{p}'}, \psi \right\rangle \Big|_{\text{opt}} = 0, \tag{35}$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{q}'}, \psi \right\rangle \Big|_{\text{opt}} = 0, \tag{36}$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle \Big|_{\text{opt}} = 0, \tag{37}$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{\boldsymbol{v}}}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle \Big|_{\text{opt}} = 0, \tag{38}$$

其中，括号表示沿第二个参数方向的偏导数。“opt”表示拉格朗日函数的最优点。式（36）和式（38）中的最优性条件意味着，在 L的最优点处，$\hat{}\ p' = p'(\Omega_a)$和$\hat{}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\Omega_a)$。另一方面，若$\hat{}\ q' = q'(\Omega_a)$和$\hat{}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\Omega_a)$在 L的最优点处满足以下伴随方程，则式（35）和式（37）中的最优性条件成立：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\{ \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla \psi) \cdot (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla q') - \frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x})} \psi q' \right\} \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) d\Omega \\
&= -\int_{\Gamma_{\text{meas}}} \frac{\partial f_1}{\partial p} \psi d\Gamma - \int_{\Omega_{\text{all}}} \frac{\partial f_2}{\partial p} h(\boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}) \psi d\Omega \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_{\text{all}}),
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma(\boldsymbol{\eta}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_{\text{all}}} f_2(p) \left\{ \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial h}{\partial \nabla \boldsymbol{u}} : \nabla \boldsymbol{\eta} \right\} d\Omega \\
&- \int_\Omega \left(\frac{\partial \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} : \nabla \boldsymbol{\eta} \right) \left\{ \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla p') \cdot (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla q') - \frac{\omega^2}{K(\boldsymbol{x})} p' q' \right\} d\Omega \\
&- \int_\Omega \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} \left\{ \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} : \nabla \boldsymbol{\eta} \right) \nabla p' \right\} \cdot (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla q') d\Omega \\
&- \int_\Omega \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}) \nabla p') \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} : \nabla \boldsymbol{\eta} \right) \nabla q' \right\} d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in W(\Omega_{\text{all}}).
\end{aligned} \tag{40}$$

利用这些伴随变量，可推导出以下形状导数[34, 36]:

$$
\begin{aligned}
DJ\cdot\boldsymbol{\theta} &= \left\langle \frac{\partial L(0,p',q',\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{\theta}\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_{m=a,b}\int_\Gamma\left\{\frac{1}{\rho^{(m)}}(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)})\nabla p'^{(m)})\cdot(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)})\nabla\, q'^{(m)})\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{\omega^2}{K^{(m)}}p'^{(m)}q'^{(m)}\right\}\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(m)})(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n}^{(m)})d\Gamma\right. \\
&-\frac{1}{2}\int_\Gamma(\nabla p'^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}-\nabla p'^{(b)}\cdot\boldsymbol{n})\left\{\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(a)})(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(a)})\boldsymbol{n}^{(a)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(a)}}\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(a)})\nabla q'^{(a)}\right)\right. \\
&\left.-\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(b)})(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(b)})\boldsymbol{n}^{(b)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(b)})\nabla q'^{(b)}\right)\right\}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n})d\Gamma \\
&-\frac{1}{2}\int_\Gamma(\nabla q'^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}-\nabla q'^{(b)}\cdot\boldsymbol{n})\left\{\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(a)})(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(a)})\boldsymbol{n}^{(a)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(a)}}\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(a)})\nabla p'^{(a)}\right)\right. \\
&\left.-\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(b)})(\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(b)})\boldsymbol{n}^{(b)})\cdot\left(\frac{1}{\rho^{(b)}}\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(b)})\nabla p'^{(b)}\right)\right\}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n})d\Gamma \\
&+\sum_{m=a,b}\int_\Gamma\sigma^{(m)}(\boldsymbol{u}^{(m)}):\varepsilon(\boldsymbol{v}^{(m)})(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n}^{(m)})d\Gamma \\
&-\frac{1}{2}\int_\Gamma(\nabla\boldsymbol{u}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}-\nabla\boldsymbol{u}^{(b)}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\{\sigma^{(a)}(\boldsymbol{v}^{(a)})\cdot\boldsymbol{n}^{(a)}-\sigma^{(b)}(\boldsymbol{v}^{(b)})\cdot\boldsymbol{n}^{(b)}\}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n})d\Gamma \\
&\left.-\frac{1}{2}\int_\Gamma(\nabla\boldsymbol{v}^{(a)}\cdot\boldsymbol{n}-\nabla\boldsymbol{v}^{(b)}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\{\sigma^{(a)}(\boldsymbol{u}^{(a)})\cdot\boldsymbol{n}^{(a)}-\sigma^{(b)}(\boldsymbol{u}^{(b)})\cdot\boldsymbol{n}^{(b)}\}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n})d\Gamma\right],
\end{aligned}
\tag{41}
$$

其中，我们在 Γ 上设定 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^{(a)}=-\boldsymbol{n}^{(b)}$。

利用 Γ 上的传输条件，形状导数可表示为 Γ 上的跳跃，如下所示:

$$
DJ\cdot\boldsymbol{\theta}=\int_\Gamma[\![V^{(m)}]\!](\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n})d\Gamma, \tag{42}
$$

其中 $[\![]\!]$ 表示 Γ上的跳跃，即 $[\![c^{(m)}]\!]=c^{(a)}-c^{(b)}$。函数 $V_{(m)}$

定义如下:

$$
\begin{aligned}
V^{(m)} = \mathrm{Re}\Bigg[& \left\{ \frac{1}{\rho^{(m)}} (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \nabla p'^{(m)}) \cdot (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \nabla\, q'^{(m)}) - \frac{\omega^2}{K^{(m)}} p'^{(m)} q'^{(m)} \right\} \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \\
& - (\nabla p'^{(m)} \cdot \boldsymbol{n}) \left\{ \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(m)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \boldsymbol{n}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(m)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \nabla q'^{(m)} \right) \right\} \\
& - (\nabla q'^{(m)} \cdot \boldsymbol{n}) \left\{ \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^{(m)}) (\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \boldsymbol{n}) \cdot \left(\frac{1}{\rho^{(m)}} \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \nabla p'^{(m)} \right) \right\} \\
& + \sigma^{(m)}(\boldsymbol{u}^{(m)}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}^{(m)}) \\
& - (\nabla \boldsymbol{u}^{(m)} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \{\sigma^{(m)}(\boldsymbol{v}^{(m)}) \cdot \boldsymbol{n}\} - (\nabla \boldsymbol{v}^{(m)} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \{\sigma^{(m)}(\boldsymbol{u}^{(m)}) \cdot \boldsymbol{n}\} \Big] . \qquad (43)
\end{aligned}
$$

需要指出的是，当结构未发生变形时，若目标函数 $J(p)$ 取决于声压 p，则可在式（41）中令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，从而得到该目标函数的形状导数。

5. 基于水平集的形状与拓扑优化方法

为解决式（17）中定义的优化问题，本文引入一种基于水平集的形状与拓扑优化方法 [6] 。具体而言，本文采用 Feppon 等人 [29] 提出的方法。本节将简要介绍该方法。

该方法遵循标准水平集方法，利用水平集函数 ϕ 表示各材料相。水平集函数用于界定结构域 Ω_a、声学域 Ω_b和界面 Γ，如下所示:

$$
\begin{cases}
\phi(\boldsymbol{x}) > 0 & \text{if } \ \boldsymbol{x} \in \Omega_a, \\
\phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if } \ \boldsymbol{x} \in \Gamma, \\
\phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if } \ \boldsymbol{x} \in \Omega_b.
\end{cases} \qquad (44)
$$

为使优化问题正则化， [29]中提出的基于水平集的优化方法采用周长惩罚。我们修改目标函数 J 以纳入周长控制，通过定义修改后的目标函数 J_τ 来实现，具体如下:

$$
J_\tau = J + \tau |\Gamma|, \qquad (45)
$$

其中， $|\Gamma|$ 表示界面 Γ的周长，由 $|\Gamma| = \int_\Gamma d\Gamma$给出；$\tau$ 是一个正参数，用作控制周长的加权因子。

修正目标函数 J_τ 的形状导数可估算为 [29]:

$$\begin{aligned} DJ_\tau \cdot \boldsymbol{\theta} &= DJ \cdot \boldsymbol{\theta} + \tau \int_\Gamma \kappa(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) d\Gamma \\ &= \int_\Gamma ([\![V^{(m)}]\!] + \tau\kappa)(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) d\Gamma, \end{aligned} \tag{46}$$

其中 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^{(a)}$, κ 表示界面的平均曲率。通过考察式（46），可确定使 J_τ最小化的下降方向为 $\boldsymbol{\theta} = -([\![V_{(m)}]\!] + \tau\kappa)\boldsymbol{n}$。为使式（45）中的目标函数最小化，可通过求解下列 Hamilton–Jacobi方程来更新区域 Ω_a，其中 ϕ 为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - v|\nabla \phi| = 0, \tag{47}$$

其中 t 表示虚拟时间, $v = -([\![V_{(m)}]\!] + \tau\kappa)$表示下降方向。 v 前的负号源于式（44）中 ϕ 的定义，其中 ϕ 在 Ω_a内为正。

为更新区域 Ω_a，本文在 [29], 中引入一种不同于式（47）的更新方案, 该方案基于水平集函数的轮廓。具体而言，在 [29] 中引入满足式（44）的水平集函数，如下所示:

$$\phi = 2\tilde{H}(-d_{\Omega_a}) - 1, \tag{48}$$

其中 d_{Ω_a} 是区域 Ω_a的有符号距离函数，在$\tilde{\Omega}_a$ 内取负值，在 Ω_b内取正值。 H 是参数为 ϵ的平滑 Heaviside 函数，定义如下:

$$\tilde{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < -\epsilon, \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2\epsilon} + \frac{1}{2\pi}\sin(\frac{\pi t}{\epsilon}) & \text{if } |t| \le \epsilon, \\ 1 & \text{if } t > \epsilon. \end{cases} \tag{49}$$

根据式 (48) 中给出的 ϕ轮廓，可得界面 Γ上的 $\nabla\phi = -\frac{2}{\epsilon}\boldsymbol{n}$和 $\nabla^2\phi = -\frac{2}{\epsilon}\kappa$，其中 $\boldsymbol{n}$和 κ分别为法向量和平均曲率。因此，式 (47) 可替换为以下方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{2}{\epsilon}[\![V^{(m)}]\!] + \tau\nabla^2\phi, \tag{50}$$

将 $[\![V^{(m)}]\!]$扩展至整个区域后，式 (50) 可视为一个反应–扩散方程。式 (50) 右侧的反应项使目标函数 J最小化，而扩散项使 $\tau|\Gamma|$最小化。较大的 τ 会使结构更简单、周长 $[29]$, 更短，这与 Yamada 等人提出的基于水平集的拓扑优化方法 $[7]$相同。为确保 J 的最小化不受干扰，我们采用较小的 τ。

除了能够确保结构更简单、周长更短之外，使用式（50）而非式（47）在数值处理方面也有优势。使用非结构网格通过有限元法数值求解式（47）时，需要采用特殊处理方法，例如引入特征线法 $[37]$。然而，通过在 t方向引入有限差分法，式（50）中的反应–扩散方程可使用标准有限元求解器求解。式（50）的离散化将在第 6.3 节中作更详细的说明。

6. 数值实现

6.1. 求取有符号距离函数的数值过程

为保持式（48）中水平集函数的轮廓，需要在优化过程中估算 Ω_a 的有符号距离函数 d_{Ω_a} 。为此，我们提出一种求解 Eikonal 方程 $[38]$近似解的方法。具体而言，我们引入一个标量场 v_e 的辅助边值问题，其形式如下：

$$\begin{aligned} -\alpha_e^2 \nabla^2 v_e + v_e &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ v_e &= 1 \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned} \tag{51}$$

其中， α_e 为正值常数。利用方程（51）的解，可定义标量函数 u_e 如下：

$$u_e = -\alpha_e \log(v_e)(1 - 2\chi_{\Omega_a}), \tag{52}$$

其中，χ_{Ω_a} 是 Ω_a的特征函数。已有证明表明，当 α_e趋近于 0 时， u_e 趋近于带符号距离函数 d_{Ω_a} $[38]$。然而，为避免求解公式（51）中的边值问题时出现数值不稳定性，在有限元分析中，应将 α_e 设置为与单元尺寸同一量级。 α_e 的具体设置见第 7 节。

6.2. 速度场的扩展

为了将速度场 V_n 的定义（50）扩展至整个区域 Ω_{all}，我们引入以下方程 [36]:

$$\int_{\Omega_{\text{all}}} (\alpha_\nu^2 \nabla\nu \cdot \nabla\tilde{\nu} + \nu\tilde{\nu}) d\Omega = \int_\Gamma [\![V^{(m)}]\!] \tilde{\nu} d\Gamma \quad \forall \tilde{\nu} \in H^1(\Omega_{\text{all}}), \tag{53}$$

其中，α_ν 是一个正小参数，其取值为单元尺寸的量级。解 $\nu \in H^1(\Omega_{\text{all}})$ 是整个区域内的扩展速度。

由于难以数值估计 Γ上的跳跃量，因此我们引入近似狄拉克δ函数 $\delta(u_e)$，将式（53）右侧替换为体积分。具体而言，我们使用下列方程的解，而非式（53）：

$$\int_{\Omega_{\text{all}}} (\alpha_\nu^2 \nabla\nu \cdot \nabla\tilde{\nu} + \nu\tilde{\nu}) d\Omega = \int_{\Omega_a} V^{(a)} \delta(u_e) \tilde{\nu} d\Omega - \int_{\Omega_b} V^{(b)} \delta(u_e) \tilde{\nu} d\Omega \quad \forall \tilde{\nu} \in H^1(\Omega_{\text{all}}). \tag{54}$$

这里，$\delta(u_e) = H'(-u_e)$近似表示 Γ上的δ函数；公式 V_m （式（43））中的法向量 $\boldsymbol{n}$ 通过 $\boldsymbol{n} \approx \nabla u_e / \sqrt{|\nabla u_e|^2 + \epsilon_0^2}$ 近似，其中 ϵ_0 取一个较小值，我们将其固定为 1×10^{-3}。

通过有限元法求解式 (54)，即可获得扩展速度场 ν，并利用式 (50) 中给出的反应–扩散方程更新 ϕ。

6.3. 反应–扩散方程的离散化

如前所述，水平集函数通过式 (50) 更新。为便于实际应用，定义设计域 $D \subset \Omega_{\text{all}}$，并在其中求解式 (50)。$D$ 之外的其余区域被视为非设计域，其材料相在优化过程中保持不变。因此，仅在D内进行结构设计优化。

为对 Eq. (50) 在 D 上进行离散，我们对虚拟时间 t 采用有限差分法，对空间采用有限元法。首先，我们以时间步长 Δt 对 t 进行离散。我们将关于 t 的离散化 ϕ 记为 $\phi^{(n)}$，使得 $\phi^{(n)} = \phi(n\Delta t)$，其中 $n \geq 0$ 为整数。使用隐式格式以及通过求解 Eq. (54) 得到的扩展速度场 ν，我们将 Eq. (50) 离散为

$$\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\Delta t} = -\frac{2}{\epsilon}\nu + \tau\nabla^2\phi^{(n+1)} \quad \text{in } D. \tag{55}$$

我们采用反应–扩散方程的无量纲形式，而非 Eq. (55)，并为水平集函数设置边界条件，以便使用有限元法求解。在本研究中，我们考虑关于 $\phi^{(n+1)}$ 的以下边值问题：

$$\begin{aligned}
\frac{\phi^{(n+1)}-\phi^{(n)}}{\Delta t} &= -C\overline{\nu}+\tau L^2\nabla^2\phi^{(n+1)} \quad \text{in } D,\\
\phi^{(n+1)} &= 1 \quad \text{on } \Gamma_{\phi p},\\
\phi^{(n+1)} &= -1 \quad \text{on } \Gamma_{\phi n},\\
\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi^{(n+1)} &= 0 \quad \text{on } \partial D\setminus(\Gamma_{\phi p}\cup\Gamma_{\phi n}),
\end{aligned} \tag{56}$$

其中， L 是设计域 D的特征长度。ν 表示归一化的扩展速度场，其定义如下：

$$\overline{\nu}=\nu\left(\frac{\int_D|\nu\delta(u_e)|d\Omega}{\int_D|\delta(u_e)|d\Omega}\right)^{-1}. \tag{57}$$

C 是用于控制速度大小的正数。为简便起见，在数值算例中我们设 $C=1$ ，尽管在 [29]中， C 是相对于参数 ϵ定义的，该参数对应于式（50）右端的系数。式（56）的第二行和第三行表示用于固定 $\phi^{(n+1)}$取值的狄利克雷边界条件。具体而言，$\Gamma_{\phi p}\subset\partial D$ 是将 ϕ 设为 1 的边界，而 $\Gamma_{\phi n}\subset\partial D$是将 ϕ 设为 -1的边界。在第 7 节所示的数值算例中，我们将 $\Gamma_{\phi p}$ 设为与填充弹性介质的非设计域相接的边界，并将 $\Gamma_{\phi n}$ 设为与填充空气的非设计域相接的边界。式（56）的最后一行表示针对 $\phi^{(n+1)}$的诺伊曼边界条件。不过，也可以采用其他边界条件。

基于式（56），我们构造如下弱形式：

$$\begin{aligned}
&\int_D\left(\frac{1}{\Delta t}\phi^{(n+1)}\tilde{\phi}+\tau L^2\nabla\phi^{(n+1)}\cdot\nabla\tilde{\phi}\right)d\Omega\\
&=\int_D\left\{\frac{1}{\Delta t}\phi^{(n)}\tilde{\phi}-C\overline{\nu}\tilde{\phi}\right\}d\Omega \quad \forall\tilde{\phi}\in V_\phi(D),
\end{aligned} \tag{58}$$

其中， $\tilde{\phi}$表示检验函数，

V_ϕ D D $\Gamma_{\phi p}\cup$( ) $=\{\tilde{\phi}\in H^1$( )$|\ \tilde{\phi}=0$ $\Gamma_{\phi n}\}$

$\tilde{\phi}$ $\phi^{(0)}$

on 是 的函数空间。给定一个表示初始设计的初始水平集函数，我们通过迭代求解式（58）得到 Ω_a 的优化形状。

6.4. 优化流程

优化过程可总结如下:

步骤 1：将迭代次数 n 设为 0，并使用有限元离散计算区域。初始化优化过程中使用的变量，包括初始水平集函数 $\phi^{(0)}$。

步骤 2：细化有限元，使 $\phi^{(n)} = 0$ 的等值面与界面 Γ吻合。

步骤 3：求解式（51）中的辅助边值问题 v_e，以获得式（52）中的有符号距离函数近似值 u_e。使用公式 $\phi^{(n)} = 2\tilde{H}(-u_e) - 1$ 修改 $\phi^{(n)}$，该公式对应式（48）。

步骤 4：使用有限元法求解状态变量方程（式（9）和式（15）），并估算式（19）中的目标函数 J。如果 J 的值已收敛，则结束优化过程；否则，继续执行步骤 5。

步骤 5：使用有限元法求解式 (39) 和式 (40) 中的伴随方程。

步骤 6：使用有限元法求解式 (54)，并将速度场扩展到整个区域。

步骤 7：使用有限元法求解式 (58) 中离散化的反应扩散方程，得到更新后的水平集函数 $\phi^{(n+1)}$。将 n加 1，然后返回步骤 2。

所有有限元法分析均使用 FreeFEM [39], 完成，这是一款开源偏微分方程 (PDE) 求解器。步骤 2 中的重新网格划分过程使用 Mmg [40], 实现，这是一款开源网格生成器。为确定步骤 4 中优化计算的收敛性，将连续两次迭代的目标函数值 J 之差的绝对值进行估算。若经过数次优化迭代后该差值足够小，则终止优化计算。

7. 数值算例

本节介绍两类二维优化示例：案例1和案例 2。在案例1中，我们对

开口管的表面结构进行优化，以最大化其传输损失。在案例 2 中，我们对声学透镜的形状进行优化，以使目标区域内反射波的振幅最大化。我们分别在有变形和无变形的情况下进行优化计算，以考察变形的影响。

在这些算例中，假设 Ω_a 内充满铝，而 Ω_b 内充满空气。铝的质量密度和体积模量分别为$\rho_a = 2643\ [\mathrm{kg/m^3}]$和 $K_a = 6.870 \times 10^{10}[\mathrm{Pa}],$。空气的质量密度和体积模量分别为 $\rho_b = 1.225[\mathrm{kg/m^3}]$和 $K_b = 1.426 \times 10^5[\mathrm{Pa}],$。铝的泊松比设为 0.3。式 (16) 中的小系数ε_u 设为 0.01。

我们已验证了变形条件下声波传播问题数值分析的有效性。在附录 A 中，我们将第 2 节所提优化方法得到的优化设计处的声压分布与采用拉格朗日网格的参考方法进行了比较。

7.1. 案例 *1*：最大化可变形管中的传输损失

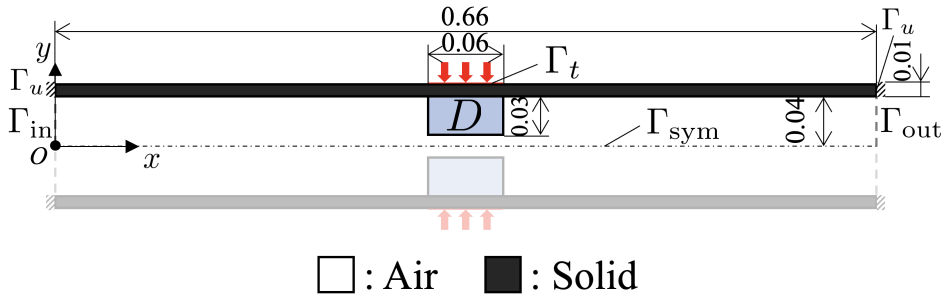


图2： 案例1的几何设置。单位为 [米]。

在本例中，我们旨在最大化弹性材料制成的开口管中传播的声波的传输损失。案例1的几何设置如图2所示，其中，实心区域和空气填充区域分别以黑色和白色表示。蓝色区域表示将要优化的设计域 D 。在入口边界Γ_{in}施加沿 x方向传播、波矢为$\boldsymbol{k} = [k_b, 0]^T$ 、频率为 3000 [Hz] 的入射平面波。在边界 Γ_u施加固定位移约束，在边界 Γ_t施加牵引力 $\boldsymbol{g}$ 。边界条件

并假设设计域 D 的形状关于施加对称条件的虚线 Γ_{sym}对称。因此，在有限元分析中仅考虑整个区域的一半。

用于最大化传输损失的目标函数 J 表示为最小化出口边界 Γ_{out}上 p' 的振幅，如下所示:

$$J = \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} |p'|^2 d\Gamma. \tag{59}$$

我们针对三种不同大小的牵引力 $\boldsymbol{g} = [0, g_y]^T$优化 D 中的结构，以最小化方程（59）中的 J，其中 g_y分别设为 0、 -1×10^8 [Pa], 和 -5×10^8 [Pa], 。控制周长的参数 τ 设为 1×10^{-5}，特征长度为 $L = 0.06$ [m]。对有限元进行细化，使 D 中的每个单元尺寸约为3.0×10^{-3} [m]。平滑 Heaviside 函数 $\tilde{H}$中的参数 ϵ 设为 $\epsilon = 3.0 \times 10^{-3}$。方程（52）中的参数 α_e 设为 $\alpha_e = 4.5 \times 10^{-3}$。此外，使用 $\alpha_\nu = 4.5 \times 10^{-3}$ 来扩展速度场。在这些示例中，完成 50 次迭代后，若连续两次迭代的 J 值之差的绝对值小于 1×10^{-6}，则停止优化计算。

我们首先给出无变形情况下（$g_y = 0$）的结果。图 3 展示了优化结果。图 3(a) 显示了优化过程中J 的变化历程，包括初始结构、即时结构和优化后的结构。如图 3(a) 左上方所示，初始设计设定为使 D 充满空气。图 3(b) 显示了初始设计下充气区域内的声压分布。入射平面波沿管道传播至出口，实现了几乎完全的传输；初始设计的 J 值为 0.04。经过若干次优化迭代后， J 值平稳下降，且 D中出现了四个凸起。优化计算在第 114 次迭代时停止，得到优化设计，如图 3(a) 右上方所示。优化设计中的 J值为 9.77×10^{-6}，明显小于初始值。图 3(c) 显示了优化设计下充气区域内的声压分布。由于入射波在 D中的优化设计上发生反射，声压振幅有所降低。

图 4(a) 显示了优化设计的 J 频率响应

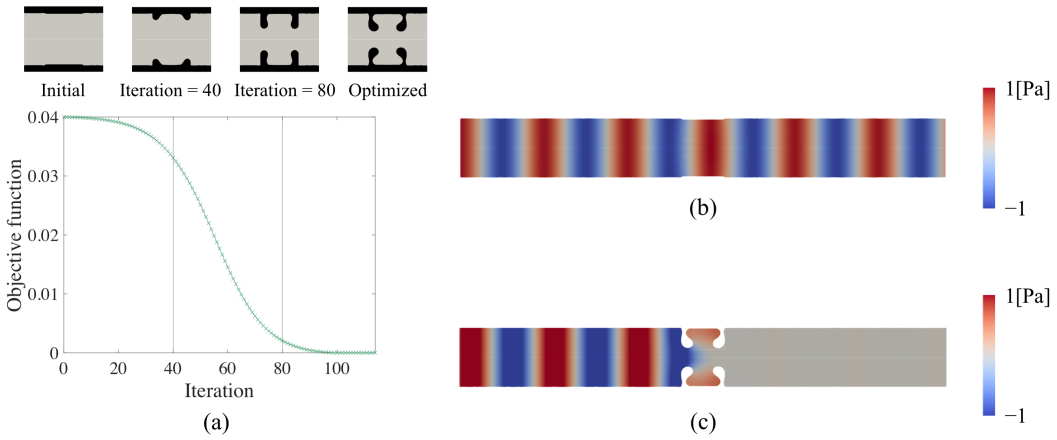


图 3： (a) $g_y = 0$时优化过程中目标函数及结构的变化历程。黑色区域表示固体区域，灰色区域表示充气区域。(b) 初始结构下充气区域中的声压分布。(c) 最优结构下充气区域中的声压分布。

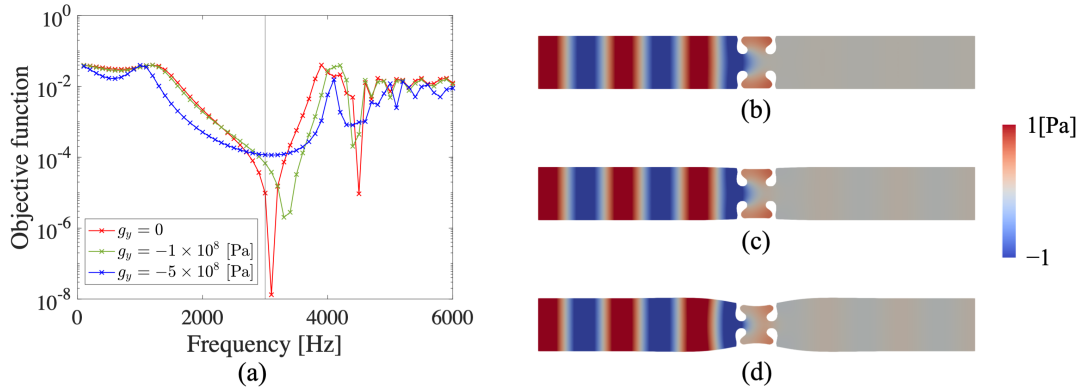


图 4： (a) 优化设计在 $g_y = 0$下的 J 频率响应。红色、绿色和蓝色曲线分别表示 g_y =0 、 $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa], 和 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa], 时的频率响应。(b)–(d) 优化设计在 $g_y = 0$ 下，当 (b) $g_y = 0$、(c) $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa], 和 (d) $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 时， 3000 [Hz] 处的声压分布。

$g_y = 0$。红线对应于未发生变形的情况（$g_y = 0$）。其曲线较为尖锐，峰值频率接近目标频率，表明该结构具有共振特性。实际上，在图中竖线所示的 3000 [Hz], 处， J 的值几乎达到最小值。然而，施加非零的g_y 后，频率响应会发生变化。图4(a)中的蓝线和绿线分别表示 $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa] 和 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa], 情况下的频率曲线。这些曲线在目标频率处的 J 值均大于未发生变形时的值。图4(b)–(d)展示了与这些曲线对应的 3000 [Hz] 处的声压分布。与图4(a)相比，图4(c)和(d)中的出口处观察到了更多透射波。根据这些结果，所得设计在未发生变形时有效，但在发生变形时则无效。

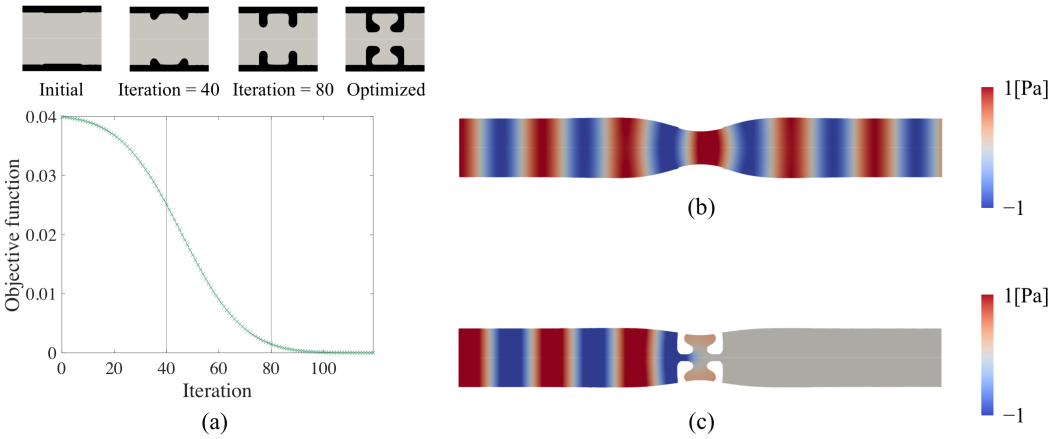


图 5： (a) 当 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 时，优化过程中目标函数及结构的变化历程。(b) 初始结构下充气区域内的声压分布。(c) 最优结构下充气区域内的声压分布。

接下来，我们展示使用 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 得到的优化结果。在这种情况下，由于存在牵引力$\boldsymbol{g}$，固体区域发生了变形，这与前一个示例不同。图 5 展示了优化结果。如图 5(a) 所示，我们使用了与图 3 相同的初始设计。采用初始设计时， J 的值为 0.04。图 5(b) 展示了采用初始设计时的压力分布。尽管变形构

型影响了波传播，尤其是牵引边界 Γ_t 附近的区域，但几乎所有入射波都到达了出口。 J 的值变化趋势以及优化过程中的形状变化与前一种情况相似。经过 119 次迭代后获得了优化设计。 J 的值为 1.03×10^{-8}，小于初始设计。图 5(c) 展示了采用优化设计时的压力分布。值得注意的是，该优化设计成功实现了变形条件下经出口的低传输。

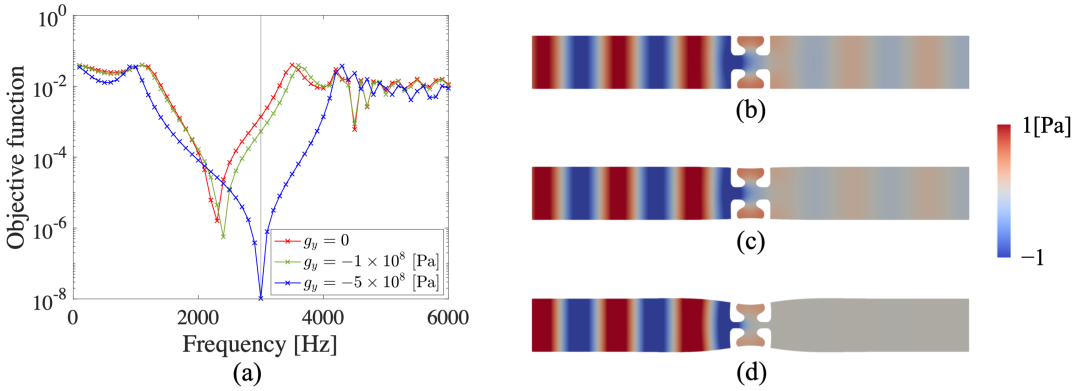
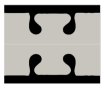
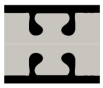
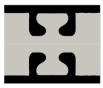


图 6： (a) 优化设计在 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 条件下的 J 频率响应。红色、绿色和蓝色曲线分别表示 $g_y = 0$、 $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa]，和 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa]，条件下的频率响应。(b)–(d) 优化设计在 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 条件下，频率为 3000 [Hz] 时的声压分布，其中 (b) $g_y = 0$，(c) $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa]，，(d) $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa]。

图 6(a) 展示了优化设计在 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 条件下的 J 频率响应。蓝色曲线表明，在目标频率处， J 的值达到最小值。施加不同的牵引条件（$g_y = 0$ 和 $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa]）时， J 的值达到最小值时对应的峰值频率偏离了目标频率，导致该频率处 J 的值增大。如图 6(b)–(d) 所示，在 3000 [Hz]，时的压力分布也呈现出这些趋势，且与未发生变形的优化设计一致。

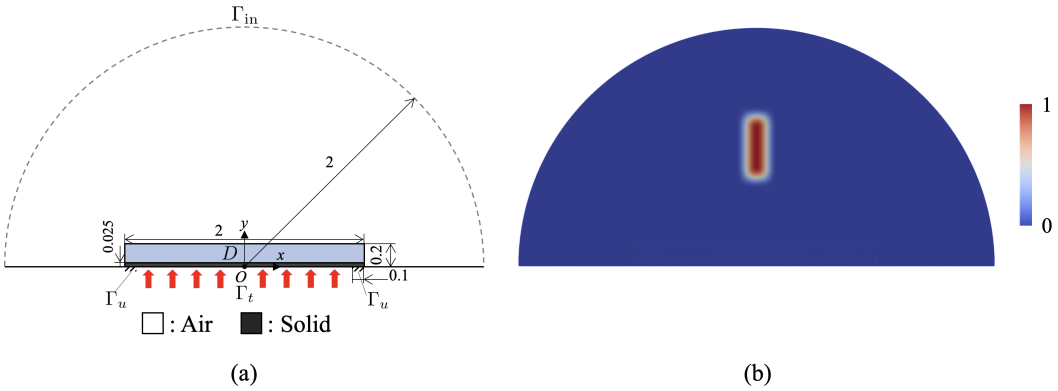
根据这些结果，所得优化设计似乎针对牵引力 $\boldsymbol{g}$作用下的机械状况进行了专门优化。结果

表1： 不同牵引条件下的优化设计及目标函数值。(a) $g_y = 0$的优化设计。(b) $g_y = -1\times10^8$[Pa]的优化设计。(c) $g_y = -5\times10^8$[Pa]的优化设计。

	 (a)	 (b)	 (c)
$g_y = 0$	9.77×10^{-6}	5.66×10^{-5}	1.38×10^{-3}
$g_y = -1 \times 10^8$[Pa]	6.76×10^{-5}	1.05×10^{-6}	5.30×10^{-4}
$g_y = -5 \times 10^8$[Pa]	1.17×10^{-4}	3.25×10^{-5}	1.03×10^{-8}

汇总于表1，其中包括一个针对 $g_y = -1 \times 10^8$ [Pa]的新优化设计目标。对于不同的 g_y取值，分别给出了每种优化设计的 J 值。每种设计的 J 值在三种不同条件下，针对目标值 g_y 均为最小值。因此，所提出的方法成功地为给定的变形条件提供了优化设计。

7.2. 案例*2*：用于调控反射波的可变形声学透镜



(a) (b)

图7： (a) 设计域的设置。单位为 [m]。(b) 用于定义焦点的$\chi(\boldsymbol{x})$分布。

在本例中，我们优化声学透镜的形状，在考虑结构变形影响的同时，使目标点处反射波的振幅最大化。案例 2 的几何设置如图 7 所示。黑色区域表示放置在硬声壁上的声反射结构，该结构因 $\boldsymbol{g}$ 施加于 Γ_t 的牵引力而发生变形，并在 Γ_u处受到固定约束。此处，我们将 $\boldsymbol{g} = [0, g_y]^T$ 设为 $g_y = 1 \times 10^8$ [Pa]。白色区域为空气充填区域，边界 Γ_{in} 为输入边界，入射平面波以 $\boldsymbol{k} = [0, -k_b]^T$ 施加，频率为 2000 [Hz]。图 7 中的蓝色区域为设计域D，透镜的形状将在此处进行优化。用于控制周长的参数 τ 设为 1×10^{-5}，特征长度为 $L = 0.05$[m]。我们对有限元进行细化，使 D 中每个单元的尺寸约为~0.01 [m]。此外，我们将平滑 Heaviside 函数 H 中的 ϵ 设为$\epsilon = 0.01$，以定义 ϕ的轮廓。此外，我们将式（52）中的 α_e 设为$\alpha_e = 0.05$ 和 $\alpha_\nu = 0.02$，以扩展速度场。当经过 150 次迭代计算后，连续两次迭代中 J 的值之差的绝对值小于 5×10^{-4}时，优化计算即停止。

为了优化能够实现声学透镜、聚焦反射波能量的结构，我们考虑最小化以下两类目标函数：

$$J_1 = -\int_{\Omega_{\mathrm{all}}} |p'|^2 \tilde{\chi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) d\Omega, \tag{60}$$

$$J_2 = -\int_{\Omega_{\mathrm{all}}} |p|^2 \tilde{\chi}(\boldsymbol{x}) d\Omega, \tag{61}$$

其中，$\tilde{\chi}(\boldsymbol{x})$ 是一个平滑函数，用于定义 Ω_{all} 中的焦点。声波振幅需要最大化的区域中，该函数取值为 1；其他区域中则取值为 0。 J_1 用于衡量结构发生变形时的性能。另一方面， J_2 用于衡量未发生变形时的性能。为了评估空间坐标$\boldsymbol{x}$处的声波振幅，我们在 J_1 的表达式中引入位移场 $\boldsymbol{u}$ 和雅可比行列式 $\det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$。请注意， J_2 中的 p 表示未发生变形时的声压。

用于优化的 $\tilde{\chi}(\boldsymbol{x})$ 分布如图 7(b) 所示。该分布使用平滑 Heaviside 函数定义，具体表达式如下：

:

$$\tilde{\chi}(\boldsymbol{x}) = \tilde{H}(\frac{x - x_0}{R})\tilde{H}(-\frac{x - x_1}{R})\tilde{H}(\frac{y - y_0}{R})\tilde{H}(-\frac{y - y_1}{R}). \tag{62}$$

˜请注意，若定义中的平滑参数 ϵ趋近于 0，方程（62）中的 $H(\boldsymbol{x})$ 将在 $\boldsymbol{x} \in (x_0, x_1) \times (y_0, y_1)$ 中变为特征函数。此处，方程（62）中使用 $R = 2$ [m] 对坐标进行归一化。为将 $\tilde{\chi}(\boldsymbol{x})$ 定义为平滑分布，我们在方程（62）中设定 $\epsilon = 0.05$，其值大于用于 ϕ轮廓的值。我们设定 $x_0 = -\frac{\lambda}{2}$、$x_1 = \frac{\lambda}{2}$、$-y_0 = \frac{R}{2} - \frac{3}{2}\lambda$ 和 $y_1 = \frac{R}{2} + \frac{3}{2}\lambda$，其中 λ为空气中的波长。

下面给出两个数值算例。第一个算例旨在最小化 $J = J_2$，其中声学透镜的设计经过优化，且不考虑变形的影响。第二个算例旨在最小化 $J = J_1 + J_2$，以优化发生和未发生结构变形时的结构，从而使其在两种状态下均能发挥作用。在此算例中，我们分别使用形状导数 $DJ_1 \cdot \boldsymbol{\theta}$ 和 $DJ_2 \cdot \boldsymbol{\theta}$ 来最小化 J_1 和 J_2。通过两次求解方程（54），分别对它们进行独立扩展。我们将对应于形状导数 $DJ_i \cdot \boldsymbol{\theta}$、$i = 1, 2$ 的扩展速度记为 v_i。随后，我们使用方程（58）并采用修正后的归一化速度 $\nu = \sum_{i=1}^{2} \nu_i (\frac{\int_D |\nu_i \delta(u_e)| d\Omega}{\int_D |\delta(u_e)| d\Omega})^{-1}$ 来更新 ϕ。

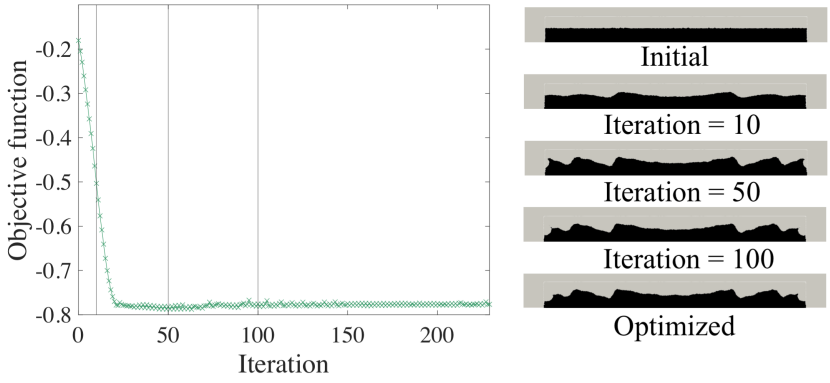


图8: （左）当 $g_y = 0$ 时目标函数的变化历程 J。（右）初始设计、中间设计和优化设计。

我们首先展示 $J = J_2$的优化结果。优化过程中目标函数和结构的变化历程如图所示

图8。初始设计为矩形形状，如图8右侧所示。图9(a)展示了初始设计下声压绝对值的分布。入射平面波在初始结构的顶面发生反射，反射波的能量并未集中在图7(b)所示的目标区域内。初始设计下的 J 值估计为 $J = -0.18$。随着优化的推进，初始平面形状演变为具有多个阶梯的形状，类似于菲涅耳透镜。在第229次迭代时，优化计算停止，得到图8右下方所示的优化设计。图9(b)展示了优化设计下声压绝对值的分布。由于优化设计的凹面作用，目标区域附近的声压绝对值较大，使目标函数提高至 $J = -0.78$。

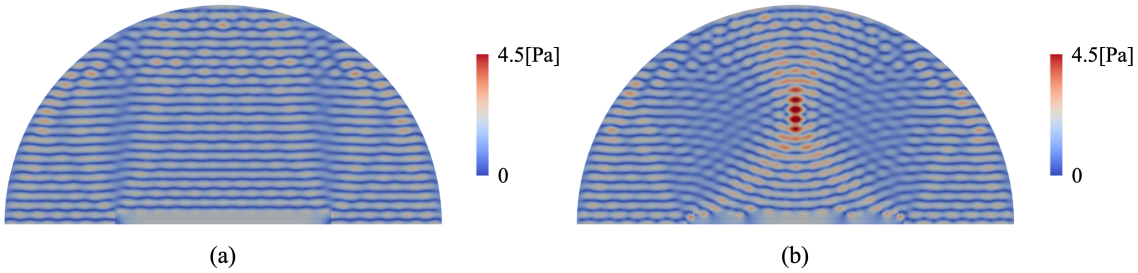


图 9： 图 8 所示 (a) 初始设计和 (b) 优化设计的声压绝对值分布。

然而，对 Γ_t施加牵引力后，优化结构的性能有所下降。图10(a)展示了优化设计在牵引力作用下的变形形状，而图10(b)则展示了变形构型下声压绝对值的分布。优化设计中的每个阶梯形状几乎都是平面的。因此，反射波的能量未能有效集中于目标区域。结果，在变形结构下， J 的值为 -0.22 ，这与未发生变形时 J 的初始值相当。

接下来，我们展示 $J = J_1 + J_2$ 的优化结果。图11展示了目标函数（J_1 和 J_2）及结构的优化历史。初始设计与前一个示例相同，其

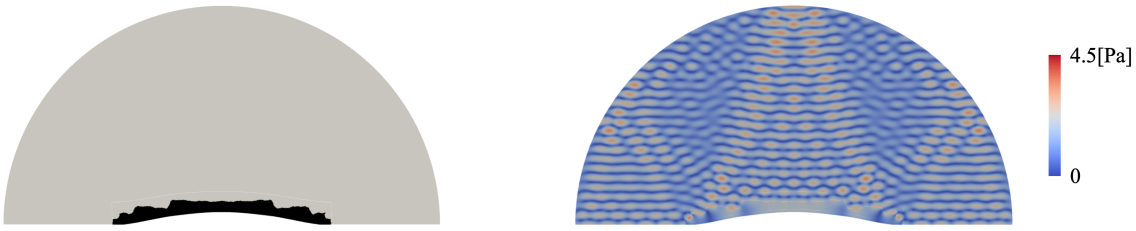


图10： （a）图8中的优化设计在牵引力作用下发生变形。（b）图（a）中变形构型下声压绝对值的分布。

估计目标函数值为 $J_1 = -0.15$ 和 $J_2 = -0.18$。优化在第 159 次迭代时终止，目标函数值改善至 $J_1 = -0.54$ 和 $J_2 = -0.56$。

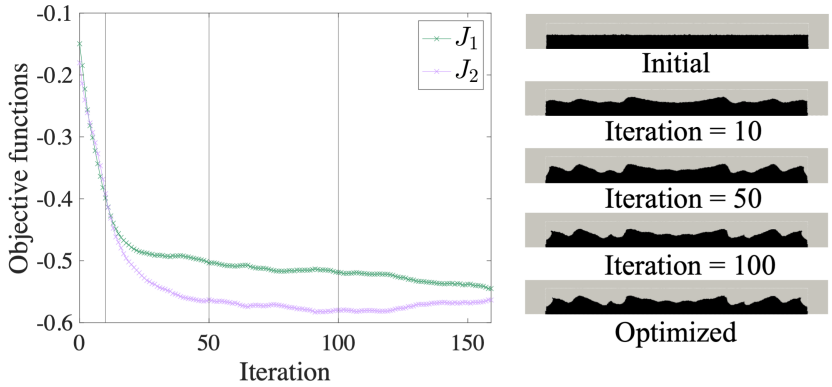
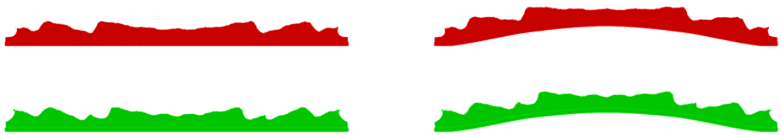


图11： （左）目标函数的变化历程，J_1 和 J_2，其中 $g_y = 1 \times 10^8$ [Pa]。（右）初始、中间阶段和优化后的设计。

图11右下方的优化结构具有多个阶梯，这与未发生变形时的情况相似。不过，图8和图11中各阶梯形状的角度略有不同。图12对比了图8和图11中的优化设计。图12(a)展示了未对结构施加牵引力时的两种优化设计。红色设计表示图8中的优化形状，绿色设计则表示图11中的优化形状。图-



(a) (b)

图12： 图8和图11中优化设计的对比。(a) 未对结构施加牵引力时的优化设计。(b) 变形后的优化设计。红色设计表示图8中的优化形状，绿色设计表示图11中的优化形状。

12(b)展示了牵引力作用下变形后的优化设计。尽管图8中的优化结构具有几乎平坦的阶梯，但图11中的结构具有凹面，这有利于在施加牵引力时聚焦反射波。图13展示了有变形和无变形时的优化形状以及声压绝对值的分布。在无变形的情况下，焦点似乎位于目标区域下方。不过，由于优化结构中有多个阶梯，该区域的压力绝对值仍然大于其他区域。在施加牵引力的情况下，焦点似乎位于目标区域内，从而提高了 J_1的值。这是因为变形后的优化设计也具有凹面。因此，通过考虑结构变形，我们可以实现声学透镜的最优设计。

8. 结论

我们提出了一种基于水平集的形状优化方法，用于设计能够控制声波的可变形结构。主要结果总结如下：

1. 我们提出了一个数学模型，用于描述具有变形几何的声波传播行为。该模型基于欧拉描述，通过使用位移向量场进行坐标变换。为实现这种变换，我们引入了一个

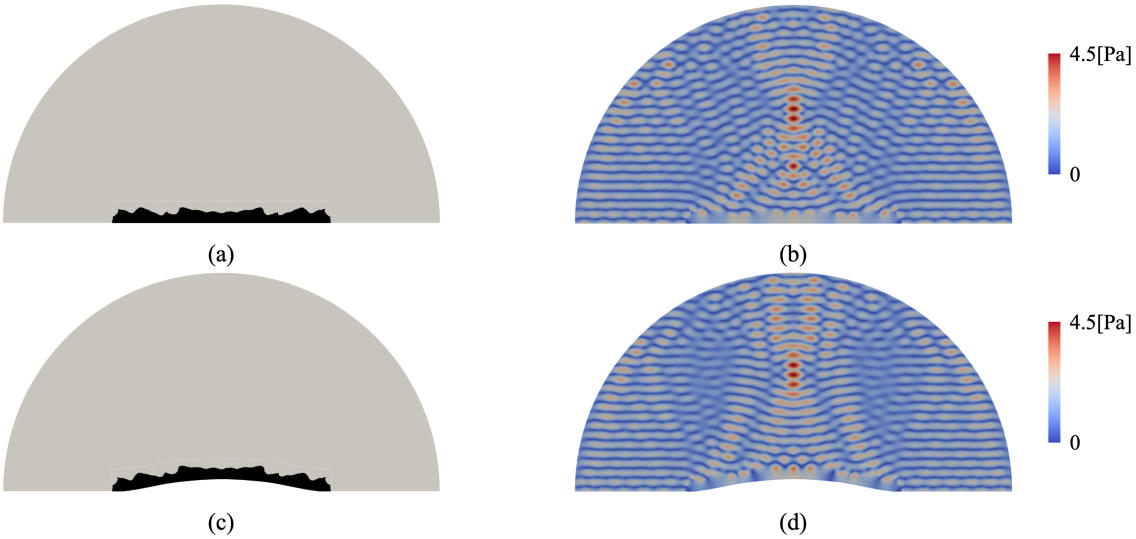


图13：(a) 图11中未发生变形的优化设计。(b) 结构如(a)所示时声压绝对值的分布。(c) 图11中发生变形的优化设计。(d) 结构如(c)所示时声压绝对值的分布。

线弹性模型，并使用Ersatz方法将位移场扩展到充满空气的区域。

2. 我们建立了形状优化问题，其目标函数由声压和位移场定义。3. 我们进行了灵敏度分析，以推导所建立优化问题的形状导数。我们采用 C´ea 的方法推导形状导数，并得到了形状导数的显式公式以及需要求解的伴随方程。4. 我们介绍了一种基于水平集的形状与拓扑优化方法

d

该方法由 Feppon 等人提出，用于求解优化问题。我们还提供了一些关于优化数值实现的说明，包括优化流程。5. 我们提供了两类二维数值算例，以展示

-

展示所提优化方法的有效性。在

第一个示例中，我们优化了可变形声学管的设计，使其在给定牵引力下具有最佳传输损失。第二个示例中，我们优化了声学透镜的形状，使反射波的能量能够聚焦于目标区域，无论是否施加牵引力。第二个示例中，我们优化了声学透镜的形状，使反射波的能量能够聚焦于目标区域，无论是否施加牵引力。

尽管我们的研究重点是声波，但所提出的优化方法也可扩展至电磁波等其他物理领域。为描述结构的变形，我们为简便起见引入了线弹性理论。然而，对于较大的变形，应采用非线性弹性理论。尽管在这类情况下需要使用非线性弹性理论，所提出的优化框架仍然适用，而且形状导数仍可用类似的方法推导。这些扩展将留待我们今后的研究探讨。

附录 A. 变形条件下数值分析的验证

这里，我们通过比较使用两种不同方法得到的 p' 分布，验证用于结构变形条件下声波传播问题的数值分析方法。第一种方法是在有限元分析中使用式（9），这也是优化计算中采用的方法。第二种方法是在有限元分析中结合拉格朗日网格使用式（8）。拉格朗日网格通过将原始网格中的节点按位移场的节点值 $\boldsymbol{u}$移动而得到。我们使用 FreeFEM 中的 `movemesh` 命令 [39]生成该网格。为评估所提出方法的有效性，我们比较第 7 节中案例1和案例 2的优化设计下的压力分布。为区分基于式（9）的所提出方法得到的 p' 与使用拉格朗日网格和式（8）得到的 p' ，我们分别将它们记为 p'_p 和 p'_l。

图 A.14 展示了图 5 中优化设计的声压分布对比。具体而言，图 A.14(a) 显示 Re(p'_p) 的分布，图 A.14(b) 显示施加 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 牵引力时 Re(p'_l) 的分布。虽然未使用拉格朗日网格来获得 p'_p，但 (a) 中的节点是根据节点值移动的

$\boldsymbol{u}$，以便将结果与 (b) 中所示的 Re(p_l') 分布进行比较。(a) 和 (b) 中的压力分布看起来几乎完全相同。图 A.14(c) 表示 $|p_p' - p_l'|$ 的分布，其数值远小于入射波的振幅（1 [Pa]）。$|p_p' - p_l'|$ 的最大值为 1.8×10^{-4} [Pa]。因此，公式 (59) 中目标函数 J 的值在采用 p_p' 时估算为 1.032×10^{-8}，而采用 p_l' 时为 1.036×10^{-8}。这两个值之间的相对误差为 0。393 %，证实了分析的有效性。

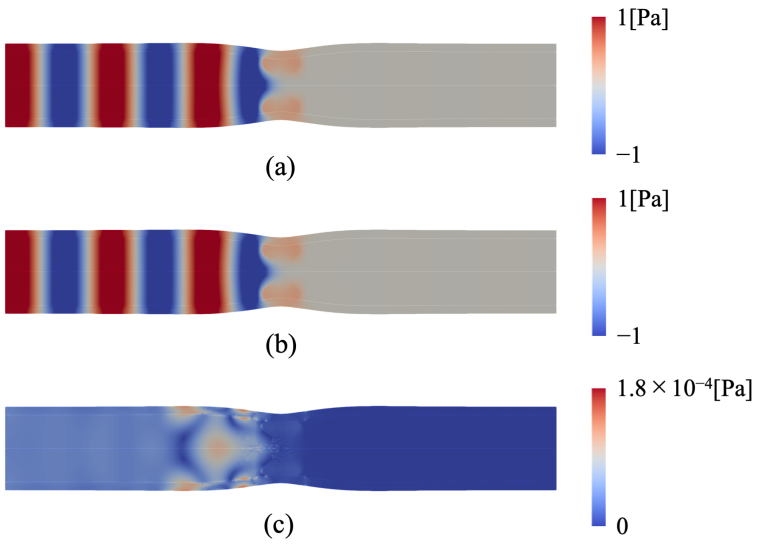


图 A.14： 施加 $g_y = -5 \times 10^8$ [Pa] 时，图 5 中优化结构的声压分布对比。(a) Re(p_p') 的分布。(b) Re(p_l') 的分布。(c) $|p_p' - p_l'|$ 的分布。

同样，我们比较案例 2 中的压力分布。图 A.15(a) 展示了 $|p_p'|$的分布，而 (b) 展示了施加牵引力 $g_y = 1 \times 10^8$ [Pa] 时 $|p_l'|$ 的分布。图 A. (c) 也展示了压力差 $|p_p' - p_l'|$ 15 $3.9 \times$ 的分布。10^{-3} 其最大值远小于入射波的振幅（1 [Pa]），因此 (a) 和 (b) 所示的分布几乎没有差异。此外，我们比较了由 p_p' 和 p_l'估算的公式 (60) 中 J_1 的值。需要注意的是，J_2 并非 p'的泛函，而是 p的泛函。因此，本分析仅以 J_1 的值为目标。

J_1 为 p_p' 时的值为 -0.544961，而 J_1 为 p_l' 时的值为 -0.544956。它们较小的相对误差（9.18×10^{-4}%）证明了该分析方法的有效性。

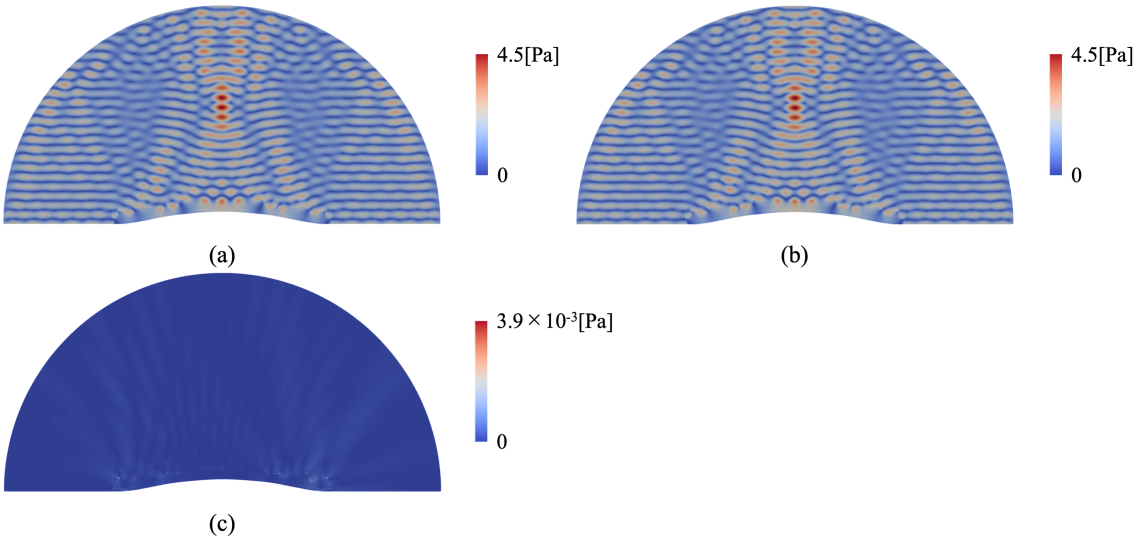


图 A.15： 图11中优化结构在施加 $g_y = 1 \times 10^8$ [Pa]牵引力时的声压分布对比。(a) $|p_p'|$的分布。(b) $|p_l'|$的分布。(c) $|p_p' - p_l'|$的分布。

参考文献

[1] J. Liu、A. T. Gaynor、S. Chen、Z. Kang、K. Suresh、A. Takezawa、L. Li、J. Kato、J. Tang、C. C. Wang 等：《增材制造拓扑优化的当前与未来趋势》，《结构与多学科优化》57（2018）：2457–2483。[2] C. Dapogny、R. Estevez、A. Faure、G. Michailidis：《考虑增材制造工艺所引致各向异性特征的形状与拓扑优化》，《计算方法与应用力学及工程》344（2019）：626–665。

[3] M. P. Bendsøe、N. Kikuchi，采用均匀化方法生成结构最优拓扑

设计，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71 (2) (1988) 197–224。[4] M. P. Bendsøe，将最优形状设计作为材料分布问题，《结构优化》1 (1989) 193–202。[5] M. P. Bendsøe、O. Sigmund、M. P. Bendsøe、O. Sigmund，通过各向同性材料分布进行拓扑优化，《拓扑优化：理论、方法与应用》(2004) 1–69。[6] G. Allaire、F. Jouve、A.-M. Toader，基于灵敏度分析和水平集方法的结构优化，《计算物理学杂志》194 (1) (2004) 363–393。[7] T.Yamada、K. Izui、S. Nishiwaki、A. Takezawa，一种结合虚拟界面能的水平集方法拓扑优化方法，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (45) (2010) 2876–2891。[8] D. Jung、H. C. Gea，非线性结构的拓扑优化，Fi-nite Elements in Analysis and Design 40 (11) (2004) 1417–1427。[9] T. Borrvall、J. Petersson，斯托克斯流体中的流体拓扑优化，International journal for numerical methods in fluids 41 (1) (2003) 77–107。[10]E. B¨angtsson、D. Noreland、M. Berggren，声号角的形状优化，Computer methods in applied mechanics and engineering 192 (11-12) (2003) 1533–1571。[11] E. Wadbro、M. Berggren，声号角的拓扑优化，Computer methods in applied mechanics and engineering 196 (1) (2006) 420–436。[12] M. B. D¨uhring、J. S. Jensen、O. Sigmund，通过拓扑优化进行声学设计，《声音与振动杂志》317 (3) (2008) 557–575。[13] L. Shu、M. Y. Wang、Z. Ma，基于水平集的振动结构声学-结构耦合动力学拓扑优化，《计算机与结构》132 (2014) 34–42。

[14] P. R. Andersen, V. C. Henr´ıquez, N. Aage，考虑黏性和热损耗的微型声学器件形状优化，《声音与振动杂志》447 (2019年) 120–136。[15] G. Tissot, R. Billard, G. Gabard，采用含黏热损耗的亥姆霍兹方程进行声学衬层的最优腔体形状设计，《计算物理学杂志》402 (2020) 109048。[16] R. Christensen，面向助听器应用的管道和狭缝热黏声学拓扑优化，载于：COMSOL会议，2017年。[17] Y. Noguchi, T. Yamada，使用序贯线性化纳维–斯托克斯模型、考虑黏性和热边界层的声学结构拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 394 (2022年) 114863。[18] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, P. Sheng，局域共振声学材料，《科学》289 (5485) (2000) 1734–1736。[19] J. Li, C. Chan，双负声学超材料，《物理评论E》70 (5) (2004) 055602。[20] L. Lu, T. Yamamoto, M. Otomori, T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki，利用局域共振进行负体积模量声学超材料的拓扑优化，《分析与设计中的有限元》72 (2013年) 1–12。[21] X. W. Yang, J. S. Lee, Y. Y. Kim，基于有效质量密度的局域共振声学超材料拓扑优化，以实现带隙最大化，《声音与振动杂志》383 (2016) 89–107。[22] H.-W. Dong, S.-D. Zhao, P. Wei, L. Cheng, Y.-S. Wang, C. Zhang，通过拓扑优化系统地设计和实现双负声学超材料，《材料学报》172 (2019年) 102–120。[23] T. J. Cui, M. Q. Qi, X. Wan, J. Zhao, Q. Cheng，编码超材料、数字超材料和可编程超材料，Light: science & applications 3 (10) (2014) e218–e218。

[24] T. Yang, Z.-G. Song, E. Clerkin, Y.-W.Zhang, J.-H. Sun, Y.-S. Su, L.-Q. Chen, P. Hagedorn，一种可编程非线性声学超材料，AIP Advances 7 (9) (2017年) 095323。[25] M. J. Geiss, N. Boddeti, O. Weeger, K. Maute, M. L. Dunn，经历大变形的四维打印结构的水平集-XFEM-密度拓扑优化，《机械设计杂志》141 (5) (2019年)。[26] Y. Sato, H. Kobayashi, C. Yuhn, A. Kawamoto, T. Nomura, N. Kikuchi，使用物质点法对运动软体进行拓扑优化，Structural and Multidisciplinary Optimization 66 (3) (2023年) 50。[27] A. Dalklint, M. Wallin, K. Bertoldi, D. Tortorelli，通过拓扑优化设计的可调声子带隙材料，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 163 (2022年) 104849。[28] Y. Luo, Y. Li，利用拓扑优化设计软声子晶体的可调带隙，Advanced Theory and Simulations 5 (7) (2022) 2100620。[29] F. Feppon, G. Michailidis, M. Sidebottom, G. Allaire, B. Krick, N. Vermaak，提出一种用于满足几何约束的复合材料磨损的基于水平集的形状与拓扑优化方法，Structural and Multidisciplinary Optimization 55 (2017年) 547–568。[30] T. Dunne，一种用于流固耦合和目标导向网格自适应的欧拉方法，International Journal for Numerical Methods in Fluids 51 (9-10) (2006年) 1017–1039。[31] T. Wick，用于时变问题的全欧拉流固耦合，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 255 (2013年) 14–26。
doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.11.009. URL
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/
S0045782512003477[32] V. Calisti, I. Lucardesi, J.-F. Scheid，黏性不可压缩流体与

以及一种不可压缩弹性结构，arXiv 预印本 arXiv:2210.05850（2022年）。[33]H. Yeo、H. Ki，《涉及线弹性结构的流固耦合问题的统一动量方程方法》，《计算物理学杂志》415（2020）109482。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109482。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120302564[34] G. Allaire、C. Dapogny、G. Delgado、G. Michailidis，《基于水平集方法的多相结构优化》，ESAIM：控制、优化与变分法 20（2）（2014）576–611。 doi:10.1051/cocv/2013年076。[35] J. Cea，《形状的最优设计或识别：代价函数方向导数的快速计算》，《ESAIM：数学建模与数值分析》20（3）（1986）371–402。[36] G. Allaire、F. Jouve、N. Van Goethem，《通过形状优化方法研究脆性材料中的损伤与断裂演化》，《计算物理学杂志》230（12）（2011）5010–5044。[37] G. Allaire、C. Dapogny、P. Frey，《基于水平集的网格演化方法在形状优化中的应用》，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 282（2014）22–53。[38] A. G. Churbanov、P. N. Vabishchevich，《各向异性介质中 Eikonal 方程边值问题的数值解》，计算与应用数学杂志 362（2019年）55–67。[39] F. Hecht，《FreeFEM 的新进展》，《数值数学杂志》20（3–4）（2012）251–265。URL https://freefem.org/[40] C. Dapogny、C. Dobrzynski、P. Frey，《三维自适应区域重新网格剖分、隐式域网格剖分及其在自由边界和移动边界问题中的应用》，《计算物理学杂志》262（2014）358–378。